

# 降雨の不確実性による流出の不確実性に関する研究 A STUDY ON THE UNCERTAINTY OF RUNOFF DUE TO THE UNCERTAINTY OF PRECIPITATION

都市環境学専攻 8号 田 洋

YANG TIAN

## 1. はじめに

近年、地球温暖化に伴い、異常降水事象がよく発生している。氾濫危険水位を越えるような河川増水も多く発生し、流量や水位予測が非常に重要である。降水から流出量を算出する場合、一般的に流出解析を行うが、流出過程を再現するにあたり、降雨流出モデル、観測誤差及び人間認識の限界等による多くの不確実性が生じている。

本研究では、特に降雨の不確実性が及ぼす流出の不確実性に注目し、不確実性理論を降雨流出過程へ応用し、流出の不確実性を定量的に解明することを目的としている。

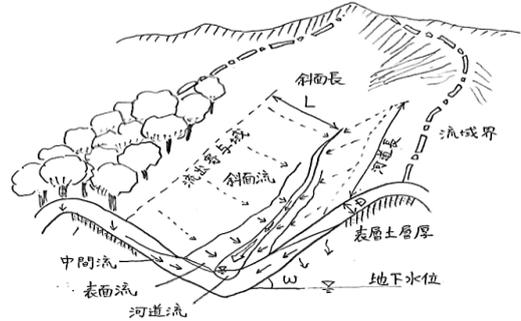


図2-1 山地小流域谷頭部における降雨流出機構図

ここで

$$a = (m + 1) \left(\frac{\alpha}{L}\right)^{\frac{1}{m+1}}, \quad b = \frac{m}{m+1} \quad (2-6)$$

とすると、式(2-5)は式(2-7)に変形する。

$$\frac{dq_*}{dt} = a q_*^b (r - q_*) \quad (2-7)$$

上式は一般化された降雨流出の基礎式である。

## 2. 降雨流出過程

山地における降雨流出過程は図2-1で表す。山田<sup>1)</sup>は単一斜面における一般化した降雨流出の基礎式を提案している。連続式に関しては式(2-1)で表現される。単一斜面に対して幅広矩形断面を想定するとともに、様々な流出形態に対応するため運動則を式(2-2)に示すよう、断面平均流速は水深のべき乗に比例する。式(2-1)と式(2-2)より単位幅流量 $q$ についての式(2-3)を得る。

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = r(t) \quad (2-1)$$

$$v = \alpha h^m, \quad q = vh = \alpha h^{m+1} \quad (2-2)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} = (m + 1) \left(\frac{\alpha}{L}\right)^{\frac{1}{m+1}} q^{\frac{m}{m+1}} (r(t) - \frac{\partial q}{\partial x}) \quad (2-3)$$

ここに、 $v$ : 断面平均流速[mm/h],  $h$ : 湛水深[mm],  $q$ : 単位幅流量[mm<sup>2</sup>/h],  $r(t)$ : 降雨強度[mm/h],  $\alpha$ ,  $m$ は流域特性を表すパラメータである。

直接流出は流出寄与域のみからの流出と考えると、斜面長は実地形上の斜面長より十分短いものと考えられ、式(2-4)に示す変数分離形の近似式が仮定できる。

$$q(x, t) \cong x q_*(t) \quad (2-4)$$

ここに、 $q_*$ : 流出高[mm/h]である。また、斜面長 $L$ の末端で考え $x=L$ として式(2-4)を用いると、偏微分方程式である式(2-3)は式(2-5)に示すように流出高に関する常微分方程式に変形できる。 $L$ : 流出寄与域斜面長[mm]である。

$$\frac{dq_*}{dt} = (m + 1) \left(\frac{\alpha}{L}\right)^{\frac{1}{m+1}} q_*^{\frac{m}{m+1}} (r(t) - q_*) \quad (2-5)$$

