

階層的リスクパリティ ——理想的なポートフォリオ構築への道——

森 谷 博 之

Heirachical Risk Parity Strategy: Towards an Ideal Portfolio Construction Method

Hiroyuki MORIYA

Strong computation power and the age of big data have enabled us to apply artificial intelligence, machine learning and genetic algorithms to financial markets. In the 1950's, Harry Markowitz invented the portfolio optimization technique that changed the concept of investment opportunities from highest return, ignoring risk, to the balance between risk and rewards. However, this innovative idea has presented many obstacles. But, over the years innovative people have been inventing mathematical solutions for these various constraints. Even though this has been challenging historically, practitioners prefer the simple heuristic methods based on their experience due to difficulty to estimate expected returns and volatility. Finally, new solution is developed and called a Risk Parity policy and enhanced version, Hierarchical Risk Parity introduced by de Prado in 2016.

This paper first introduces the history of Modern Portfolio Theory and Risk Parity portfolio and then explains how to develop hierarchical risk parity. In conclusion, a hedge fund portfolio is constructed by using hierarchical risk parity to compare the results with those of an equally weighted portfolio and a minimum variance portfolio.

Key Words: Machine Learning(機械学習), cluster (クラスター), risk parity (リスクパリティ), portfolio optimization (ポートフォリオ最適化), Quantum Computer(量子コンピュータ)

I はじめに

1952年にMarkowitz [18]により導入されたポートフォリオの最適化という革新的な概念は、その後の金融理論の発展の礎となった。現代ポートフォリオ理論として知られるこの理論は、リスクを無視しながら高い収益を目指すというそれまでの証券投資の目標を、投資対象証券の期待収益率と標準偏差からなる最適化問題としてとらえなおした。証券投資の収益を期待収益率、リスクを収益率の標準偏差として計量化し、資産配分という金融の

意思決定問題をポートフォリオの最適化問題として捉えなおしたこの画期的な手法は平均分散アプローチ (MVO: mean-variance optimization) と呼ばれる。MVO は個別の証券のポートフォリオの最適化にも、資産クラス間のポートフォリオの最適化にも適用可能である。「すべてのたまごを1つのかごにもるな」というリスク分散についての適切な表現とともに研究者、投資家の間に広く浸透した。

しかし、革新的な考え方には障害がつきものである。当時のコンピュータの能力と金融市場のデータ環境は今ほど充実したものではなかった。したがってその導入はゆっくりとしたものとなった。最初の解決策は市場ポートフォリオという概念を導入することによって資本資産価格モデル (CAPM: capital asset pricing model) として sharpe [24] などにより提唱された。そして、運用現場での演算費用を飛躍的に軽減させた。それと同時に幾つかの問題点が指摘され始めた。取引費用、運用ガイドラインと機関投資家固有の制約、関連機関からの規制等である。このような問題を平均分散アプローチに対する制約条件としてとらえることで解決策を見出した。標本共分散行列は、バイアスを伴い非効率的である。また、期待収益率の予測は難しく、必ず予測誤差を伴う。このような明確な問題点を背景に行き過ぎた計量化が批判の対象となり、ベイズ推定に基づいた Black, Litterman [5] [6], ロバスト最適化を用いた手法が導入された。しかし、最適化の過程は複雑になり、また、複雑な制約条件のもとでの二次最適化法はブラックボックス化され、その不透明さがまた批判の対象となった。また、収益率の期待値は時間の経過に対して一意ではなく、変動を伴うという点に関しても依然として解決されないままである。そこで複雑な制約条件をもつ二次最適化の必要のない解決策が模索され、資産均等配分型ポートフォリオ、最小分散ポートフォリオ、そしてリスクパリティポートフォリオが導入された。このような MVO の進化の歴史は多くの研究家の分析対象となり、Steinbach [25], Rubinstein [23], Markowitz [19], Kolm et al. [14] などにより、詳細な調査が行われた。

最近では、計算機パワーの向上とデータ取得の容易性から、人工知能、機械学習、遺伝的アルゴリズムを用いたポートフォリオ最適化の手法が注目を浴びている。これらの手法は古典 MVO とは根本的に異なる。MVO は入力が決定的であることを要求し、決定的な出力を算出する関数であるのに対して、機械学習では入力には質よりも量をもとめ、出力として得られる解はヒューリスティックである。これらの手法の中には階層構造を評価できるアルゴリズムもあり、銘柄間の階層を考慮してポートフォリオの構築が可能である。

量子コンピュータの可能性に期待したアルゴリズムの開発も進んでいる。取引費用を含んだ最適化、階層的リスクパリティを活用したポートフォリオのシミュレーションなどが行われている。Prado [22] は階層的リスクパリティという方法を提案し、マーコウィッツ型のポートフォリオ運用の問題点に解決策を提供している。また、Alipour et al. [1] は階

層のリスクパリティにヒントを得て量子計算を利用した解決策を模索している。

第 II 章では平均分散アプローチを復習し、各種制約条件、共分散行列がもつ問題点を指摘する。

第 III 章では平均分散アプローチ以外のポートフォリオ最適化の手法を説明する。資金をそれぞれの資産に均等に配分する最も単純な方法から、リスクを均等に配分するもの、ポートフォリオの分散を最小化するものなどを紹介する。

第 IV 章では階層的リスクパリティについて説明する。リスクパリティのリスクの意味について説明し、ピアソンの相関係数を加味したリスクの定義を導入し、その実現に階層型クラスタリングが適した方法であることを説明する。凝集型クラスタリング、収益率の距離、収益率の距離の距離を説明して、その解決策として階層的リスクパリティポートフォリオを紹介する。

第 V 章ではヘッジファンドのポートフォリオを構築し、その際に用いた各ポートフォリオ最適化手法を評価検討する。単に過去の成績を用いるのではなく、ノイズを加えたりして、時系列データを生成し、シミュレーションによる評価の精度向上に活用する。

第 VI 章で結論を述べる。

II 平均分散アプローチ

n 個の投資対象となるリスク資産を仮定する。投資資産全体に占める資産 i の割合を ω_i で、ポートフォリオを n 次元のベクトル $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)^\top$ で定義する。各資産の収益率はベクトル $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)^\top$ とし、ポートフォリオの収益率を配分ベクトルと収益率ベクトルの線形関数としてもとめる。

$$r_p = \omega_1 r_1 + \omega_2 r_2 + \dots, \omega_n r_n$$

資産 i の収益率の標準偏差を σ_i 、資産 i と資産 j の収益率の相関係数を ρ_{ij} 、全資産の収益率の $n \times n$ の共分散行列を

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_{nn} \end{pmatrix}$$

とする。ここで、 $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ 、 $\sigma_i^2 = \sigma_{ii}$ である。資産 i と j の共分散は相関係数と標準偏差の積で与えられ

$$\sigma_{ij} = \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} (i \neq j)$$

となる。 Σ は正定値性 (positive definite) とする。したがって、任意の非零ベクトル σ に対して $\omega^\top \Sigma \omega > 0, \omega \neq 0$ が成り立つ。 ω^\top は ω の転置行列である。 Σ は逆行列をもつ可逆行列である。期待収益率を

$$\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)^\top = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$$

とすると、平均分散アプローチは

$$\max \mu^\top \omega - \lambda \omega^\top \Sigma \omega \quad (1)$$

で定式化される。ここで、 $\mu_i = E(r_i)$ 、 λ は投資家のリスク回避度を表し、期待収益とそのリスクの間のトレードオフを定めている。ポートフォリオ ω のリスクは分散

$$V(\omega) = \omega^\top \Sigma \omega$$

または、標準偏差

$$\sigma(\omega) = \sqrt{\omega^\top \Sigma \omega}$$

で与えられる。ポートフォリオの収益率の年率換算した標準偏差はポートフォリオのボラティリティと呼ばれる。このような単純な仕組みでポートフォリオを構築する方法は多くの市場参加者の興味の対象となった。

1 各種制約条件

現代ポートフォリオ理論は直感的には多くの投資家の共感を呼んだが、実際に資産運用に活かそうとすると多くの問題に直面した。その1つが期待収益率の時間均一性である。MVO では入力パラメータは点推定されている必要がある。実際には必ずしもそうとはならず、また分布は強いファットテイルをもつことが Mandelbrot [17]、マルチフラクタル性が Calvet, Fisher [8] により報告されている。収益率が一定でなければ、最適化の解そのものが正しくないことになる。それでは入力と出力の関係が意味をなさない。したがって、多くの投資家は MVO のような解決策ではなく、経験から得られた規則にしたがう運用手法を用いざるを得ないのである。

