

6.3.5 粒径別の石礫粒子の移動形態と大礫集団の形成機構

実験における河床表層の状況は、図 6-4 および図 6-5 に示すように、実験初期の $t = 50$ s 付近の時刻において、 $x = 9$ m の水路中央部や、 $x = 13$ m の左右岸など、横断方向に一部の区間で大礫集団が見られる。また、実験後半の $t = 150$ s から $t = 200$ s にかけて $x = 10.5$ m 付近に水路横断方向の全体に亘り大きな大礫集団が形成されている。このように河床表層において大礫集団が形成される要因について考察する。図 6-25 には $t = 42.5$ s から $t = 47.5$ s における小規模な大礫集団が形成されている時刻の粒径別の軌跡を示している。また、図 6-26 には、 $x = 12$ m 付近に横断方向全体に亘り大きな大礫集団が形成され始めた $t = 170$ s - 175 s の時刻の粒径別の軌跡を示した。 x - y 平面の軌跡の図には、背後に河床高コンターを示している。図 6-25 に示す初期の小規模な大礫集団が形成されている時刻の x - y 平面の軌跡では、粒径 70 mm 以下の小粒径粒子は、河床高の凸部を避け、その脇を主に流下しているのに対し、粒径 90 mm 以上の大粒径粒子は 8.5 m 付近の中央部や、13 m 付近の左右側に形成されている凸部の上を転動している。これは、 x - z 平面の軌跡から分かるように、転動する大粒径粒子は、重心が高いためである。即ち、大粒径粒子は河床の凸部と重心より下の位置で衝突するため、上向きの力を受けるのに対し、小粒径粒子は、重心が低いため、凸部を乗り越えることができず迂回して進むようになる。このように大粒径粒子は、小粒径粒子と比較し、凸部を乗り越えやすく、高い位置の高流速を受けながら転動するため、動き出すと平坦な地点では容易には静止出来ない。大粒径粒子が静止する箇所になり得る地点は、転動する大粒径粒子と同等の高さの凸部が河床に形成されている地点であるため、大粒径粒子は集団化し、大礫集団を形成すると考えられる。大礫集団を避けるように河床底面では、水みちが形成され、小粒径粒子は大礫集団の脇を転動することになる。このような機構により河床表層では、大礫集団を形成する箇所とその他の地点で分級が生じることとなる。

次に図 6-26 に示す $x = 12$ m 付近に水路横断方向全体に大礫集団が形成されている時刻の軌跡では、移動する大部分の小粒径粒子は、 $x = 12$ m 付近の大礫集団の凸部の上り坂となる区間で軌跡がとぎれており、大礫集団の直上流部で堆積している様子がわかる。また、水面勾配の大きくなる $x = 13$ m 付近の大礫集団の背後では、活発に移動している様子がわかる。また、大粒径粒子の軌跡について $x = 12$ m に形成されている大礫集団の直上流と大礫集団上部を比較すると、小粒径粒子と同様に大礫集団上部の軌跡が少ないため、大礫集団上流の上り坂部で堆積傾向を示していることがわかる。しかし、大礫集団を乗り越えて移動している軌跡の割合が小粒径粒子と比較して多いことが確認される。また、大礫集団背後の $x = 14$ m 付近で移動する粒子の軌跡が密になり、大礫集団背後で河床からの抜け出しが多くなっていることが確認される。このことから大規模な大礫集団が形成された場合の、大礫集団と粒子の移動形態の関係は、図 6-27 に示す模式図で示した関係となることがわかった。すなわち、大規模な大礫集団が形成されると大礫集団の上部では石礫粒子の移動は少なくなり、大礫集団上流部で堆積傾向を、大礫集団下流部で洗掘傾向を示し、このような作用が継続し、大礫集団の凸部が上流に移動することにより、石礫粒子群が上流から下流に流下することがわかった。このような移動形態は、大礫集団の凸部と水面が同位相となる射流場の特徴的な石礫粒子群の移動形態であり、常流の場合の粒子の移動形態の詳細についても把握する必要がある。

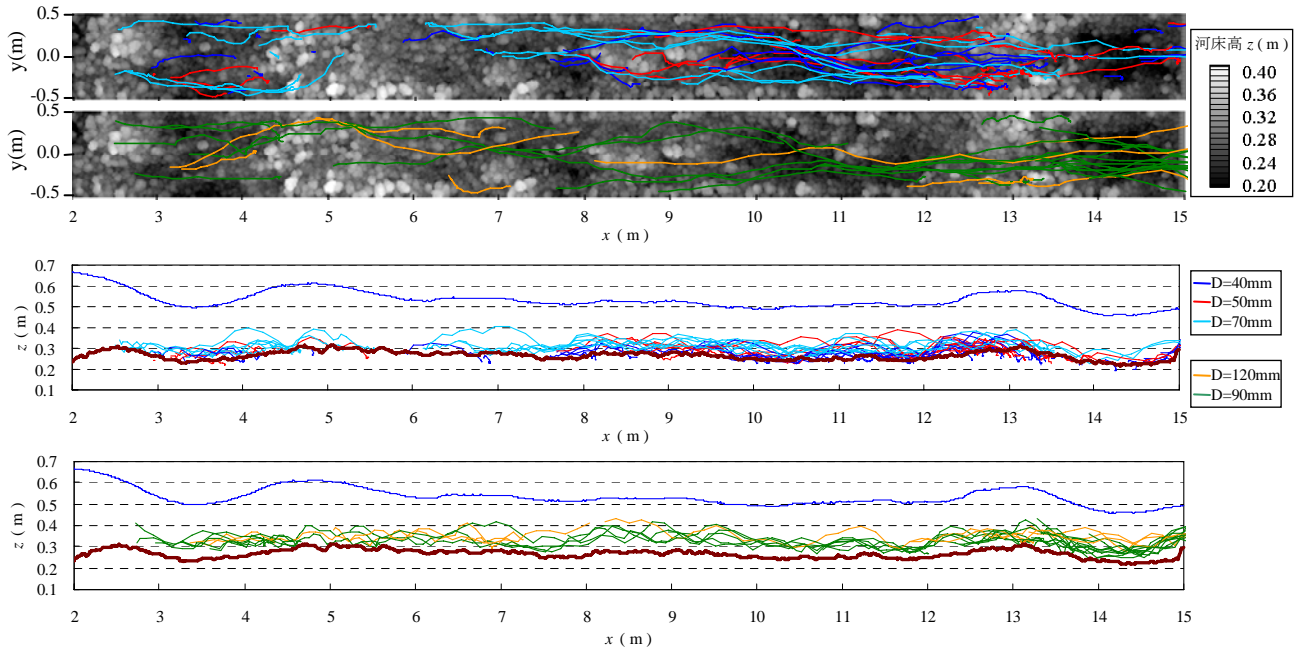


図 6-25 石礫の軌跡 (t=42.5s-47.5s) (上 2 段 : x-y 平面の軌跡, 下 2 段 : x-z 平面の軌跡)

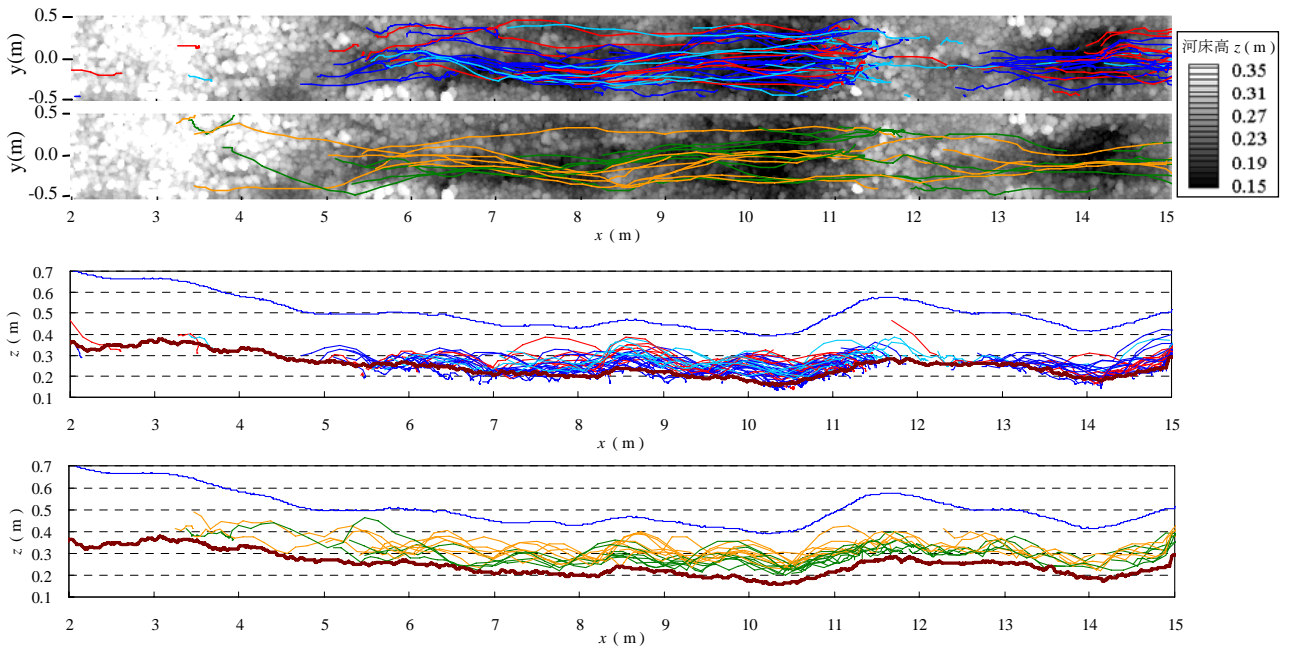


図 6-26 石礫の軌跡 (t=170s-175s) (上 2 段 : x-y 平面の軌跡, 下 2 段 : x-z 平面の軌跡)

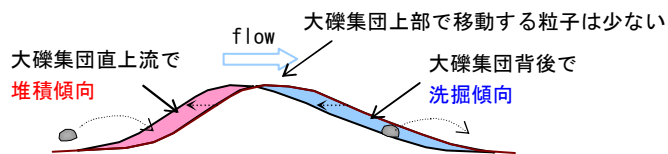


図 6-27 大規模な大礫集団が形成された場合の粒子の移動

図 6-28 から図 6-33 に $t = 42.5 \text{ s} - 43.5 \text{ s}$ の時間の水路上部から見た各粒径の石礫粒子の軌跡と $t = 42.5 \text{ s}$ の時刻の流線を示す。図は、 $t = 42.5 \text{ s}$ 状態の粒子の内、速度 0.3 m/s 以下の粒子は全て暗い色で表示し、所定の粒径の石礫粒子の速度が 0.3 m/s 以上のものを明るく表示し、 $t = 42.5 \text{ s}$ 以降の 43.5 s までの 0.1 s 毎の所定の粒径の石礫粒子の速度が 0.3 m/s 以上の粒子のみ表示したものである。これらの図より、小粒径粒子は、河床表層の大粒径粒子を避けて移動し、大粒径粒子は、河床表層の大粒径粒子を乗り越えて移動している様子がわかる。また、図 6-34 から図 6-39 には、同時刻の $x = 8.5 \text{ m}$ 地点の右岸から望んだ軌跡を示す。これより、小粒径粒子は、流速の小さい河床近傍を移動しているのに対し、大粒径粒子は、流速の大きな上部を移動している様子が確認出来る。

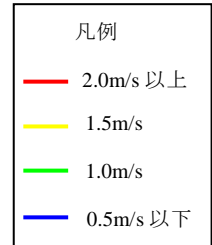
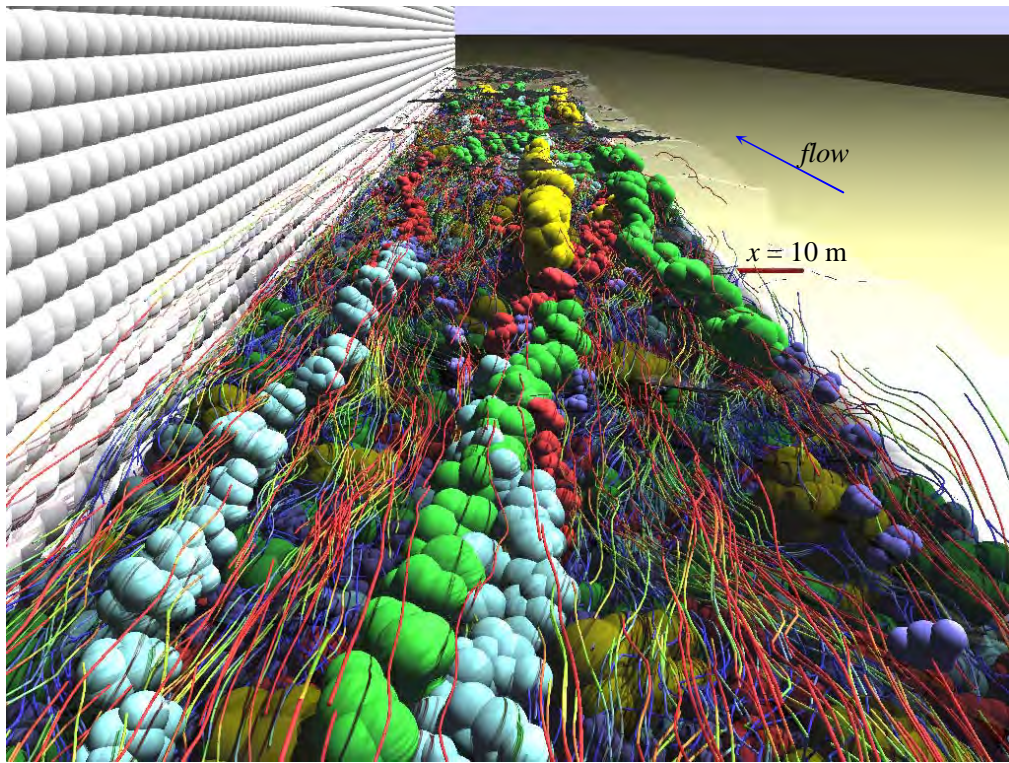


図 6-28 石礫粒子の軌跡(全粒径) ($t = 42.5 \text{ s} - 43.5 \text{ s}$)

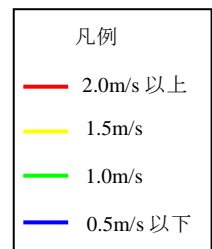
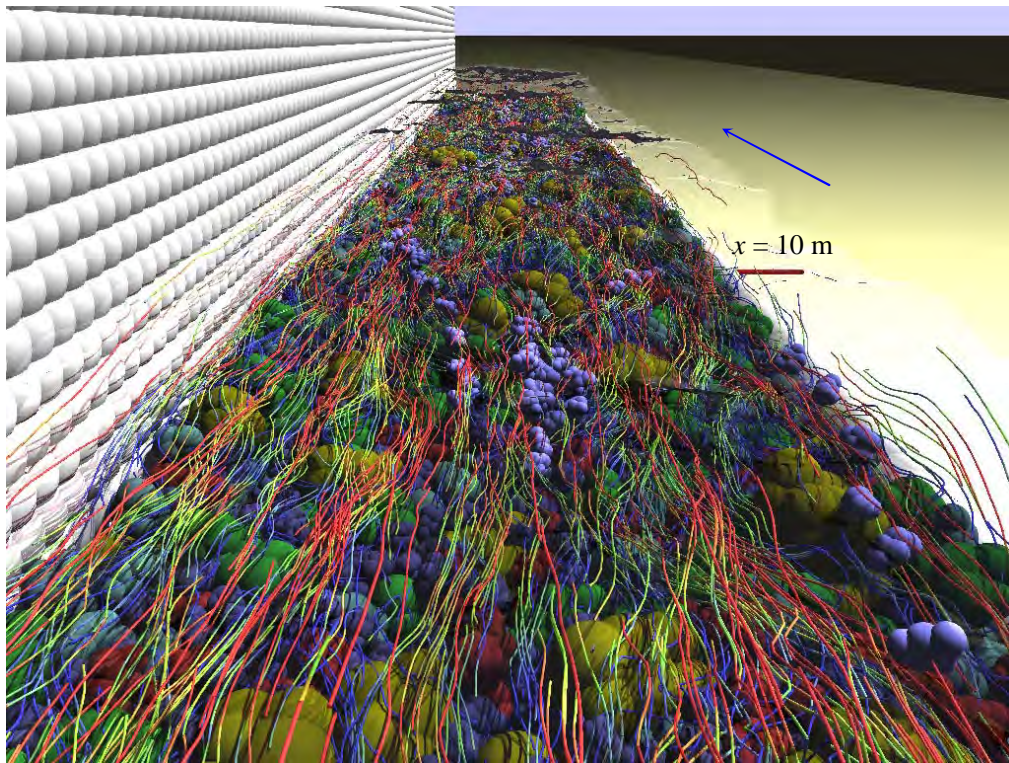


図 6-29 石礫粒子の軌跡 ($D = 40 \text{ mm}$) ($t = 42.5 \text{ s} - 43.5 \text{ s}$)

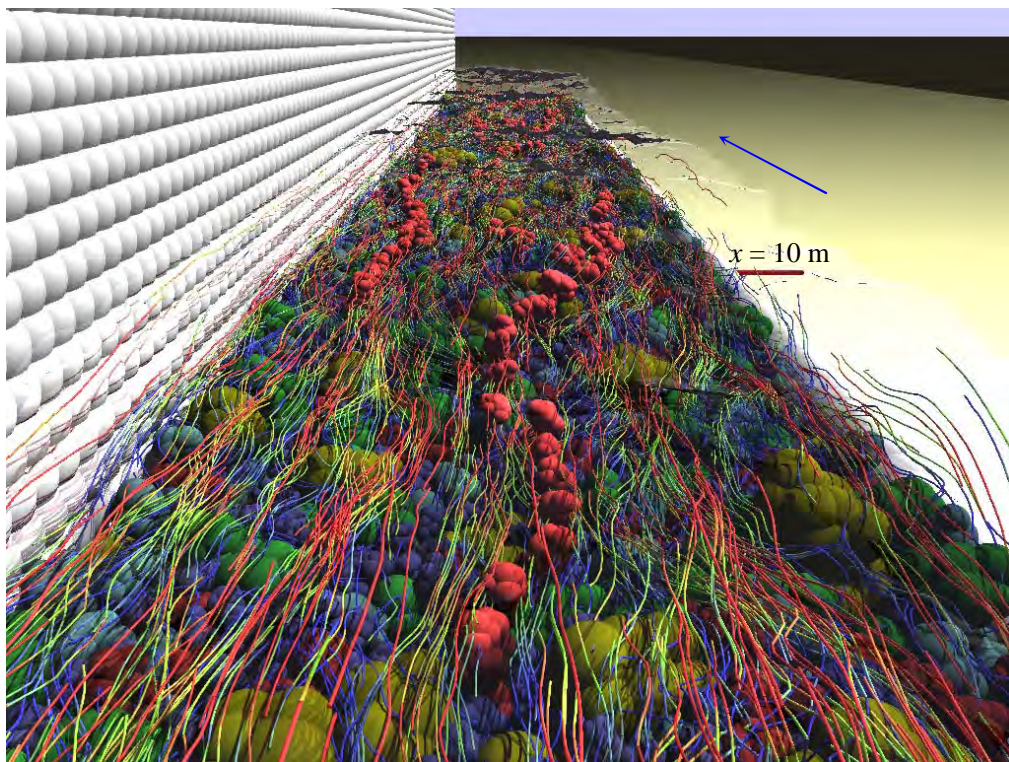


図 6-30 石礫粒子の軌跡 ($D = 50 \text{ mm}$) ($t = 42.5 \text{ s} - 43.5 \text{ s}$)

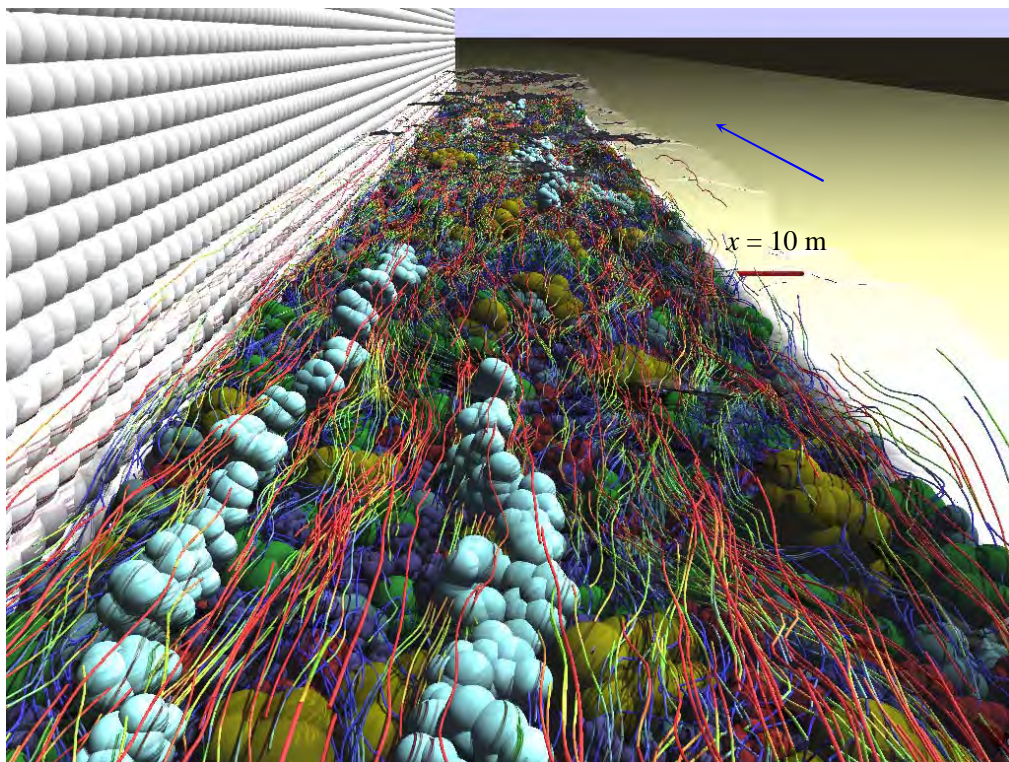
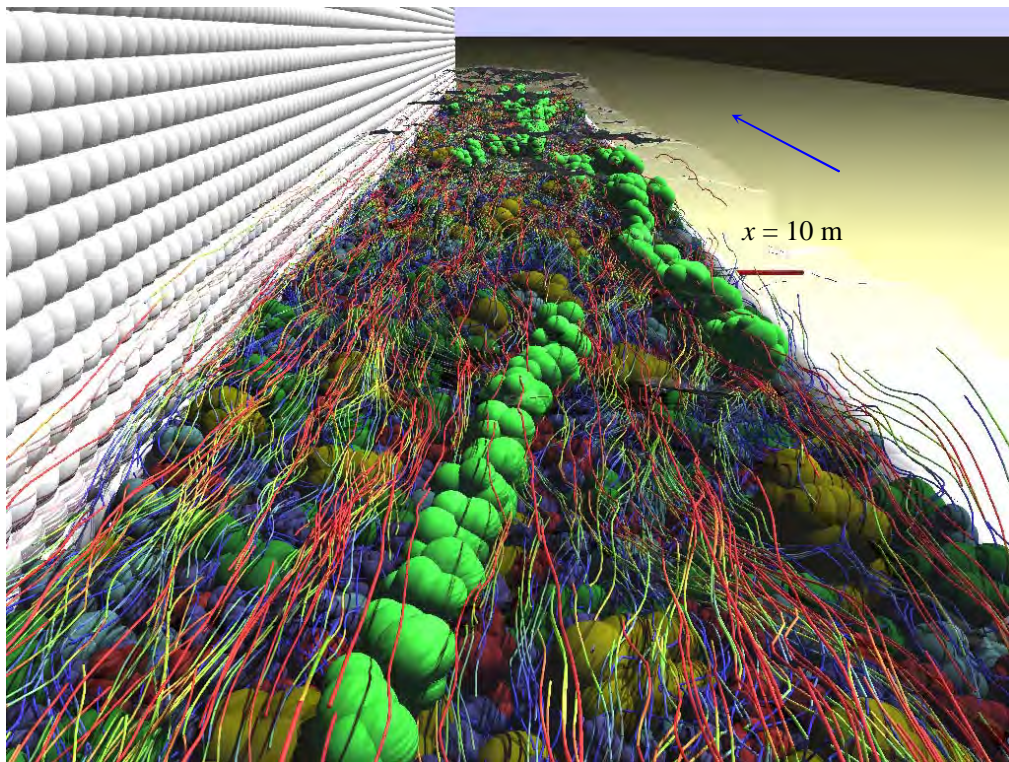
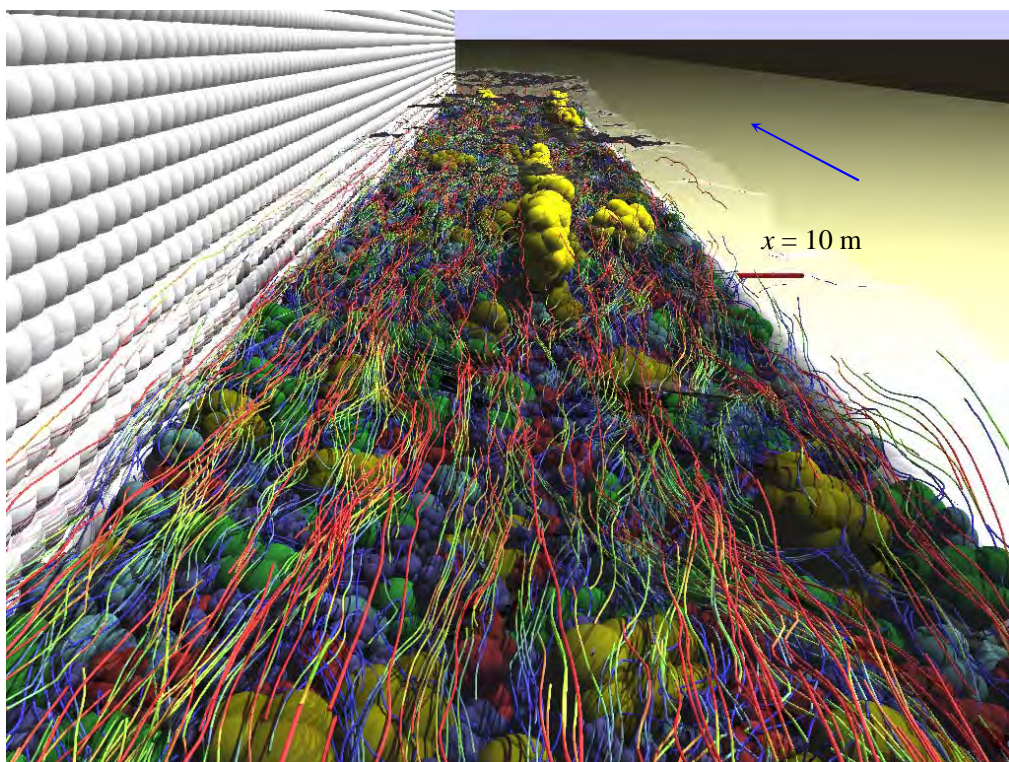


