

多チャネル二次 Volterra 型非線形適応フィルタの 理論解析と高速 RLS 型適応算法

趙 晋輝*

Fast RLS Algorithms of Multichannel Quadratic Volterra Adaptive Filters

abstract

本論文では、多チャネル二次 Volterra 型適応フィルタについて理論解析を行ない、数値的に安定な高速 RLS 算法を提案する。提案算法の演算量は LMS 法と同じ $O(N^2)$ で実現される。計算機シミュレーションによって提案手法の有効性を検証する。

1 はじめに

近年では、Volterra 型非線形適応フィルタ (以下、Volterra ADF) は他の非線形適応フィルタ、例えば多層ニューラルネットワークなど極小誤差点収束問題が存在するシステムに比べて実用上の利点が注目され、エコーキャンセラやノイズキャンセラ、自動等化器などの非線形システムへ応用されている [1]。

しかしながら、文献 [3] では、単一時系列入力が正規分布に従うとき、二次 Volterra ADF の誤差曲面は特殊な、かつ、自明でない幾何学的形状を持つことを示している。つまり、一方向にのみ非常に急峻で、他方向には相対的に平坦であり、二次 Volterra ADF の一次タップ数を N とすると、最急峻方向の曲率の大きさは他方向の曲率の $O(N)$ 倍である。

本論文では、まず正規分布の多チャネル入力の場合においても、誤差曲面が同様な幾何学特徴を持つことを示す。特に、無相関な多チャネル入力においては、自己相関行列の完全な解析を行う。これらの理論解析は、文献 [3] の結果をさらに一般化している。

誤差曲面のこの特徴は、Volterra ADF に通常の勾配型適応更新法を用いた場合の不安定さの原因となる。更に、収束を保証するためには急峻方向でオーバーシュートしないようにごく小さな更新幅で更新する必要があり、この場合、収束特性の遅さは避けられない。一方、Newton-Raphson 法や最小二乗法などの、高速の収束特性を得られる算法を用いた場合、二次 Volterra ADF では $N^2 \times N^2$ の入力相関行列の逆行列演算を要し、安定な RLS 法によって逐次更新する場合、演算量は $O(N^5)$ となる。従って、これらの高速算法を実時間処理に適用することは困難と思われる。

本論文では、有相関多チャネル入力信号に対して、LMS 法と同じ演算量で厳密な RLS 法を実現する適応算法を提案する。まず、無相関入力信号に対する高速算法を示す。本手法は、無相関入力信号の入力相関行列に対しての完全な固有解析に基づいており、[5] の方法を一般化している。この高速算法の演算量は LMS と同様に重み係数の数の線形オーダー、即ち $O(N^2)$ である。さらに、有相関入力信号の無相関化操作により、無相関入力に対する高速算法を有相関入力信号に対して適用する。この場合、無相関化操作には線形項に対してのみ必要であるため、線形 ADF における RLS 法と同様な $O(N^2)$ の演算量を必要とし、したがって、算法の総

* 中央大学 理工学部 電気電子情報通信工学科
Dept. of Electrical and Electronic Engineering, Faculty of Science and Engineering,
Chuo University.

演算量は $O(N^2)$ である．これらの提案算法に関して，コンピュータシミュレーションによる評価を行う．

単一時系列入力に対して，RLS 法のオーダ $O(N^2)$ の高速算法としては，Fast Kalman や Fast Transversal Lattice 法などが考えられるが，数値計算誤差と雑音に影響されやすく，不安定であることが知られている．これは，自己相関の強い即ち条件数の大きい相関行列の逆行列を逐次的に求めるという，本質的に不安定な操作を避けられないためである．一方，提案手法は，より一般的な多チャネル入力信号に対して，入力相関行列の理論解析より得られた事前情報を用いているため，その逆行列を求める必要はない．また，入力信号に対して無相関化操作と組合せた二つの安定手法を用いているため，入力信号の自己相関の強弱及び雑音や計算誤差によらず，ロバストである．

従来，単一時系列入力に対しては，線形適応フィルタにおいても，入力信号の白色化は行われており，この操作は勾配型の適応算法の収束を高速化に直接寄与することが知られている．これは，線形フィルタの誤差曲面が白色入力信号時には完全に等曲率二次超曲面である，すなわち，入力相関行列が入力信号の分散で定数倍された単位行列であるという性質による．そのような誤差曲面に対して，勾配型適応算法は，最も安定で早い収束を実現することができる．一方，有色入力の場合は，誤差曲面は各方向上に異なる曲率を持ち，その歪みが勾配型適応算法の高速収束の障害となる．その意味で，RLS 法は，白色化操作と等価的に，誤差曲面を正規化してから勾配法を適用していると見なすこともできる．しかし，その演算量が多いため，一般に線形フィルタの場合は，厳密ではない簡易な白色化操作を用いることで，勾配法と同オーダの演算量で近似的な RLS 法を実現している．