(1) 取引費用

ポートフォリオの運営上の費用としては、売買手数料、税金、売買スプレッド、非直接費用、そしてスリッページがある。このなかで売買手数料、売買スプレッド、スリッペー

ジは市場の流動性と関係があり、スリッページに関してはそれに加えて、売買のタイミングと取引の大きさに影響され、その費用の予測は難しい。Gârleanu, Pendersen [13] は高い取引費用のもとでのポートフォリオ最適化手法を紹介している。

(2) ポートフォリオ構築時の制約

ポートフォリオ最適化において最も一般的な制約条件は、売りポジションの禁止である。ポートフォリオを構築する際には、証券を買うことから始め、証券の売りは保有している証券に限られるという運用手法である。別の例としては、一部の証券に投資が集中するのを避けるために、資産配分に上限と下限を設ける場合がある。また、このような制限は規制当局からリスク管理の観点から課されることもある。システミックリスクの観点から空売り規制がかかることもある。

ポートフォリオの管理者とその顧客との間に交わされる投資管理契約 (investment management agreement) には多くの投資制限条項が記載されている。そのなかには特定の業界、銘柄に投資制限をかけたり、大型株、小型株、バリュー株、モメンタム株という形で制限をかけたりすることもある。同じような制限はポートフォリオ管理者が自ら設定する場合もある。

このような投資制限は、投資家、管理者、規制当局の管理上の問題から来るのではなく、運用モデルそのものから来る場合もある。最も一般的に考えられるのが、モデル入力の見誤差である。収益率の期待値も標準偏差もその予測は簡単ではない。また、モデルは複数の仮定のもとで成り立ち、いつも正しいとは限らない。したがって、これらの欠点を投資制限という形で補うのである。

取引の執行という観点からこのような制限が必要になるときもある。それはすでに取引費用の節で説明した、流動性の問題と関連している。

リスク管理の観点から同様の制限がかかることもある。特に投資リスクに対する収益が得られるかというリスク寄与度の観点から投資制約が課される場合がある。

これらの制約がどのようにポートフォリオの収益に影響を与えているかという問題も研究の対象となり 2000 年以降活発に議論されている。買いポジションのみという制約の費用が最も大きいことが Clarke et al. [7] により報告されている。また、Tutuncu [27] がシャドーコストの分解、Stubbs, Vandenbussche [26] がモデルインシュアランスに取り組んでいる。

2 予測誤差の問題

MVO アプローチは典型的な決定論的な入力と出力をもつモデルである。しかし、運用の現場では、モデルの入力となる収益率の統計量が確定的とはならないという問題がある。

また、すべての証券に高い流動性があるわけではなく、分析の対象から外れている証券も多いために、期待収益率、標準偏差といった入力変数そのものが手に入らないこともある。したがって、ポートフォリオの運用者にとって MVO に必要となる入力の確保は難しい。そして期待値と実現値との差は、最適化された配分比率に大きな影響を与え問題となるのである。Best, Grauer [3] [4] によると、この推定誤差は期待収益率の方が、共分散行列よりも深刻な影響を与えることが報告されている。そして、その影響はリスク許容度の大きい投資家への影響の方がさらに大きいという問題があり、古くから知られている。Chopra, Ziemba [10] 参照。

(1) 投資制限

不確定な入力値、または予測誤差の問題の解決策の 1 つは、前節で議論した各資産の投資制限である。たとえば、配分比率に上限、下限を設けることなどである。また、予測誤差はリスク管理に影響を与え、リスク管理の観点からの制約が強化されることもある。

(2) 分散基準の多様化

ポートフォリオの集中度合いの基準となる指標を導入して投資判断に活かそうという試みもある。情報理論の関点から資産均等型ポートフォリオは、情報量が低いときの解決策であり、情報量が高ければ投資に集中が起こる。また、運用に VaR を用いるのも分散基準の多様化の 1 つである。

(3) ベイズ、縮小推定の利用

MVO への入力量の推定として多くのベイズ推定、縮小推定に基づくモデルがある。これらの方法はバイアスと分散（バリエーション）の間のトレードオフを利用している。また Black, Litterman [5] [6] は市場の均衡点の加重平均を利用して問題の解決にあたっている。Chen [9], Ledoit, Wolf [16] による縮小推定、最尤推定法などを用いた共分散行列の推定もある。

Ⅲ リスクパリティ

MVO は目的関数式 (1) のもとでポートフォリオの分散を図るが、同じ MVO でもポートフォリオの収益率を最大にして、その分散を目的値以下にしたり

$$\text{目的関数} : \max \omega^\top$$

$$\text{制約条件} : \mu\omega^\top < \sigma_{max}^2$$

ポートフォリオの収益率の分散を最小にするという選択肢もある。

$$\min \omega^\top \Sigma \omega$$

投資資本の額を基準にした分散も考えられる。このように分散の方法にもいろいろあるが、最も基本的なものは収益性とリスクを基準にした分散である。しかし、すでに指摘しているようにこれらの方法には μ と Σ の推定という問題がある。できれば推定や期待値を必要としない方法がもとめられている。本章では代替手法について説明する。

1 資産均等配分型ポートフォリオ

投資資産を最も単純に配分する方法は、投資資産の金額をそれぞれの投資対象資産に均等に割り振る方法である。これは資産均等配分ポートフォリオと呼ばれる。このポートフォリオの構築には収益率の期待値も標準偏差も予測する必要はない。ポートフォリオ ω は

$$\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)^\top = \frac{1}{n}$$

として定義される。DeMiguel et al. [11] は 25 の資産からなるポートフォリオを 3000 カ月にわたりシミュレーションし、シャープレシオを基準として資産均等配分ポートフォリオを評価した。この単純なポートフォリオを上回るパフォーマンスを上げた最適化手法はなかったと報告している。このようなポートフォリオを評価する場合の基準はバイアンドホールド戦略でこの場合には最初の $1/n$ の比率で割り振られた銘柄のポジションを維持し続ける。一般に配分比率は時間の経過とともに資産の価格が変化するために一定とはならない。価格が上昇したものの比率が大きくなり、下落したものの比率は小さくなる。これを配分比率を一定とするためにリバランスを行う。 $1/n$ の比率に戻すためには価格の上昇した資産を売り、価格の下がった資産を買い増すという行為をすることになる。一般にこのようなリバランスは利益を生み出す。Perod, Sharp [21] はこれをダイナミック戦略の 1 つと見なしている。

2 最小分散ポートフォリオ

リスクを x 軸、リターンを y 軸にとった 2 次元平面上において効率的フロンティアは同じリスクで最も高い収益率の証券を結んだ曲線として表される。最小分散ポートフォリオはこのフロンティア上の最も左に位置するポートフォリオである。市場ポートフォリオは y 軸に無リスク金利を切片とする直線と有効フロンティアとの接点に位置する。最小分散ポートフォリオはポートフォリオの分散を最小にするポートフォリオであり、

$$\min \omega_m^\top \Sigma \omega_m \text{ s.t. } \omega_m^\top \mathbf{1} = 1$$

で表される。 $\mathbf{1}$ は入力 g の列ベクトルである。最小分散ポートフォリオの投資比率は

$$\omega_m = \frac{\Sigma^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}^\top \Sigma^{-1} \mathbf{1}} \quad (2)$$

で与えられ、期待収益率は

$$\mu_m = \mu_m^\top \omega_m = \frac{\mu^\top \Sigma^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}^\top \Sigma^{-1} \mathbf{1}}$$

分散は

$$\sigma_m^2 = \omega_m^\top \Sigma \omega_m = \frac{1}{\mathbf{1}^\top \Sigma^{-1} \mathbf{1}}$$

となる。

3 リスク寄与度とリスクパリティ

ポートフォリオの運用にあたってはリスクを取って収益を得るのであるが、投資リスクに見合った収益が得られているかどうかは1つの重要な投資の基準となる。このリスク寄与度の測定には幾つかの方法があるが、一般的には限界リスク寄与度 (MRC:marginal risk contribution) を

$$MRC_i(\omega) = \frac{\partial \sigma(\omega)}{\partial \omega_i}$$

で定義する。これはベクトル $\Sigma \omega$ の i 番目の要素を $(\Sigma \omega)_i = \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} \omega_j$ とすると

$$MRC_i(\omega) = \frac{(\Sigma \omega)_i}{\sigma(\omega)} \quad (3)$$

と書くことができる。 $\sum_{j=1}^n \sigma_{ij} \omega_j$ は資産 i と対となるすべての資産 j について ω_j で重みづけした相関の和である。これを ω で構成されるポートフォリオのリスクで割っている。わずかな ω_i の変化でどの程度ポートフォリオ全体のリスクが変化するかを示している。リスク寄与度 (RC:risk contribution) はその値と ω_i の積としてもとめられる。

$$RC_i(\omega) = \omega_i \frac{(\Sigma \omega)_i}{\sigma(\omega)}$$

となる。そうするとリスク全体に占める資産 i のリスク寄与度をもとめることができ

$$RRC_i(\omega) = \frac{RC_i(\omega)}{\sum RC_i(\omega)} = \omega_i \frac{(\Sigma \omega)_i}{\sigma^2(\omega)}$$