図 6-31 石礫粒子の軌跡 ($D = 70 \text{ mm}$) ($t = 42.5 \text{ s} - 43.5 \text{ s}$)



凡例	
—	2.0m/s 以上
—	1.5m/s
—	1.0m/s
—	0.5m/s 以下

図 6-32 石礫粒子の軌跡 ($D = 90 \text{ mm}$) ($t = 42.5 \text{ s} - 43.5 \text{ s}$)



凡例	
—	2.0m/s 以上
—	1.5m/s
—	1.0m/s
—	0.5m/s 以下

図 6-33 石礫粒子の軌跡 ($D = 120 \text{ mm}$) ($t = 42.5 \text{ s} - 43.5 \text{ s}$)

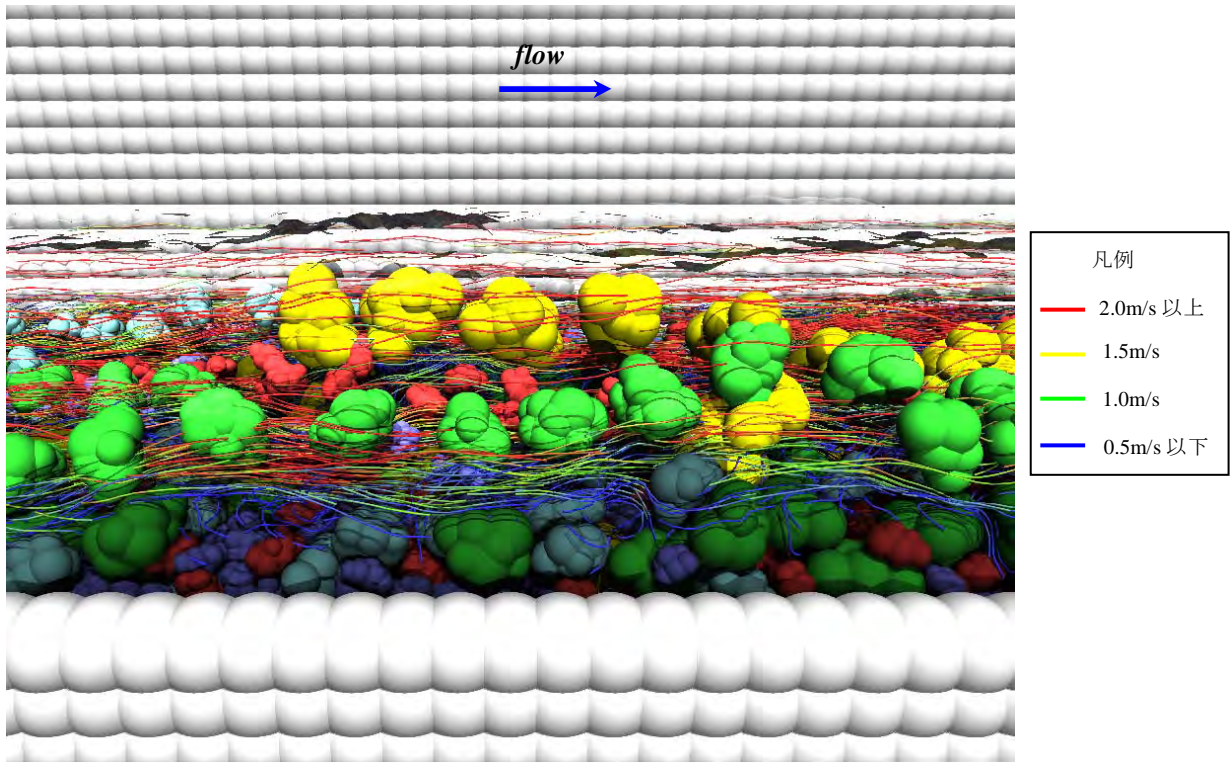


図 6-34 石礫粒子の軌跡 右岸から水路中央を望む(全粒径) ($x = 8.5 \text{ m}$) ($t = 42.5 \text{ s} - 43.5 \text{ s}$)

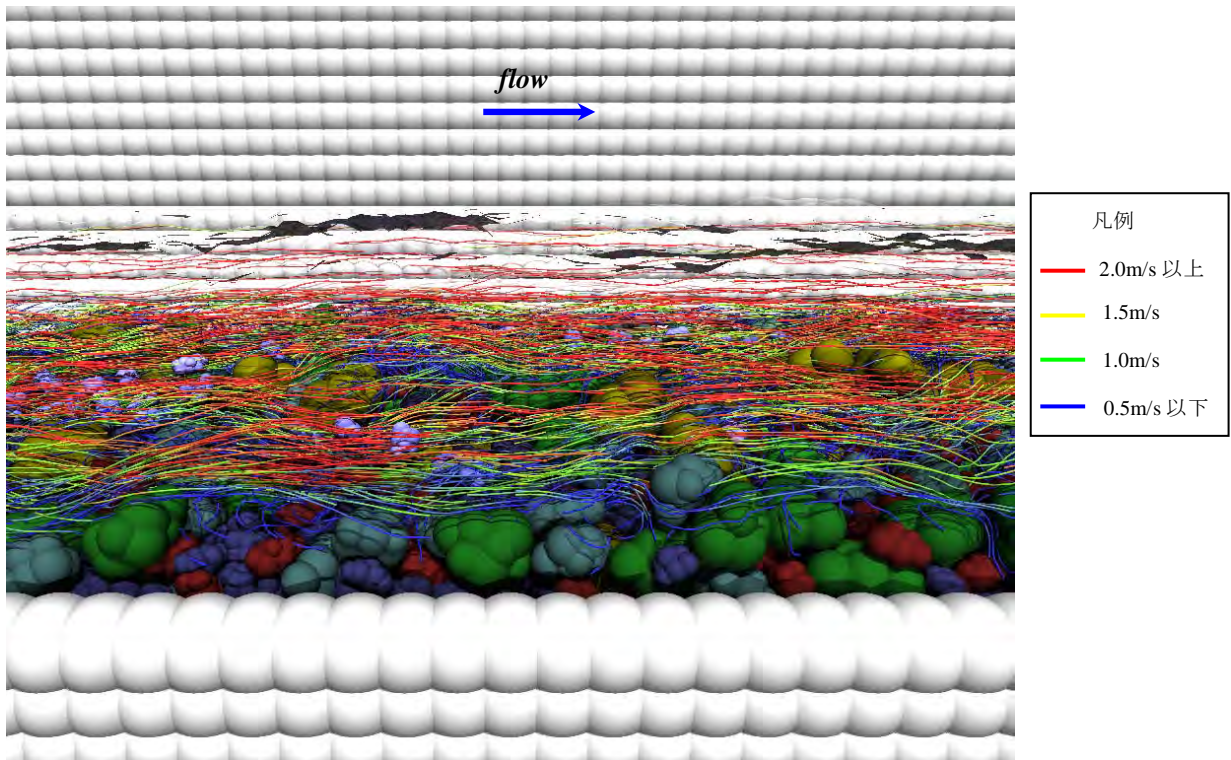


図 6-35 石礫粒子の軌跡 右岸から水路中央を望む($D=40\text{mm}$) ($x = 8.5 \text{ m}$) ($t = 42.5 \text{ s} - 43.5 \text{ s}$)

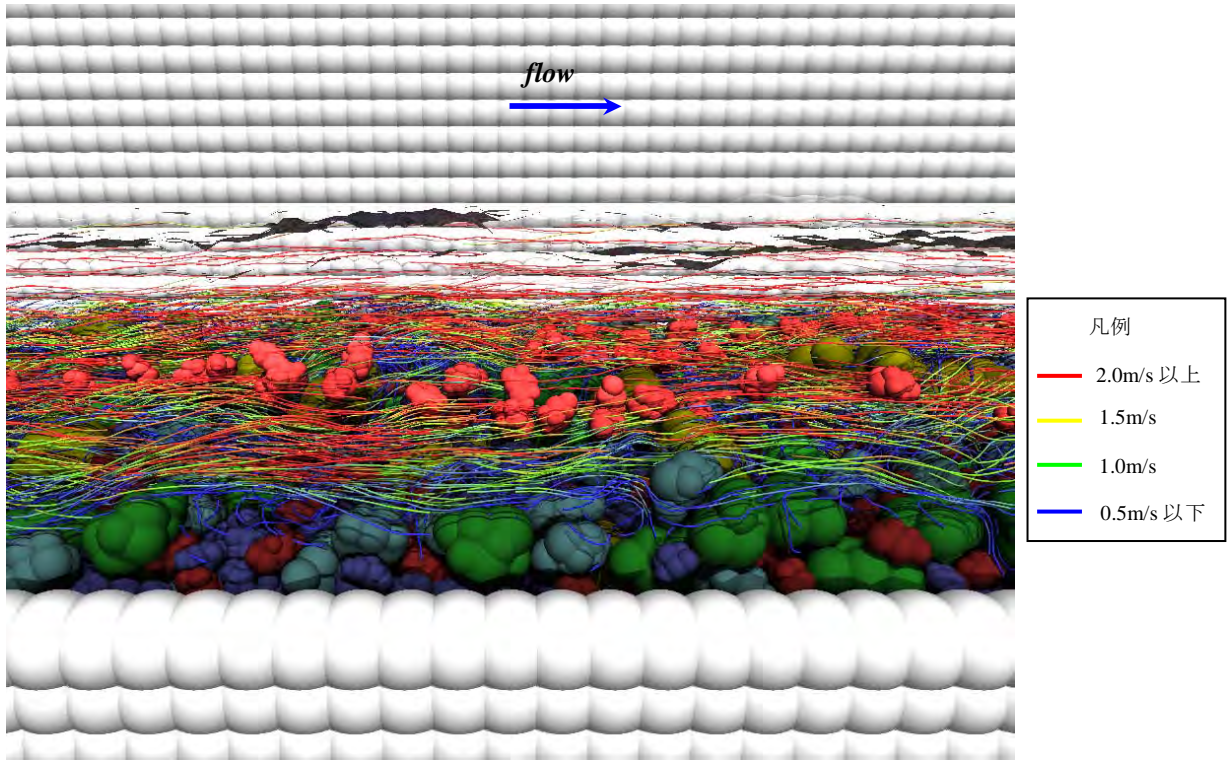


図 6-36 石礫粒子の軌跡 右岸から水路中央を望む(D=50mm) ($x = 8.5 \text{ m}$) ($t = 42.5 \text{ s} - 43.5 \text{ s}$)

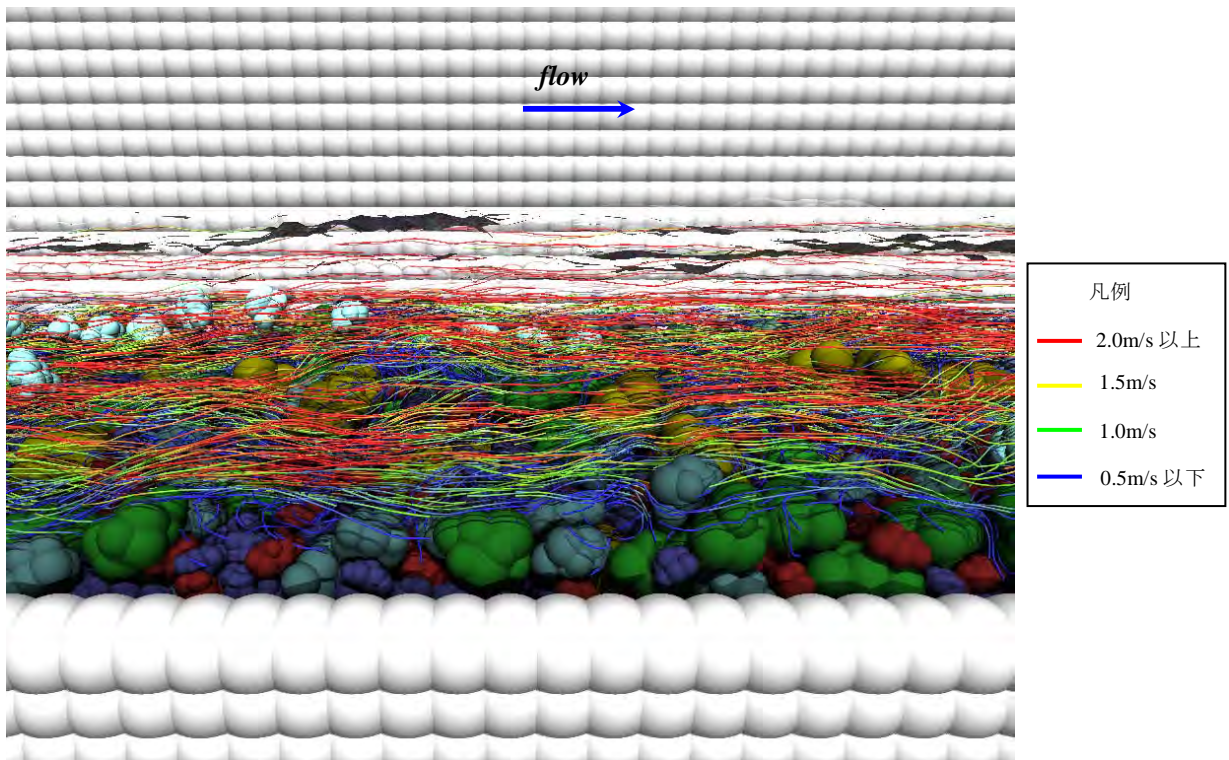


図 6-37 石礫粒子の軌跡 右岸から水路中央を望む(D=70mm) ($x = 8.5 \text{ m}$) ($t = 42.5 \text{ s} - 43.5 \text{ s}$)

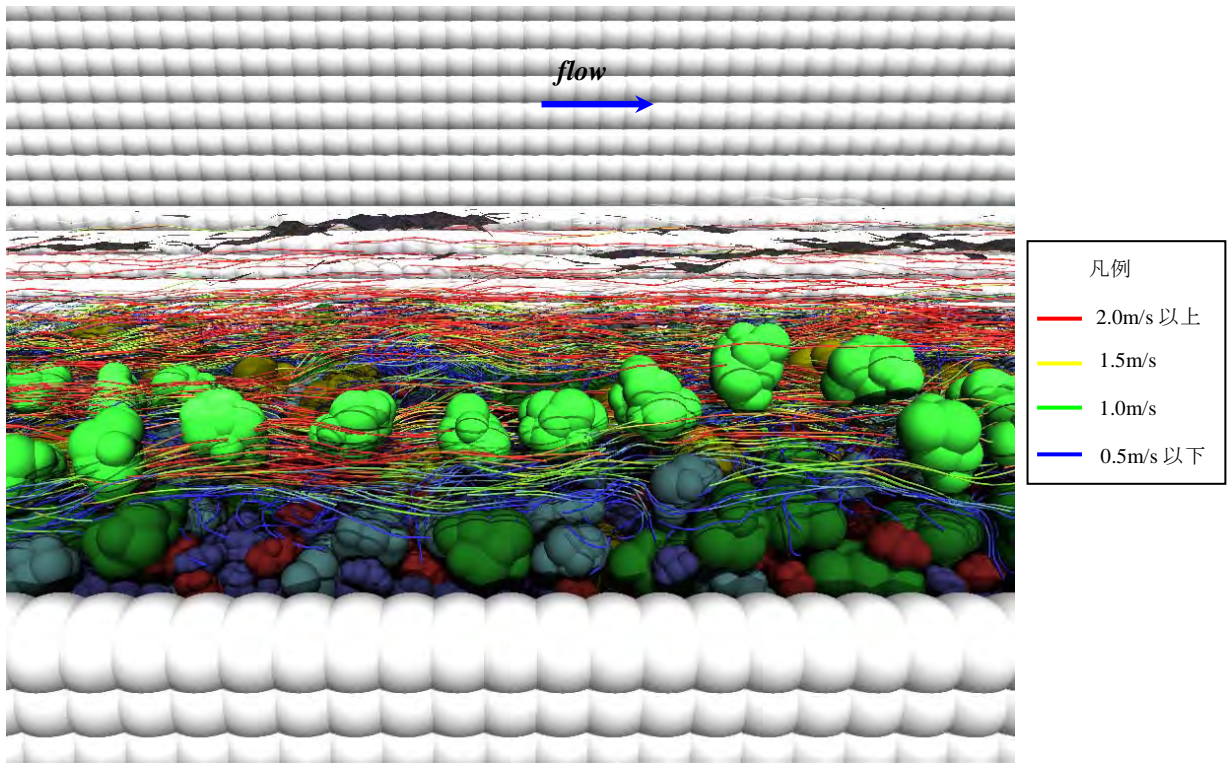


図 6-38 石礫粒子の軌跡 右岸から水路中央を望む(D=90mm) ($x = 8.5 \text{ m}$) ($t = 42.5 \text{ s} - 43.5 \text{ s}$)

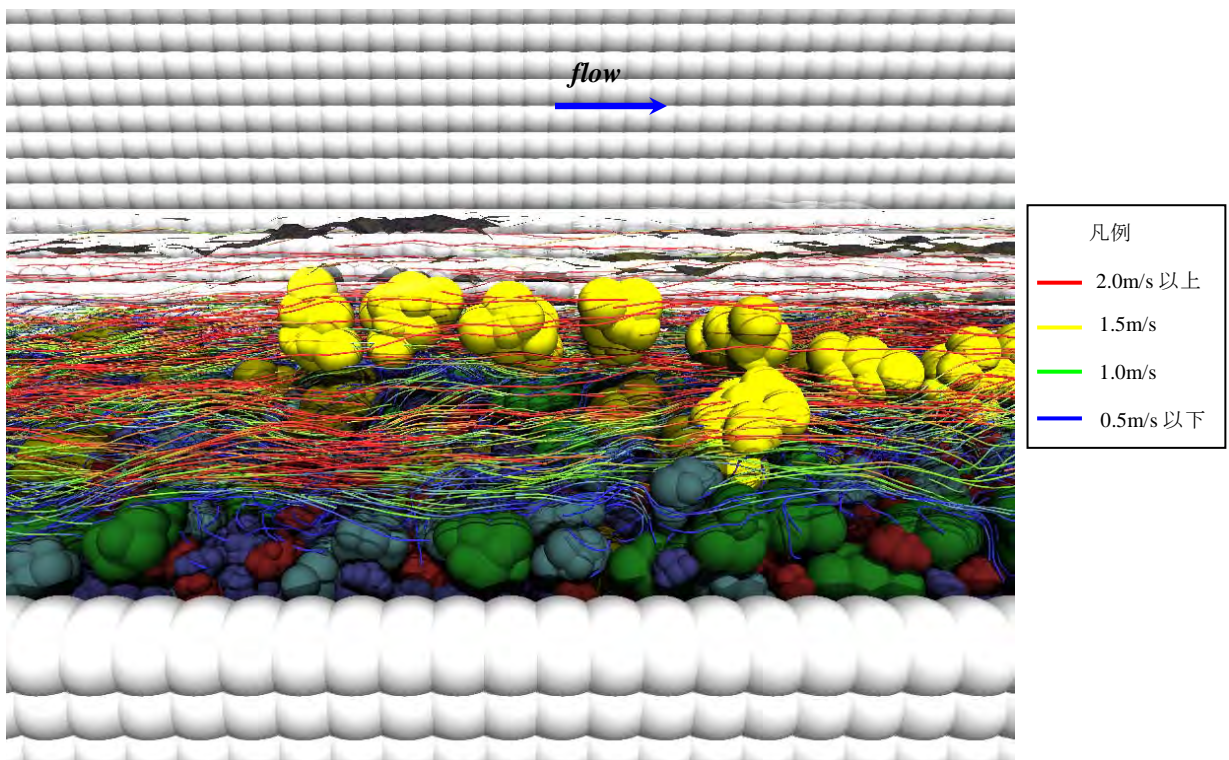


図 6-39 石礫粒子の軌跡 右岸から水路中央を望む(D=120mm) ($x = 8.5 \text{ m}$) ($t = 42.5 \text{ s} - 43.5 \text{ s}$)

6.3.6 移動および停止時における石礫粒子の形の影響

移動開始および停止時に石礫粒子がどのような向きをとり、どのような力を受けるのかについて考察する。石礫粒子の向きを調べるにあたり、長軸を石礫粒子の主慣性モーメントの最も小さい値に対する固有ベクトルと同一直線上の軸と定義し、短軸を主慣性モーメントの最も大きい値に対する軸と定義した。このように定義される長軸、短軸は直交する。長軸は慣性主軸の内、最も回転し易い軸である。短軸は回転しづらい軸であり、最も平らな面の面ベクトルに近い向きを示す。石礫粒子の長軸および短軸を図 6-42 に示す。図 6-42 には石礫粒子の移動開始および停止時における x 方向の速度、石礫粒子間の接触力および流体力を水中重量の x 方向成分で無次元化した値、長軸と x 軸の間の角の大きさ、および短軸と z 軸の間の角の大きさの各粒子の平均値の時間変化を示した。この図における移動開始時および停止時は、それぞれ上段の図の赤線で示す速度がゼロから離れる時刻およびゼロになる時刻である。