## 3. 確率過程論の概要

一次元空間において1個の粒子の位置についてマルコフ性を仮定すると、この粒子の空間座標 $x$ は $dt$ を微小時間増分として

$$x(t + dt) = x(t) + dx(t) \quad (3-1)$$

と表せる。式(3-1)の右辺第2項は

$$dx(t) = g(x(t))dt + \sigma(x(t))dw(t) \quad (3-2)$$

と定義される。 $g(x(t))$ はドリフト係数、 $\sigma(x(t))$ は拡散係数とよばれ、確率過程 $w(t)$ はBrown運動またはWinner過程である。式(3-2)は伊藤の確率微分方程式<sup>2)</sup>である。伊藤の確率微分方程式の解 $x(t)$ の任意時刻における存在確率密度関数 $p(x, t)$ はFokker-Planck方程式<sup>3)</sup>

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial (g(x, t)p(x, t))}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (\sigma^2(x, t)p(x, t))}{\partial x^2} \quad (3-3)$$

を満たす。

## 4. 不確実性理論を降雨流出過程への導入

### 4.1 G. I. Taylor の拡散理論と降雨の乱れへの応用

降雨は式(4-1)を示すように降雨の平均と降雨の乱れ成分との和で以下のように表す。

$$r(t) = \overline{r(t)} + r'(t) \quad (4-1)$$

式(4-1)を式(2-7)に代入し,変形すると,

$$dq_* = aq_*^b(\bar{r} - q_*)dt + aq_*^b r' dt \quad (4-2)$$

非常に多くの粒子の影響がブラウン運動の不規則さを生むという考え方は,やはり多数の原因によって複雑な変動を示す降雨過程に応用することもできると考える.

ここで,降雨の乱れ成分 $r'$ を Winner 過程  $w(t)$ と仮定し,  $r' dt$ は $\sqrt{D_{r'}} dw(t)$ に置き換えることができる. ただし,  $D_{r'}$ は降雨の乱れに関する拡散係数であり, G.I.Taylor の拡散理論<sup>4)</sup>から導出.

以下にこの拡散理論の概要を示し,降雨の乱れへの応用を論じる.

G.I.Taylor の拡散理論によれば, (乱流) 拡散係数 $D_y$ は

$$D_y = \frac{1}{2} \left\langle \frac{dY^2}{dt} \right\rangle = \left\langle Y \frac{dY}{dt} \right\rangle \quad (4-3)$$

と定義される. 本論文ではアンサンブル平均の記号は  $\langle \rangle$  とする. 図 4-1 に示すように,  $Y$  は流体粒子が移動した距離であり,  $y$  方向の速度乱れ成分 $v_l$ を積分して得られる. 時刻  $t$  から $\tau$ だけ隔たった時刻の乱れ成分 $v_l(t')$ を考え,  $t' = t - \tau$ と置き換えると,

$$Y(t) = \int_0^t v_l(t - \tau) d\tau \quad (4-4)$$

となる. また, 速度乱れ成分 $v_l$ は

$$v_l(t) = \frac{dY}{dt} \quad (4-5)$$

である.  $v_l$ と  $Y$ はそれぞれ不規則変量なので追跡する流体粒子毎に異なる値を取る. 従って,そこでアンサンブル平均を取る.

式(4-4)と式(4-5)を式(4-3)に代入すると,

$$D_y = \int_0^t \langle v_l(t) v_l(t - \tau) \rangle d\tau \quad (4-6)$$

となる. 時刻 $t$ から $\tau$ だけ隔たった異なる2つの時刻の流速の自己相関はラグランジュ相関係数 $R_L(\tau)$

$$R_L(\tau) = \frac{\langle v_l(t) v_l(t - \tau) \rangle}{\langle v_l^2(t) \rangle} \quad (4-7)$$

で表され, 上式を式(4-6)に代入すると, 拡散係数 $D_y$ は

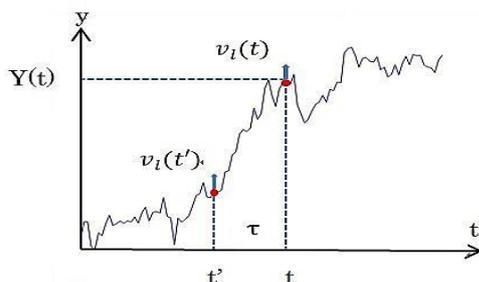


図 4-1 流体粒子  $y$  軸上の不規則運動(拡散)

$$D_y = \langle v_l^2(t) \rangle \int_0^t R_L(\tau) d\tau \quad (4-8)$$

となる.