しかし，二次 Volterra ADF の場合は，白色入力の場合でも入力相関行列は対角行列ではなく，誤差曲面の幾何学的形状は自明ではない．したがって，例え厳密な白色化を行っても，直接収束の高速化には結びつかない．実際，文献 [2] においても白色化操作を行っているが，その目的は，入力相関行列をブロック対角化することで，RLS 法における逆行列の演算量を削減することである．その結果，RLS 法の計算は高速化されるものの，そのオーダは依然 $O(N^5)$ を要している．一方，提案手法では，二次 Volterra ADF における白色入力信号の入力相関行列の固有値と固有ベクトルを完全に求めたことで，白色入力信号に対する RLS 法は，勾配法と同様な演算量で実現できる．更に，有色入力の場合，入力信号の線形項に対してのみ白色化すればよいいため，厳密な白色化操作を用いても，その演算量は，勾配法の適応更新の演算量と同程度である．したがって，提案手法全体として勾配法と同演算量で，近似ではなく厳密に RLS 法を実現することができる．

2 二次 Volterra ADF

二次 Volterra ADF の線形項の数を N とし， N 個の時系列からなる入力信号ベクトル \mathbf{x} を，

$$\mathbf{x}_n = [x_1(n), x_2(n), \dots, x_N(n)]^T$$

と記する．特に，その成分が，ある単一時系列入力 x_n の過去値からなる場合は，入力信号は， $\mathbf{x}_n = [x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-N+1}]^T$ となる．また二次項を含めた全入力信号ベクトル \mathbf{X}_n は $N(N+1)$ 次元で，

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_n &= [\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_n^{\otimes 2}]^T \\ &= (x_1(n), \dots, x_N(n), x_1^2(n), x_1(n)x_2(n), \dots, x_N^2(n))^T \end{aligned}$$

とする．ここで， \mathbf{A}, \mathbf{B} のテンソル積は， $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = (a_{ij} \mathbf{B})$ と定義される．入力信号はガウス分布のような対称分布に従うとき，奇数次モーメントが零となるため， \mathbf{X}_n の入力相関行列 \mathbf{R}_{xx} は， $\mathbf{R}_{xx} = E[\mathbf{x}_n \mathbf{x}_n^T] = \mathbf{R}_{xx}^{(1)}, \mathbf{R}_{xx}^{(2)} = E(\mathbf{x}^{\otimes 2} (\mathbf{x}^{\otimes 2})^T)$ とすると，

$$\mathbf{R}_{xx} = E[\mathbf{X}_n \mathbf{X}_n^T] = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{xx}^{(1)} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{R}_{xx}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

となる．

二次 Volterra 級数展開による推定系の出力を, $y_n = \mathbf{W}_n^T \mathbf{X}_n$, あるいは

$$y_n = \sum_{i=1}^N w_i(n)x_i(n) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_{ij}(n)x_i(n)x_j(n).$$

未知系の出力 d_n と推定系の出力 y_n の出力誤差を e_n とし, \mathbf{W} を最適な重み係数ベクトル, σ_{noise}^2 を出力における観測雑音の分散とすると, 二乗平均誤差関数 $E(e_n^2)$ は,

$$E(e_n^2) = (\mathbf{W} - \mathbf{W}_n)^T \mathbf{R}_{xx} (\mathbf{W} - \mathbf{W}_n) + \sigma_{noise}^2$$

となる. これは主軸と主曲率がそれぞれ入力相関行列 \mathbf{R}_{xx} の固有ベクトルと固有値に対応した, 下凸な二次超曲面をあらわす.

3 誤差曲面の幾何学特徴

定理 1 正規分布に従う入力信号の自己相関行列 $\mathbf{R}_{xx}^{(2)}$ の固有値 $\lambda_k(\mathbf{R}_{xx}^{(2)})$ は次の上下界を持つ.

$$\begin{aligned} \max\{\beta_1, \zeta\} &\leq \lambda_1(\mathbf{R}_{xx}^{(2)}) \leq 2\lambda_1^2(\mathbf{R}_{xx}^{(1)}) + \alpha \\ \text{但し } \alpha &= \boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\gamma}^T = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i^T \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^N r_{ii}^2 + 2 \sum_{i<j}^N r_{ij}^2, \\ \zeta &= \lambda_N(\mathbf{R}_{xx}^{(1)}) + \alpha, \\ \beta_i &= \begin{cases} 2\lambda_i(\mathbf{R}_{xx}^{(1)} \otimes \mathbf{R}_{xx}^{(1)}), & i \leq N^2 \\ 0, & i > N^2. \end{cases} \end{aligned}$$

$k = 2, \dots, N^2$ については

$$\beta_k \leq \lambda_k(\mathbf{R}_{xx}^{(2)}) \leq \min\{\beta_k + \alpha, \beta_{k-1}, \dots, \beta_1\}.$$

証明: まず, 一次自己相関行列 $\mathbf{R}_{xx} = (\mathbf{r}_1 \cdots \mathbf{r}_N)$ とする. つまり

$$\mathbf{r}_i = (r_{1i}, r_{2i}, \dots, r_{Ni})^T$$

を \mathbf{R}_{xx} の列 (行) ベクトルとする.