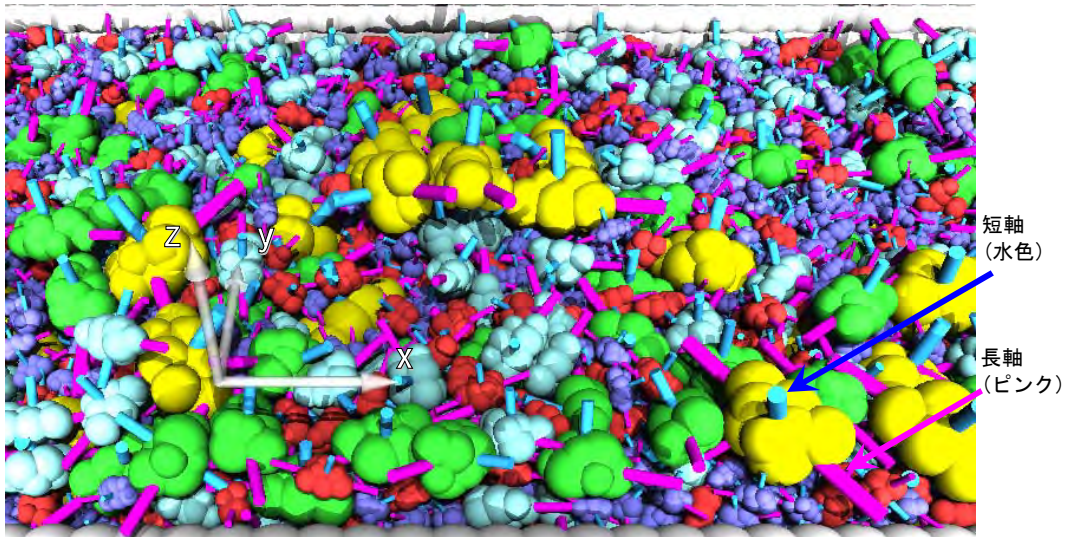


図 6-40 石礫粒子群の長軸および短軸の状況

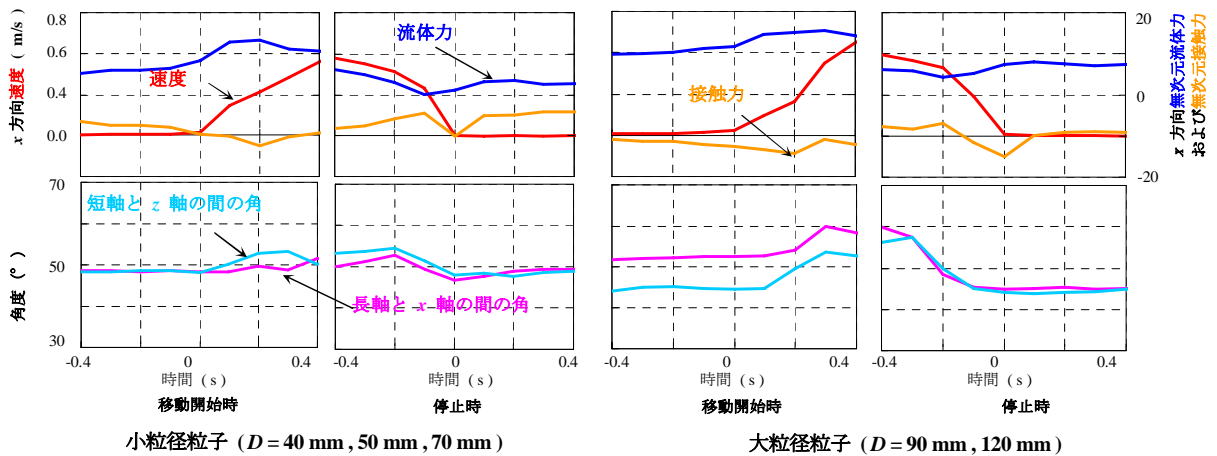


図 6-41 移動・停止時の石礫粒子の向き・接触力・流体力の変化

大粒径粒子の移動開始時の図より、大粒径粒子が移動する際は、長軸と x 軸の間の角を大きくする。これより、静止している状態で長軸を流下方向に向けていた粒子が、移動時にはその向きを変え流下方向に転動しやすい向きをとることがわかる。短軸と z 軸の間の角も大きくなることから、静止時には最も平らな面を鉛直上向きに向けていた粒子が、その面の向きを変えていることがわかる。その結果、水流に対し投影面積を大きくするため、上段の青で示す流体力は、石礫粒子の向きの変化と共に増加している。このような移動時の特長は小粒径粒子にも見られるが、その変化は、大粒径粒子ほど顕著ではない。その理由として図 6-20 に示すように小粒径粒子が停止する表層の低部では、周囲の大粒径粒子の配置により流向が大きく変化することや、小粒径粒子は、大粒径粒子の隙間に位置するため、移動・停止時に周囲の大粒径粒子により形成される不規則な窪地の形状の影響を受けることが要因と考えられる。また、大粒径粒子の停止時に着目すると、長軸および短軸の変化は、移動時とは逆になり、長軸が x 軸方向を向き、かつ短軸を z 軸方向に向けるため、平らな面を上向きに向けながら停止する様子がわかる。特徴的な現象としては、大粒径粒子は停止時に x 方向に大きな負の接触力を受けて停止し、その後の流体力が移動時に対し増加しているのに対し、小粒径粒子は停止とともに流体力が減少している。この違いは、小粒径粒子は、大粒径粒子背後の流速が低下する地点で停止することが出来るのに対し、大粒径粒子は大きな流速を受ける表層の上部に位置するため、自らの向きを流体力が小さくなる方向に傾けるだけでは停止することが出来ず、周り的大粒径粒子などに支えられて停止するためと考えられる。

このように大粒径粒子は小粒径粒子と比較し、水路の流下方向の流れを素直に受け、かつ、周りの粒子の配置の影響を小粒径粒子ほど受けないため、流体抵抗の小さい向きを取りやすいことが分かった。これより、河床表層で石礫粒子がほぼ同様の向きをとる覆瓦構造は、主に大粒径粒子ほど顕著にこの構造を成し、底部の小粒径粒子は大粒径粒子ほど顕著に流れの向きに粒子の向きを傾けないことが分かった。本実験の結果では、大粒径粒子が停止している状況では、長軸と x 軸の間の角は 45° 程度であることから、流下方向と横断方向のほぼ中間向きをとっていることがわかる。このことから、石礫粒子は停止時に長軸を流下方向に傾けるが、停止前の移動時には長軸を横断方向に傾けているため、停止時は、移動時の石礫粒子の向きの影響を残し、長軸を完全に流下方向には向けず、流下方向と横断方向の中間程度の向きを示したと考えられる。

6.3.7 河床表層の石礫粒子の状態と河床に作用する流体力の関係

石礫粒子群が水流に対し、どのように抵抗しているかを考察するため、石礫粒子群に作用する力を、 $x - y$ 平面における単位面積当たりに換算し、応力の次元を持つ量として評価し、この応力と河床の凹凸、および河床の石礫粒子の大きさの関係について調べた。図 6-42 および図 6-43 にそれぞれ $t = 45$ s および $t = 230$ s における水路中央部の河床高および水位縦断を上段、石礫粒子群に作用する応力の縦断図を中段、表層の平均粒径の縦断図を下段に示す。石礫粒子群に作用する応力は、式(6.1)により水路床から表層を移動する石礫粒子の上面までの体積積分値として求めた x 方向の石礫粒子群に作用する力を x - y 平面の面積で除して単位面積当たりの力として表した。

$$\tau_{f,xx} = \frac{\iiint \alpha \left\{ -\frac{\partial P}{\partial x_1} + \rho \frac{\partial}{\partial x_j} \{ 2(v + v_i) S_{1j} \} \right\} dx dy dz}{\iint dx dy} \quad (6.1)$$

横断方向の積分範囲は大粒径程度の幅として $y = -0.15$ m ~ 0.15 m とし、縦断方向の積分範囲は、流体計算セルと同様に 0.01 m とした。また、下段の表層粒径は、水路中央部の 0.15 m 四方の平面より求めた表層の平均粒径を示しており、平面上に見える粒子の面積で重み付け平均をした径として求めている。図 6-42 の $x = 9$ m, $x = 10.5$ m および $x = 13.9$ m や図 6-43 の $x = 3$ m, $x = 3.9$ m, $x = 8.8$ m および $x = 10.5$ m 等では、石礫粒子に作用する力は、局所的に大きくなっている箇所があり、このような流体力が局所的に大きくなっている地点で河床全体に作用する流体力の大部分を占めていることがわかる。

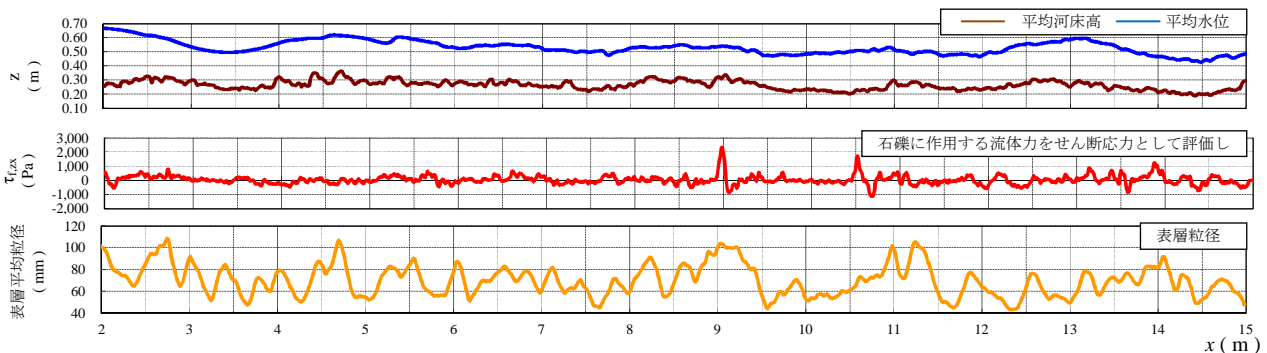


図 6-42 水位，河床高，石礫粒子群に作用する流体力および表層粒径に関する縦断 ($t = 45$ s)

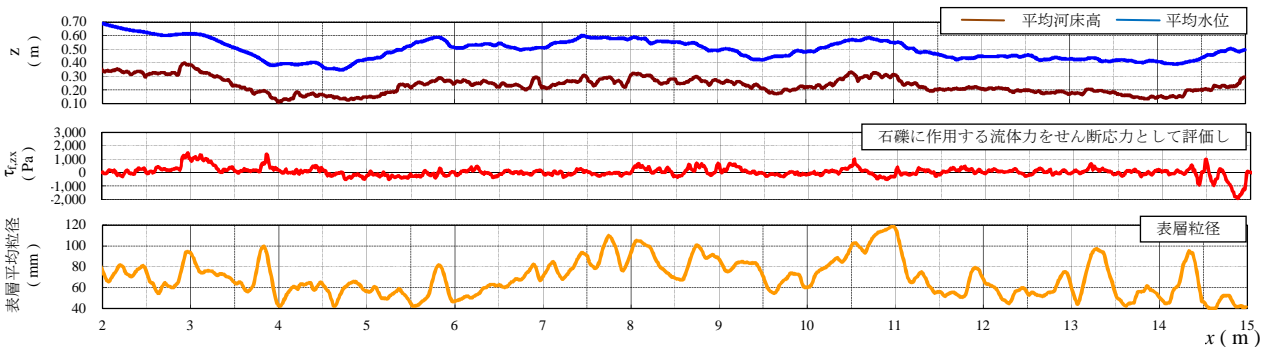


図 6-43 水位，河床高，石礫粒子群に作用する流体力および表層粒径に関する縦断 ($t = 230$ s)

図 6-44 には、前述した流体力が局所的に大きくなっている地点の状況を確認するため、河床高コンター、表層粒子径の存在状況および式(6.1)より求められる石礫粒子群に作用する x 方向流体力のコンター図および横断平均の水面・河床高の縦断面図を示した。これより、流体力が大きくなっている地点は、大礫集団が形成されている地点であり、その詳細は、大礫集団の背後の水面勾配が大きくなっている地点で大きくなっていることが確認出来る。

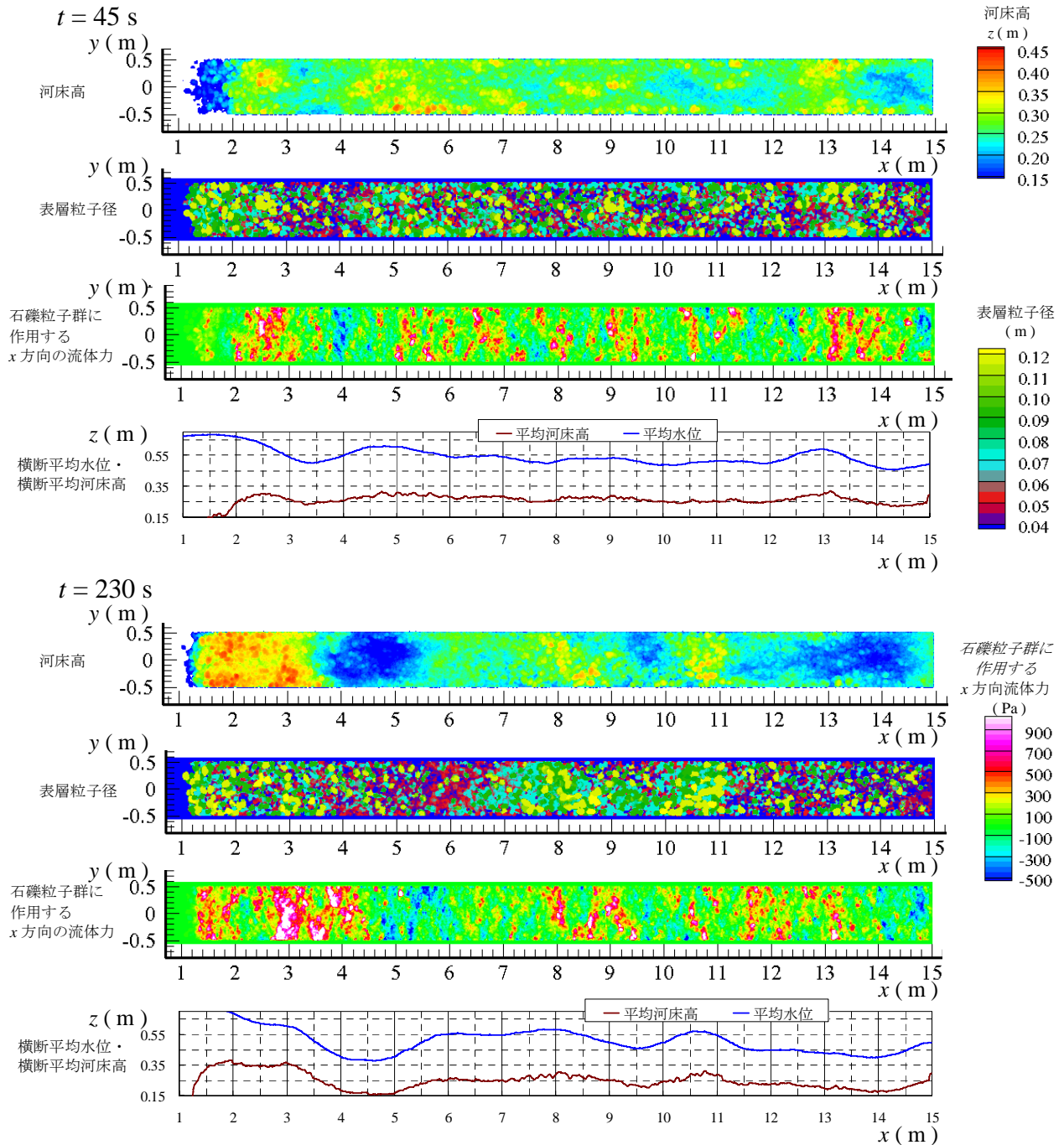


図 6-44 河床高コンター、表層粒子径の粒径毎の存在状況、石礫粒子群に作用する流体力および横断平均水位・横断平均河床高縦断面図 (上段 : $t = 45$ s, 下段 : $t = 230$ s)

6.3.8 大礫集団の形成に伴う応力鎖の変化

河床にある石礫粒子群がどのように互いの力を伝え、流れに抵抗しているかについて考察する。接触する石礫粒子群が及ぼし合う力を可視化するため、応力を分担する粒子を結んだ線として定義される応力鎖を用いて接触力を可視化する。本研究における応力鎖は図 6-45 に示すように接触力を及ぼし合う石礫の重心を結び、力の大きさを円柱の半径として表示した。

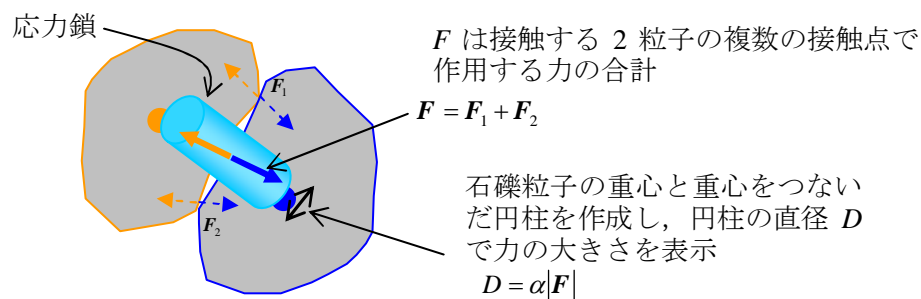


図 6-45 接触力の可視化方法

図 6-46 には、 $x = 11 \text{ m}$ 付近において横断方向全体に亘る大きな大礫集団が形成される前の $t = 150 \text{ s}$ の時刻と大きな大礫集団が形成された後の $t = 200 \text{ s}$ の時刻の石礫粒子群と流れの状況と前述の定義による応力鎖を示している。図には、石礫粒子に作用する浮力を除いた流体から受ける力をピンクのベクトルとして合わせて示した。

河床表層に大きな大礫集団が形成されていない $t = 150 \text{ s}$ の状況では、河床表層に水色の円柱で示す応力鎖は表示されておらず、河床表層の石礫粒子間で大きな接触力は作用していない様子がわかる。一方、河床表層に大きな大礫集団が形成された $t = 200 \text{ s}$ の状況では、石礫は大きな応力鎖を河床面に対し浅い角度で形成している。応力鎖の発生は、応力鎖により軸方向の圧縮力が担われるため、連続体として見た場合のせん断強度の増加に寄与することが知られている^{例えば 4)}。このことから大礫集団は応力鎖を形成し、構造を成して流れに抵抗していると言える。また、砂床河川の様にある深さで流動的に粒子が移動する場合と比較し、石礫河川のように転動を主体とした移動形態の方が大粒径粒子は衝突時に反発し移動できる範囲も小さく、より集団化し、応力鎖を形成し易い状態になると考えられる。このように大礫集団の形成および応力鎖の形成は、石礫河床が流れに対して抵抗する際の特徴的かつ支配な要素になると考えられる。

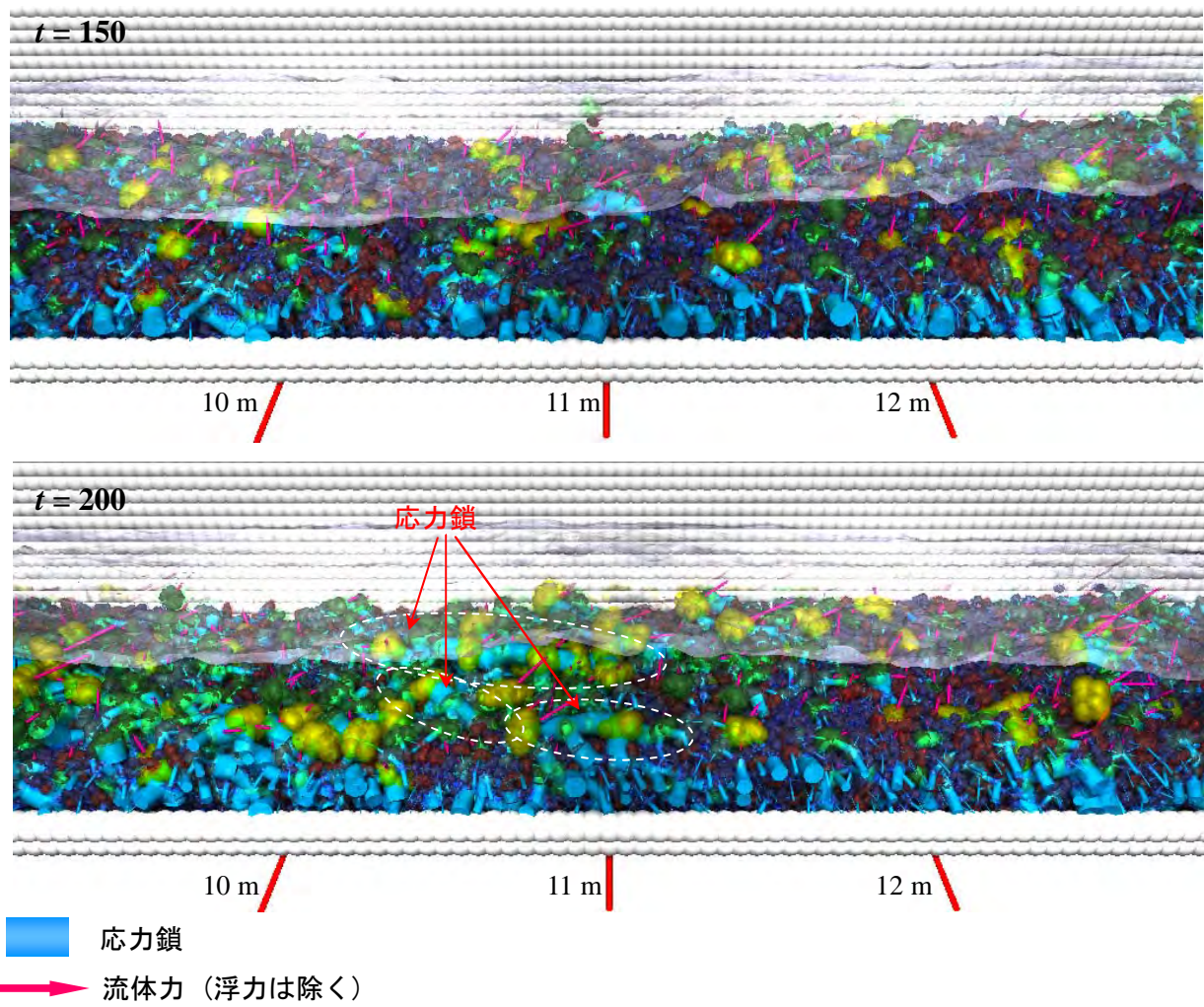


図 6-46 石礫間に作用する流体力および応力鎖の状況 (上段: $t = 150$ s, 下段: $t = 200$ s)

6.4 第6章のまとめ

種々の形状を有する石礫粒子群からなる混合粒径移動床数値水路を構築し、実験や現地観測では計測が困難であった河床付近の水流と石礫粒子群の運動を解析的に示し、可視化することで三次元的な現象を理解することを可能とした。これより、以下に示す主な結論を得た。

- ・ 構築した移動床数値水路を活用することで、粒径毎の移動形態の特徴、種々の形状と大きさを有する石礫粒子群が水流に対して抵抗する機構および凹凸を有する河床上の水流の運動について明らかにした。
- ・ 本実験では、水路下流端で計測した単位時間に流出する粒子の数は、最も小さい粒径の粒子が多く、小粒径粒子は活発に移動しているものの、流砂量としては、大粒径粒子の方が大きい。この理由として、大粒径粒子は、相対的に高い位置で、高流速を受けるのに対し、小粒径粒子は、表層で静止する大粒径粒子底部の流速の小さい位置に存在し、移動時においても、移動する大粒径粒子と同程度の高い位置までは跳躍せず、高流速を受けないためと考えられる。
- ・ 転動する大粒径粒子は、高い位置を移動するため、高速流を受け平坦箇所では容易には止まらず、河床に静止している大粒径粒子との衝突によって停止することで大礫集団を形成する。一方、小粒径粒子は、大礫集団の脇の水みちを中心に流下する。このような機構により、河床を構成する粒径の分級現象が生じることが明らかとなった。
- ・ 大粒径粒子が移動する際は、長軸を横断方向に向け、停止する際は、長軸を流下方向に傾けるとともに、平らな面を上に向けて他の大粒径粒子に支えられて停止する。小粒径粒子が停止する際も同様の傾向を示すが、小粒径粒子は、大粒径粒子により形成される不規則な窪地の形状の影響を受けることや、周囲の大粒径粒子の影響により流向が定まらないことから、移動や停止時における特徴的な向きの変化は、大粒径粒子ほど顕著には示さない。このことから、石礫河川で一般に見られる覆瓦構造は、主に大粒径粒子により形成される構造であることが明らかとなった。
- ・ 水流に抵抗する力は主に大礫集団を形成することにより担われることが明らかとなった。また、河床近傍の流速分布は、特に大礫集団が形成されている地点において鉛直方向に大粒径のスケール程度の区間で上向きに凸となり、対数則から大きくずれる分布形となることを示した。

第 6 章の参考文献

- 1) 長田健吾, 福岡捷二 : 石礫河川の河床変動機構と表層石礫の凹凸分布に着目した二次元河床変動解析法, 土木学会論文集 B1 (水工学), Vol.68, No.1, pp.1-20, 2012.
- 2) 後藤仁志, Abbas Yeganeh-Bakhtlary, 酒井哲郎 : 混相流モデルと個別要素法の融合による高濃度掃流層の数値解析, 土木学会論文集 No.649/II-51, pp.17-26, 2000.
- 3) 池田宏 : 二粒径混合砂礫の流層に関する水路実験, 筑波大学水理実験センター報告, No.8, pp. 1-15, 1984
- 4) Cates, M.E., Wittmer, J.P., Bouchaud, J.-P., and Claudin, P. : Jamming, force chains, and fragile matter, Physical review letters, Vol.81, No.9, pp.1841-1844, 1998.