ラグランジュ相関係数は $\tau \rightarrow 0$ で $R_L(\tau) \rightarrow 1$ ,  $\tau \rightarrow \infty$ で $R_L(\tau) \rightarrow 0$ という性質を持ち, この関係を用いると, 式(4-8)の積分は $t \cong 0$ の場合,  $R_L(\tau) \cong 1$ とにおいて,

$$D_y = \langle v_l^2(t) \rangle t \quad (4-9)$$

となる. また,  $t$ が十分大きければ, 図 4-2 に示すように, 式(4-8)の自己相関係数の積分は

$$\int_0^t R_L(\tau) d\tau = T_L \quad (4-10)$$

とおけるので, 拡散係数 $D_y$ は

$$D_y = \langle v_l^2(t) \rangle T_L \quad (4-11)$$

となる. ここに,  $T_L$ は乱流場の時間的スケールを示す指標である. つまり, 拡散係数は拡散時間  $t$  が十分に小さい場合は拡散時間  $t$  に比例し, 拡散時間  $t$  が $T_L$ よりもかなり大きい場合は拡散係数が一定値になる.

$$D_y = \begin{cases} \langle v_l^2(t) \rangle t & (t \ll T_L) \\ \langle v_l^2(t) \rangle T_L & (t \gg T_L) \end{cases} \quad (4-12)$$

いま, G.I.Taylor の拡散理論を降雨の乱れ成分 $r'(t)$ の問題に置き換えて考える. エルゴード性を仮定すれば, 降雨の乱れのアンサンブル平均 $\langle r'(t) \rangle$ と時間平均 $\overline{r'(t)}$ が等しい, なお, 本論文では時間平均の記号は  $\bar{\phantom{x}}$  とする. 従って

$$\langle r'(t) \rangle = \overline{r'(t)} \quad (4-13)$$

が成立し, 降雨の乱れ $r'(t)$ に関する拡散係数 $D_{r'}$ は

$$\begin{aligned} D_{r'} &= \int_0^t \overline{r'(t) r'(t - \tau)} d\tau \\ &= \overline{r'^2(t)} \int_0^t R_L(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (4-14)$$

となる. ここに

$$R_L(\tau) = \frac{\overline{v_l(t) v_l(t - \tau)}}{\overline{v_l^2(t)}} \quad (4-15)$$

である. よって, 拡散係数 $D_{r'}$ は $T_L$ を用いて,

$$D_{r'} = \overline{r'^2(t)} T_L \quad (4-16)$$

と表せる.

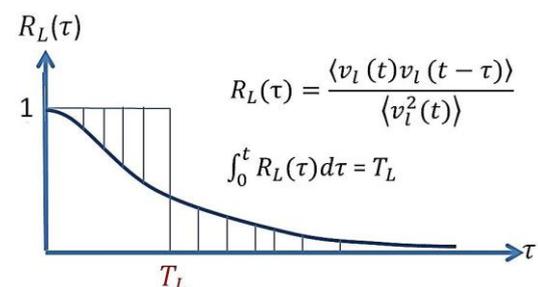


図 4-2 自己相関係数 $R_L$ と時間的スケール $T_L$ の関係

降雨の乱れ $r'(t)$ が正規白色雑音であると仮定すれば、 $r'(t)$ の平均 $\overline{r'(t)}$ は0であるので、 $r'(t)$ の偏差 $\sigma^2$ は

$$\sigma^2 = \frac{1}{T} \sum (r'(t) - \overline{r'(t)})^2 = \frac{1}{T} \sum r'^2(t) \quad (4-17)$$