となる。どの資産 i のリスク寄与度も同じにするためにはポートフォリオのリスクを均等に配分する必要がある、それは

$$RC_i(\omega) = \frac{\sigma(\omega)}{n} \quad (4)$$

で与えられる。これは相対リスク寄与度 (RRC:relative risk contribution) が

$$RRC_i(\omega) = \frac{1}{n} \quad (5)$$

であるポートフォリオを意味し、それがリスクパリティポートフォリオであることを示している。Kolm et al. [14] には導出の過程が詳しく要約されている。

IV 階層的风险パリティ

マーコウィッツの現代ポートフォリオ理論の導入により効率的フロンティアの概念が、金融経済学、そして運用の現場においても中心的な柱となった。このような理論が必要不可欠になる理由の1つにデータについての問題がある。データが与えられると、規範的なモデルを仮定して、分析を行う方法と、経験分布を作成して分析をする方法がある。前者は限られたデータでも可能であるが、後者は十分なデータが必要である。

最近では、豊富に手に入るデータをもとに、機械学習が問題の解決策を提供する例が現れている。機械学習はデータを与えて関数の最適化を行いモデルとそのパラメータを決めるのであるが、その際に市場の均衡や情報の効率性をよりどころにするのではなく、データの量をよりどころにしている。データにモデルの特徴を決めさせるという、一見受け入れがたい方法である。しかし、それは理論と計算科学と実験が相互に検証と理解を高めるという方法と何ら変わりはない。ただし、従来型の方法が、原因があり結果が生じるという演繹的な因果関係を重視しているのに対して、機械学習では帰納的で結果と原因の間の相関を重視している。したがって、後者はデータをマイニングしているというイメージが強い。相関関係は必ずしも因果関係を意味するわけではなく、予測の検証が必要になる。

機械学習は予測型のデータマイニングと記述型のデータマイニングに分類できる。予測型はさらに分類問題と回帰問題に分けられ、記述型はクラスター解析と相関分析、次元削減に分けられる。分析の対象が膨大なときに、合理的と思われる変数を選択し、幾つかの仮定のもとに成り立つモデルを用いて観測結果との因果関係をもとめるという方法では膨大な時間と費用が必要になる。一方で得られたデータが十分であれば、そのデータを分割したり、並べ替えたり、必要であれば関数変換することで、相関関係をさがすという方法は時間も費用もそれほど必要ではないという利点がある。このような状況を背景に、Prado [22] は階層的风险パリティという方法を提案し、マーコウィッツ型のポートフォリオ運用の問題点に解決策を提供している。また、Alipour et al. [1] は階層的风险パリティにヒントを得て量子計算を利用した解決策を模索している。本章では、この階層的风险パリティについて概観する。

1 階層型クラスター分析

クラスター分析は汎用的なデータ解析の方法で、似たもの同士を同じグループに分けるという分類法の1つである。データマイニングの主要な道具であると同時に、統計のデータ解析でも一般的な方法である。クラスター分析といっても特定のアルゴリズムを指すわけではなく、さまざまあり、同じアルゴリズムでも目的と用途に応じてその有効性も評価も異なる。大まかには階層型、重心型、分布型、密度型の4つに分類できる。重心型の代表はk-mean法である。これは分析対象のデータが連続値の場合には、それらのデータの中心を算出しながらグループ化していく。カテゴリカルデータの場合には、中央値を用いる。重心型は計算効率がよく、使いやすいが、クラスターの数を事前に決める必要がある。分布型は、EM(the expectation-maximization)アルゴリズムを用いた混合分布型モデルがその代表である。無作為にデータを初期化するが、逐次的にパラメータを調整してクラスターを最適な状態にもっていく。分布型は実データを分析対象とするには仮定が強すぎる。密度型はk-mean法のように重心を設けず、分布も前提とせず、階層もたないが、局所的な密度に注目してデータをグループ化していく。密度型ではノイズとしてクラスターに割り当てられないデータ点が出てしまう。階層型クラスタリングは凝集型と分割型に分かれ、どちらも根、枝、葉からなる木を構築する。これはグラフ理論の木構造と同じもので、樹形図に意味をもたせるのが容易である。階層型の利点の1つとして、相関の距離のユークリッド距離をもとめられるという点にある。これを利用して階層木にリスクの寄与度を反映させることができ、リスクパリティに則ったポートフォリオを最適な状態で構築できる。

(1) 階層型クラスタリング

階層型クラスタリングは木構造を特徴とする。これは階層木とも呼ばれる。木を逆さにして上を根、根は下に向かって枝を出す。下に伸びていかない枝が葉である。葉はデータ点であり、データ点と葉の数は同じである。階層木の構築には大きく2つの方法があり、まず根となる1つのクラスターを定め、これを枝に分割していき、最終的には葉を得る分割型と、それぞれの葉(データ点)を1つのクラスターとして扱い、その葉をもう1つの別の葉、または枝と連結しクラスターを大きくしていき、最終的に頂点となる根を得るボトムアップ型がある。ボトムアップ型では、各々の葉と葉、葉と根、根と根の似たもの同士を連結し、それを逐次的に繰り返す。まず最初に、2つの対となるデータ点のすべての組み合わせを求める。このときのデータ点の数とクラスターの数と同じである。データ数を n とすると、その組み合わせの数は $n(n-1)/2$ である。類似度は距離として定められ、各対のデータ点間の距離が算出される。この距離の最も近いものが新しいクラスターを形成する。新しいクラスターが形成されるとその距離を連結法に基づいて再評価する。対となるオブ

ジェクトのうち小さいものを新たな基準とする場合を single, 大きい方を新たな基準とする場合を complete という。連結の度にクラスターの数は一減少し, クラスターが 1 になるまで, 連結を繰り返す。

(2) 類似度と距離

2 つの確率変数が似ているかどうかは類似度の大きさや距離の長さで表すことができる。

$i, j, k \in S$ を任意として, $d: S \times S \rightarrow R$ が

- 非負性 (正定値性): $d_{ij} \geq 0$
- 非退化性: $d_{ij} = 0 \Leftrightarrow i = j$
- 対称性: $d_{ij} = d_{ji}$
- 三角不等式: $d_{ij} \leq d_{ik} + d_{kj}$

を満たすとき, d は S 上の距離関数, 距離, 計量 (metric) と呼ぶ。距離が定義されていればその空間は距離空間である。

距離の概念としてはユークリッド距離が知られている。点 u と v の間のユークリッド距離は線分 \overline{uv} の長さのことであり, u, v が T 次元ユークリッド空間内の 2 点とすると, その距離関数 d は

$$d(u, v) = d(v, u) = \left(\sum_{t=1}^T (u_t - v_t)^2 \right)^{1/2}$$

で与えられ, 距離ベクトルのユークリッドの長さとして

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_2 = \sqrt{(\mathbf{u} - \mathbf{v})(\mathbf{u} - \mathbf{v})}$$

で表される。ピアソンの相関係数も類似度の尺度としてみることもできる。ピアソンの距離は

$$1 - \frac{(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}})(\mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}})}{\|\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}\|_2 \|\mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}}\|_2}$$

で定義される。Immink, Weber [15] 参照。

(3) 収益率のユークリッド距離

資産 i と j の収益率を r_i, r_j として, この変数を z 変換する。

$$r_i^\dagger = \frac{r_i - \bar{r}_i}{\sigma_i}$$

$$r_j^\dagger = \frac{r_j - \bar{r}_j}{\sigma_j}$$

資産 i, j の $t = 1, \dots, T$ 時点での収益率を r_{it}, r_{jt} で表すと, これらのユークリッド距

離は

$$\begin{aligned}
 d(r_i^\dagger, r_j^\dagger) &= \left(\sum_{t=1}^T (r_{it}^\dagger - r_{jt}^\dagger)^2 \right)^{1/2} \\
 &= \sqrt{\sum_{t=1}^T [(r_{it}^\dagger)^2 + (r_{jt}^\dagger)^2 - 2r_{it}^\dagger r_{jt}^\dagger]} \\
 &= \sqrt{\sum_{t=1}^T (2 - 2r_{it}^\dagger r_{jt}^\dagger)}
 \end{aligned}$$