第7章 結論

7.1 結論

本研究で得られた結果を以下に示す。

- ・ 本研究では、石礫河川の水流と石礫粒子群の運動機構について計算力学的アプローチにより解明するため、種々の形状を有する石礫粒子群からなる数値移動床水路を構築した。
- ・ 実寸大の石礫粒子群の運動を測定した大型水路実験結果を用い、構築した固定床数値水路での解析結果に適用、比較検討した。両者の比較より、数値水路を流下する石礫粒子群の運動は、実験により得られた石礫粒子群の運動を適切に説明することを示した。
- ・ 石礫粒子群の複雑な運動は、礫形状が球形では表現出来ず、球とは異なる形状を適切に考慮することが重要であることを明らかにした。
- ・ 構築した種々の形状を有する石礫粒子群からなる数値移動床水路を用い、混合粒径移動床の数値実験を実施し、これまで計測が困難であった水流と石礫粒子群の三次元運動および石礫粒子群と水流に作用する力を解析的に示すことにより、水流および石礫粒子群の運動機構を明らかにした。
- ・ 数値実験の結果より、石礫粒子群の粒径別の移動軌跡の特徴、石礫粒子の向きの粒径別の移動・停止時における挙動の特徴、大きな礫が集団を形成する機構、および大礫集団が水流に及ぼす力等を明らかにした。
- ・ これらの検討結果より、構築した種々の形状を有する石礫粒子群からなる数値移動床水路を用い、石礫粒子群の運動および水流との相互干渉の機構、特徴的な河床構造を明らかにすることは、石礫河川の移動床水理を理解する上で新しい有力な研究手法となり得ることを示した。

7.2 今後の課題

今後の課題を以下に示す。

- ・ 本研究では、計算コストの制約から、数値実験における水理条件および河床材料の条件が限定されている。今後は、水理条件および河床材料の条件を広く変化させた検討が必要である。
- ・ 河床材料として小さな粒径の果たす役割は大きい。小粒径粒子群の運動を解像するためには流体計算セルのサイズをより小さくする必要があるため、さらに大規模な計算を実施できる計算機の活用や大規模並列計算に対応したプログラミングが必要である。
- ・ 洪水等流れの非定常性が粒子群の運動に及ぼす影響の検討が必要である。

謝辞

私は、平成 16 年 4 月にパシフィックコンサルタンツ株式会社に入社し、6 年後の平成 22 年 4 月に中央大学大学院社会人博士課程に入学しました。この 3 年間本当に多くの方に支えていただき、本論文をまとめることが出来ました。ここに感謝の意を表します。

中央大学研究開発機構教授 福岡捷二先生には、いつも研究内容や方針について大局的な視点から助言とご指摘をいただきました。また、技術的面に限らず、研究に対する取り組み方などあらゆる面からご指導を賜りました。心より御礼申し上げます。

中央大学理工学部教授 檜山和男先生には、解析法や、研究のとりまとめ方などについて貴重なアドバイスを頂きました。心より御礼申し上げます。

中央大学研究開発機構准教授 内田龍彦先生には、本研究における解析モデルの構築にあたり、数値解析の豊かな知識を踏まえた多くの助言をいただきました。厚く御礼申し上げます。

阿南工業高等専門学校講師（前 中央大学研究開発機構准教授）長田健吾先生には、移動床問題や、個別要素法などの数値解析に関する幅広い経験から、解析法の選定や、解析結果の解釈について多くのご助言、ご指導を頂きました。心より御礼申し上げます。

中央大学理工学部教授 山田正先生、中央大学理工学部教授 水口優先生、中央大学理工学部教授 田口東先生、群馬大学大学院工学研究科教授 清水義彦先生には、研究の過程で発表を聞いていただいた際や、論文審査を通じて有益なご助言とご指導を賜りました。ここに御礼申し上げます。

岩佐結子様には、研究室生活を送る上で多くのご配慮をいただきました。厚く御礼申し上げます。中央大学研究開発機構助教 後藤岳久先生、中央大学研究開発機構助教 竹村吉晴先生をはじめとする河川工学研究室の皆様には、研究内容等について共に議論し、多くのアドバイスを頂くとともに、皆様の研究に対する取り組みが、私にとって刺激となり研究を進めることが出来ました。心より感謝致します。

パシフィックコンサルタンツ株式会社の藤堂正樹河川部長をはじめとする河川部の皆様には、私が大学で学ぶにあたり、ご支援いただきました。心から感謝いたします。

最後に、私の研究を理解し、支えてくれた家族に心より感謝致します。

平成 25 年 3 月

補遺

第3章の補遺

A.3. 固液混相場の一流体モデル

ここでは，混相流場の一流体モデルを牛島ら¹⁾の文献を参考に導出し，混相流場を一流体として扱う際の課程を確認すると共に，混相流場の一流体モデルを用いた固体部分の評価方法について確認する．

A.3.1 混相流場の一流体モデルの導出

混相流場の一流体モデルの導出にあたり，**図-A.3.1**に示すようにある任意の立方体における k 番目の相の占める割合を α_k と定義する．定義より

$$\sum_k \alpha_k = 1 \quad (\text{A.3.1})$$

である．

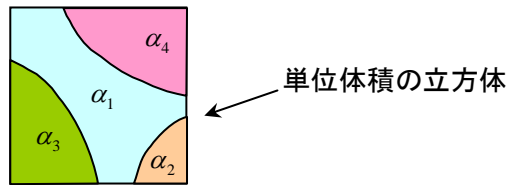


図-A.3.1 体積割合の定義

まず，連続式について誘導する．微小体積における連続式は次のように記述できる．

$$\frac{\partial \alpha_k \rho_k}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_k \rho_k u_{k,j}}{\partial x_j} = 0 \quad (\text{A.3.2})$$

ここに， ρ_k ， u_{kj} はそれぞれ k 相の密度および x_j 方向の流速成分である．また，総和規約を用いるものとし，各相には k, l などの添え字を用い， x_1, x_2, x_3 の方向成分には i, j などを用いる．

また，各相の集合体の流れ場が非圧縮条件であれば次の式が成り立つ．

$$\frac{\partial \alpha_k u_{k,j}}{\partial x_j} = 0 \quad (\text{A.3.3})$$

式(A.3.2)を変形し，

$$\frac{\partial \alpha_k \rho_k}{\partial t} + \rho_k \frac{\partial \alpha_k u_{k,j}}{\partial x_j} + \alpha_k u_{k,j} \frac{\partial \rho_k}{\partial x_j} = 0 \quad (\text{A.3.4})$$

となる．ここで，

ここで，左辺第二項は，非圧縮条件式(A.3.3)を考慮し， $\rho_k \frac{\partial \alpha_k u_{k,j}}{\partial x_j} \approx 0$ と仮定すると式(A.3.4)

は次のように変形できる．

$$\frac{\partial \alpha_k \rho_k}{\partial t} + \alpha_k u_{k,j} \frac{\partial \rho_k}{\partial x_j} = 0 \quad (\text{A.3.5})$$

一流体モデルを導出するため、混相流場を一流体と見なした場合の密度 ρ および流速 u_i をそれぞれ次のように体積平均および質量平均として定義する。

$$\rho = \alpha_k \rho_k \quad (\text{A.3.6})$$

$$u_i = \frac{\alpha_k \rho_k u_{ki}}{\alpha_i \rho_i} = \frac{\alpha_k \rho_k u_{k,i}}{\rho} \quad (\text{A.3.7})$$

これより、式(A.3.2)は次のようになる。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (\text{A.3.8})$$

これを展開し、次の式を得る。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} = 0 \quad (\text{A.3.9})$$

また、次のように k 相の流速 $u_{k,i}$ の代表値 u_i との差分を $\tilde{u}_{k,i}$ と定義し、

$$u_{k,i} = u_i + \tilde{u}_{k,i} \quad (\text{A.3.10})$$

式(A.3.5)に代入すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \alpha_k (u_j + \tilde{u}_{k,j}) \frac{\partial \rho_k}{\partial x_j} &= 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \alpha_k u_j \frac{\partial \rho_k}{\partial x_j} + \alpha_k \tilde{u}_{k,j} \frac{\partial \rho_k}{\partial x_j} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.3.11})$$

ここで、第二項は次の式に変形出来るが次式の右辺第二項を無視し、

$$\alpha_k u_j \frac{\partial \rho_k}{\partial x_j} = u_j \frac{\partial \alpha_k \rho_k}{\partial x_j} - \rho_k u_j \frac{\partial \alpha_k}{\partial x_j} \quad (\text{A.3.12})$$

式(A.3.11)を次のように変形する。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + u_j \frac{\partial \alpha_k \rho_k}{\partial x_j} + \alpha_k \tilde{u}_{k,j} \frac{\partial \rho_k}{\partial x_j} &= 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + u_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} + \alpha_k \tilde{u}_{k,j} \frac{\partial \rho_k}{\partial x_j} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.3.13})$$

上式と式(A.3.9)の比較より、次式を得る。

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = \frac{\alpha_k \tilde{u}_{k,j}}{\rho} \frac{\partial \rho_k}{\partial x_j} = \frac{\Delta m}{\rho} \quad (\text{A.3.14})$$

ここに、 Δm は次のように定義した。

$$\Delta m = \alpha_k \tilde{u}_{k,j} \frac{\partial \rho_k}{\partial x_j} \quad (\text{A.3.15})$$

一流体モデルでは、代表流速 u_j の発散をゼロとして取り扱うが、このことは、 $\Delta m/\rho$ の誤差が常に生じることとなる。 $\tilde{u}_{k,j}$ は、 k 相の流速の代表流速からの差分であるが、この値が、小さければ上記の誤差は、小さくなる。従って、一流体モデルでは、相対速度が小さい場、または、計算セル内の相対速度が小さくなるように計算セルを小さくして解く必要がある。

次に一流体モデルの運動方程式について誘導する。

混相流場の運動方程式は次のように記述出来る。

$$\frac{\partial \alpha_k \rho_k u_{k,i}}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_k \rho_k u_{k,i} u_{k,j}}{\partial x_j} = \alpha_k \rho_k g_i + \frac{\partial \alpha_k \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (\text{A.3.16})$$

左辺第1項慣性項は、次のように代表密度および代表流速を用いて記述出来る。

$$\frac{\partial \alpha_k \rho_k u_{k,i}}{\partial t} = \frac{\partial \rho u_i}{\partial t} \quad (\text{A.3.17})$$

移流項を次のように変形する。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_k \rho_k u_{k,i} u_{k,j}}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \alpha_k \rho_k (u_i + \tilde{u}_{k,i}) (u_j + \tilde{u}_{k,j}) \right\} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \alpha_k \rho_k (u_i u_j + u_i \tilde{u}_{k,j} + \tilde{u}_{k,i} u_j + \tilde{u}_{k,i} \tilde{u}_{k,j}) \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.3.18})$$

ここで、上式の括弧内の第2項は、次のようになる。

$$\begin{aligned} \alpha_k \rho_k u_i \tilde{u}_{k,j} &= \alpha_k \rho_k u_i (u_j - u_{k,j}) \\ &= \alpha_k \rho_k u_i u_j - \alpha_k \rho_k u_i u_{k,j} \\ &= \rho u_i u_j - \rho u_i u_j = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.3.19})$$

同様に式(A.3.18)の括弧内第3項もゼロとなる。従って、移流項は、次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_k \rho_k u_{k,i} u_{k,j}}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\alpha_k \rho_k \tilde{u}_{k,i} \tilde{u}_{k,j}) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j) + \Delta M \end{aligned} \quad (\text{A.3.20})$$

ここに、 ΔM は次のように定義した。

$$\Delta M = \frac{\partial}{\partial x_j} (\alpha_k \rho_k \tilde{u}_{k,i} \tilde{u}_{k,j}) \quad (\text{A.3.21})$$

式(A.3.16)の運動方程式の右辺第2項の応力項は次のように評価される。

$$\alpha_k \tau_{k,ij} = \frac{\partial}{\partial x_i} (\alpha_k p_k) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \alpha_k \mu_k \left(\frac{\partial u_{k,i}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{k,j}}{\partial x_i} \right) \right\} \quad (\text{A.3.22})$$

圧力項は $p_k = p$ として、次のように変形出来る。

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\alpha_k p_k) = \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad (\text{A.3.23})$$

ここで、応力項第2項の偏差応力を変形するため、以下のように第2項のひずみによる応力の部分を変形する。

$$\begin{aligned} \alpha_k \mu_k \left(\frac{\partial u_{k,i}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{k,j}}{\partial x_i} \right) &= \mu_k \left\{ \frac{\partial \alpha_k u_{k,i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \alpha_k u_{k,j}}{\partial x_i} - \left(u_{k,i} \frac{\partial \alpha_k}{\partial x_j} + u_{k,j} \frac{\partial \alpha_k}{\partial x_i} \right) \right\} \\ &= \frac{\mu_k}{\rho_k} \left\{ \frac{\partial \alpha_k \rho_k u_{k,i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \alpha_k \rho_k u_{k,j}}{\partial x_i} - \left(\alpha_k u_{k,i} \frac{\partial \rho_k}{\partial x_j} + \alpha_k u_{k,j} \frac{\partial \rho_k}{\partial x_i} \right) - \left(\rho_k u_{k,i} \frac{\partial \alpha_k}{\partial x_j} + \rho_k u_{k,j} \frac{\partial \alpha_k}{\partial x_i} \right) \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.3.24})$$

ここで、括弧内の第3項以降を無視し、ひずみと粘性係数の部分の平均化を個別に行うと次式となる。

$$\alpha_k \mu_k \left(\frac{\partial u_{k,i}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{k,j}}{\partial x_i} \right) = \frac{\alpha_i \mu_i}{\alpha_i \rho_i} \left(\frac{\partial \rho u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{A.3.25})$$

$\alpha_i \mu_i$ 各相の平均的な粘性係数として μ とし表すと次のようになる。

$$\alpha_k \mu_k \left(\frac{\partial u_{k,i}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{k,j}}{\partial x_i} \right) = \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial \rho u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{A.3.26})$$

さらに、括弧内を次のように変形する。

$$\alpha_k \mu_k \left(\frac{\partial u_{k,i}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{k,j}}{\partial x_i} \right) = \frac{\mu}{\rho} \left(\rho \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \rho \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + u_i \frac{\partial \rho}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \right) \quad (\text{A.3.27})$$

括弧内第3項および第4項の密度の空間変化を無視し、ひずみによる応力を次のようにモデル化する。

$$\alpha_k \mu_k \left(\frac{\partial u_{k,i}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{k,j}}{\partial x_i} \right) = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{A.3.28})$$

上記の式の変形を用いることで、式(A.3.16)の混相流の運動方程式から次の一流体モデルの運動方程式が得られる。

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} = \rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right\} - \Delta M \quad (\text{A.3.29})$$

密度の空間変化が小さいと仮定し、代表的な動粘性係数 $\nu = \mu/\rho$ と定義し、さらに勾配型で表記すると次式が得られる。

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = g_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right\} - \frac{\Delta M}{\rho} \quad (\text{A.3.30})$$

ここに右辺最終項は、式(A.3.21)で表される代表流速と k 相の偏差流速の移流で輸送される運動量である。一般に一流体モデルでは、式(A.3.14)に示される連続式の密度の輸送誤差 Δm および運動方程式(A.3.30)における運動量の誤差 ΔM は無視される。

A.3.2 剛体の運動方程式と固液混相流の解法との関係

a) 並進の運動方程式

弾性体の並進の運動方程式は次のように記述出来る²⁾.

$$\int_{\partial V} \mathbf{T}(\mathbf{n}) dS + \int_V \rho \mathbf{g} dV = \int_V \rho \mathbf{a} dV \quad (\text{A.3.31})$$

ここに V : 物体の体積, ∂V : 物体の表面積, $\mathbf{T}(\mathbf{n}) = \sigma_{ij} n_j \mathbf{e}_i$ であり, σ_{ij} : 応力テンソル, n_j 検討する面の法線ベクトル, ρ : 密度, \mathbf{g} : 重力加速度, \mathbf{a} : 加速度である.

発散定理により, 次のように変形出来るため,

$$\int_{\partial V} \mathbf{T}(\mathbf{n}) dS = \int_{\partial V} \sigma_{ij} n_j \mathbf{e}_i dS = + \int_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \mathbf{e}_i dV \quad (\text{A.3.32})$$

式(A.3.31)は次のように変形出来る.

$$\int_V \rho a_i dV = \int_V \left(\rho g_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right) dV \quad (\text{A.3.33})$$

ここで σ_{ij} は等方応力 $-p = \sigma_{ij}/3$ とその差分を用いて一般的に次のように記述される.

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + 2\mu'_s S'_{s,ij} \quad (\text{A.3.34})$$

ここに S_{ij} は次に示されるひずみテンソルである. v_i は i 方向の変位である.

$$S'_{s,ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{A.3.35})$$

ここでこの応力 σ_{ij} の一部である $2\mu'_s S'_{s,ij}$ を次のように分解する.

$$2\mu'_s S'_{s,ij} = 2\mu_f S_{ij} + \tau_{s,ij} \quad (\text{A.3.36})$$

$$\tau_{s,ij} = 2\mu'_s S'_{s,ij} - (2\mu_f S_{ij}) \quad (\text{A.3.37})$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{A.3.38})$$

ここに, μ_f は流体の粘性係数, であり, u_i は速度である. $\tau_{s,ij}$ は, 弾性体のひずみ応力 $2\mu'_s S'_{s,ij}$ における混相流場の一流体モデルで解析されるひずみ応力テンソルからの差分を示し, 混相流場の一流体モデルでは評価されない弾性体の剛性や, 衝突によるひずみを示す. $\tau_{s,ij}$ を用いて, 剛体の応力テンソルを表示すると次のようになる.

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + 2\mu_f S_{ij} + \tau_{s,ij} \quad (\text{A.3.39})$$

この応力 σ_{ij} を式(A.3.33)に代入して

$$\int_V (\rho a_i) dV = \int_V \left(\rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial (2\mu_f S_{ij})}{\partial x_j} + \frac{\partial \tau_{s,ij}}{\partial x_j} \right) dV \quad (\text{A.3.40})$$

上式と剛体の運動方程式の比較を行う.

左辺は, 物体の質量 M および重心の加速度 \ddot{r}_{Gi} を用いて次のように表せる.

$$M \ddot{r}_{Gi} = \int_V (\rho a_i) dV \quad (\text{A.3.41})$$

右辺の体積積分の中の第1項は次のように表せる.

$$M g_i = \int_V (\rho g_i) dV \quad (\text{A.3.42})$$

第2, 3項の積分は, 混相流体の運動により生じる力を示しており, これを $f_{f,i}$ と定義し, この体積積分を $F_{f,i}$ とし, 次の式で表す.

$$F_{f,i} = \int_V f_{f,i} dV = \int_V \left(-\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial (2\mu_f S_{ij})}{\partial x_j} \right) dV \quad (\text{A.3.43})$$

これより，(A.3.40)は以下のようになる．

$$M\ddot{r}_{Gi} = Mg_i + F_{f,i} + \int_V \left(\frac{\partial \tau_{s,ij}}{\partial x_j} \right) dV \quad (\text{A.3.44})$$

剛体の並進の運動方程式を以下に示す．

$$M\ddot{\mathbf{r}}_G = M\mathbf{g} + \mathbf{F}_f + \mathbf{F}_c \quad (\text{A.3.45})$$

ここに， M は質量， \mathbf{r}_G は重心の位置， \mathbf{g} ：重力加速度， \mathbf{F}_f ：流体力， \mathbf{F}_c ：接触力である．式(A.3.44)および式(A.3.45)を比較すると左辺の項，および右辺第1項および第2項はそれぞれ剛体の加速度項，重力項，流体力項に対応する．また，式(A.3.44)および式(A.3.45)の右辺第3項は記述が異なるが，式(A.3.44)では，連続体として評価されているため，ひずみに対する剛性を評価する項となっており，この項の中に接触力が含まれる．式(A.3.44)の第3項は，流体として評価される応力に対し，弾性体としての剛性の応力の修正量も含まれるが，物体全体で体積積分をすると内部間で作用し合う力は作用反作用で相殺され，外部から作用する力が残るため， $\int_V \left(\frac{\partial \tau_{s,ij}}{\partial x_j} \right) dV = F_{c,i}$ となる．式(A.3.45)の第2項では，剛体の運動方程式であるため，変形を許容せずに移動させる式であり，内部のひずみによる力は，式の上では現れず，接触力による外力のみが表記されている．このように，連続体として導かれた式(A.3.44)の剛体の運動方程式の各項は，式(A.3.45)の剛体の運動方程式の各項に対応することが確認された．

式(A.3.44)の基となる式(A.3.40)を解くことを考える．式(A.3.40)は物体のいたるところで成り立つため，次のように体積積分を除いた等式も成立する．

$$\rho a_i = \rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial (2\mu_f S_{ij})}{\partial x_j} + \frac{\partial \tau_{s,ij}}{\partial x_j} \quad (\text{A.3.46})$$

b) 回転の運動方程式

剛体の回転の運動方程式は，次のように表される．

$$\int_V \mathbf{r} \times \rho \mathbf{g} dV + \int_{\partial V} \mathbf{r} \times \mathbf{T}(\mathbf{n}) dS = \int_V \mathbf{r} \times \rho \mathbf{a} dV \quad (\text{A.3.47})$$

ここに， $\mathbf{r} = x_i \mathbf{e}_i$ は，重心からの位置ベクトルである．第2項は発散定理を用い，次のように体積積分に変換出来る．

$$\int_{\partial V} \mathbf{r} \times \mathbf{T}(\mathbf{n}) dS = \int_{\partial V} (\varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{kl} n_i) \mathbf{e}_i dS = \int_V \frac{\partial}{\partial x_i} (\varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{kl}) \mathbf{e}_i dV \quad (\text{A.3.48})$$

これより，式(A.3.47)は次のようになる．

$$\int_V \left[\varepsilon_{ijk} \left\{ \rho x_j g_k + \frac{\partial}{\partial x_i} (x_j \sigma_{kl}) - \rho x_j a_k \right\} \right] dV = 0 \quad (\text{A.3.49})$$