正規分布に従う確率変数の 4 次相関の次の性質

$$E[x_1 x_2 x_3 x_4] = E[x_1 x_2]E[x_3 x_4] + E[x_1 x_3]E[x_2 x_4] + E[x_1 x_4]E[x_2 x_3].$$

を利用して, 二次自己相関行列 $\mathbf{R}_{xx}^{(2)}$ を, 次のような分解を行う.

$$\mathbf{R}_{xx}^{(2)} = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}_{xx} \otimes \mathbf{R}_{xx}, \quad \mathbf{B} = [\mathbf{r}_i \mathbf{r}_j^T] \quad \mathbf{C} = [\mathbf{r}_j \mathbf{r}_i^T],$$

\mathbf{A} については, $\{\lambda_k(\mathbf{R}_{xx} \otimes \mathbf{R}_{xx})\} = \{\lambda_i(\mathbf{R}_{xx})\lambda_j(\mathbf{R}_{xx})\}$ より, その固有値を求めることができる.

\mathbf{B} については,

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\gamma}^T \\ \boldsymbol{\gamma} &= \text{column}(\mathbf{R}_{xx}) = (\mathbf{r}_1^T \mathbf{r}_2^T \cdots \mathbf{r}_N^T)^T \end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned}\lambda_1(\mathbf{B}) &= \boldsymbol{\gamma}^T \boldsymbol{\gamma} = \sum_{i=1}^N r_{ii}^2 + 2 \sum_{i,j} r_{ij}^2 \\ \lambda_k(\mathbf{B}) &= 0, \quad k = 2, \dots, N^2.\end{aligned}$$

その非ゼロの固有値に対応する固有ベクトルは $\boldsymbol{\gamma}$ であることがわかる.

\mathbf{C} については,

補助定理 1

$$\mathbf{C} = \mathbf{P}(\mathbf{R}_{xx} \otimes \mathbf{R}_{xx}) = (\mathbf{R}_{xx} \otimes \mathbf{R}_{xx})\mathbf{P}$$

但し, \mathbf{P} は次のように互換分解できる置換行列.

$$\mathbf{P} = \prod_{j=1}^{N-1} \prod_{i=j+1}^N ((j-1)N + i, (i-1)N + j)$$

これらの互換の数は $\sum_{j=1}^{N-1} j = \frac{N(N-1)}{2}$ である.

(証明略)

補助定理 2 ([3] 付録定理 3) 行列 \mathbf{PA} は, \mathbf{A} と同じ固有ベクトルを持ち, その固有値は,

$$\lambda_i(\mathbf{PA}) = \pm \lambda_i(\mathbf{A}),$$

特に, 互換と同じ数の $N(N-1)/2$ 個の固有値が負の符号を持つ.

ここで, $\mathbf{A} = \mathbf{R}_{xx} \otimes \mathbf{R}_{xx} = \mathbf{V}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{V}^T$ とすると,

$$\mathbf{A} + \mathbf{C} = \mathbf{V}\boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{I} - \mathbf{S})\mathbf{V}^T.$$

但し, $\mathbf{S} = \text{diag}\{s_i\}$ s_i は \mathbf{P} の固有値とする. 従って, s_i の符号によって

$$\lambda_i(\mathbf{A} + \mathbf{C}) = 2\lambda_i(\mathbf{R}_{xx} \otimes \mathbf{R}_{xx}) \quad \text{or} \quad 0$$

ここで, $N(N-1)/2$ 個のゼロの固有値があることがわかる.

以上の結果と [3] の Lemma 1 を用いることにより, 定理を証明できる. □

Remark: $\alpha = O(N)\beta_k, k = 1, \dots, N^2$ より, 或いはもし $\beta_k + \alpha > \beta_{k-1}$ ならば,

$$\beta_k \leq \lambda_k(\mathbf{R}_{xx}^{(2)}) \leq \beta_{k-1}, \quad k = 2, \dots, N^2$$

つまり最大固有値 $\lambda_{max} = O(N) \lambda_k, k > 1$ となり, 従って二次 Volterra ADF の誤差曲面は, 常に最大固有値の固有ベクトル ϕ_1 方向には非常に急峻で, 他方向には相対的に平坦である.