となる。 $\sum_{t=1}^T (r_{it}^\dagger)^2 = 1$, $\sum_{t=1}^T (r_{jt}^\dagger)^2 = 1$ となるので、したがって

$$dr_{ij} = dr(i, j) = d(r_i^\dagger, r_j^\dagger) = \sqrt{2(1 - \rho_{ij})}$$

ここで ρ_{ij} は r_i , r_j のピアソンの相関係数である。Mantegna, Stanley [20] 参照。2 資産の間の z 変換後の収益率のユークリッド距離は相関の関数として表せる。これを、多資産に広げ、 $dr_{ij}, i, j = 1, \dots, n$ とすると行列の形で表すことができる。これは相関行列を $dr_{ij} = \sqrt{2(1 - \rho_{ij})}$ を用いて関数変換することでもとめられる。これを相関の距離と呼ぶこともある。

(4) ユークリッド距離の距離

dr_{ij} が 2 資産間の局所的な距離を求めているのに対して、そのユークリッド距離を全資産との関係に広げることで、資産 i と資産 j について大域的な距離をもとめることができる。

$$dr_{nij} = \left(\sum_{n=1}^N [dr(n, i) - dr(n, j)]^2 \right)^{1/2}$$

これはリスクパリティの $(\Sigma 1)_i$ の概念に相当する。樹形図は dr_{nij} をもとに形成される。

(5) 配分比率

階層木が構築されると、各々のクラスターの分散を算出する。これをトップダウン型で行っていく。それぞれのクラスターの構成要素が分かっているので、リスクパリティの原則にしたがって、相対リスク寄与度 $1/n$ の原則からそれぞれのクラスターの分散を算出する。これはボトムアップ型といえる。

上から順に対となるクラスターの分散を求める。対となる 2 つのクラスターを 1, 2 とし、それぞれが $n_c, c = 1, 2$ の資産で構成されているとする。それぞれの対となるクラスターの分散 V_c の初期値は

$$V(\omega_c) = \omega_c^\top \Sigma_c \omega_c$$

で得られる。ここで Σ_c , ω_c はそれぞれクラスター c に含まれる n_c 個の資産の共分散行列, 割合である。

$$\omega_c = \frac{\Sigma_c^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}^\top \Sigma_c^{-1} \mathbf{1}}$$

対となる 2 つのクラスターの配分比率は

$$\Omega_c = \frac{V(\omega_c)^{-1}}{\sum_{c=1}^2 V(\omega_c)^{-1}}$$

で与えられる。この配分比率は固定され, さらに下クラスのクラスターの配分比率はこの割合をさらに分割していく。その分割の仕方は最初の対となるクラスターの分割の方法と同じである。

V シミュレーション

階層的リスクパリティによる資産配分の計算は投資対象となる資産の数に大きく左右される。 n 資産の場合, その計算負荷は $O(\log_2 n)$ で表される。したがって, 相関行列があまり大きくならず, コンピュータパワーが低くても可能なシミュレーションの例として, ヘッジファンドの資産配分を考える。このようなシミュレーションのパフォーマンス評価にはベンチマークが必要で, 幾つかの戦略を用いて運用のベンチマークとする。資産配分戦略は静的なものと動的なものに分けられる。静的な戦略のベンチマークとして資産均等配分のバイアンドホールド戦略を用いる。また, 動的な戦略のベンチマークとして同じく資産均等配分を用いる。この際の動的という意味は各資産の投資比率が時間の経過とともに基準値から乖離した場合にその値に戻すリバランスを意味する。この 2 つの戦略をベンチマークとしながら, 幾つかの別な戦略ともパフォーマンスを比べてみる。比較対象となる戦略は資産均等配分, 最小分散ポートフォリオである。したがって 3 つの戦略について動的静的な立場からパフォーマンスを評価する。また, それに加えて, 得られた過去収益率データに, ノイズを加えたりしながら単なるバックテストよりも的確, 公平な比較ができるように試みる。

1 情報提供サイト

ヘッジファンド関連の情報を WEB サイトから簡単に手に入れることができる。1980 年代から情報を提供している会社から, 2000 年代に設立されたものまで多数ある。最近では Wikipedia からでも比較的新しいデータが手に入る。1985 年設立のバークレイ・ヘッジ¹⁾

1) <https://www.barclayhedge.com/barclay-hedge-fund-indices/>

は最も古くからヘッジファンド情報を提供している独立系米国企業の1つである。複数のヘッジファンドインデックスとデータベース、そしてコンサルティング業務を提供している。クレディスイス・ヘッジファンド・インデックス²⁾も老舗の1つである。複数のヘッジファンドインデックス、データベースを提供している。Credit Suisse Group AGの金融商品の1つである。設立当初からフリーで情報を提供しているサイトの中では古い歴史をもつIASG³⁾がある。IASGは20年以上の歴史をもちシカゴをベースに米国に他3カ所の拠点をもち、Registered with the National Futures Association as an Independent Introducing Broker, Commodity Pool Operator (CPO), として Commodity Trading Advisor (CTA) の資格を有する。CTAの過去の収益率はIASGからダウンロードした。

また、日経株価指数、ナスダック総合指数、ドル円の為替レートはFederal Reserve Bank of St.Louisが運営するFRED⁴⁾からダウンロードした。

2 対象資産

ヘッジファンドの定義は時代とともに変化し、その適応範囲は広がりを見せている。最近では機関投資家として分類されている。2017年7月時点での運用残高は3兆ドルを超え、多くのヘッジファンドが米国に本拠地を置いている。起源は1949年に社会学者アルフレッド・ジョーンズが始めたヘッジ付き運用商品とされていた。しかし、最近ではバークシャー・ハザウェイのウォレンバフェットによる、ベンジャミン・グラハムにより提供されていたサービスが今のヘッジファンドに近いという説もある。その際には起源は1920年代にまでさかのぼる。ヘッジファンドはレバレッジの高い運用をしていると思われるがちであるが、Ang et al. [2] による2005年から2010年までの分析で、一般の銀行のレバレッジが8–15倍で平均9.4倍、インベストメントバンクが10–40倍で平均14.2倍に対して、ヘッジファンドは1.5倍から2.5倍で平均2倍程度である。ヘッジファンドの投資対象は多岐にわたり、債券、株式、コモディティから、不動産、デリバティブ、未上場株式などさまざまである。投資戦略でも規制や制約がなく、自由度の高い戦略を取ることができる。私募形式のファンドの形態を取ることが多く、ベンチマークを上回る収益に20%の成功報酬が課されるのも特徴である。取ることができる戦略が豊富であることからその分類も複雑である。大まかには、グローバルマクロ、アービトラージ、リスクニュートラル、ディ

2) <https://lab.credit-suisse.com/en/home>

3) <https://www.iasg.com/en-us/> このサイトは運用停止になった運用口座の情報を公開している。したがって、リーマンショック前後の業界の様子などを知ることができる。また、検索の条件も充実していて、運用開始の年、残高、取引戦略など多数の条件が用意されている。

4) <https://fred.stlouisfed.org/>

ストレス、ロングショート、CTA などに分けられる。グローバルマクロは 1990 年代に活発に活動し、アジア危機の引き金となったと強く批判された。グローバルな経済の動きをみて投資するグループである。アービトラージは裁定取引を得意とする。特に統計的裁定と呼ばれる手法を CTA は好んで用いる。破たんした LTCM はさまざまな裁定取引を得意としていた。リスクニュートラルは理論上のリスクを中立に保ちながら売買を繰り返す手法である。ディストレスは破たん企業などの債権の取引を専門に行うグループである。ロングショートは買いのポジションと売りのポジションの両方をもち極力少ないポジションで収益機会を狙っている。CTA はコモディティトレーディングアドバイザーの略で、ヘッジファンドのなかでは最も流動性の高いクラスである。また、CTA の運用成果は比較的手に入りやすく、他のヘッジファンドクラスほどには秘匿性が高くない。

今回は運用残高が 10 億ドル以上の運用口座を分析の対象とした。検索条件を満たした口座は 10⁵ あり、そのうちリーマンショックよりも十分に前から運用を開始している 8 つを選んだ。最も新しいもので 2003 年 10 月から運用を開始している。したがって、約 15 年分のデータが手に入る。どれもシステム運用を専門としている会社で、事前に決められた運用ルールにしたがって運用をしている会社だけが残るという結果となった。経験と勘に基づく自由裁量による運用会社が含まれていないことは時流を反映している。CTA の運用パフォーマンスは月次のデータとして公表される。