ここで $\frac{\partial x_j}{\partial x_i} = \delta_{ji}$ であるから上式は次のようになる．

$$\begin{aligned} \int_V \left[\varepsilon_{ijk} x_j \left\{ \rho g_k + \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_i} - \rho a_k \right\} + \varepsilon_{ijk} \delta_{ji} \sigma_{kl} \right] dV &= 0 \\ \int_V \left[\varepsilon_{ijk} x_j \left\{ \rho g_k + \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_i} - \rho a_k \right\} + \varepsilon_{ijk} \sigma_{kj} \right] dV &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.3.50})$$

ここで、式(A.3.34)のように応力を定義すれば $\sigma_{kj} = \sigma_{jk}$ であるため $\varepsilon_{ijk}\sigma_{kj} = 0$ となり、上式は、次のようになる。

$$\int_V \left\{ \varepsilon_{ijk} x_j \left(\rho g_k + \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_l} - \rho a_k \right) \right\} dV = 0 \quad (\text{A.3.51})$$

ここで、式(A.3.39)のようにこの応力 σ_{ij} を分解して表示すると上式は、次のようになる。

$$\int_V \left\{ \varepsilon_{ijk} x_j \left(\rho g_k + \frac{\partial p}{\partial x_k} + \frac{\partial \mu S_{kl}}{\partial x_l} + \frac{\partial \tau_{s,kl}}{\partial x_l} - \rho a_k \right) \right\} dV = 0 \quad (\text{A.3.52})$$

上式の体積積分の中身は、式(A.3.46)と同様であり、式(A.3.46)が解かれれば、上式は満たされることになる。

次に、上式と剛体の回転の運動方程式との関係について考察する。重心の定義より

$$\int_V (\varepsilon_{ijk} x_j \rho g_k) dV = 0 \quad (\text{A.3.53})$$

となる。これを用い式(A.3.52)は次のようになる。

$$\int_V \left\{ \varepsilon_{ijk} x_j \left(\frac{\partial p}{\partial x_k} + \frac{\partial \mu S_{kl}}{\partial x_l} + \frac{\partial \tau_{s,kl}}{\partial x_l} - \rho a_k \right) \right\} dV = 0 \quad (\text{A.3.54})$$

以下に剛体の回転の運動方程式を示す。

$$\frac{d\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}}{dt} = \mathbf{N}_f + \mathbf{N}_c \quad (\text{A.3.55})$$

ここに、 \mathbf{I} : 慣性テンソル、 $\boldsymbol{\omega}$: 角速度であり、 $\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} = \int_V (\varepsilon_{ijk} x_j \rho a_k) dV$ である。また、 \mathbf{N}_f : 流体力によるトルクおよび \mathbf{N}_c : 接触力によるトルクである。

ここに、流体力によるトルク \mathbf{N}_f は次のように評価される。

$$\mathbf{N}_{f,i} = \int_V \left\{ \varepsilon_{ijk} x_j \left(\frac{\partial p}{\partial x_k} + \frac{\partial \mu S_{kl}}{\partial x_l} \right) \right\} dV = 0 \quad (\text{A.3.56})$$

式(A.3.54)および式(A.3.55)を比較すると式(A.3.54)の体積積分の中の4項目が式(A.3.55)第1項の角運動量の時間変化に対応し、式(A.3.54)の第1項および第2項が、式(A.3.55)の右辺第1項に対応する流体力によるトルクである。式(A.3.54)の第3項は、物体の剛性を示すひずみに対する応力による力を示しておりこの項には、流体として評価される応力に対する弾性体の応力の修正量や接触力による力が含まれる。その体積積分値は、物体に作用する外力によるトルクに一致するため、 $\int_V \left(\varepsilon_{ijk} x_j \frac{\partial \tau_{s,kl}}{\partial x_l} \right) dV = N_{c,i}$ となり、式(A.3.55)の右辺第2項に対応する。このように、連続体から導かれた剛体の回転に対する運動方程式の各項は、剛体の回転に対する運動方程式の各項と対応していることがわかる。

ここで、式(A.3.46)を解くことを考える。式(A.3.46)を次のように書き換える。

$$\rho a_i = \rho a_{mf,i} + \rho a_{s,i} \quad (\text{A.3.57})$$

ここに $\rho a_{f,i}$ は、混相流の一流体モデルを用いて評価される力であり、次のように定義する。

$$\rho a_{mf,i} = \rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial (2\mu_f S_{ij})}{\partial x_j} \quad (\text{A.3.58})$$

また、混相流場に作用するちか力，一流体モデルで導かれる力を除いた力を $\rho a_{s,i}$ とし，次の式で表す．

$$\rho a_{s,i} = \rho a_i - \rho a_{mf,i} = \frac{\partial \tau_{s,ij}}{\partial x_j} \quad (\text{A.3.59})$$

本解析では，まず， $a_{mf,i} = Du_i/Dt$ として，(A.3.58)を次のように混相流場の一流体モデル非圧縮条件 $\partial u_j/\partial x_j = 0$ を考慮して解く．

$$a_{mf,i} = \frac{Du_i}{Dt} = g_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial(2\nu_f S_{ij})}{\partial x_j} \quad (\text{A.3.60})$$

ここに， $\nu_f = \mu_f/\rho$ である．上式を連続式と共に非圧縮として解き，圧力を求める．右辺第 2 項および第 3 項を体積積分し，式(A.3.43)により式(A.3.45)の右辺第 2 項を評価し，また，重心からの位置ベクトルをかけ，式(A.3.54)の第 1 項および第 2 項により式(A.3.55)の右辺第 1 項を求める．これを踏まえ，式(A.3.45)および式(A.3.55)より剛体の並進の運動方程式および回転の運動方程式により，重心の加速度 \dot{r}_G および各加速度 $\dot{\omega}$ を求める．

物体内の各地点の速度 $u_{s,i}$ は次のように求めることができる．

$$u_{s,i} = \dot{r}_{G,i} + \varepsilon_{ijk} \omega_j x_k \quad (\text{A.3.61})$$

ここで，この段階では，式(A.3.57)では，右辺第 1 項のみ式(A.3.58)および連続式を用いて解いており，式(A.3.57)の第 2 項は連続体として解いていない．しかし，次の時間ステップでは，式(A.3.61)を用いて固相領域の速度場を設定し，再び式(A.3.57)の第 1 項を解く．このように設定することで，式(A.3.57)の第 2 項は，次のように剛体の運動方程式により求まる速度と，混相流場の一流体モデルから求まる速度場の差分として，評価することになる．

$$\rho a_{s,i} = \rho a_i - \rho a_{mf,i} \quad (\text{A.3.62})$$

$$\rho a_{s,i} = \rho \frac{(u_{s,i}^{n+1} - u_i^n)}{\Delta t} - \rho \frac{(u_i^p - u_i^n)}{\Delta t} \quad (\text{A.3.63})$$

$$\rho a_{s,i} = \rho \frac{(u_{s,i}^{n+1} - u_i^p)}{\Delta t} \quad (\text{A.3.64})$$

ここに u_i^p は式(A.3.57)の第 1 項の混相流場の一流体モデルにより推定された速度の予測値である．次に流体と固体が混在する場の式(A.3.57)の第 1 項および第 2 項の評価方法について示す．

流体計算セル内の領域 C 中に固体部分 Ω および流体部分 $C - \Omega$ の領域が混在する場合，式(A.3.57)の第 2 項より受ける力は次のように評価出来る．

$$\int_{\Omega} \rho_s \frac{(u_{s,i}^{n+1} - u_i^p)}{\Delta t} d\Omega \quad (\text{A.3.65})$$

この関係を用いると流体計算セル C の加速度は次のように表される．

$$\rho \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \rho_s \frac{\Omega}{C} \frac{u_{s,i}^{n+1} - u_i^p}{\Delta t} + \rho \frac{C}{C} \frac{u_i^p - u_i^n}{\Delta t} \quad (\text{A.3.66})$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \left\{ \frac{\rho_s}{\rho} \frac{\Omega}{C} u_{s,i}^{n+1} + \left(\frac{C}{C} \frac{\rho}{\rho} - \frac{\Omega}{C} \frac{\rho_s}{\rho} \right) u_i^p - u_i^n \right\} / \Delta t \quad (\text{A.3.67})$$

$$u_i^{n+1} = \frac{\rho_s}{\rho} \frac{\Omega}{C} u_{s,i}^{n+1} + \left(\frac{C}{C} \frac{\rho}{\rho} - \frac{\Omega}{C} \frac{\rho_s}{\rho} \right) u_i^p \quad (\text{A.3.68})$$

流体計算セル中の物体の占める割合 α とすると $\Omega/C = \alpha$ と表せるため、上式を α を用いて表すと次のようになる。

$$u_i^{n+1} = \left\{ \rho_s \alpha u_{s,i}^{n+1} + \rho(1-\alpha)u_i^p \right\} / \rho \quad (\text{A.3.69})$$

ここで式(A.3.68)右辺第2項の括弧の中の2項目は α として近似した。

解析では、第2項の密度を流体の密度 ρ_f とし、以下の式で u^{n+1} を設定した。

$$u_i^{n+1} = \left\{ \rho_s \alpha u_{s,i}^{n+1} + \rho_f(1-\alpha)u_i^p \right\} / \rho \quad (\text{A.3.70})$$

すなわち、次の時刻の固液混相流場の速度場は、固液混相流場の一流体モデルで解かれた速度と剛体の運動方程式により解かれた速度の質量平均で設定することにより、式(A.3.57)の第2項を考慮出来ることとなる。

A.3.2 個別要素法における接触する2球間の変位量の評価方法

i 粒子と j 粒子の2つの球が接触する際の衝突力の算定方法を示す。個別要素法では、 i 粒子から j 粒子に加わる力をバネ、ダッシュポットおよびスライダーを用いて評価する。ここで i 粒子と j 粒子に加わる力を算出する際のバネおよびダッシュポットの数値は、 i 粒子から j 粒子に向かう方向の力を算出する際と i 粒子と j 粒子の接平面上の力を算出する際で異なる値を用いる。従って、 i 粒子から j 粒子に向かう法線方向の変位と i 粒子と j 粒子の接平面上の変位を定義するため、逐次その方向の座標軸を定義し、その成分の変化量から変位を求め、接触力を求める³⁾。ここで、法線方向の軸を ξ 軸とし、接平面上の2軸を η 、 ζ 軸と定義する。接触力評価時に設定するこの座標系をここでは、ローカル座標系といい、空間に固定されている座標系をグローバル座標系と呼ぶ。 ξ 、 η 、 ζ 軸は次のように定める。

i 粒子について

- i 粒子から j 粒子に向かう方向を ξ 軸とする。
- ξ 軸に直交し、かつ、 x - y 平面上でかつ ξ 軸の x - y 平面上の射影に対し、反時計回りに 90° 回転させた向きを η 軸とする。
- ζ 軸は、 ξ 、 η 軸に直交し、右手系となる向きとする。

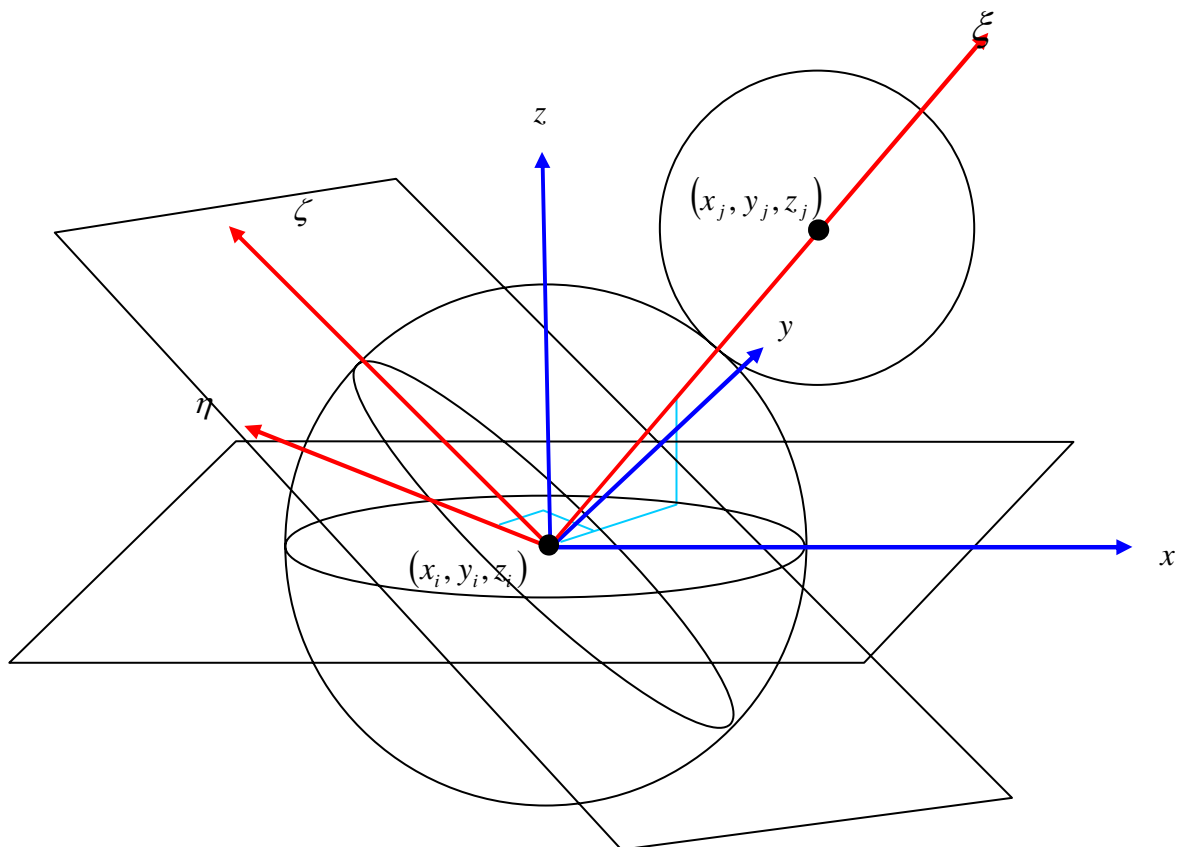


図-A.3.2 接触力評価時のローカル座標系の定義

また、同様に j 粒子についても直交する右手系となる座標軸を定義する。

i 粒子で定めた ξ , η , ζ 軸方向の単位ベクトル (基底ベクトル) をそれぞれ $\mathbf{e}'_{(i)\xi}$, $\mathbf{e}'_{(i)\eta}$, $\mathbf{e}'_{(i)\zeta}$ などと定義し、これを用いて j 粒子の ξ , η , ζ 軸の向きの単位ベクトルを次の様に定める。

$$\mathbf{e}'_{(j)\xi} = -\mathbf{e}'_{(i)\xi} \tag{A.3.71}$$

$$\mathbf{e}'_{(j)\eta} = -\mathbf{e}'_{(i)\eta} \tag{A.3.72}$$

$$\mathbf{e}'_{(j)\zeta} = \mathbf{e}'_{(i)\zeta} \tag{A.3.73}$$

i 粒子および j 粒子の衝突力算出におけるローカル座標系の座標軸の定義を図示すると次の様になる。

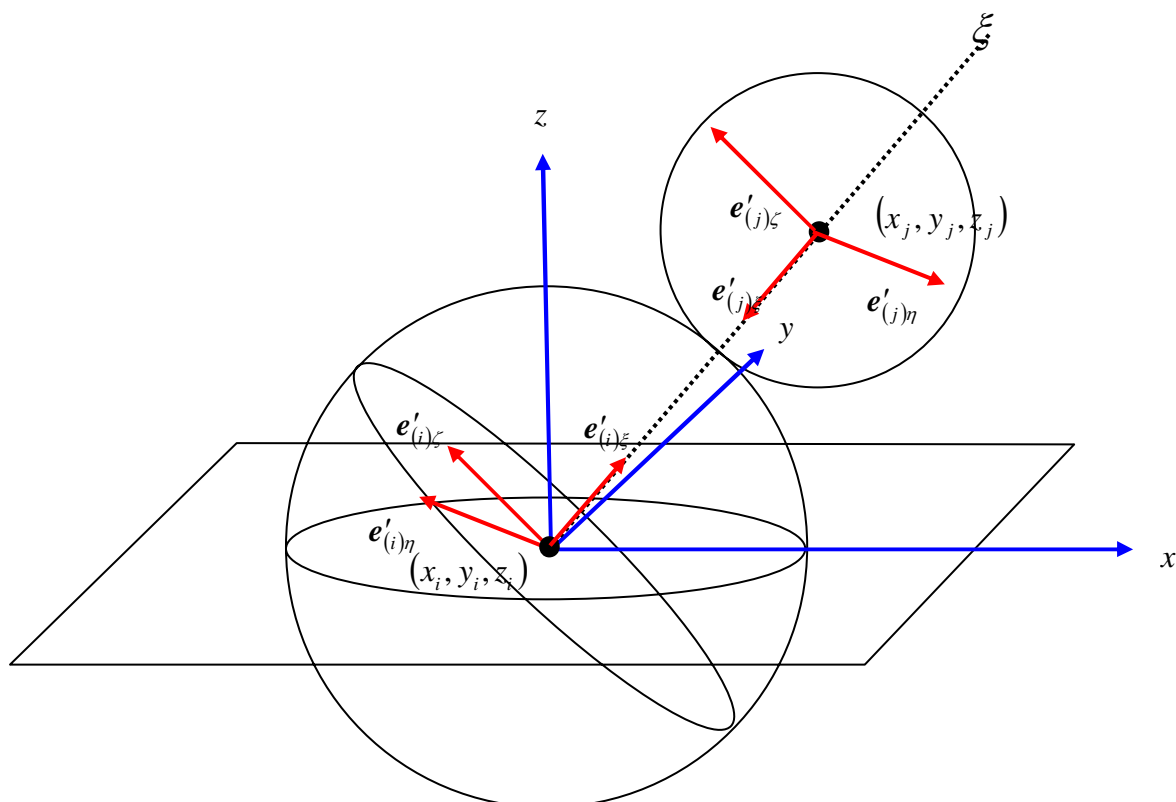


図-A. 3. 3 i 粒子および j 粒子の接触力評価の座標軸の定義

i 粒子および j 粒子の衝突力算出における各座標軸方向の単位ベクトル(基底ベクトル) $\mathbf{e}'_{(i)\xi}$, $\mathbf{e}'_{(i)\eta}$, $\mathbf{e}'_{(i)\zeta}$ の成分について考える.

$\mathbf{e}'_{(i)\xi}$, $\mathbf{e}'_{(i)\eta}$, $\mathbf{e}'_{(i)\zeta}$ をそれぞれ $\mathbf{e}'_{(i)1}$, $\mathbf{e}'_{(i)2}$, $\mathbf{e}'_{(i)3}$ と書くことにし, x , y , z 方向の単位ベクトル \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y , \mathbf{e}_z を \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3 と書くことにすると. $\mathbf{e}'_{(i)1}$, $\mathbf{e}'_{(i)2}$, $\mathbf{e}'_{(i)3}$ は, \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3 を用いて $\mathbf{e}'_{(i)l} = (\mathbf{e}'_{(i)l} \cdot \mathbf{e}_m) \mathbf{e}_m$ のように書ける. ここに $\mathbf{e}'_{(i)l} \cdot \mathbf{e}_m$ が $\mathbf{e}'_{(i)l}$ の \mathbf{e}_m 方向の成分である.

この成分を考えるにあたり, 図-A.3.4 に示す θ および ϕ の角度を定義する. θ は $\mathbf{e}'_{(i)\xi}$ を x - y 平面に落としたときの x 軸からの角度であり, ϕ は $\mathbf{e}'_{(i)\xi}$ の x - y 平面からの角度である.

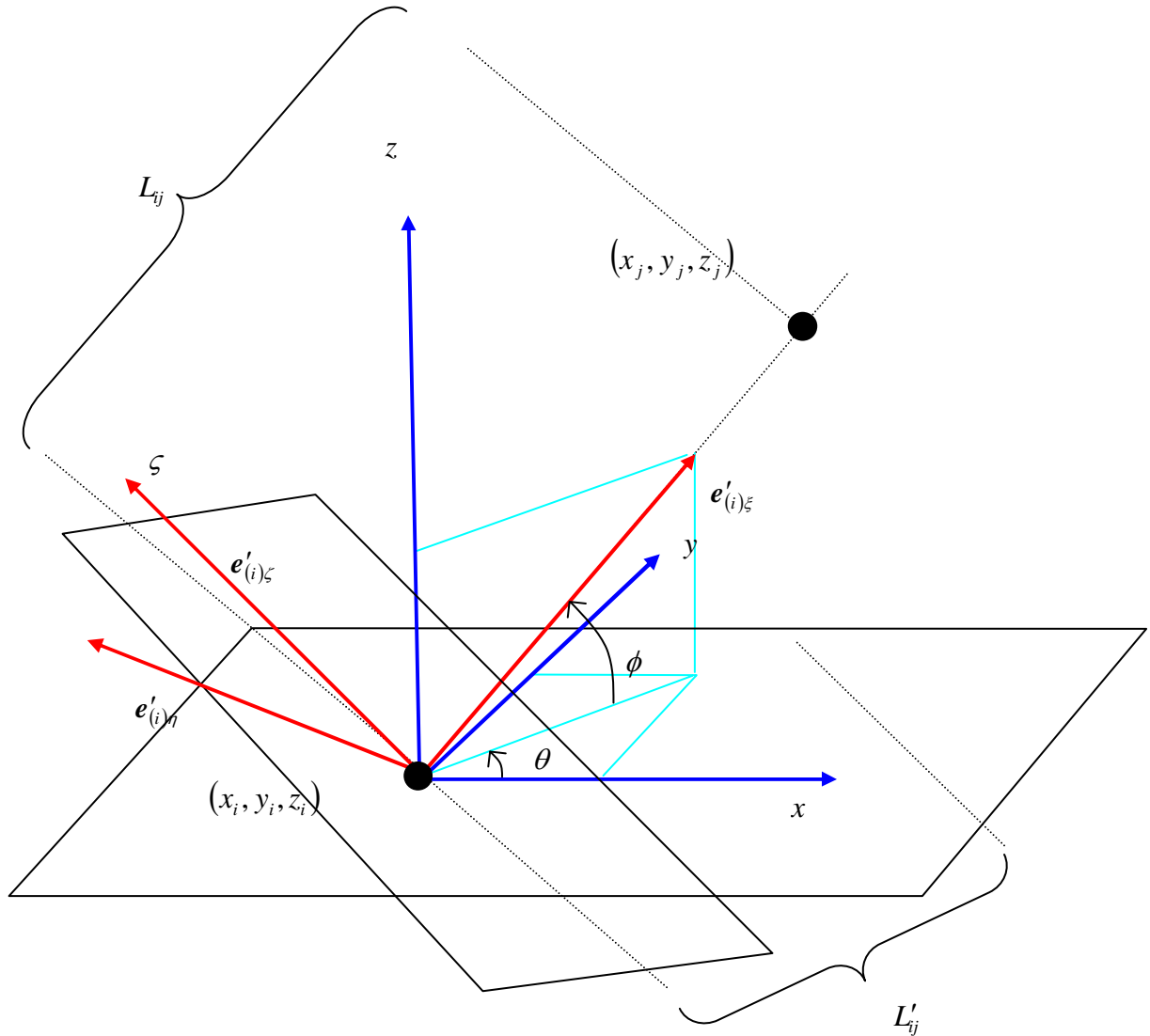


図-A.3.4 i 粒子の衝突力算出軸算出における角度の定義

このような角度を定義することにより $\mathbf{e}'_{(i)\xi}$, $\mathbf{e}'_{(i)\eta}$, $\mathbf{e}'_{(i)\zeta}$ は次のように表される.

$$\mathbf{e}'_{(i)\xi} = \frac{x_j - x_i}{L_{ij}} \mathbf{e}_x + \frac{y_j - y_i}{L_{ij}} \mathbf{e}_y + \frac{z_j - z_i}{L_{ij}} \mathbf{e}_z \quad (\text{A.3.74})$$

$$\mathbf{e}'_{(i)\eta} = -\sin \theta \mathbf{e}_x + \cos \theta \mathbf{e}_y \quad (\text{A.3.75})$$

$$\mathbf{e}'_{(i)\zeta} = -\sin \phi \cos \theta \mathbf{e}_x - \sin \phi \sin \theta \mathbf{e}_y + \cos \phi \mathbf{e}_z \quad (\text{A.3.76})$$

ここに、 L_{ij} は i 粒子および j 粒子の距離である.

$$L_{ij} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2} \quad (\text{A.3.77})$$

また,

$$l_i = \frac{x_j - x_i}{L_{ij}}, \quad m_i = \frac{y_j - y_i}{L_{ij}}, \quad n_i = \frac{z_j - z_i}{L_{ij}} \quad (\text{A.3.78})$$

なる l_i , m_i , n_i を定義すると式(A.3.74)は次のようになる.

$$\mathbf{e}'_{(i)\xi} = l_i \mathbf{e}_x + m_i \mathbf{e}_y + n_i \mathbf{e}_z \quad (\text{A.3.79})$$

式(A.3.75)を l_i , m_i , n_i を用いて表すことを考える. まず, $\sin \theta$ および $\cos \theta$ は次のように表すことができる.

$$\sin \theta = \frac{y_j - y_i}{L'_{ij}}, \quad \cos \theta = \frac{x_j - x_i}{L'_{ij}}, \quad L'_{ij} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2} \quad (\text{A.3.80})$$

これを次のように書き換える.