4 無相関入力時の解析

σ_i を分散とする無相関な入力信号 x_i を考える.

まず N 次元ベクトル

$$\boldsymbol{\sigma} := (\sigma_1^2, \dots, \sigma_N^2)^T, \quad \mathbf{1} := (1, 1, \dots, 1)^T$$

and an $N \times N$ matrix

$$\boldsymbol{\Sigma} := \text{diag}[\sigma_1^2, \dots, \sigma_N^2]$$

を定義する. さらに, $(t-1)N+t$ 番の成分だけが 1 で, ほかはすべてゼロである N^2 次元ベクトル $\mathbf{u}_t, t = 1, \dots, N$ と $N^2 \times N$ 行列 \mathbf{U} を定義する.

$$\mathbf{u}_t := (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{(t-1)N+t}, 0, \dots, 0)^T,$$

$$U := [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_N],$$

定理 2 二次 Volterra ADF に対して分散 σ_i^2 の無相関な信号を入力した場合の, 入力相関行列 $\mathbf{R}_{xx}^{(2)}$ の各固有値 λ_k と固有ベクトル ϕ_k は以下の三つの部分集合からなる .

(1) $k = 1, \dots, N$ に対して, λ_k は $N \times N$ 行列

$$\sigma\sigma^T + 2\Sigma^2 = \Sigma(\mathbf{1}\mathbf{1}^T + 2I)\Sigma.$$

の固有値に等しい . この行列の固有ベクトルを \mathbf{c}_k とすると, λ_k に対応する ϕ_k は

$$\phi_k = U\mathbf{c}_k.$$

(2) $j = 1, \dots, N-1, i = j+1, \dots, N$ に対しては, $\lambda_{ij} = 2\sigma_i^2\sigma_j^2$, その固有ベクトル ϕ_{ij} は置換行列 P の固有値 1 を持つ固有ベクトルに等しい .

$$\phi_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0 \cdots \underbrace{0, 1, 0}_{(j-1)N+i} \cdots \underbrace{0, 1, 0}_{(i-1)N+j} \cdots 0)$$

その数は $(N^2 - N)/2$ である .

(3) $l = 1, \dots, N-1, m = l+1, \dots, N$ に対しては, $\lambda_{ml} = 0$, その固有ベクトル ϕ_{ml} は置換行列 P の固有値 -1 を持つ固有ベクトルに等しい .

$$\phi_{ml} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\underbrace{0, 1, 0}_{(m-1)N+l} \cdots \underbrace{0, -1, 0}_{(l-1)N+m} \cdots 0)$$

その数も $(N^2 - N)/2$ である .

証明 : 定理により, $\mathbf{R}_{xx}^{(2)} = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}$ となる . ここでは,

$$\mathbf{A} + \mathbf{C} = \text{diag}\{\sigma_i^2\} \otimes \text{diag}\{\sigma_j^2\}(\mathbf{I}_{N^2} + \mathbf{P})$$

但し \mathbf{I}_{N^2} は $N^2 \times N^2$ 単位行列とする .

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\gamma}^T$$

$$\boldsymbol{\gamma} = (\sigma_k^2 \delta_{l, (k-1)N+k}, k = 1, \dots, N)^T$$

より, $\mathbf{A} + \mathbf{C}$ と \mathbf{B} の不変部分空間は, 互いに直交補空間となる . 以下では, その二つの不変部分空間上の固有ベクトルについて考える .

まず, $\mathbf{A} + \mathbf{C}$ の不変部分空間は, 基底 $\mathbf{u}_t, t = 1, \dots, N$ を持つ . 従って, この部分空間上の固有ベクトルは

$$\phi_k = \sum_{t=1}^N c_t \mathbf{u}_t = U\mathbf{c},$$

と表すことができる .

\mathbf{u}_t が $(t-1)N + t$ 番以外の成分はゼロであるため, 対角行列

$$D := \text{diag}\{\sigma_i^2\} \otimes \text{diag}\{\sigma_j^2\},$$

の $(t-1)N + t$ 番要素 σ_t^4 のみが $\mathbf{u}_t, t = 1, \dots, N$ に作用することがわかる .

$$D\mathbf{u}_t = \sigma_t^4 \mathbf{u}_t \quad \text{or} \quad DU = U \text{diag}\{\sigma_t^4\}$$

$$R_x^{(2)} = \boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\gamma}^T + D(I + P) = U\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}^T U^T + D(I + P)$$

の固有ベクトル ϕ_k は次の関係式を満たす .

$$\begin{aligned} \lambda \phi_k &= R_x^{(2)} \phi_k = U\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}^T U^T U\mathbf{c} + 2D\phi_k \\ &= U\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{c} + 2DU\mathbf{c} \\ &= U(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}^T + 2\text{diag}\{\sigma_t^4\})\mathbf{c} \\ &= \lambda U\mathbf{c} \end{aligned}$$