(1) 戦略の特徴

分析の対象となった CTA のプログラム名、投資戦略、運用残高、設立年月日をつぎの表にまとめた。プログラム名はヘッジファンドのもつ異なる運用戦略の名前（仮名）である。プログラムを複数もつヘッジファンドの場合にはプログラムの運用残高の総計がファンド自体の運用残高になる。どの CTA にもみられる特徴は必ずトレンドフォロー戦略、モメンタム戦略をもつことである。トレンドフォロー戦略とは一定期間上がり続ける、または下がり続ける値動きのなかでその方向にポジションを取る戦略である。モメンタム戦略は特定の期間の価格の変化率を指標とする戦略であり、値動きのスピード、加速度を測定してポジションを取る戦略である。カウンタートrendはトレンドの反転から収益を得ようとする戦略である。今回の CTA のなかでカウンタートrendだけを行う会社が 1 社あるが、これは例外中の例外である。QIM は AI、機械学習を用いたパターン認識を用いる（表 1 参照）。

5) SEB Asset Management は設立が 2006 年、QMS Capital Management は 2010 年と比較的新しいために除外した。

表 1 投資戦略

ファンド	戦略	運用残高 (USD M)	設立年月日
Crabel	counter trend 40%, momentum 40%, trend 14%	1699	1998/03
FORT C	counter trend 100%	2896	1993/10
FORT G	trend 45%, counter trend 45%, momentum 10%	1795	2002/10
ISAM	trend 100%	3540	2001/06
Millburn	not available	3725	1977/02
QIM	others 100%	2075	2003/10
Quest	trend 50%, momentum 20%	1464	1999/05
Transtrend	trend 100%	3793	1995/01

投資対象資産として、流動性の高い金融先物に投資する傾向がどの CTA にもある。株、為替、金利の市場で取引して、安定した収益をあげることがもとめられていることが分かる。ISAM は産業用金属 3%、貴金属 3%、その他 43%と公表されていて、その内容については不明である（表 2 参照）。

表 2 投資対象資産

ファンド	株式	為替	金利	エネルギー
Crabel	29	26	25	11
FORT C	18	19	57	3
FORT G	20	20	50	6
ISAM	17	17	8	9
Millburn	24	30	20	9
QIM	26	25	24	15
Quest	19	31	21	14
Transtrend	NA	NA	NA	NA

(2) トレーディングの期間

分析対象となった CTA のうちでトレーディングの期間を公表しているのは 5 社である。Crabel は 1-30 日の期間の投資が 88%を占め、日中の取引は 14%である。カウンタートレンド中心の FORT C のプログラムは 5-8 週と割と長めである。ISAM は 1-3 カ月と 8 社の中で最長である。QIM は 1-50 日間である。Quest は数時間から 1 年超とあり平均 7 日間となる。

(3) 統計データ

取得した過去データは 2003 年 10 月より 2018 年 7 月までであり、2018 年 9 月 27 日までに手に入った全 CTA に共通する期間のデータである。各 CTA に対して 178 データ点

ある。年間収益率は公表されている月次の収益率から累積リターンを計算し、その対数収益率を計算し、その平均値を 12 倍して年率収益率に換算した。また、対数収益率の標準偏差を $\sqrt{12}$ 倍して年率換算の標準偏差、ボラティリティをもとめた。(1)/(2) はリスク調整後の収益率である⁶⁾。CTA の収益率の分布の形状を把握するために歪度と尖度を、またその時系列の特性を見るために自己相関係数を加えた。参考のために同期間の日経株価指数、ナスダック総合指数、ドル円、ユーロドルの為替レートの結果を記載した⁷⁾（表 3 参照）。

表 3 CTA, 資産の統計量

ファンド	年率換算収益率 (1)	ボラティリティ (2)	(1)/(2)	歪度	尖度	自己相関係数
Crabel	0.060	0.080	0.75	-0.13	1.16	0.06
FORT C	0.089	0.103	0.86	-0.22	0.81	-0.03
FORT G	0.098	0.140	0.70	-0.08	1.27	-0.03
ISAM	0.082	0.178	0.46	0.48	1.36	0.12
Millburn	0.044	0.119	0.37	-0.14	0.13	0.06
QIM	0.082	0.097	0.85	-0.19	1.03	0.09
Quest	0.077	0.190	0.41	0.34	0.88	-0.09
Transtrend	0.060	0.119	0.51	0.16	-0.27	-0.09
日経 225	0.055	0.189	0.29	-0.52	8.10	-0.04
Nasdaq	0.093	0.162	0.57	-0.29	7.58	-0.06
USDJPY	0.001	0.096	0.01	-0.31	4.48	-0.02
EURUSD	-0.001	0.099	-0.017	0.11	2.76	0.00

各 CTA の過去の収益率は、Eling [12] で報告されているような自己相関、ファットテイルに代表されるような収益率をもつヘッジファンドとは異なることが分かる。

それぞれの CTA の運用成果の推移をインデックス化してつぎの図 1 に示した⁸⁾。

各 CTA との相関関係を見るために、ピアソンの相関係数 (numpy.correcoef) を用いた。一般に CTA 間の相関関係は小さいと思われるが、かなり似ているのが分かる⁹⁾。他の CTA と相関関係が低いのは Crabel と QIM だけである。各 CTA の他 CTA との相関平均は約 0.5 近辺だが、Crabel と QIM は低い（表 4 参照）。

表 5 は各 CTA と日経株価平均 (N225)、ナスダック総合指数 (NASDAQ)、ドル円 (US-

6) 一般に投資対象とされるものは 0.3-1 までで、平均は 0.5 近辺である。

7) 年率換算収益率、ボラティリティの計算に必要な標本標準偏差は pandas.DataFrame の mean と std 関数を用いた。

8) 日経平均株価、ナスダック総合指数、ドル円、ユーロドルの為替レートに関しての価格の推移をインデックス化したグラフを補遺 C(図 C1) に示した。

9) 同じような戦略をとっているからこのようになるのではなく、収益の出方が似ているだけである。

図 1 CTA の過去のパフォーマンス

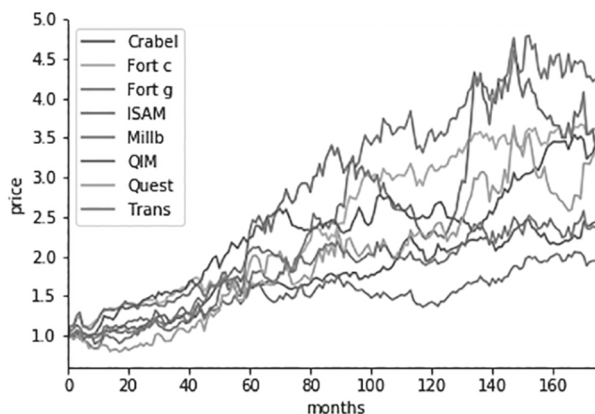


表 4 CTA 間の相関

ファンド	Crabel	FORT C	FORT G	ISAM	Millburn	QIM	Quest	Transtrend
Crabel	1.00	0.01	0.09	0.11	0.05	0.15	0.23	0.17
FORT C	0.01	1.00	0.91	0.39	0.55	0.00	0.33	0.44
FORT G	0.09	0.91	1.00	0.52	0.60	0.05	0.45	0.52
ISAM	0.11	0.39	0.52	1.00	0.63	0.03	0.58	0.68
Millburn	0.05	0.55	0.60	0.63	1.00	0.05	0.57	0.75
QIM	0.15	0.00	0.05	0.03	0.05	1.00	0.10	0.15
Quest	0.23	0.33	0.44	0.58	0.57	0.10	1.00	0.62
Transtrend	0.10	0.10	0.52	0.68	0.10	0.62	0.15	1.00
平均	0.22	0.45	0.51	0.49	0.52	0.19	0.48	0.54

表 5 CTA と市場との相関

ファンド	N225	NASDAQ	USDJPY	EURUSD
Crabel	-0.06	-0.06	-0.05	-0.01
FORT C	0.04	0.11	-0.22	0.18
FORT G	-0.16	-0.07	-0.33	0.10
ISAM	-0.19	-0.20	-0.17	-0.09
Millburn	0.00	0.08	-0.10	0.06
QIM	-0.14	0.02	-0.11	0.04
Quest	-0.08	-0.06	-0.20	0.03
Transtrend	0.02	0.11	-0.02	0.02