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{y_j - y_i}{L_{ij}} \frac{L_{ij}}{L'_{ij}} = m_i \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}}{\sqrt{L_{ij}^2}} \right)} \\ &= m_i \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{(x_j - x_i)}{L_{ij}} \right)^2 + \left(\frac{(y_j - y_i)}{L_{ij}} \right)^2}} = \frac{m_i}{\sqrt{l_i^2 + m_i^2}} \end{aligned} \quad (\text{A.3.81})$$

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{x_j - x_i}{L_{ij}} \frac{L_{ij}}{L'_{ij}} = l_i \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}}{\sqrt{L_{ij}^2}} \right)} \\ &= l_i \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{(x_j - x_i)}{L_{ij}} \right)^2 + \left(\frac{(y_j - y_i)}{L_{ij}} \right)^2}} = \frac{l_i}{\sqrt{l_i^2 + m_i^2}} \end{aligned} \quad (\text{A.3.82})$$

これより式(A.3.75)は次の式で表すことができる.

$$\mathbf{e}'_{(i)\eta} = -\frac{m_i}{\sqrt{l_i^2 + m_i^2}} \mathbf{e}_x + \frac{l_i}{\sqrt{l_i^2 + m_i^2}} \mathbf{e}_y \quad (\text{A.3.83})$$

次に式(A.3.76)を l_i , m_i , n_i を用いて表すことを考える. $\sin \phi$, $\cos \phi$ は次のように表すことができる.

$$\sin \phi = \frac{z_j - z_i}{L_{ij}} = n_i \quad (\text{A.3.84})$$

$$\begin{aligned}\cos\phi &= \frac{L'_{ij}}{L_{ij}} = \frac{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}}{\sqrt{L_{ij}^2}} = \sqrt{\left(\frac{(x_j - x_i)}{L_{ij}}\right)^2 + \left(\frac{(y_j - y_i)}{L_{ij}}\right)^2} \\ &= \sqrt{l_i^2 + m_i^2}\end{aligned}\quad (\text{A.3.85})$$

これより，式(A.3.76)は次のように書き換えることが出来る．

$$\begin{aligned}\mathbf{e}'_{(i)\zeta} &= -n_i \frac{l_i}{\sqrt{l_i^2 + m_i^2}} \mathbf{e}_x - n_i \frac{m_i}{\sqrt{l_i^2 + m_i^2}} \mathbf{e}_y + \sqrt{l_i^2 + m_i^2} \mathbf{e}_z \\ &= -\frac{l_i n_i}{\sqrt{l_i^2 + m_i^2}} \mathbf{e}_x - \frac{m_i n_i}{\sqrt{l_i^2 + m_i^2}} \mathbf{e}_y + \sqrt{l_i^2 + m_i^2} \mathbf{e}_z\end{aligned}\quad (\text{A.3.86})$$

改めて整理すると次の様になる．

$$\mathbf{e}'_{(i)\xi} = l_i \mathbf{e}_x + m_i \mathbf{e}_y + n_i \mathbf{e}_z \quad (\text{A.3.87})$$

$$\mathbf{e}'_{(i)\eta} = -\frac{m_i}{\sqrt{l_i^2 + m_i^2}} \mathbf{e}_x + \frac{l_i}{\sqrt{l_i^2 + m_i^2}} \mathbf{e}_y \quad (\text{A.3.88})$$

$$\mathbf{e}'_{(i)\zeta} = -\frac{l_i n_i}{\sqrt{l_i^2 + m_i^2}} \mathbf{e}_x - \frac{m_i n_i}{\sqrt{l_i^2 + m_i^2}} \mathbf{e}_y + \sqrt{l_i^2 + m_i^2} \mathbf{e}_z \quad (\text{A.3.89})$$

また， j 粒子に対するローカル座標の基底ベクトルは，次のように定義するため，

$$\mathbf{e}'_{(j)\xi} = -\mathbf{e}'_{(i)\xi} \quad (\text{A.3.90})$$

$$\mathbf{e}'_{(j)\eta} = -\mathbf{e}'_{(i)\eta} \quad (\text{A.3.91})$$

$$\mathbf{e}'_{(j)\zeta} = \mathbf{e}'_{(i)\zeta} \quad (\text{A.3.92})$$

次のように表すことが出来る．

$$\mathbf{e}'_{(j)\xi} = -\mathbf{e}'_{(i)\xi} = -l_i \mathbf{e}_x - m_i \mathbf{e}_y - n_i \mathbf{e}_z \quad (\text{A.3.93})$$

$$\mathbf{e}'_{(j)\eta} = -\mathbf{e}'_{(i)\eta} = \frac{m_i}{\sqrt{l_i^2 + m_i^2}} \mathbf{e}_x - \frac{l_i}{\sqrt{l_i^2 + m_i^2}} \mathbf{e}_y \quad (\text{A.3.94})$$

$$\mathbf{e}'_{(j)\zeta} = \mathbf{e}'_{(i)\zeta} = -\frac{l_i n_i}{\sqrt{l_i^2 + m_i^2}} \mathbf{e}_x - \frac{m_i n_i}{\sqrt{l_i^2 + m_i^2}} \mathbf{e}_y + \sqrt{l_i^2 + m_i^2} \mathbf{e}_z \quad (\text{A.3.95})$$

ここでグローバル座標のベクトルをローカル座標に変換することを考える．

ここであるベクトルを次のように定義する．

$$x'_{(i)} \mathbf{e}'_{(i)l} = x^m \mathbf{e}_m \quad (\text{A.3.96})$$

このベクトルと $\mathbf{e}'_{(i)n}$ との内積考えると次のようになる．

$$x'_{(i)} \mathbf{e}'_{(i)l} \cdot \mathbf{e}'_{(i)n} = x^m \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}'_{(i)n} \quad (\text{A.3.97})$$

ここに， $\mathbf{e}'_{(i)1}$ ， $\mathbf{e}'_{(i)2}$ ， $\mathbf{e}'_{(i)3}$ は直交する単位ベクトルなので，次の式が成り立つ．

$$\mathbf{e}'_{(i)l} \cdot \mathbf{e}'_{(i)n} = \delta_{ln} \quad (\text{A.3.98})$$

ここに δ_{ln} はクロネッカーのデルタであり， $l=n$ のときに 1 を $l \neq n$ のときには 0 となる記号である．これより，式(A.3.97)は次のように変形できる．

$$x'_{(i)} \delta_{ln} = x^m \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}'_{(i)n} \quad (\text{A.3.99})$$

$$x'_{(i)} \mathbf{e}'_{(i)l} = x^m \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}'_{(i)l} \quad (\text{A.3.100})$$

式(A.3.100)はグローバル座標の x^m を成分を持つベクトルのローカル座標上の $x_{(i)}^l$ を成分にもつベクトルへの変換式である。また、 $e'_{(i)l}$ は e_m を用いて $e'_{(i)l} = (e'_{(i)l} \cdot e_m) e_m$ のように表されるので、式(A.3.100)の座標変換の係数 $e_m \cdot e'_{(i)l}$ は $e'_{(i)l}$ の e_m 方向の成分 (式(A.3.87)～式(A.3.89)において算出) として与えられていることがわかる。これより、式(A.3.100)の座標変換の関係を、行列を用いて記述すると次のようになる。

$$\begin{pmatrix} x_{(i)}^1 \\ x_{(i)}^2 \\ x_{(i)}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_i & m_i & n_i \\ -\frac{m_i}{\sqrt{l_i^2 + m_i^2}} & \frac{l_i}{\sqrt{l_i^2 + m_i^2}} & 0 \\ -\frac{l_i n_i}{\sqrt{l_i^2 + m_i^2}} & -\frac{m_i n_i}{\sqrt{l_i^2 + m_i^2}} & \sqrt{l_i^2 + m_i^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = [T_{GL}]_{(i)} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \quad (\text{A.3.101})$$

ここに座標変換行列の記号を $[T_{GL}]_{(i)}$ とした。また、上記の座標変換の議論は、 j 粒子の基底ベクトルおよび成分についても同様であるので、 j 粒子のグローバル座標成分からローカル座標成分への座標変換は次のようになる。

$$\begin{pmatrix} x_{(j)}^1 \\ x_{(j)}^2 \\ x_{(j)}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -l_j & -m_j & -n_j \\ \frac{m_j}{\sqrt{l_j^2 + m_j^2}} & -\frac{l_j}{\sqrt{l_j^2 + m_j^2}} & 0 \\ -\frac{l_j n_j}{\sqrt{l_j^2 + m_j^2}} & -\frac{m_j n_j}{\sqrt{l_j^2 + m_j^2}} & \sqrt{l_j^2 + m_j^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = [T_{GL}]_{(j)} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \quad (\text{A.3.102})$$

個別要素法では、 i 粒子と j 粒子の相対変位を求め、相対変位を用いて接触力を評価する。ここで i 粒子から見た j 粒子の Δt 時間の相対変位について考える。

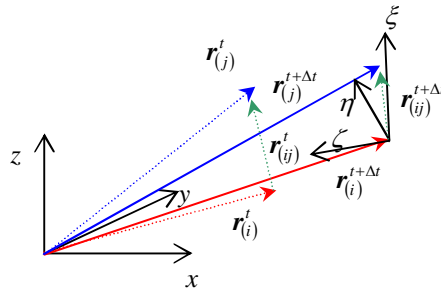


図-A.3.5 相対変位

i 粒子の t 時刻の位置を r_i^t などと書き i 粒子から見た j 粒子の相対位置を $r_{(ij)}^t$ などと書くことにする。

$r_{(ij)}^t$ のグローバル座標の成分 $\begin{pmatrix} x_j - x_i \\ y_j - y_i \\ z_j - z_i \end{pmatrix}$ であり、ローカル座標の成分は、 $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$ と記述する。

ここで i 粒子から見た j 粒子の相対位置の変化 (相対変位) は、次のように表される。

$$\Delta r_{(ij)}^{\Delta t} = r_{(ij)}^{t+\Delta t} - r_{(ij)}^t \quad (\text{A.3.103})$$

ここで図-A.3.5の相対位置の場合の ξ 方向の相対変位に着目すると、 Δt 時間の間に ξ 方向の距離は縮まっており、 ξ 軸方向の成分は負の値となる。しかし、接触力は、一般的に ξ 軸方向の圧縮が増加する向きの相対変位を正とした相対変位で記述される場合が多い。

例えばバネによる力は次のように記載されている。

$$e_\xi(t) = e_\xi(t - \Delta t) + k_n \Delta \hat{\xi} \quad (\text{A.3.104})$$

ここに、 $e_\xi(t)$ は ξ 軸方向の圧縮力を正とする力、 k_n ： ξ 軸方向のバネ定数、 $\Delta \hat{\xi}$ ： ξ 軸方向の圧縮が増加する方向(衝突する2粒子が近づく方向)の相対変位の増分

一方、上記で定義した $\Delta \mathbf{r}_{(ij)}^\Delta$ を相対変位とした場合、 i 粒子からみた j 粒子が離れて行く方向を正とすることになる。そのため、ここでは一般的な接触力の記述に合わせるため、相対変位 $\Delta \hat{\mathbf{r}}_{(ij)}^\Delta$ を次のように記述する。

$$\begin{aligned} \Delta \hat{\mathbf{r}}_{(ij)}^\Delta &= -\Delta \mathbf{r}_{(ij)}^\Delta = -(\mathbf{r}_{(ij)}^{t+\Delta t} - \mathbf{r}_{(ij)}^\Delta) = -((\mathbf{r}_j^{t+\Delta t} - \mathbf{r}_i^{t+\Delta t}) - (\mathbf{r}_j^t - \mathbf{r}_i^t)) \\ &= -((\mathbf{r}_j^{t+\Delta t} - \mathbf{r}_j^t) - (\mathbf{r}_i^{t+\Delta t} - \mathbf{r}_i^t)) = (\mathbf{r}_i^{t+\Delta t} - \mathbf{r}_i^t) - (\mathbf{r}_j^{t+\Delta t} - \mathbf{r}_j^t) \end{aligned} \quad (\text{A.3.105})$$

グローバル座標の成分からローカル座標への相対変位の座標変換は、 ξ 、 η 、 ζ 軸方向の相対変位をそれぞれ $\Delta \hat{\xi}$ 、 $\Delta \hat{\eta}$ 、 $\Delta \hat{\zeta}$ とすると座標変換の行列を用いて次のようになる。

$$\begin{aligned} \Delta \hat{\mathbf{r}}_{(ij)}^\Delta &= \begin{pmatrix} \Delta \hat{\xi} \\ \Delta \hat{\eta} \\ \Delta \hat{\zeta} \end{pmatrix} = -((\mathbf{r}_j^{t+\Delta t} - \mathbf{r}_i^{t+\Delta t}) - (\mathbf{r}_j^t - \mathbf{r}_i^t)) = -\begin{pmatrix} \xi^{t+\Delta t} \\ \eta^{t+\Delta t} \\ \zeta^{t+\Delta t} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \xi^t \\ \eta^t \\ \zeta^t \end{pmatrix} \\ &= -\left([T_{GL}]_{(i)} \begin{pmatrix} x_j^{t+\Delta t} - x_i^{t+\Delta t} \\ y_j^{t+\Delta t} - y_i^{t+\Delta t} \\ z_j^{t+\Delta t} - z_i^{t+\Delta t} \end{pmatrix} - [T_{GL}]_{(i)} \begin{pmatrix} x_j^t - x_i^t \\ y_j^t - y_i^t \\ z_j^t - z_i^t \end{pmatrix} \right) \\ &= [T_{GL}]_{(i)} \left(-\begin{pmatrix} x_j^{t+\Delta t} - x_i^{t+\Delta t} \\ y_j^{t+\Delta t} - y_i^{t+\Delta t} \\ z_j^{t+\Delta t} - z_i^{t+\Delta t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_j^t - x_i^t \\ y_j^t - y_i^t \\ z_j^t - z_i^t \end{pmatrix} \right) \\ &= [T_{GL}]_{(i)} \left(\begin{pmatrix} x_i^{t+\Delta t} - x_i^t \\ y_i^{t+\Delta t} - y_i^t \\ z_i^{t+\Delta t} - z_i^t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_j^{t+\Delta t} - x_j^t \\ y_j^{t+\Delta t} - y_j^t \\ z_j^{t+\Delta t} - z_j^t \end{pmatrix} \right) = [T_{GL}]_{(i)} \begin{pmatrix} \Delta \hat{x}_{ij} \\ \Delta \hat{y}_{ij} \\ \Delta \hat{z}_{ij} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.3.106})$$

ここに $\begin{pmatrix} \Delta \hat{x}_{ij} \\ \Delta \hat{y}_{ij} \\ \Delta \hat{z}_{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_i^{t+\Delta t} - x_i^t) - (x_j^{t+\Delta t} - x_j^t) \\ (y_i^{t+\Delta t} - y_i^t) - (y_j^{t+\Delta t} - y_j^t) \\ (z_i^{t+\Delta t} - z_i^t) - (z_j^{t+\Delta t} - z_j^t) \end{pmatrix}$ である。故に相対変位は、次のように記述出来る。

$$\begin{pmatrix} \Delta \hat{\xi} \\ \Delta \hat{\eta} \\ \Delta \hat{\zeta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_i & m_i & n_i \\ -\frac{m_i}{\sqrt{l_i^2 + m_i^2}} & \frac{l_i}{\sqrt{l_i^2 + m_i^2}} & 0 \\ -\frac{l_i n_i}{\sqrt{l_i^2 + m_i^2}} & -\frac{m_i n_i}{\sqrt{l_i^2 + m_i^2}} & \sqrt{l_i^2 + m_i^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \hat{x}_{ij} \\ \Delta \hat{y}_{ij} \\ \Delta \hat{z}_{ij} \end{pmatrix} = [T_{GL}]_{(i)} \begin{pmatrix} \Delta \hat{x}_{ij} \\ \Delta \hat{y}_{ij} \\ \Delta \hat{z}_{ij} \end{pmatrix} \quad (\text{A.3.107})$$

上記の相対変位の議論では、 i 粒子および j 粒子の並進運動の影響のみ考慮していた。一方、 i 粒子および j 粒子が回転している場合は、回転の影響で接触点の相対変位が生じる。次に回転に伴う相対変位の求め方について示す。

グローバル座標系状の x 、 y 、 z 軸方向の i 粒子の回転の変化量を $\Delta\phi_{xi}$ 、 $\Delta\phi_{yi}$ 、 $\Delta\phi_{zi}$ とするとローカル座標状の ξ 、 η 、 ζ 軸方向の回転の変化量を $\Delta\phi_{\xi_i}$ 、 $\Delta\phi_{\eta_i}$ 、 $\Delta\phi_{\zeta_i}$ は簡易的に次のように表すことができる。

$$\begin{pmatrix} \Delta\phi_{\xi_i} \\ \Delta\phi_{\eta_i} \\ \Delta\phi_{\zeta_i} \end{pmatrix} = [T_{GL}]_{(i)} \begin{pmatrix} \Delta\phi_{xi} \\ \Delta\phi_{yi} \\ \Delta\phi_{zi} \end{pmatrix} \quad (\text{A.3.108})$$

ここで本研究では、 $\Delta\phi_{xi} = (\omega_{xi}^{t+\Delta t} - \omega_{xi}^t)\Delta t/2$ 、 $\Delta\phi_{yi} = (\omega_{yi}^{t+\Delta t} - \omega_{yi}^t)\Delta t/2$ 、 $\Delta\phi_{zi} = (\omega_{zi}^{t+\Delta t} - \omega_{zi}^t)\Delta t/2$ とした。

同様に j 粒子のローカル座標での各変位は、次のようになる。

$$\begin{pmatrix} \Delta\phi_{\xi_j} \\ \Delta\phi_{\eta_j} \\ \Delta\phi_{\zeta_j} \end{pmatrix} = [T_{GL}]_{(j)} \begin{pmatrix} \Delta\phi_{xj} \\ \Delta\phi_{yj} \\ \Delta\phi_{zj} \end{pmatrix} \quad (\text{A.3.109})$$

上式を図を用いて回転に伴う相対変位について誘導する。まず、**図-A.3.6** の図の関係から ζ 軸周りの各変位に対応する η 軸状の相対変位 $\Delta\hat{\eta}$ について考える。

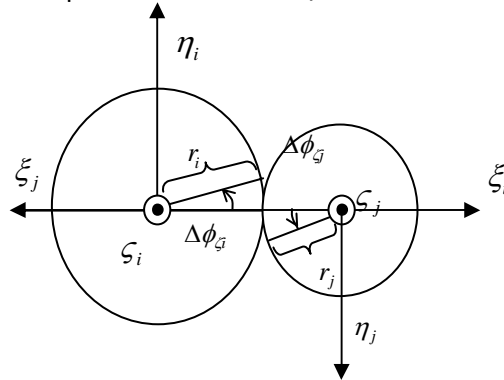


図-A.3.6 ζ 軸周りの角変位による η 軸上の相対変位

η が負の方向を正とした相対変位 $\Delta\hat{\eta}$ は次のように表される。

$$\Delta\hat{\eta} = -(\eta^{t+\Delta t} - \eta^t) \quad (\text{A.3.110})$$

ここに η は i 粒子から見た j 粒子の η 軸状の位置である。

i 粒子について $\Delta\phi_{\zeta_i}$ だけ角変位が生じると、 i 粒子に固定された変位前の接触点から見た j 粒子の接触点の位置 η は $-r_i\Delta\phi_{\zeta_i}$ だけ変化する。

同様に j 粒子について $\Delta\phi_{\zeta_j}$ だけ角変位が生じると、 i 粒子に固定された変位前の接触点から見た j 粒子の位置 η は $-r_j\Delta\phi_{\zeta_j}$ だけ変化するようになる。従って、角変位による相対変位は、次のようになる。

$$\Delta\hat{\eta} = -(\eta^{t+\Delta t} - \eta^t) = -((\eta^t - r_i\Delta\phi_{\zeta_i} - r_j\Delta\phi_{\zeta_j}) - \eta^t) = r_i\Delta\phi_{\zeta_i} + r_j\Delta\phi_{\zeta_j} \quad (\text{A.3.111})$$

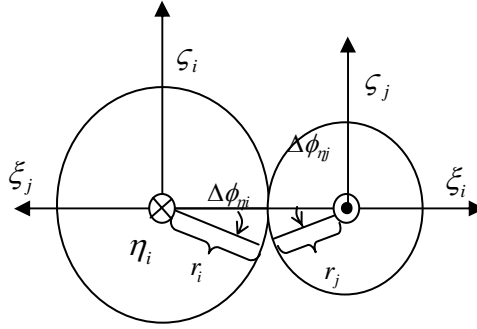


図-A.3.7 η 軸周りの角変位による ζ 軸上の相対変位

同様に $\Delta\hat{\zeta}$ は次のように表される.

$$\Delta\hat{\zeta} = -(\zeta^{t+\Delta} - \zeta^t) = -((\zeta^t + r_i\Delta\phi_{\eta i} - r_j\Delta\phi_{\eta j}) - \zeta^t) = -r_i\Delta\phi_{\eta i} + r_j\Delta\phi_{\eta j} \quad (\text{A.3.112})$$

角速度ベクトルをローカル座標で定義し角変位を求めると ζ 軸周りの角変位も生じるが本検討では、 ζ 軸周りは接触点が微少であることから小さいと考えられ、考慮しないこととした.

回転の影響を含めた相対変位は、次のようになる.

$$\begin{pmatrix} \Delta\hat{\xi} \\ \Delta\hat{\eta} \\ \Delta\hat{\zeta} \end{pmatrix} = [T_{GL}]_{(i)} \begin{pmatrix} \Delta\hat{x}_{ij} \\ \Delta\hat{y}_{ij} \\ \Delta\hat{z}_{ij} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ r_i\Delta\phi_{\zeta i} + r_j\Delta\phi_{\zeta j} \\ -r_i\Delta\phi_{\eta i} + r_j\Delta\phi_{\eta j} \end{pmatrix} \quad (\text{A.3.113})$$

これまでの議論で、ローカル座標上の相対変位は ξ , η , ζ 軸方向が負の向きとなる成分を正として $(\Delta\hat{\xi} \ \Delta\hat{\eta} \ \Delta\hat{\zeta})^T$ を定義した. これにより求められる ξ , η , ζ 軸方向が負の方向の力 (ξ 軸方向は圧縮が正となる) を正とする力の成分 $(\hat{F}_\xi \ \hat{F}_\eta \ \hat{F}_\zeta)^T$ をグローバル座標の成分 $(F_x \ F_y \ F_z)^T$ へ変換するときは符号の変換が必要になり、以下のようになる.

$$\begin{pmatrix} -\hat{F}_\xi \\ -\hat{F}_\eta \\ -\hat{F}_\zeta \end{pmatrix} = [T_{GL}]_{(i)} \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} \quad (\text{A.3.114})$$

したがって次のようになる.