$U^T U = I_N$ を利用すると, $N^2 \times N^2$ の行列 $R_{xx}^{(2)}$ の固有値 λ_k と固有ベクトル ϕ_k は, $N \times N$ 行列

$$\Gamma := \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}^T + 2\Sigma^2, \quad \text{where} \quad \Sigma := \text{diag}\{\sigma_t^2\}$$

の固有値 $\lambda_i(\Gamma)$ と, Γ の固有ベクトル \mathbf{c}_i から求めることができる . 具体的に, $\lambda_k = \lambda_k(\Gamma), \phi_k = U\mathbf{c}_k$.

次に, $A + C$ の不変部分空間を考える, その定義より, 定理に示した互換の固有ベクトルであることが証明できる . 従って, この空間上の固有ベクトルは皆 P の固有値 ± 1 の固有ベクトルであることがわかる . \square

5 無相関入力信号における高速算法

無相関入力信号に対して, 入力相関行列とその逆行列を完全に求められるため, その場合の RLS 法が次のように実現できる . Φ は固有ベクトル ϕ_i を列ベクトルとする行列として, 入力相関行列を $\mathbf{R}_{xx} = \Phi\Lambda\Phi^T$ とすると, 重み係数ベクトルの適応更新式は次のように RLS 法によって行える .

$$\mathbf{W}_{n+1} = \mathbf{W}_n + \mu e_n \Phi \Lambda^{-1} \Phi^T \mathbf{X}_n$$

ここでは, 対称性を保つために定義された入力信号ベクトルに対して, 全入力信号の自己相関行列がフルランクではない . また, 無相関入力でない場合においても, 相関行列の固有分解が求められたとき, 以下のように RLS 法の数値的安定化を図ることができる .

ここで, 入力信号の次元を L とすると,

$$\Phi = [\phi_1, \dots, \phi_L], \quad \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_L)$$

固有値は, 大きい順で並んでいるとして, $\lambda_i \neq 0, i \leq M$ となる M 番目以降の小さいものを無視するとき, 二乗平均誤差関数 $E(e_n^2)$ は, 以下ようになる .

$$\begin{aligned} E(e_n^2) &= (\mathbf{W}_n - \mathbf{W})^T \Phi \Lambda \Phi^T (\mathbf{W}_n - \mathbf{W}) + \sigma_{noise}^2 \\ &= (\mathbf{W}_n - \mathbf{W})^T [\phi_1, \dots, \phi_M] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_M \end{bmatrix} \\ &\quad [\phi_1, \dots, \phi_M]^T (\mathbf{W}_n - \mathbf{W}) + \sigma_{noise}^2 \\ &= (\mathbf{W}_n - \mathbf{W})^T \Phi_M \Lambda_M \Phi_M^T (\mathbf{W}_n - \mathbf{W}) + \sigma_{noise}^2 \end{aligned}$$

ここでは,

$$\Phi_M = [\phi_1, \dots, \phi_M]$$

\mathbf{W}_n の ϕ_i の成分は,

$$\mathbf{W}_n^i = \frac{\phi_i^T \mathbf{W}_n}{\phi_i^T \phi_i},$$

と定義し, $i > M$ の成分は, 二乗平均誤差に対して貢献していないことがわかる. 一方, これらの成長は出力誤差によって抑制することができなく雑音の影響で発散する可能性もある. ここで, $\mathbf{W}_n^i = 0, i > M$ と固定することでこの問題を解決する.

よって, 重み係数ベクトルは, 入力信号の張る部分空間に制限されて, 以下のように書くことができる.

$$\mathbf{W}_n = \sum_{i=1}^M \mathbf{W}_n^i \phi_i =: \mathbf{W}_n^M$$

または,

$$\mathbf{W}_n^M = \Phi_M (\Phi_M^T \mathbf{W})$$

となり, 重み係数ベクトル \mathbf{W}_n^M の更新は,

$$\mathbf{W}_{n+1}^i = \frac{\phi_i^T \mathbf{W}_n}{\phi_i^T \phi_i} + \mu \frac{1}{\lambda_i} e_n \chi_n^i, \quad 0 \leq i \leq M$$

とすることができ, 安定化と演算量を削減することができる. ここでは, \mathbf{X}_n の ϕ_i の成分は,

$$\chi_n^i = \frac{\phi_i^T \mathbf{X}_n}{\phi_i^T \phi_i}$$

と定義される.

実際には, RLS 法は入力相関行列 \mathbf{R}_{xx}^{-1} を推定し, その逆行列を計算する必要があるので, 雑音や推定誤差がもたらす収束特性の劣化は必ず存在する. しかし, 提案手法では事前の理論解析から得られた正確な固有値と固有ベクトルを用いているため, 常に雑音と誤差に影響されない最適な更新幅と更新方向を保証できる. したがって, 提案手法は RLS 法より高速で安定な収束が期待できる.