となる。式(4-17)を式(4-16)に代入すると、降雨の乱れ $r'(t)$ に関する拡散係数 $D_{r'}$ は

$$D_{r'} = \sigma^2 T_L \quad (4-18)$$

と表せる。

ここまで、G.I.Taylorの拡散理論を降雨の乱れへ応用し、降雨の乱れ $r'(t)$ に関する拡散係数を導出した。

一方で、降雨流出問題に戻り、降雨の乱れ $r'(t)$ に関する拡散係数を用い、

$$r' dt = \sqrt{D_{r'}} dw(t) = \sigma \sqrt{T_L} dw(t) \quad (4-19)$$

という関係を得られる。上式を式(4-2)に代入すると、

$$dq_* = a q_*^b (\bar{r} - q_*) dt + a q_*^b \sigma \sqrt{T_L} dw(t) \quad (4-20)$$

となる。

上式は不確実性を降雨流出過程へ導入した微分方程式である。式(3-2)と式(3-3)の対応関係を用いると、流出高 $q_*$ に関するFokker-Planck方程式は

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(q_*)}{\partial t} + \frac{\partial (a q_*^b (\bar{r} - q_*) p(q_*))}{\partial q_*} \\ = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \left( (a q_*^b \sigma \sqrt{T_L})^2 p(q_*) \right)}{\partial q_*^2} \end{aligned} \quad (4-21)$$

になる。

## 4.2 降雨流出過程における水文諸量の分布の定常解

流出高 $q_*$ の確率密度関数 $p(q_*)$ について解くと、定常解は式(4-22)になる。

$$p(q_*) = \frac{2p_{q_*}}{(a q_*^b \sigma \sqrt{T_L})^2} e^{\frac{2\bar{r}}{a\sigma^2 T_L} \frac{q_*^{1-b}}{1-b} - \frac{2}{a\sigma^2 T_L} \frac{q_*^{2-b}}{2-b}} \quad (4-22)$$

ここに、 $p_{q_*}$ は定数である。

流量と流出高の関係は式(4-23)で表す。

$$Q = \frac{1}{3.6} A q_* \quad (4-23)$$

ここに $A$ ：流域面積[ $\text{km}^2$ ]、 $Q$ ：流量[ $\text{m}^3/\text{s}$ ]である。流量と流出高は線形関係であり、流量 $Q$ の分布は確率密度関数 $p_Q(Q)$ 式(4-24)で表す。

$$p_Q(Q) = \frac{2p_Q}{(a Q^b \sigma \sqrt{T_L})^2} e^{\frac{2\bar{r}}{a\sigma^2 T_L} \frac{Q^{1-b}}{1-b} - \frac{2}{a\sigma^2 T_L} \frac{Q^{2-b}}{2-b}} \quad (4-24)$$