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = [T_{GL}]_{(i)}^{-1} \begin{pmatrix} -\hat{F}_\xi \\ -\hat{F}_\eta \\ -\hat{F}_\zeta \end{pmatrix} \quad (\text{A.3.115})$$

A3.3. 剛体の角運動量保存則の式の誘導

A3.3.1 三次元における角運動量

剛体の重心周りに角速度 $\boldsymbol{\omega}$ で回転する図-A.3.8 に示す剛体について重心周り角運動量について考える(例えば⁴⁾).

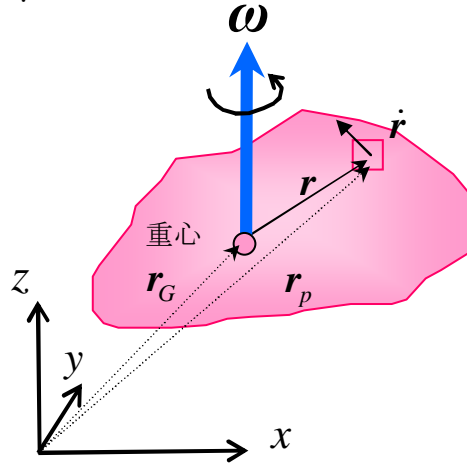


図-A.3.8 角運動量

重心から $\mathbf{r} = \mathbf{r}_p - \mathbf{r}_G = (r_{p1} - r_{G1} \quad r_{p2} - r_{G2} \quad r_{p3} - r_{G3})^T$ だけ離れた微少体積 dV が持つ重心周りの角運動量について考える. ここに $\mathbf{r}_G = (r_{g1} \quad r_{g2} \quad r_{g3})^T$ は重心の位置ベクトル, $\mathbf{r}_p = (r_{p1} \quad r_{p2} \quad r_{p3})^T$ は微少要素の位置ベクトルである.

微少体積 dV による重心周りの角運動量は, 微少体積の運動量 $\rho \mathbf{r} \dot{\mathbf{r}} dV$ と回転の中心からの位置ベクトル \mathbf{r} との外積で定義され, 次のようになる.

$$\mathbf{r} \times \rho dV \dot{\mathbf{r}} \quad (\text{A.3.116})$$

剛体全体の重心周りの角運動量 \mathbf{L} はこれを積分し, 次のように求められる.

$$\mathbf{L} = \int_V \mathbf{r} \times \rho \dot{\mathbf{r}} dV \quad (\text{A.3.117})$$

ここで

$$\dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (\text{A.3.118})$$

の関係があるため, 式(A.3.117)は次のように変形出来る.

$$\mathbf{L} = \int_V \rho \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) dV \quad (\text{A.3.119})$$

さらに以下の様に変形する.

$$\mathbf{L} = \int_V \rho \{ (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) \boldsymbol{\omega} - (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{r} \} dV \quad (\text{A.3.120})$$

ここで, 式(A.3.118)から式(A.3.119)の変形には, 以下のベクトル三重積の以下の公式を用いた.

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{C} \quad (\text{A.3.121})$$

これらは成分で書くと次のように表される.

$$\mathbf{L} = \int_V \rho \begin{pmatrix} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})\omega_1 - (r_1 r_1 \omega_1 + r_1 r_2 \omega_2 + r_1 r_3 \omega_3) \\ (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})\omega_2 - (r_2 r_1 \omega_1 + r_2 r_2 \omega_2 + r_2 r_3 \omega_3) \\ (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})\omega_3 - (r_3 r_1 \omega_1 + r_3 r_2 \omega_2 + r_3 r_3 \omega_3) \end{pmatrix} dV \quad (\text{A.3.122})$$

これより単位行列を \mathbf{E} とすると上式は $\boldsymbol{\omega}$ との行列の積を用いて次のように表される.

$$\mathbf{L} = \int_V \rho \{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})\mathbf{E} - \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}\} \boldsymbol{\omega} dV \quad (\text{A.3.123})$$

剛体内部ではいずれの箇所も重心周りに角速度 $\boldsymbol{\omega}$ で回転しており, 上式は $\boldsymbol{\omega}$ の成分に線形的に変化するため $\boldsymbol{\omega}$ は積分記号の外に出すことが出来き, 次のように変形出来る.

$$\mathbf{L} = \int_V \rho \{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})\mathbf{E} - \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}\} dV \boldsymbol{\omega} \quad (\text{A.3.124})$$

これより剛体の角運動量は次のように $\boldsymbol{\omega}$ と慣性テンソル \mathbf{I} との行列の積で表すことが出来る.

$$\mathbf{L} = \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} \quad (\text{A.3.125})$$

ここに慣性テンソル \mathbf{I} は次のように表される.

$$\mathbf{I} = \int_V \rho \{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})\mathbf{E} - \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}\} dV \quad (\text{A.3.126})$$

また, その成分の詳細は, 次のように表される.

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{A.3.127})$$

$$I_{11} = \int_V \rho (r_2^2 + r_3^2) dV, \quad I_{22} = \int_V \rho (r_1^2 + r_3^2) dV, \\ I_{33} = \int_V \rho (r_1^2 + r_2^2) dV,$$

$$I_{21} = I_{12} = -\int_V \rho r_1 r_2 dV, \quad I_{23} = I_{32} = -\int_V \rho r_2 r_3 dV, \quad I_{31} = I_{13} = -\int_V \rho r_3 r_1 dV$$

ここに I_{11} , I_{22} , I_{33} は座標軸周りの慣性モーメント, $-I_{23}$, $-I_{31}$, $-I_{12}$ は相乗モーメントと呼ばれる値である.

A3.3.2 角運動量保存則

角運動量保存則は次のように表される^{例えば4)}.

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{N} \quad (\text{A.3.128})$$

ここに \mathbf{L} は重心周りの角運動量, \mathbf{N} は重心に働くトルクである. ここでは, 空間に固定された座標系を固定座標系と定義し, 回転する剛体に固定された座標系を動座標系と定義する. 角運動量は, $\mathbf{L} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}$ であるが, 固定座標系では, 回転に伴い, 逐次慣性テンソル \mathbf{I} が変化する. このため, 角運動量保存則を固定座標の慣性テンソルを用いて計算する場合, 計算時間ステップごとに慣性テンソルを計算する必要がある, は容易ではない. 一方, 剛体に固定された座標系では慣性テンソルは常に変化しないため, 剛体に固定された動座標系に対する慣性テンソルは変化しないため, これを用いた角運動量保存則を導くことを考える.

図-A.3.9 に示すように固定座標系の基底ベクトルを \mathbf{e}_i などと書き, 動座標系の基底ベクトルを \mathbf{e}_i^* とする.

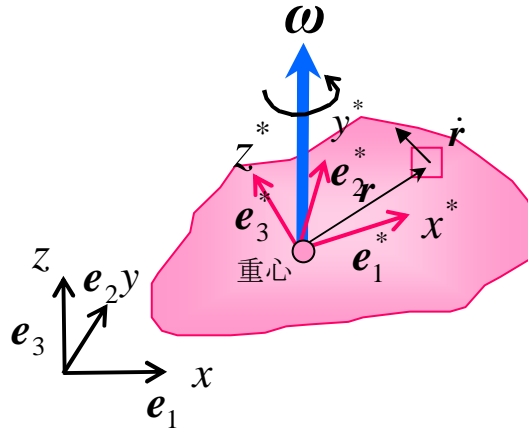


図-A.3.9 固定座標と空間座標の基底ベクトルの関係

動座標系で見た角速度ベクトルを $\boldsymbol{\omega}^*$ とする. $\boldsymbol{\omega}^*$ は $\boldsymbol{\omega}^* = \omega_1^* \mathbf{e}_1^* + \omega_2^* \mathbf{e}_2^* + \omega_3^* \mathbf{e}_3^*$ で表されるとする. 動座標の成分を固定座標に移す座標変換の行列を \mathbf{R} とすると, 基底ベクトルを動座標とした場合の基底ベクトルの成分で表示した慣性テンソル \mathbf{I}^* および角速度 $\boldsymbol{\omega}^*$ ベクトルと固定座標の成分表示の \mathbf{I} および $\boldsymbol{\omega}$ の関係は, 次のようになる.

$$\mathbf{I} = \mathbf{R} \mathbf{I}^* \mathbf{R}^{-1} \quad (\text{A.3.129})$$

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}^* \quad (\text{A.3.130})$$

ここに座標変換行列 \mathbf{R} は次のような値を持つ.

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_{ij} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1^* & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2^* & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3^* \\ \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1^* & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2^* & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3^* \\ \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1^* & \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_2^* & \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3^* \end{pmatrix} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j^* \quad (\text{A.3.131})$$

この座標変換行列 \mathbf{R} を用いると次のように動座標の成分 x_j^* から固定座標の成分 x_i を求めることが出来る.

$$\begin{aligned}
x_i \mathbf{e}_i &= x_j^* \mathbf{e}_j^* \\
x_i \mathbf{e}_i &= x_j^* (\mathbf{e}_m^* \cdot \mathbf{e}_j^*) \mathbf{e}_m \\
x_i \mathbf{e}_i &= x_j^* \mathbf{R}_{mj}^* \mathbf{e}_m \\
x_i \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_n &= x_j^* \mathbf{R}_{mj}^* \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_n \\
x_i \delta_{in} &= x_j^* \mathbf{R}_{mj}^* \delta_{mn} \\
x_i &= \mathbf{R}_{ij}^* x_j^*
\end{aligned} \tag{A.3.132}$$

固定座標の角運動量 \mathbf{L} は動座標で表示した角運動量 $\mathbf{L}^* = \mathbf{I}^* \boldsymbol{\omega}^*$ に上記の関係を用いて次のように表すことが出来る。

$$\mathbf{L} = \mathbf{R} \mathbf{L}^* = \mathbf{R} \mathbf{I}^* \boldsymbol{\omega}^* \tag{A.3.133}$$

この式中の \mathbf{I}^* , $\boldsymbol{\omega}^*$ について動座標系上の成分を用いる必要があるが, \mathbf{L} 自体は, 回転テンソル \mathbf{R} を用いて固定座標形状の成分を持つ。

角運動量保存則は, $\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{N}$ であるので, 角運動量 \mathbf{L} の時間微分 $\dot{\mathbf{L}}$ について考える。動座標で見たときの慣性テンソル \mathbf{I}^* は, 変化しない。また, \mathbf{I}^* , $\boldsymbol{\omega}^*$ は動座標系上の成分を用いる必要があるが \mathbf{L} 自体は, は固定座標系上の成分を持つため, 基底ベクトルはあくまで固定座標系上の基底ベクトルで考えている。時間微分において基底ベクトルは変化しないため, 基底ベクトルの微分は考慮する必要が無く, 成分の微分のみ考慮すれば良いため, $\dot{\mathbf{L}}$ は次のようになる。

$$\dot{\mathbf{L}} = \dot{\mathbf{R}} \mathbf{I}^* \boldsymbol{\omega}^* + \mathbf{R} \mathbf{I}^* \dot{\boldsymbol{\omega}}^* \tag{A.3.134}$$

ここに $\dot{\mathbf{R}}$ は次のようになる。

$$\dot{\mathbf{R}} = \dot{\mathbf{R}}_{ij}^* = \dot{\mathbf{e}}_i \cdot \mathbf{e}_j^* + \mathbf{e}_i \cdot \dot{\mathbf{e}}_j^* = \mathbf{e}_i \cdot \dot{\mathbf{e}}_j^* \tag{A.3.135}$$

また, 回転に伴う位置ベクトルの変化量は, 角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ と位置ベクトルの外積として算定出来るので, たとえば基底ベクトル \mathbf{e}_1^* の時間変化量 $\dot{\mathbf{e}}_1^*$ は $\dot{\mathbf{e}}_1^* = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_1^*$ と書ける。ここで, 角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ を $\boldsymbol{\omega} = \omega_i^* \mathbf{e}_i^*$ とし動座標の基底ベクトルとその成分を用いて表すこととすれば $\dot{\mathbf{e}}_1^*$, $\dot{\mathbf{e}}_2^*$, $\dot{\mathbf{e}}_3^*$ 以下のようなになる。

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{e}}_1^* &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_1^* = (\omega_1^* \mathbf{e}_1^* + \omega_2^* \mathbf{e}_2^* + \omega_3^* \mathbf{e}_3^*) \times \mathbf{e}_1^* \\
&= \omega_1^* \mathbf{e}_1^* \times \mathbf{e}_1^* + \omega_2^* \mathbf{e}_2^* \times \mathbf{e}_1^* + \omega_3^* \mathbf{e}_3^* \times \mathbf{e}_1^* = -\omega_2^* \mathbf{e}_3^* + \omega_3^* \mathbf{e}_2^*
\end{aligned} \tag{A.3.136}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{e}}_2^* &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_2^* = (\omega_1^* \mathbf{e}_1^* + \omega_2^* \mathbf{e}_2^* + \omega_3^* \mathbf{e}_3^*) \times \mathbf{e}_2^* \\
&= \omega_1^* \mathbf{e}_1^* \times \mathbf{e}_2^* + \omega_2^* \mathbf{e}_2^* \times \mathbf{e}_2^* + \omega_3^* \mathbf{e}_3^* \times \mathbf{e}_2^* = \omega_1^* \mathbf{e}_3^* - \omega_3^* \mathbf{e}_1^*
\end{aligned} \tag{A.3.137}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{e}}_3^* &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_3^* = (\omega_1^* \mathbf{e}_1^* + \omega_2^* \mathbf{e}_2^* + \omega_3^* \mathbf{e}_3^*) \times \mathbf{e}_3^* \\
&= \omega_1^* \mathbf{e}_1^* \times \mathbf{e}_3^* + \omega_2^* \mathbf{e}_2^* \times \mathbf{e}_3^* + \omega_3^* \mathbf{e}_3^* \times \mathbf{e}_3^* = -\omega_1^* \mathbf{e}_2^* + \omega_2^* \mathbf{e}_1^*
\end{aligned} \tag{A.3.138}$$

上記についてまとめると次のようになる。

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{e}}_1^* &= \omega_3^* \mathbf{e}_2^* - \omega_2^* \mathbf{e}_3^* \\
\dot{\mathbf{e}}_2^* &= -\omega_3^* \mathbf{e}_1^* + \omega_1^* \mathbf{e}_3^* \\
\dot{\mathbf{e}}_3^* &= \omega_2^* \mathbf{e}_1^* - \omega_1^* \mathbf{e}_2^*
\end{aligned} \tag{A.3.139}$$

式(A.3.135)に式(A.3.139)を用いると次のようになる。

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{R}} &= \begin{pmatrix} -\omega_2^* \mathbf{e}_3^* \cdot \mathbf{e}_1 + \omega_3^* \mathbf{e}_2^* \cdot \mathbf{e}_1 & -\omega_3^* \mathbf{e}_1^* \cdot \mathbf{e}_1 + \omega_1^* \mathbf{e}_3^* \cdot \mathbf{e}_1 & \omega_2^* \mathbf{e}_1^* \cdot \mathbf{e}_1 - \omega_1^* \mathbf{e}_2^* \cdot \mathbf{e}_1 \\ -\omega_2^* \mathbf{e}_3^* \cdot \mathbf{e}_2 + \omega_3^* \mathbf{e}_2^* \cdot \mathbf{e}_2 & -\omega_3^* \mathbf{e}_1^* \cdot \mathbf{e}_2 + \omega_1^* \mathbf{e}_3^* \cdot \mathbf{e}_2 & \omega_2^* \mathbf{e}_1^* \cdot \mathbf{e}_2 - \omega_1^* \mathbf{e}_2^* \cdot \mathbf{e}_2 \\ -\omega_2^* \mathbf{e}_3^* \cdot \mathbf{e}_3 + \omega_3^* \mathbf{e}_2^* \cdot \mathbf{e}_3 & -\omega_3^* \mathbf{e}_1^* \cdot \mathbf{e}_3 + \omega_1^* \mathbf{e}_3^* \cdot \mathbf{e}_3 & \omega_2^* \mathbf{e}_1^* \cdot \mathbf{e}_3 - \omega_1^* \mathbf{e}_2^* \cdot \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1^* & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2^* & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3^* \\ \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1^* & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2^* & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3^* \\ \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1^* & \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_2^* & \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3^* & \omega_2^* \\ \omega_3^* & 0 & -\omega_1^* \\ -\omega_2^* & \omega_1^* & 0 \end{pmatrix} \\
&= \mathbf{R} \mathbf{Q}^*
\end{aligned} \tag{A.3.140}$$

ここに \mathbf{Q}^* は次の成分を持つ行列である.

$$\mathbf{Q}^* = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3^* & \omega_2^* \\ \omega_3^* & 0 & -\omega_1^* \\ -\omega_2^* & \omega_1^* & 0 \end{pmatrix} \tag{A.3.141}$$

ある動座標の成分表示のベクトル $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1^* \\ v_2^* \\ v_3^* \end{pmatrix}$ と \mathbf{Q}^* の積は

$$\mathbf{Q}^* \mathbf{v}^* = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3^* & \omega_2^* \\ \omega_3^* & 0 & -\omega_1^* \\ -\omega_2^* & \omega_1^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^* \\ v_2^* \\ v_3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_2^* v_3^* - \omega_3^* v_2^* \\ \omega_3^* v_1^* - \omega_1^* v_3^* \\ \omega_1^* v_2^* - \omega_2^* v_1^* \end{pmatrix} \tag{A.3.142}$$

となり, 動座標で表示された角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega} = \omega_i^* \mathbf{e}_i^*$ と動座標で表示された $\mathbf{v}^* = v_i^* \mathbf{e}_i^*$ の外積となっており, 次の関係となる.

$$\mathbf{Q}^* \mathbf{v}^* = \varepsilon_{ijk} \omega_j^* v_k^* \mathbf{e}_i^* = \boldsymbol{\omega}^* \times \mathbf{v}^* \tag{A.3.143}$$

これらの関係を用いて, 式(A.3.134)角運動量の時間微分を展開すると次のようになる.

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{L}} &= \dot{\mathbf{R}} \mathbf{I}^* \boldsymbol{\omega}^* + \mathbf{R} \mathbf{I}^* \dot{\boldsymbol{\omega}}^* \\
&= \mathbf{R} \mathbf{Q}^* \mathbf{I}^* \boldsymbol{\omega}^* + \mathbf{R} \mathbf{I}^* \dot{\boldsymbol{\omega}}^* \\
&= \mathbf{R} (\boldsymbol{\omega}^* \times \mathbf{I}^* \boldsymbol{\omega}^* + \mathbf{I}^* \dot{\boldsymbol{\omega}}^*)
\end{aligned} \tag{A.3.144}$$

故に角運動量保存則の式(A.3.128)は次のように表すことができる.

$$\mathbf{N} = \mathbf{R} (\boldsymbol{\omega}^* \times \mathbf{I}^* \boldsymbol{\omega}^* + \mathbf{I}^* \dot{\boldsymbol{\omega}}^*) \tag{A.3.145}$$

上式は, 固定座標の成分を持つが両辺に \mathbf{R}^{-1} を乗じて固定座標の角運動量保存式を動座標で表すと次のようになる.

$$\mathbf{R}^{-1} \mathbf{N} = \boldsymbol{\omega}^* \times \mathbf{I}^* \boldsymbol{\omega}^* + \mathbf{I}^* \dot{\boldsymbol{\omega}}^* \tag{A.3.146}$$

さらに展開し,

$$\mathbf{I}^* \dot{\boldsymbol{\omega}}^* = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{N} - \boldsymbol{\omega}^* \times \mathbf{I}^* \boldsymbol{\omega}^* \tag{A.3.147}$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}^* = \mathbf{I}^{*-1} (\mathbf{R}^{-1} \mathbf{N} - \boldsymbol{\omega}^* \times \mathbf{I}^* \boldsymbol{\omega}^*) \tag{A.3.148}$$

が得られる.

式(A.3.148)より固定座標の成分を持つトルク \mathbf{N} を用いて動座標の成分で表される角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}^*$ の時間変化量 $\dot{\boldsymbol{\omega}}^*$ を求めることにより, 剛体の回転量の時間変化を求めることが出来る.

A3.3.3 慣性主軸

今 $\mathbf{I}^* \mathbf{p} = \lambda \mathbf{p}$ なる $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1^* \\ p_2^* \\ p_3^* \end{pmatrix}$ および λ について考える. \mathbf{E} を単位ベクトルとすると次

のようになる.

$$(\mathbf{I}^* - \lambda \mathbf{E})\mathbf{p} = \mathbf{0} \quad (\text{A.3.149})$$

上式が自明解 $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 以外の解を持つ場合, 逆行列は存在せず, $|\mathbf{I}^* - \lambda \mathbf{E}| = 0$ である.

$$\begin{vmatrix} I_{11}^* - \lambda & I_{12}^* & I_{13}^* \\ I_{21}^* & I_{22}^* - \lambda & I_{23}^* \\ I_{31}^* & I_{32}^* & I_{33}^* - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{A.3.150})$$

この式を展開すると次のようになる.

$$\begin{aligned} & (I_{11}^* - \lambda)(I_{22}^* - \lambda)(I_{33}^* - \lambda) - (I_{11}^* - \lambda)I_{23}^*I_{32}^* + I_{12}^*I_{23}^*I_{31}^* - I_{12}^*I_{21}^*(I_{33}^* - \lambda) \\ & + I_{13}^*I_{21}^*I_{32}^* - I_{13}^*(I_{22}^* - \lambda)I_{31}^* = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.3.151})$$

$$\begin{aligned} & \{I_{11}^*I_{22}^* - (I_{11}^* + I_{22}^*)\lambda + \lambda^2\}(I_{33}^* - \lambda) \\ & - I_{11}^*I_{23}^*I_{32}^* + I_{23}^*I_{32}^*\lambda + I_{12}^*I_{23}^*I_{31}^* - I_{12}^*I_{21}^*I_{33}^* + I_{12}^*I_{21}^*\lambda \\ & + I_{13}^*I_{21}^*I_{32}^* - I_{13}^*I_{22}^*I_{31}^* + I_{13}^*I_{31}^*\lambda = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.3.152})$$

$$\begin{aligned} & I_{11}^*I_{22}^*I_{33}^* - (I_{11}^*I_{33}^* + I_{22}^*I_{33}^*)\lambda + I_{33}^*\lambda^2 - I_{11}^*I_{22}^*\lambda + (I_{11}^* + I_{22}^*)\lambda^2 - \lambda^3 \\ & - I_{11}^*I_{23}^*I_{32}^* + I_{23}^*I_{32}^*\lambda + I_{12}^*I_{23}^*I_{31}^* - I_{12}^*I_{21}^*I_{33}^* + I_{12}^*I_{21}^*\lambda + I_{13}^*I_{21}^*I_{32}^* \\ & - I_{13}^*I_{22}^*I_{31}^* + I_{13}^*I_{31}^*\lambda = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.3.153})$$

$$\begin{aligned} & \lambda^3 - (I_{11}^* + I_{22}^* + I_{33}^*)\lambda^2 \\ & + (I_{11}^*I_{22}^* + I_{11}^*I_{33}^* + I_{22}^*I_{33}^* - I_{12}^*I_{21}^* - I_{23}^*I_{32}^* - I_{13}^*I_{31}^*)\lambda \\ & - I_{11}^*I_{22}^*I_{33}^* + I_{11}^*I_{23}^*I_{32}^* - I_{12}^*I_{23}^*I_{31}^* + I_{12}^*I_{21}^*I_{33}^* - I_{13}^*I_{21}^*I_{32}^* + I_{13}^*I_{22}^*I_{31}^* = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.3.154})$$

上式の λ の 3 次式を解いて 3 つの解を求めそれぞれに対する固有ベクトルを求めることで慣性主軸の向きを求めることが出来る.

A. 3. 4 四元数を用いた回転

四元数を用いた物体の回転の評価方法について文献 5, 6, 7 を参考に取りまとめた.