特に, 固有ベクトルの成分はスパースであるため, 内積演算や重み係数ベクトルの射影演算は, 実質上選択操作のみであり, 演算量はほとんどかからない. したがって, 提案手法の演算量は LMS 法と同様に $O(N^2)$ である.

6 有相関入力信号に対する高速算法

無相関入力信号時の入力相関行列と誤差曲面の幾何学的形状は入力に依存せず一意に定まっているが, 有相関入力信号時には入力に依存するので, 入力毎に推定の必要がある. しかし, 固有値と固有ベクトルを実時間で求めるのは困難であるため, 最適な更新方向と更新幅を直接求めることはできない. そこで, 実時間で容易にできる線形項のみの無相関化操作を行なうことで, 入力相関行列と誤差曲面を正規型 (無相関入力時) に帰着して, RLS 法を実現する.

無相関化フィルタとしては, Gram-Schmit 直交化の操作を用いる. 特に単一時系列入力の場合は, 格子型 (Lattice) フィルタ, 線形予測器, あるいは離散コサイン変換 (DCT) などが考えられる. 厳密な無相関化或いは白色化を行うときは, 厳密な RLS 法が実現できる. 一方, 近似的な無相関化或いは白色化を用いても, 十分な高速化を図ることができる. 例えば, 白色化に Lattice フィルタを用いる場合に必要な演算量は, RLS 型 Lattice ならば $O(N^2)$ であるが, 一般的な勾配型更新の Lattice ならば $O(N)$ となる. 本算法では, 白色化操作は一次項に対応する入力信号 x_n に対してのみ行なうので, 厳密あるいは近似的な白色化のいずれを用いても, 本算法の総演算量は $O(N^2)$ 以下である.

また, RLS 法は, 収束が早い, 数値的に不安定になりやすいことが知られている. 以下では, $O(N^2)$ の計算量で, 白色化操作を行うと同時に, 安定化も図れる高速な RLS 法を示す.

以下の解析は、RLS 型あるいは勾配型などの白色化手法にも適用されるが、ここでは、RLS 型アルゴリズムに用いる記号を用いることにする。

まず、入力信号を長さ S のスライディング窓を用いて

$$\mathbf{x}_n^T = (x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-S+1})$$

と定義すると、2 節で定義した入力の線形部分 \mathbf{x}_n は、 $N \times S$ の入力行列

$$\mathfrak{X}_n = [\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_{n-1}, \dots, \mathbf{x}_{n-N+1}]^T = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_n^T \\ \mathbf{x}_{n-1}^T \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{n-N+1}^T \end{bmatrix}$$

に置き換えられる。 $N \times N$ の入力相関行列は、(3.1) 式で表される。

$$\mathcal{R}_{xx} = \mathfrak{X}_n \mathfrak{X}_n^T = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_n^T \mathbf{x}_n & \mathbf{x}_n^T \mathbf{x}_{n-1} & \cdots & \mathbf{x}_n^T \mathbf{x}_{n-N+1} \\ \mathbf{x}_{n-1}^T \mathbf{x}_n & \mathbf{x}_{n-1}^T \mathbf{x}_{n-1} & \cdots & \mathbf{x}_{n-1}^T \mathbf{x}_{n-N+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{x}_{n-N+1}^T \mathbf{x}_n & \mathbf{x}_{n-N+1}^T \mathbf{x}_{n-1} & \cdots & \mathbf{x}_{n-N+1}^T \mathbf{x}_{n-N+1} \end{bmatrix}$$

ここで、入力信号は lattice filter 等によって白色化されるとする。まず、 $\mathbf{x}_{n-j+1}, \dots, \mathbf{x}_n$ を用いた \mathbf{x}_{n-j} のいわゆる後向き予測誤差を

$$\mathbf{e}_j^b(n) = (e_j^b(n), e_j^b(n-1), \dots, e_j^b(n-S+1))^T = \mathfrak{X}_n \mathbf{b}$$

$$e_j^b(n) = x_{n-j} - \sum_{k=1}^j b_k x_{n-j-k}, \quad e_0^b(n) = x_n$$

と定義すると、後ろ向き予測ベクトル \mathbf{e}_n^b は $N \times S$ 行列

$$E_n^b = [\mathbf{e}_0^b(n), \mathbf{e}_1^b(n), \dots, \mathbf{e}_N^b(n)]^T = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_0^{bT}(n) \\ \mathbf{e}_1^{bT}(n) \\ \vdots \\ \mathbf{e}_N^{bT}(n) \end{bmatrix}$$