ここに、 $p_Q$ は定数である。

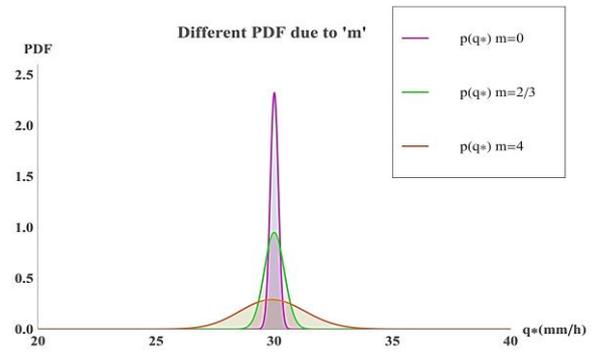


図4-3 抵抗則mと流出高の不確実性の関係

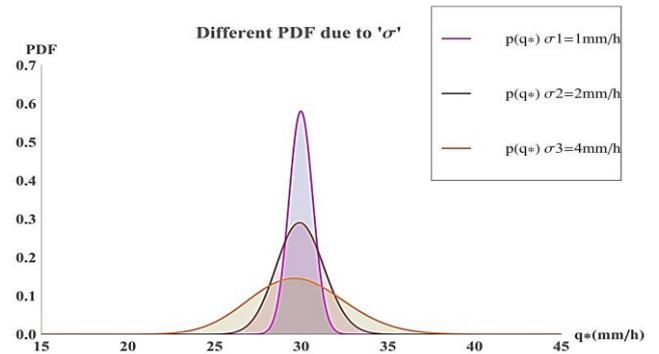


図4-4 降雨の偏差と流出高の不確実性の関係

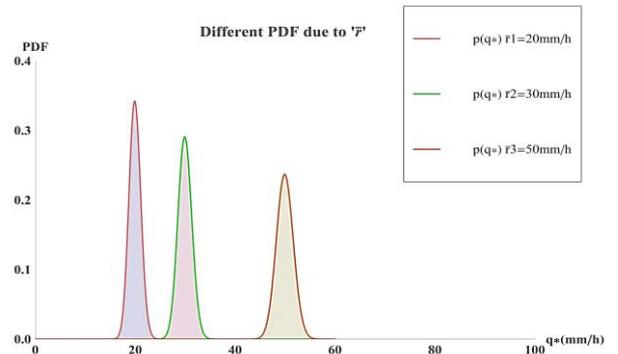


図4-5 降雨の平均と流出高の不確実性の関係

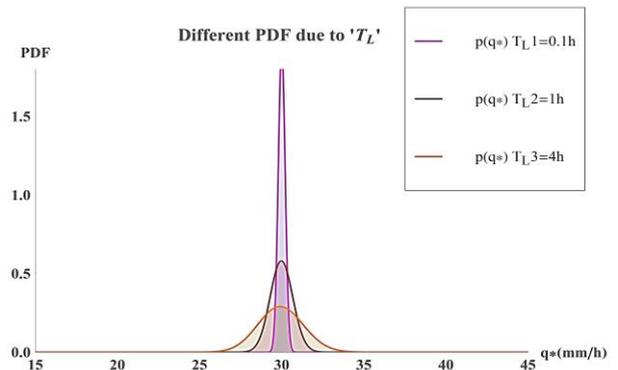


図4-6 時間スケールと流出高の不確実性の関係

次に水深に関しては、矩形断面水路で等流状態を考えると、流量と水深の関係は式(4-25)で表す。

$$Q = \frac{1}{n} \sqrt{i} h^{\frac{2}{3}} B h = \frac{B}{n} \sqrt{i} h^{\frac{5}{3}}, \quad (4-25)$$

$$h = \left( \frac{n}{B \sqrt{i}} \right)^{\frac{3}{5}} Q^{\frac{3}{5}}$$

ここに  $B$  : 水路幅[m],  $i$  : 水路勾配,  $n$  : 河床粗度係数である。式(4-25)から、 $h \propto Q^{\frac{3}{5}}$ 、即ち水深は流量と共に単調増加である。従って、水深の分布は式 (4-26)で表す。

$$p_h(h) = \frac{5}{3} \left( \frac{B \sqrt{i}}{n} \right)^{\frac{9}{25}} h^{\frac{2}{25}} p_Q \left( h^{\frac{5}{3}} \frac{B \sqrt{i}}{n} \right) \quad (4-26)$$

抵抗則  $m$  , 雨の偏差  $\sigma$ , 雨の平均  $\bar{r}$  及び時間的スケール指標  $T_L$  による流出高の分布のトレンド(収束または分散)はそれぞれ図4-3, 図4-4, 図4-5, 図4-6で表す。流出高の分布は抵抗則  $m$  , 雨の偏差  $\sigma$ , 雨の平均  $\bar{r}$  及び時間的スケール指標  $T_L$  の増加による分散することが分かった。なお、流量と水深の分布は同じトレンドを持つ。

### 4.3 降雨流出過程における水文諸量の分布の非定常解

確率過程論と G.I.Taylor の拡散理論を導入した降雨流出過程に対し、非定常の場合における数値解析を行い、シミュレーションによって、数値解を求め、水文諸量の時間発展を解明した。

いま、降雨の平均値を 30mm/h、降雨継続時間を 6.5h、降雨のばらつきを 3mm/h と設定し、水文諸量の分布の時間発展を詳しく知るため、降雨前後 2 過程に分かれ、分析した。