DJPY) とユーロドル (EURUSD) の為替レートとの相関を見ている。CTA 間の相関と比べるとかなり相関が小さい。

3 シミュレーションの方法

過去データを用いたバックテスト、シミュレーションの際には、資産均等配分、最小分散ポートフォリオ、階層的リスクパリティ戦略を用いた。

各 CTA の運用成績は月次の収益率という形で与えられているので、まずこの収益率 (r_t) を価格の時系列 ($\prod(1 + r_t)$) に変換した。つぎにこの価格の対数収益率から各種統計量を算出した。in sample で指定した期間のデータを用いて期間を out of sample で指定した期間ずらしながら標本分散、標本共分散行列を求めた。シミュレーションには Python3, scikit learn を用いた。

① 資産均等配分 (EWP : equally weighted portfolio)

最も単純に、各期間の資産配分は総資産を CTA の数で割った値を用いた。この場合には $1/n = 0.125$ である。

② 最小分散ポートフォリオ (IVP : inverse variance portfolio)

最小分散ポートフォリオの投資比率は式 (2) を用いる。

③ 階層的リスクパリティ

in sample の期間の標本分散、標本共分散行列を用いて、配分比率は式 (3), (4), (5) を満たす解を数値的に求める。階層構造の構築、配分比率の算出には Prado [22] を参考にした¹⁰⁾。

データ生成の方法に関しても Prado [22] を参考にした。

シミュレーション 1 : 元データ 月次と対数収益率から in sample 期間 (表 7, 8 参照) のデータを用いて共分散行列 (pandas.cov) を算出し、それをもとに資産配分比率を算出した。まず out of sample 期間の最初に資産配分に応じて各 CTA に資産を配分し月末に値洗いを行った。つぎに、新たに始まる out of sample 期間の初日に直近の in sample 期間のデータを用いて再度共分散行列を算出し、配分比率を再計算した。その結果から前期の配分比率との差の調整 (リバランス) を行った。その際に生じる損益を加味して値洗いを行った。この操作を 1000 回繰り返した。

シミュレーション 2 : 元データ+乱数 各 CTA の月次の対数収益率の標準偏差 $\times 0.1$ の標準偏差、平均値ゼロをもつ正規乱数を発生させ、これを月次の対数収益率にノイズとして加えてシミュレーションを行った。その他の内容についてはシミュレーション 1 と同じである。各 CTA のシミュレーション 2 (動的分析) における統計量を補遺 B に記載した。

10) 提供されているコードは Python version 2.x 用である。最新の version2.7 では一部動かない部分がある。Python 3.x ではさらに修正の箇所は増える。

4 シミュレーションの結果

(1) シミュレーション 1

各 CTA の過去収益率 178 カ月分を用いて算出した資産均等配分ポートフォリオ (EWP), 最小分散ポートフォリオ (IVP) と階層的风险パリティ (HRP) の配分比率を算出した。どちらも Crabel と QIM という平均相関の低いマネージャーに配分を大きくしているのが特徴である。HRP の方が配分の仕方がばらついている (表 6 参照)。

表 6 資産配分

ファンド	EWP	HRP	IVP
Crabel	0.125	0.34	0.26
FORT C	0.125	0.10	0.15
FORT G	0.125	0.05	0.08
ISAM	0.125	0.04	0.05
Millburn	0.125	0.09	0.11
QIM	0.125	0.22	0.17
Quest	0.125	0.03	0.04
Transtrend	0.125	0.10	0.11

静的戦略 上述の配分比率を最初の売買で調整し、その後は一切調節をせずに満期までポジションを保持したシミュレーションが静的戦略である。in sample を設定してあるのはダイナミック戦略の結果と直接比べられるように、シミュレーションの売買の開始日を in sample の標本共分散行列の推定日数分ずらした結果である。

in sample を 24 カ月とすると疑似トレードはリーマンショック前の 2005 年 10 月から開始されるが、in sample を 60 カ月とすると 2008 年 10 月のリーマンショックのすぐあとから疑似トレードが開始される。この影響は結果からみてかなり大きいことが分かる。また、この 2 つの結果は共分散行列を後付けで計算している (表 7 参照)。

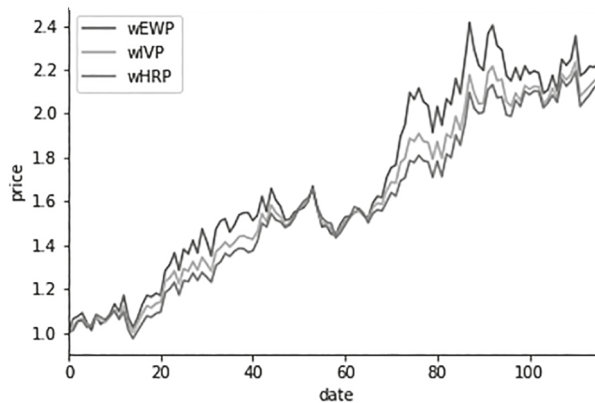
表 7 静的戦略の結果

in sample	out of sample	戦略	収益率 (1)	ボラティリティ (2)	(1)/(2)	歪度	尖度
24	-	EWP	0.074	0.098	0.75	0.01	-0.65
24	-	IVP	0.070	0.076	0.92	-0.08	-0.21
24	-	HRP	0.068	0.069	0.98	-0.12	0.00
60	-	EWP	0.054	0.137	0.40	0.02	-0.62
60	-	IVP	0.052	0.107	0.49	-0.10	-0.29
60	-	HRP	0.049	0.099	0.50	-0.13	-0.15

in sample の期間に収益性が大きく影響されている。

ダイナミック戦略 つぎの図 2 は各戦略の運用成果の推移をインデックス化して表している。

図 2 ポートフォリオ戦略のパフォーマンス



in sample は共分散行列の推定に用いる期間，out of sample はそれから得られた配分比率を見直す期間である。したがって，out of sample が 12 カ月ということは 12 カ月毎にリバランスを行っていることを意味する。EWP のパフォーマンス¹¹⁾ は多くの期間で他を上回っていて，つぎに IVP が続く。HRP のパフォーマンスが総じて低い。つぎの図 3,4 は in sample が 60 カ月，out of sample を 12 カ月とした場合の配分比率の推移を示している。図 3 は IVP で図 4 が HRP である。HRP の配分比率の推移と IVP の配分比率の推移は大きくは似ているが，HRP の方が配分比率の集中が起きやすい。IVP も HRP もボラティリティの低い資産の割合が多くなるので，その資産の収益率が高ければ，ポートフォリオの収益率は上がり，低ければ下がる。

つぎの表 8 は動的シミュレーションの結果である。静的戦略と同様に in sample の期間により結果が大きく違う。静的戦略と比べると in sample が 24 のときの IVP と HRP の結果が見劣りする。その原因はリーマンショックと推定できる。in sample が 60 では結果はほぼ同じである。

11) $(1 + r)^n$, r : 月次のリターン, n : データの数

図 3 資産配分の推移 IVP

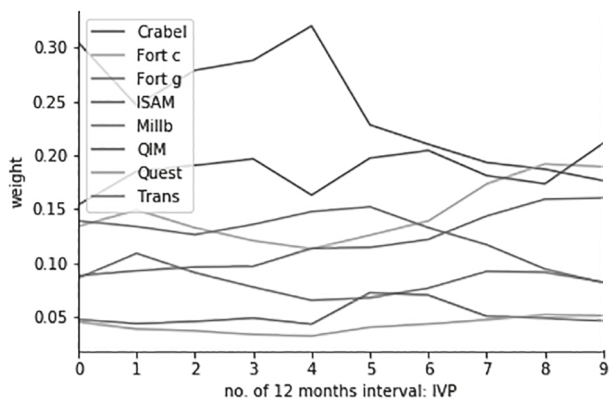


図 4 資産配分の推移 HRP

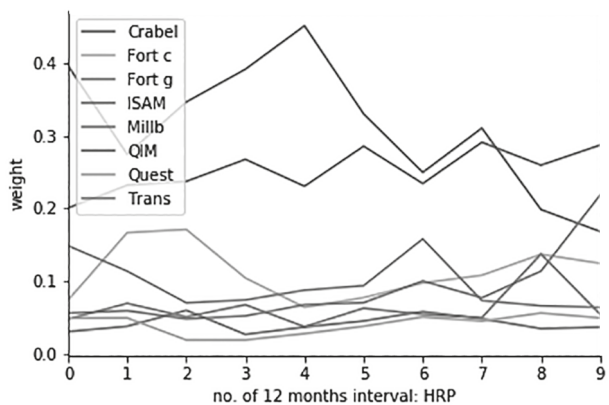


表 8 シミュレーション 1 動的戦略

in sample	out of sample	戦略	収益率 (1)	ボラティリティ (2)	(1)/(2)	歪度	尖度
24	12	EWP	0.074	0.098	0.75	0.01	-0.45
24	12	IVP	0.069	0.080	0.85	-0.02	-0.20
24	12	HRP	0.067	0.077	0.85	-0.07	-0.18
60	12	EWP	0.054	0.137	0.40	0.02	-0.61
60	12	IVP	0.053	0.107	0.49	-0.09	-0.21
60	12	HRP	0.052	0.100	0.52	-0.20	0.07