と定義される。それは、 \mathfrak{X}_n から Gram-Schmidt 直交化によって得られる。あるいは、線形変換 T

$$E_n^b = T \mathfrak{X}_n$$

によって表される。後ろ向き予測誤差の相関行列は

$$\begin{aligned} R_b &= E_n^b (E_n^b)^T \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{e}_0^{bT} \mathbf{e}_0^b & \mathbf{e}_0^{bT} \mathbf{e}_1^b & \cdots & \mathbf{e}_0^{bT} \mathbf{e}_N^b \\ \mathbf{e}_1^{bT} \mathbf{e}_0^b & \mathbf{e}_1^{bT} \mathbf{e}_1^b & \cdots & \mathbf{e}_1^{bT} \mathbf{e}_N^b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{e}_N^{bT} \mathbf{e}_0^b & \mathbf{e}_N^{bT} \mathbf{e}_1^b & \cdots & \mathbf{e}_N^{bT} \mathbf{e}_N^b \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{e}_0^{bT} \mathbf{e}_0^b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{e}_1^{bT} \mathbf{e}_1^b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{e}_N^{bT} \mathbf{e}_N^b \end{bmatrix} \\ &= T \mathfrak{X}_n \mathfrak{X}_n^T T^T = T \mathcal{R}_{xx} T^T \end{aligned}$$

$$\mathcal{R}_{xx} = \mathbf{x}_n \mathbf{x}_n^T = T^{-1} E_b E_b^T T^{-T} = T^{-1} R_b T^{-T}$$

実際に, $\|\mathbf{e}_{M+1}^b\| \leq \epsilon$, とすれば, 入力信号ベクトルを N 次元から M 次元へ削減できる.

$$\mathbf{x}_n = [\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_{n-1}, \dots, \mathbf{x}_{n-M+1}]^T = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_n^T \\ \mathbf{x}_{n-1}^T \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{n-M+1}^T \end{bmatrix}$$

この次元の削減された信号に対して, 上記処理を行えば良い. 実際に, lattice filter(RLS あるいは勾配型) を用いたとき, その後向き予測誤差を

$$E_n^b = [\mathbf{e}_0^b(n), \mathbf{e}_1^b(n), \dots, \mathbf{e}_M^b(n)]^T = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_0^{bT}(n) \\ \mathbf{e}_1^{bT}(n) \\ \vdots \\ \mathbf{e}_M^{bT}(n) \end{bmatrix}$$

正規化したもの入力とすれば, 白色信号に対する RLS アルゴリズムを適用すればよい.

以上より, 白色化をすることにより, 演算量の削減と数値的な安定化を得ることができる.

上記固有ベクトル成分の分解と白色化の操作を用いて, 以下の更新アルゴリズムが得られる.

前章の解析によると, $R_b = \Phi \Lambda \Phi^T$, S 次元出力ベクトルを $\mathbf{y}_n = E_n^{bT} \mathbf{W}$ とし, 同次元の希望出力ベクトルを \mathbf{d}_n

$$\mathbf{d}_n = (d_n, d_{n-1}, \dots, d_{n-S+1})^T$$

とすると, 出力の二乗誤差は

$$\begin{aligned} & (\mathbf{d}_n - \mathbf{y}_n)^T (\mathbf{d}_n - \mathbf{y}_n) \\ &= (\mathbf{W} - \mathbf{W}_n)^T E_n^b E_n^{bT} (\mathbf{W} - \mathbf{W}_n) \\ &= (\mathbf{W} - \mathbf{W}_n)^T R_b (\mathbf{W} - \mathbf{W}_n) \\ &= (\mathbf{W} - \mathbf{W}_n)^T \Phi \Lambda \Phi^T (\mathbf{W} - \mathbf{W}_n) \\ & 2(\mathbf{d}_n - \mathbf{y}_n) = 2R_b (\mathbf{W} - \mathbf{W}_n) \end{aligned}$$

Fast RLS algorithm

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{n+1} &= \mathbf{W}_n + \mu R_b^{-1} (\mathbf{d}_n - \mathbf{y}_n) \\ \mathbf{W}_{n+1} &= \mathbf{W}_n + \mu \Phi \Lambda^{-1} \Phi^T (\mathbf{d}_n - \mathbf{y}_n) \end{aligned}$$

上記アルゴリズムの演算は, LMS 法と同様で, $O(N^2)$ である.

7 計算機シミュレーション

提案手法を有効性を確認するため計算機シミュレーションを行なった. Volterra ADF の一次タップ数 N を 20, 二次タップ数を 210 とした. 一次項を考えず, 入力信号 $x_{i(n)}$ は分散 1 の白色 Gaussian 信号を用いた. ステップサイズについては提案手法では 0.003, NLMS 法では 0.1 とした. 観測雑音は SN 比-20[dB] とする. 図 1 のシミュレーションカーブは独立した 30 回の収束特性の平均である.