まず、降雨開始からピークまでの過程における流出高の分布を図4-7に示す。降雨開始からピークまでの過程における流出高の確率分布の分散は、時間と共に徐々に大きくなる事が分かる。

一方、降雨終了時以降の過程における流出高の分布を図4-8に示す。ピークまでの過程に対し、降雨終了時以降の過程における流出高の確率分布の分散は時間と共に徐々に小さくなる事が分かる。

式(4-23)と式(4-25)から分かるように、流量と流出高は線形関係であり、水深は流量と共に単調増加であるという関係を持っている。従って、不確実性を導入した確率論的降雨流出過程における流出量である流量と水深も同じ分布トレンドを持っている。即ち、降雨開始からピークまでの流量、水深の確率分布の分散は徐々に大きくなる一方、降雨終了時以降の流量、水深の確率分布の分散は徐々に小さくなる。

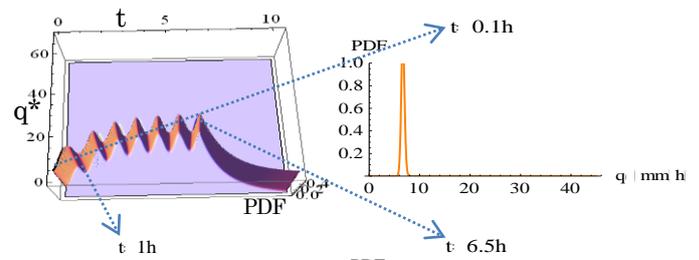


図4-7 降雨開始からピークまでの流出高に関する分布の変化

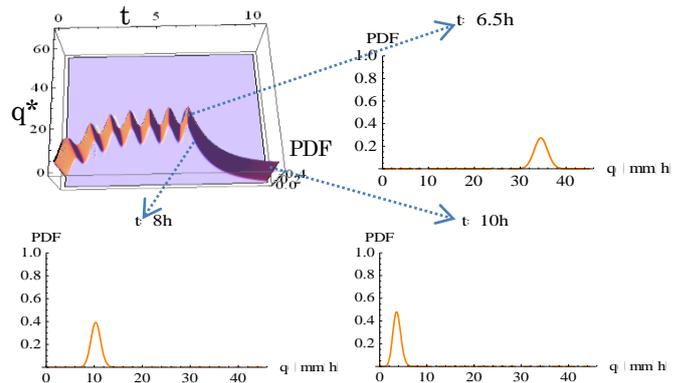


図4-8 降雨終了時以降の過程における流出高に関する分布の変化

## 5. まとめ

本研究では確率過程論と G.I.Taylor の拡散理論を降雨流出過程へ導入し、得られた知見を以下に詳述する。

- 1) 伊藤の確率微分方程式を降雨流出過程に応用し、雨の不確実性に対する流出量の不確実性を数学的に示した。
- 2) 降雨流出過程の非線形性が強くなればなるほど、流量、水深の確率分布の分散は大きくなる。
- 3) 降雨の偏差、降雨の平均が大きくなればなるほど、流量、水深の確率分布の分散は大きくなる。
- 4) 時間的スケール指標  $T_L$  が長くなればなるほど、即ち人間認識の限界が強くなればなるほど、流量、水深の確率分布の分散は大きくなる。
- 5) 降雨開始からピークまで、流量、水深の確率分布の分散は徐々に大きくなる一方で、降雨終了時以降、流量、水深の確率分布の分散は徐々に小さくなる。

### 参考文献

- 1) 山田正: 山地流出の非線形性に関する研究, 土木学会水工学論文集, 第47巻, pp.259-264, 2003.
- 2) 舟木久直: 確率微分方程式, 岩波書店, pp.51-81, 2005.
- 3) Claudio Floris: Numeric Solution of the Fokker Planck Kolmogorov Equation, *Engineering*, pp.975-988, 2013.
- 4) 日野幹雄: 流体力学, 朝倉書店, pp.413-436, 1992.