リバランスの効果をみるために、補遺 A (図 A1) に in sample, out of sample を 12 としたシミュレーションの結果を示した。また、その結果を考察するために、補遺 A (図 A2) は CTA の収益率の 12 カ月移動ボラティリティの推移をグラフ化した。

(2) シミュレーション 2

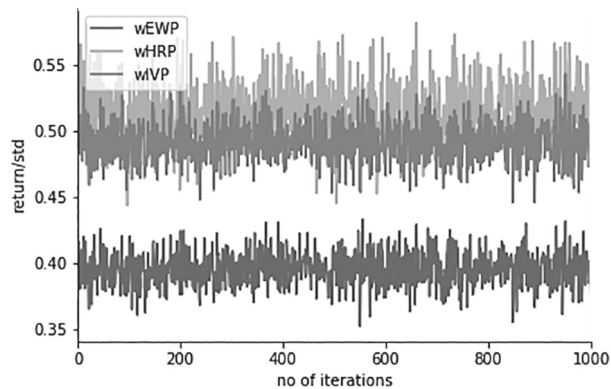
つぎの表 9 はシミュレーション 2 の方法で算出した結果である。収益率に無作為にノイズを加えた。

シミュレーション 1 の動的戦略とほぼ同じ結果である。違いは in sample が 60 の HRP である。図 5 をみてほしい。

表 9 シミュレーション 2 動的戦略

in sample	out of sample	戦略	収益率 (1)	ボラティリティ (2)	(1)/(2)	歪度	尖度
24	12	EWP	0.074	0.098	0.75	0.01	0.65
24	12	IVP	0.069	0.080	0.85	-0.05	-0.15
24	12	HRP	0.067	0.077	0.85	0.02	-0.30
60	12	EWP	0.054	0.137	0.40	0.02	0.62
60	12	IVP	0.053	0.106	0.49	-0.20	0.07
60	12	HRP	0.051	0.100	0.52	0.09	0.21

図 5 シミュレーション 2 動的戦略



EWP, IVP, HRP の戦略の結果の違いがよく分かる。EWP のリスク調整後のリターンが低いが、これはボラティリティが低く、収益率が高い CTA もボラティリティが高く、収益率の低い CTA も同じに扱っているためと思われる。一方、IVP と HRP ではボラティリティの低い CTA に多く投資される。したがって、これらの CTA のリターンが高ければ、結果は良くなる。各 CTA とその他の市場の収益率とボラティリティの関係をグラフ化し補遺 A(図 A3) に示した。

参考のために日経株価平均、ナスダック総合株価指数、ドル円、ユーロドルから構成されるポートフォリオでシミュレーション 2 を実行し、結果を補記 C に示した。

VI 考 察

選択された CTA のほぼすべてのシミュレーションにおいて、EWP は収益性が高いがボラティリティが大きいという結果になった。IVP の収益は EWP よりも低いボラティリティも低いという結果になった。HRP は収益は低いボラティリティは最も低く、リスク調整後の収益は HRP が 1 番良いという結果になった。どのシミュレーションにおいても HRP のリスク調整後の収益率が最も良いという事実を考察すると幾つかの原因が推察される。

① 収益率にかかわらずポートフォリオ内のボラティリティの低い（リスク寄与度の低い）資産の投資の割合が高くなる。

② ボラティリティの低い資産の実現収益率が高ければ、ポートフォリオのリスク調整後の収益率は高くなる。

③ リスク寄与度と収益率との関係の予測能力にポートフォリオの収益率が大きく左右される。

また、リバランスの効果も考察に値する。資産の価格が上昇すればその資産はリバランスの調整で売られる。そのときにボラティリティが低ければ、調整の度合いは減り、ボラティリティが高ければ、調整の度合いは大きくなる。リバランスの効果は、リバランスの期間のボラティリティの変動に左右される。また、資産のリバランス期間の収益率にも左右される。リバランスのときにボラティリティが高ければ、売る割合は高くなるがそのときに価格が上昇していればリバランスの効果は上がるが、価格が買い値よりも低くなっていればその行為は損切となってしまう、リバランスの効果を損なう。

階層的リスクパリティの効果はボラティリティ、リスク寄与度、収益率の変動性に左右され、これらの関係に何らかの安定性がない限り、このポートフォリオ最適化の有効性は失われる。今回は運用残高の高い CTA を選んで階層的リスクパリティを採用し、良い結果が得られた。しかし、階層構造を用いたことがどのような影響をもたらしているのか、収益率の平均値、標準偏差、共分散行列のゆらぎから来る性質を的確にとらえて収益化したのかなど、より詳しく分析をしなければ分からない問題がある。

補遺 A CTA, その他の市場の収益率の分析

図 A1 リバランスの効果をみる：in sample 12 カ月；ou of sample 12 か月

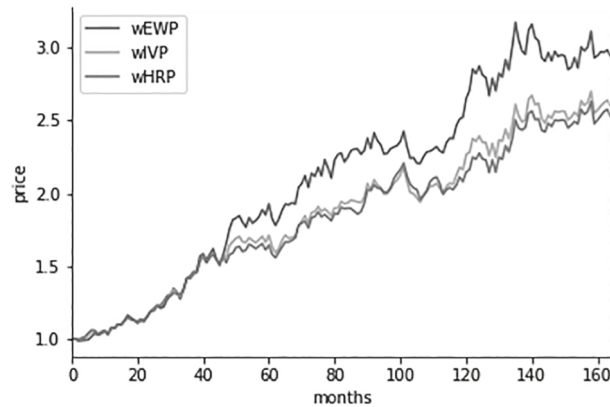
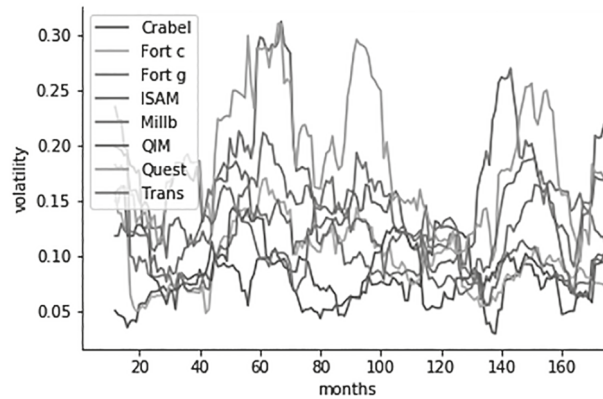
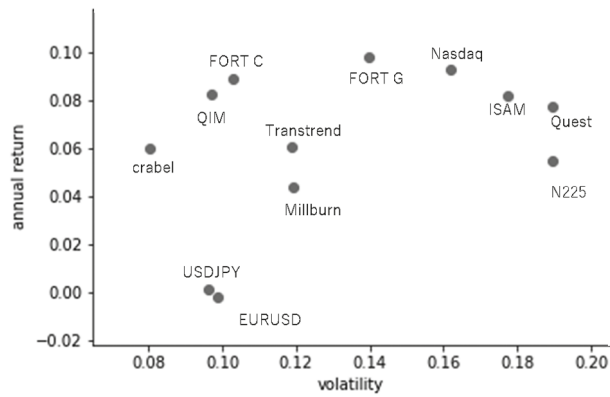


図 A2 CTA のボラティリティの 12 カ月移動平均



ボラティリティの大きな CTA はボラティリティの変動も大きい。

図 A3 CTA, その他の市場の収益率とボラティリティの関係



補遺 B シミュレーション

シミュレーション 2 (動的分析) における各 CTA の収益率の統計量

表 B シミュレーション 2 (動的分析) の結果

ファンド	収益率の平均値	収益率のボラティリティ	収益率の平均値/ボラティリティ
Crabel	0.061	0.080	0.76
FORT C	0.092	0.103	0.89
FORT G	0.103	0.140	0.73
ISAM	0.085	0.178	0.47
Millburn	0.045	0.120	0.38
QIM	0.085	0.098	0.86
Quest	0.080	0.191	0.42
Transtrend	0.062	0.119	0.52