8 むすび

本論文では, 多チャネル入力に対して, 二次 Volterra ADF の理論解析を行い, その適応推定問題は悪条件であることを示した. さらに, LMS 法と同じ演算量の Volterra ADF の高速 RLS 法を提案した. 提案手法

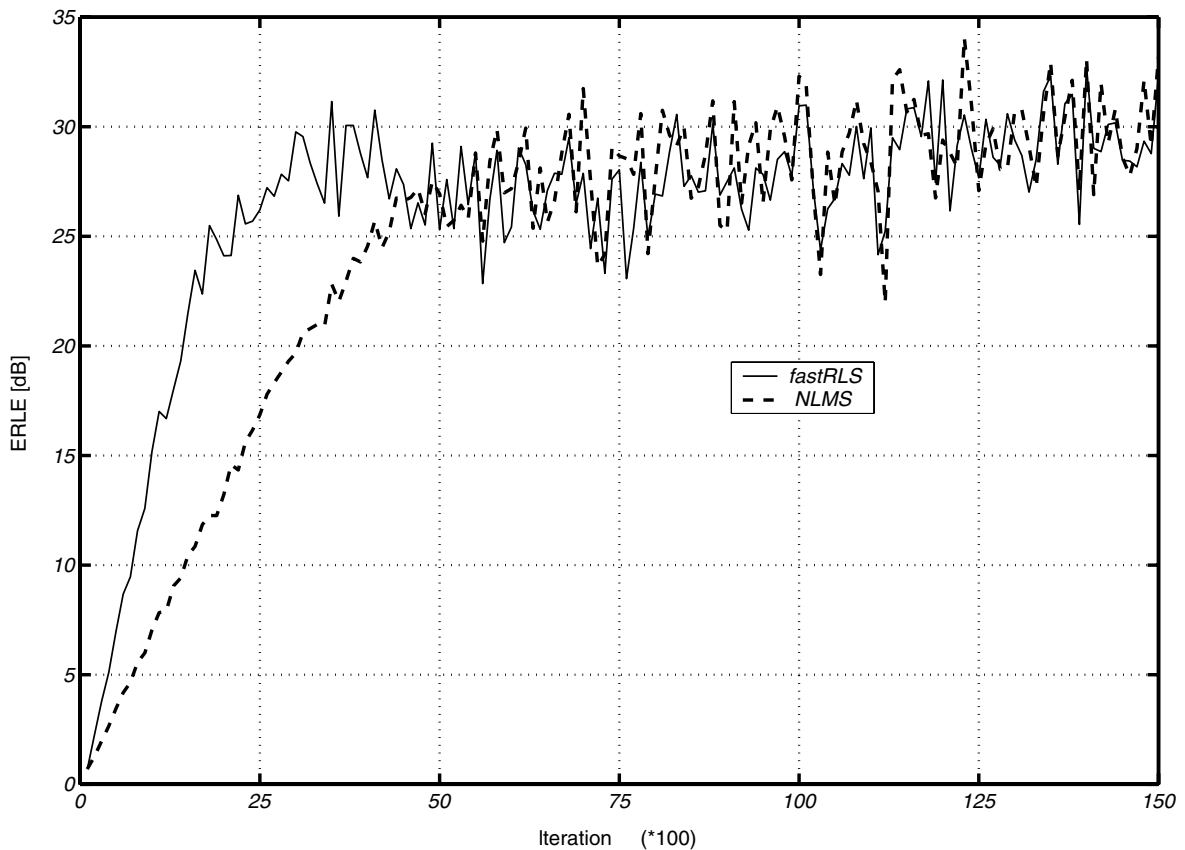


図 1 収束特性シミュレーション結果

は、有色入力信号時には、 $O(N^2)$ で実現される入力信号の無相関化処理を行うことにより、RLS 法の数値安定化も可能となる。RLS 法の $O(N^5)$ の演算量に対して、提案手法の無相関入力信号と有相関入力信号における総演算量は、いずれも $O(N^2)$ である。

参考文献

- [1] V. John Mathews, IEEE SP Magazine, July, 1991.
- [2] W. K. Jenkins et al. Kluwer, 1996.
- [3] 趙 晋輝, 猪股 篤, 信学論 (A), Vol.J82-A, No.6, pp.809-816, June. 1999.
- [4] J. Chao, A. Inomata, S. Uno, Proc. EUSIPCO'98, Sept. 1998.
- [5] 久保田 智規, 宇野 晋平, 趙 晋輝, Proc. of Digital Signal Processing Symposium'98, pp.531-536, IEICE, Japan, Nov. 1998.
- [6] V. John Mathew, Giovanni L. Sicuranza, JOHN WILEY & SONS, inc, 2000.