補遺 C 4 資産ポートフォリオ

日経株価平均，ナスダック総合指数，ドル円，ユーロドルのポートフォリオの例。

図 C1 その他の市場の価格の推移

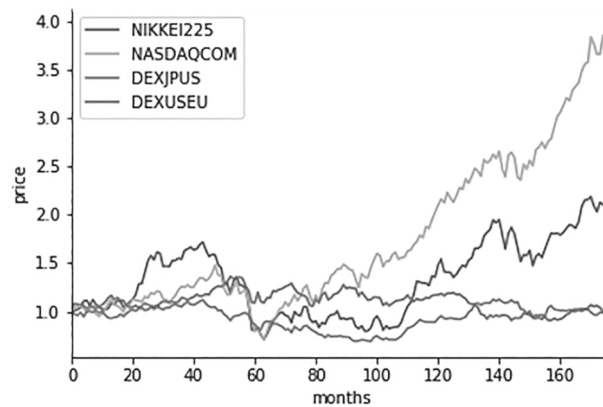


図 C2 シミュレーション 2：リバランス付き

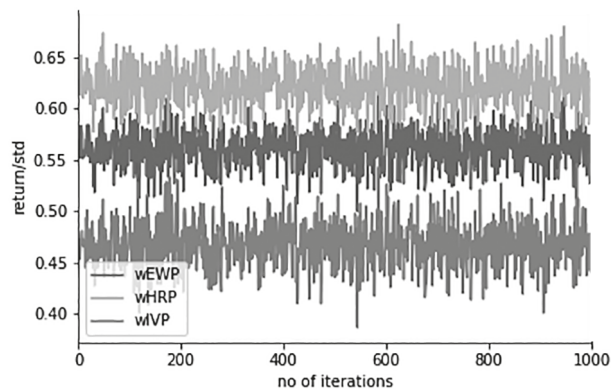
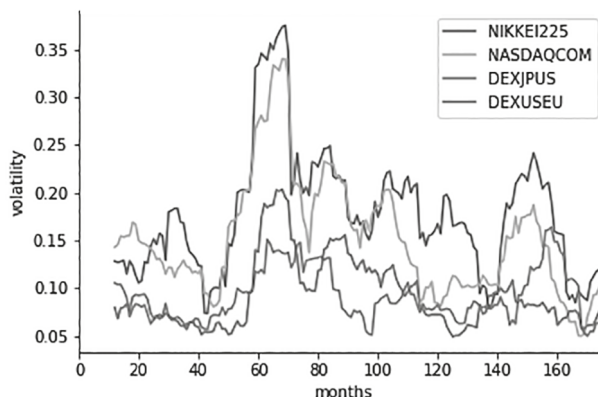


表 C1 シミュレーション 2：リバランス付き

in sample	out of sample	戦略	収益率 (1)	ボラティリティ (2)	(1)/(2)	歪度	尖度
60	12	EWP	0.053	0.095	0.56	-0.61	0.09
60	12	IVP	0.036	0.076	0.47	-0.62	0.08
60	12	HRP	0.072	0.115	0.62	-0.50	-0.04

図 C3 4 市場の 12 カ月移動ボラティリティ



時期によりボラティリティは変動している。また、4つの資産の市場で同じような動きが同時に起きている。

謝辞 データの提供、アドバイスを頂いた IASG, C.Dubuque 氏に感謝する。

参考文献

- [1] E.Alipour, C.Adolphs, A.Zaribafiy, M. Rounds (2016) “Quantum-inspired hierarchical risk parity”, IQB Information Technology, <https://1qbit.com/wp-content/uploads/2016/11/1QBit-White-Paper---Quantum-Inspired-Hierarchical-Risk-Parity.pdf>.
- [2] A.Ang, S.Gorovyy, G.B.van Inwegen(2011) “Hedge Fund Leverage”, *NBER Working Paper* No. 16801 Issued in February 2011.
- [3] M.Best, R.Grauer(1991a) “The analytics of sensitivity analysis for mean variance portfolio problems”, *International Review of Financial Studies*, 4, pp.315–342.
- [4] M.Best, R.Grauer(1991b) “On the sensitivity of mean–variance–efficient portfolios to changes in asset means: Some analytical and computational results”, *Review of Financial Studies*, 4, pp.315–342.
- [5] F.Black, R.Litterman (1991) “Asset equilibrium: Combining investor views with market equilibrium” *Journal of Fixed Income*, 1, pp.7–18.
- [6] F.Black, R.Litterman (1992) “Global portfolio optimization”, *Financial Analysts Journal*, 48, pp.28–43.
- [7] R.Clarke, H. de Silva, S.Thorley (2006) “Minimum-Variance Portfolios in the U.S.Equity Market”, *The Journal of Portfolio Management*, Fall, 33(1)pp.10–24.
- [8] L.Calvet, A.Fisher (2002) “Multifractality in asset returns: theory and evidence”, *The Review of Economics and Statistics*, vol.84, No.3, Aug, pp.381–406.
- [9] Y.Chen, A.Wiesel, Y.C.Eldar, A.O.Hero (2010) “Shrinkage algorithms for MMSE covariance estimation”, *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol 58, No.10, October, pp.5016–5029.

- [10] V.K.Chopra, V.T.Ziemba (1993) “The effects of errors in means, variances, and covariances on optimal portfolio choice”, *Journal of Portfolio Management*, 19, pp.6–11.
- [11] V.DeMiguel, L.Garlappi, R.Uppal(2009) “Optimal versus naive diversification: How inefficient is the 1/N portfolio strategy?”, *Review of Financial Studies*, 22, pp.1915–1953.
- [12] M.Eling (2006) “Autocorrelation, bias and fat tails: are hedge funds really attractive investments?”, *Derivative Use, Trading & Regulation*, volume 12 no.1/2, pp.28–47.
- [13] N.Gârleanu, L.H.Pedersen (2013) “Dynamic trading with predictable returns and transaction costs”, *The Journal of Finance*, ol.LXVIII, No.6, December.
- [14] P. N. Kolm, R.Tutuncu, F.J.Fabozzi(2014) “60 Years of portfolio optimization: Practical challenges and current trends”, *European Journal of Operational Research*, pp.356–371.
- [15] K.S.Immink, J.Weber (2010) “Minimum Pearson Distance Detection for Multilevel Channels With Gain and/or Offset Mismatch”. *IEEE Transactions on Information Theory*, 60 (10), pp.5966–5974.
- [16] O.Ledoita, M.Wolf(2004) “A well-conditioned estimator for large-dimensional covariance matrices”, *Journal of Multivariate Analysis*, 88, pp.365–411.
- [17] B.Mandelbrot (1963) “The variation of certain speculative prices”, *The Journal of Business*, vol.36, No.4, pp.394–419.
- [18] H.Markowitz(1952) “Portfolio Selection”, *Journal of Finance*, 7, 1952, pp.77–91.
- [19] H.Markowitz (2014) “Mean–variance approximations to expected utility”, *European Journal of Operational Research*, 234, pp.346–355.
- [20] R.N.Mantegna, H.E.Stanley (2000) *An Introduction to Econophysics* Cambridge University Press.
- [21] A.F.Perod, W.F.Sharpe(1988) “Dynamic Strategies for Asset Allocation”, *Financial Analysts Journal*, January–February 1988, pp.16–27.
- [22] M.L.de Prado (2016) “Building diversified portfolios that outperform out-of-sample”, *The Journal of Portfolio Management*, Summer, 42 (4) pp.59–69.
- [23] M.Rubinstein (2002) “Markowitz’s portfolio selection: A fifty-year retrospective”, *Journal of Finance*, 57, pp.1041–1045.
- [24] W.F.Sharpe(1964) “Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk”, *The Journal of Finance* 19 (3), pp.425–442.
- [25] M.C.Steinbach (2001) “Markowitz revisited: Mean–variance models in financial portfolio analysis”, *SIAM Review*, 43, pp.31–85.
- [26] R.A.Stubbs, D.Vandenbussche (2010) “Constraint attribution”, *Journal of Portfolio Management*, 36, pp.48–59. Babozzi, Kolm, Pachamanova, and Focardi 2007.
- [27] R.Tutuncu (2012) Recent advances in portfolio optimization. In B. Scherer & K. Winston (Eds.), *The oxford handbook of quantitative asset management* (pp. 7–31), Oxford University Press.