A. 3. 4. 1 3次元空間上の回転の定式化

3次元空間上の回転の関係式を導くため図-A. 3. 1 に示すように座標ベクトル \mathbf{u} で表される点 A を回転軸 \mathbf{p} を中心に \mathbf{p} の方向を向いて右回りを正とし, 角度 θ だけ回転した点 A' の座標ベクトル \mathbf{u}' を求めることを考える. 回転軸のベクトルの絶対値は意味を持たないので, ここでは $|\mathbf{p}|=1$ とする.

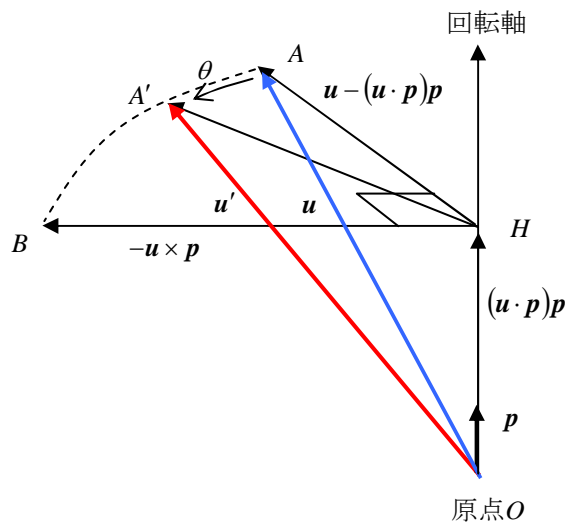


図-A. 3. 10 ベクトルと回転

$$\overrightarrow{HA'} = |HA'| \cos \theta \frac{\overrightarrow{HA}}{|HA|} + |HA'| \sin \theta \frac{\overrightarrow{HB}}{|HB|} \quad (\text{A.3.155})$$

$|HA'| = |HA| = |HB|$ より

$$\overrightarrow{HA'} = \cos \theta \overrightarrow{HA} + \sin \theta \overrightarrow{HB} \quad (\text{A.3.156})$$

と表せる.

この関係を用いると \mathbf{u}' は次のように表すことができる.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}' &= \overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{HA'} + \overrightarrow{OH} \\ &= -\sin \theta \mathbf{u} \times \mathbf{p} + \cos \theta (\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{p})\mathbf{p}) + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{p})\mathbf{p} \\ &= -\sin \theta \mathbf{u} \times \mathbf{p} + \cos \theta \mathbf{u} + (1 - \cos \theta)(\mathbf{u} \cdot \mathbf{p})\mathbf{p} \end{aligned} \quad (\text{A.3.157})$$

A.3.4.2 四元数

c) 四元数の定義

ある四元数 q は 4 つの実数 w, x, y, z および i, j, k を使って

$q = w + xi + yj + zk$ と書ける.

ここに

$$\begin{aligned} i^2 = j^2 = k^2 &= -1 \\ ij = k, \quad ki = j, \quad jk = i \\ ji = -k, \quad ik = -j, \quad kj = -i \end{aligned} \tag{A.3.158}$$

の関係が成り立つものとする.

また, 四元数は, 実部 w と, 虚部 $\mathbf{v} = (x, y, z)$ に分けて

$q = (w; \mathbf{v})$ のようにも記載される.

d) 四元数の積

$\mathbf{q}_1 = (w_1; \mathbf{v}_1) = (w_1 + x_1i + y_1j + z_1k)$ および $\mathbf{q}_2 = (w_2; \mathbf{v}_2) = (w_2 + x_2i + y_2j + z_2k)$ の積は次のようになる.

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2 &= (w_1 + x_1i + y_1j + z_1k)(w_2 + x_2i + y_2j + z_2k) \\ &= w_1w_2 + w_1x_2i + w_1y_2j + w_1z_2k \\ &\quad + x_1w_2i + x_1x_2i^2 + x_1y_2ij + x_1z_2ik \\ &\quad + y_1w_2j + y_1x_2ji + y_1y_2j^2 + y_1z_2jk \\ &\quad + z_1w_2k + z_1x_2ki + z_1y_2kj + z_1z_2k^2 \\ &= w_1w_2 + w_1x_2i + w_1y_2j + w_1z_2k \\ &\quad + x_1w_2i + x_1x_2(-1) + x_1y_2k + x_1z_2(-j) \\ &\quad + y_1w_2j + y_1x_2(-k) + y_1y_2(-1) + y_1z_2i \\ &\quad + z_1w_2k + z_1x_2j + z_1y_2(-i) + z_1z_2(-1) \\ &= w_1w_2 - x_1x_2 - y_1y_2 - z_1z_2 \\ &\quad + (w_1x_2 + x_1w_2 + y_1z_2 - z_1y_2)i \\ &\quad + (w_1y_2 + y_1w_2 + z_1x_2 - x_1z_2)j \\ &\quad + (w_1z_2 + z_1w_2 + x_1y_2 - y_1x_2)k \end{aligned} \tag{A.3.159}$$

故に虚部をベクトル表示すると $\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2 = (w_1; \mathbf{v}_1)(w_2; \mathbf{v}_2) = (w_1w_2 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2; w_1\mathbf{v}_2 + w_2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)$ と書ける.

e) 四元数の絶対値

四元数の絶対値は次のように定義される.

$$|\mathbf{q}| = |(w; (x \ y \ z))| = |(w; \mathbf{v})| = \sqrt{w^2 + x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{w^2 + |\mathbf{v}|^2} \tag{A.3.160}$$

f) 四元数の共役と逆元

ある四元数 $q = (w; \mathbf{v}) = (w + xi + yj + zk)$ の共役な四元数は

$$q = (w; -\mathbf{v}) = (w - xi - yj - zk) \quad (\text{A.3.161})$$

として定義され、ある四元数と共役との積は次のように絶対値となる。

$$qq^* = (w; \mathbf{v})(w; -\mathbf{v}) = (w^2 - \mathbf{v} \cdot (-\mathbf{v}))(\mathbf{w}\mathbf{v} + w(-\mathbf{v}) + \mathbf{v} \times (-\mathbf{v})) = (w^2 + |\mathbf{v}|^2; 0) = w^2 + |\mathbf{v}|^2 \quad (\text{A.3.162})$$

また、四元数の逆元は次のように定義される。

$$q^{-1} = \frac{q^*}{|q|} \quad (\text{A.3.163})$$

これよりある四元数と逆元の積は次のように 1 となる。

$$qq^{-1} = q \frac{q^*}{|q|} = \frac{|q|}{|q|} = 1 \quad (\text{A.3.164})$$

以下四元数の積の公式について記載する。

$$(\mathbf{ab})\mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{bc}) \quad (\text{A.3.165})$$

$$(\mathbf{ab})^{-1} = \mathbf{b}^{-1}\mathbf{a}^{-1} \quad (\text{A.3.166})$$

A.3.4.3 四元数を用いた回転

あるベクトルを \mathbf{u} としこのベクトルを用い、四元数 $\mathbf{h} = (x, \mathbf{u})$ をつくる。

また、絶対値が 1 となる回転に関する四元数を

$$q = \left(\cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2} \mathbf{p} \right) \quad (\text{A.3.167})$$

と定義する。ここで \mathbf{p} は絶対値が 1 のベクトルである。

この回転の四元数 q を用いて次の四元数の積について調べる。

$$qhq^* = \left(\cos \frac{\theta}{2}; \sin \frac{\theta}{2} \mathbf{p} \right) (x; \mathbf{u}) \left(\cos \frac{\theta}{2}; -\sin \frac{\theta}{2} \mathbf{p} \right) \quad (\text{A.3.168})$$

ここで $\cos \frac{\theta}{2} = y$, $\sin \frac{\theta}{2} \mathbf{p} = \mathbf{v}$ とし、これらを用いて、 $q = \left(\cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2} \mathbf{p} \right) = (y, \mathbf{v})$,

$q^* = \left(\cos \frac{\theta}{2}, -\sin \frac{\theta}{2} \mathbf{p} \right) = (y, -\mathbf{v})$ と表記する。

$$\begin{aligned} qhq^* &= (y; \mathbf{v})(x; \mathbf{u})(y; -\mathbf{v}) = (xy - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}; y\mathbf{u} + x\mathbf{v} + \mathbf{v} \times \mathbf{u})(y; -\mathbf{v}) \\ &= \left((xy - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v})y + (y\mathbf{u} + x\mathbf{v} + \mathbf{v} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}; \right. \\ &\quad \left. - (xy - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v} + y(y\mathbf{u} + x\mathbf{v} + \mathbf{v} \times \mathbf{u}) - (y\mathbf{u} + x\mathbf{v} + \mathbf{v} \times \mathbf{u}) \times \mathbf{v} \right) \\ &= \left(xy^2 - y\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + y\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + x|\mathbf{v}|^2 + (\mathbf{v} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}; \right. \\ &\quad \left. - xy\mathbf{v} + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v} + y^2\mathbf{u} + xy\mathbf{v} + y\mathbf{v} \times \mathbf{u} - y\mathbf{u} \times \mathbf{v} - x\mathbf{v} \times \mathbf{v} - (\mathbf{v} \times \mathbf{u}) \times \mathbf{v} \right) \\ &= (x(y^2 + |\mathbf{v}|^2); 2y\mathbf{v} \times \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v} + y^2\mathbf{u} - (\mathbf{v} \times \mathbf{u}) \times \mathbf{v}) \\ &= (x(y^2 + |\mathbf{v}|^2); 2y\mathbf{v} \times \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v} + y^2\mathbf{u} - \{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}\}) \\ &= (x(y^2 + |\mathbf{v}|^2); -2y\mathbf{u} \times \mathbf{v} + (y^2 - |\mathbf{v}|^2)\mathbf{u} + 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}) \end{aligned} \quad (\text{A.3.169})$$

ここで展開にはベクトル三重積の以下の公式を用いた.

$$(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \times \mathbf{z} = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{z})\mathbf{y} - (\mathbf{y} \cdot \mathbf{z})\mathbf{x} \quad (\text{A.3.170})$$

$$(\mathbf{v} \times \mathbf{u}) \times \mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v} \quad (\text{A.3.171})$$

この式に

$$\left(y^2 + |\mathbf{v}^2|\right) = \cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2} = 1 \quad (\text{A.3.172})$$

$$\left(y^2 - |\mathbf{v}^2|\right) = \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} = \cos \theta \quad (\text{A.3.173})$$

$$2y\mathbf{v} = 2 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \mathbf{p} = \sin \theta \mathbf{p} \quad (\text{A.3.174})$$

$$2 \sin^2 \frac{\theta}{2} = 1 - \cos \theta \quad (\text{A.3.175})$$

などの関係を代入すると式(A.3.169)は次のようになる.

$$qhq^* = (x; -\sin \theta \mathbf{u} \times \mathbf{p} + \cos \theta \mathbf{u} + (1 - \cos \theta)(\mathbf{u} \cdot \mathbf{p})\mathbf{p}) \quad (\text{A.3.176})$$

この四元数 qhq^* の虚部は式(A.3.157)に一致するため, ベクトル \mathbf{u} を \mathbf{p} 軸周りに \mathbf{p} 方向を見て時計回りに θ だけ動かしたベクトルになっていることがわかる.

また, 任意のベクトル \mathbf{u} から実部を x とした四元数 $\mathbf{h} = (x, \mathbf{u})$ を作ったが結果的に回転後の実部は同じく x となっているため, 回転の計算には影響しないことがわかる.

このため, 任意のベクトルから四元数を作る場合は, 実部 x は 0 としても問題なく本手法でも 0 とした.

次に複数段階回転させることを考える.

あるベクトル \mathbf{u} を \mathbf{p}_1 軸周りに \mathbf{p}_1 方向を見て時計回りに θ_1 だけ動かした際のベクトルを虚部に持つ四元数 \mathbf{h}_1 は, \mathbf{u} を用いて作る四元数 $\mathbf{h}_0 = (x, \mathbf{u})$ と回転の四元数 $\mathbf{q}_1 = \left(\cos \frac{\theta_1}{2}; \sin \frac{\theta_1}{2} \mathbf{p}_1\right)$ を用いて $\mathbf{h}_1 = \mathbf{q}_1 \mathbf{h}_0 \mathbf{q}_1^*$ となることがわかっている.

さらにこの \mathbf{h}_1 の虚部のベクトルを \mathbf{p}_2 軸周りに \mathbf{p}_2 方向を見て時計回りに θ_2 だけ回転させ, 回転後のベクトルを虚部に持つ四元数 \mathbf{h}_2 は, \mathbf{q}_2 を同様に $\mathbf{q}_2 = \left(\cos \frac{\theta_2}{2}; \sin \frac{\theta_2}{2} \mathbf{p}_2\right)$ と定義することにより

$$\mathbf{h}_2 = \mathbf{q}_2 \mathbf{h}_1 \mathbf{q}_2^* \quad (\text{A.3.177})$$

として求まる.

\mathbf{h}_1 を再び分解すると $\mathbf{h}_2 = \mathbf{q}_2 \mathbf{h}_1 \mathbf{q}_2^* = \mathbf{q}_2 (\mathbf{q}_1 \mathbf{h}_0 \mathbf{q}_1^*) \mathbf{q}_2^*$ となる.

\mathbf{q} は絶対値が 1 なので次の関係が成り立つ.

$$\mathbf{q}^* = \frac{\mathbf{q}}{|\mathbf{q}|} = \mathbf{q}^{-1} \quad : |\mathbf{q}| = 1 \text{ の場合} \quad (\text{A.3.178})$$

ここで式(A.3.165)および式(A.3.166)の積の公式を用いれば

$$\mathbf{h}_2 = \mathbf{q}_2 \mathbf{q}_1 \mathbf{h}_0 \mathbf{q}_1^* \mathbf{q}_2^* = \mathbf{q}_2 \mathbf{q}_1 \mathbf{h}_0 \mathbf{q}_1^{-1} \mathbf{q}_2^{-1} = (\mathbf{q}_2 \mathbf{q}_1) \mathbf{h}_0 (\mathbf{q}_2 \mathbf{q}_1)^{-1} \quad (\text{A.3.179})$$

と置き換えることができる.

したがって $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$ を用いた 2 段階の回転後の $\mathbf{h}_2 = \mathbf{q}_2 \mathbf{q}_1 \mathbf{h}_0 \mathbf{q}_1^* \mathbf{q}_2^*$ は $\mathbf{q}_{21} = \mathbf{q}_2 \mathbf{q}_1$ を用いて一度に

$$\mathbf{h}_3 = \mathbf{q}_{21} \mathbf{h}_1 \mathbf{q}_{21}^* \quad (\text{A.3.180})$$

と計算できることがわかる.

この関係を用い, ある座標の点のある軸 (\mathbf{p} 軸) 周りにある角度 θ で回転させ, これを n 回繰り返した後の座標の求め方を示す. n 回目の回転の軸方向を向く単位ベクトルを \mathbf{p}_n とし \mathbf{p}_n の向かう向きに右回りを正として θ_n の角度だけ回転させたとする. このとき n 回目の回転に対する四元数は式(A.3.167)より次のようになる.

$$\mathbf{q}_n = \left(\cos \frac{\theta_n}{2}; \sin \frac{\theta_n}{2} \mathbf{p}_n \right) \quad (\text{A.3.181})$$

この四元数を用い, n 回目までの回転を踏まえた初期からの回転を示す四元数 $\mathbf{q}^{(n)}$ を次のように求める.

$$\mathbf{q}^{(n)} = \mathbf{q}_{n-21} = \mathbf{q}_n \mathbf{q}_{n-1} \cdots \mathbf{q}_2 \mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_n \mathbf{q}^{(n-1)} \quad (\text{A.3.182})$$

この四元数 $\mathbf{q}^{(n)}$ を用いれば, 初期の位置を虚部に持つ \mathbf{h}_0 を用い, n 回の回転後の位置を虚部に持つ四元数 \mathbf{h}_n は式(A.3.179)の関係を用い次の式により求めることが出来る.

$$\mathbf{h}_n = \mathbf{q}_{n-21} \mathbf{h}_0 \mathbf{q}_{n-21}^* = \mathbf{q}^{(n)} \mathbf{h}_0 \mathbf{q}^{(n)*} \quad (\text{A.3.183})$$

A.3.5 角運動量保存則の解法

物体の回転を解く手順を整理する.

まず, 角運動量保存則を用い, 角速度を求める方法を示す.

角運動量保存則式(A.3.148)を次のように書き換える.

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}^* = \mathbf{I}^{*-1} (\mathbf{N}^* - \boldsymbol{\omega}^* \times \mathbf{I}^* \boldsymbol{\omega}^*) \quad (\text{A.3.184})$$

ここに \mathbf{R} は動座標系の成分から固定座標系の成分への座標変換の行列であるため, その逆行列と固定座標のベクトルの行列積は動座標の成分となることから次の関係が成り立ち, これを用いた.

$$\mathbf{R}^{-1} \mathbf{N} = \mathbf{N}^* \quad (\text{A.3.185})$$

まず, 式(4.24)より固定座標系のトルク \mathbf{N}^{n+1} の成分を求める. このトルク \mathbf{N}^{n+1} を用い, 実部をゼロとし, 虚部を \mathbf{N}^{n+1} とする四元数 $\mathbf{h}(\mathbf{N}^{n+1})$ を作る. 初期から n ステップまでの回転の四元数 $\mathbf{q}^{(n)}$ (式(A.3.182)参照) を用いると動座標系の成分を持つトルク \mathbf{N}^{n+1*} は次の式で求まる四元数 $\mathbf{h}(\mathbf{N}^{n+1*})$ の虚部のベクトルとして求めることが出来る.

$$\mathbf{h}(\mathbf{N}^{n+1*}) = \mathbf{q}^{(n)*} \mathbf{h}(\mathbf{N}^{n+1}) \mathbf{q}^{(n)} \quad (\text{A.3.186})$$

ここに, (A.3.183)はある座標の回転を表す式であるが, 物体の回転に伴う座標の変化が式(A.3.183)で表される場合, 物体に固定された動座標系で表される成分は, その回転とは反対の向きを回転軸として同じ角度だけ回転したことに相当する. 回転の四元数は式(A.3.167)で表されるため逆向きの回転は, その共役となるため式(A.3.183)と式(A.3.186)では, 回転の四元数とその共役の四元数の並びが逆となっている.

式(A.3.184)を離散化し, 式(A.3.186)より求まる動座標のトルク \mathbf{N}^{n+1*} を用いれば動座標の $n+1$ ステップの角速度 $\boldsymbol{\omega}^{n+1*}$ を次の式で求めることが出来る.

$$\boldsymbol{\omega}^{n+1*} = \boldsymbol{\omega}^{n*} + \Delta t \mathbf{I}^{*-1} (\mathbf{N}^{n+1*} - \boldsymbol{\omega}^{n*} \times \mathbf{I}^* \boldsymbol{\omega}^{n*}) \quad (\text{A.3.187})$$

求められた動座標の $n+1$ ステップ角速度 $\boldsymbol{\omega}^{n+1*}$ を虚部に持つ四元数 $\mathbf{h}(\boldsymbol{\omega}^{n+1*})$ を作れば, 次の式を用いて求まる四元数 $\mathbf{h}(\boldsymbol{\omega}^{n+1})$ の虚部として固定座標の $n+1$ ステップの角速度 $\boldsymbol{\omega}^{n+1}$ を求めることが出来る.

$$\mathbf{h}(\boldsymbol{\omega}^{n+1}) = \mathbf{q}^{(n)} \mathbf{h}(\boldsymbol{\omega}^{n+1*}) \mathbf{q}^{(n)*} \quad (\text{A.3.188})$$

次に物体内の回転後の座標を求める方法を示す.

まず, 式(A.3.181)に対応する回転の四元数を求められた $\boldsymbol{\omega}^{n+1}$ および時間ステップ Δt を用いて次の式より求める.

$$\mathbf{q}_{n+1} = \left(\cos \frac{\theta_{n+1}}{2}; \sin \frac{\theta_{n+1}}{2} \mathbf{p}_{n+1} \right) \quad (\text{A.3.189})$$

ここに θ_{n+1} および \mathbf{p}_{n+1} は次式で計算される.

$$\theta_{n+1} = |\boldsymbol{\omega}^{n+1}| \Delta t \quad (\text{A.3.190})$$

$$\mathbf{p}_{n+1} = \frac{\boldsymbol{\omega}^{n+1}}{|\boldsymbol{\omega}^{n+1}|} \quad (\text{A.3.191})$$

初期位置から $n+1$ 回までの回転に対応する四元数を式(A.3.182)に基づき \mathbf{q}_{n+1} を用いて次式で計算する.

$$\mathbf{q}^{(n+1)} = \mathbf{q}_{n+1} \mathbf{q}^{(n)} \quad (\text{A.3.192})$$

この四元数 $\mathbf{q}^{(n+1)}$ を用いて, 回転後の物体内部の座標の評価方法を示す.

初期の物体内部の点の重心からの相対座標を \mathbf{r}_i^* とする. $n+1$ ステップ後の重心からの相対座標は, 次式により求められる四元数 $\mathbf{h}(\mathbf{r}_{r,i,n+1})$ の虚部のベクトル $\mathbf{r}_{r,i,n+1}$ として求めることができる.

$$\mathbf{h}(\mathbf{r}_{r,i,n+1}) = \mathbf{q}^{(n+1)} \mathbf{h}(\mathbf{r}_i^*) \mathbf{q}^{(n+1)*} \quad (\text{A.3.193})$$

これより, 並進の運動も考慮し, 初期に重心から相対座標 \mathbf{r}_i^* の位置にあった座標の $n+1$ ステップ後の座標 $\mathbf{r}_{i,n+1}$ は, 次式により求めることが出来る.

$$\mathbf{r}_{i,n+1} = \mathbf{r}_{G,n+1} + \mathbf{r}_{r,i,n+1} \quad (\text{A.3.194})$$

ここに $\mathbf{r}_{G,n+1}$ は並進の運動方程式(4.21)より求まる物体の $n+1$ ステップ後の重心位置である.

第4章の補遺

A.4.1 密度差を有する場のSOR法の定式化

密度が空間的に変化する場合、圧力のポアソン方程式において密度の空間的な分布を考慮する必要がある。ここでは密度の空間的な分布を考慮した圧力のポアソン方程式からSOR法の定式化を行う^{例えば⁸⁾}。

密度の空間変化を考慮した圧力のポアソン方程式は次のように表される。

$$\nabla\left(\frac{1}{\rho}\nabla\phi\right)=\frac{1}{\Delta t}\nabla\cdot\mathbf{u}^F \quad (\text{A.4.1})$$

ここに ρ は密度、 \mathbf{u}^F は式(4.2)をEuler陽解法により解いた流速の予測値であり、 ϕ は1時間ステップ前と次の時間ステップの圧力と乱れの等方応力成分の和 P の差であり、次の式で表される。

$$\phi = P^{n+1} - P^n \quad (\text{A.4.2})$$

ポアソン方程式(A.4.1)は以下の様に離散化される。

$$\begin{aligned}
0 = & \frac{\left(\frac{2}{\rho_{i-1,j,k} + \rho_{i,j,k}}\right)\phi_{i-1,j,k} - \left(\frac{2}{\rho_{i-1,j,k} + \rho_{i,j,k}} + \frac{2}{\rho_{i,j,k} + \rho_{i+1,j,k}}\right)\phi_{i,j,k} + \left(\frac{2}{\rho_{i,j,k} + \rho_{i+1,j,k}}\right)\phi_{i+1,j,k}}{(\Delta x)^2} + \\
& \frac{\left(\frac{2}{\rho_{i,j-1,k} + \rho_{i,j,k}}\right)\phi_{i,j-1,k} - \left(\frac{2}{\rho_{i,j-1,k} + \rho_{i,j,k}} + \frac{2}{\rho_{i,j,k} + \rho_{i,j+1,k}}\right)\phi_{i,j,k} + \left(\frac{2}{\rho_{i,j,k} + \rho_{i,j+1,k}}\right)\phi_{i,j+1,k}}{(\Delta y)^2} \\
& + \frac{\left(\frac{2}{\rho_{i,j,k-1} + \rho_{i,j,k}}\right)\phi_{i,j,k-1} - \left(\frac{2}{\rho_{i,j,k-1} + \rho_{i,j,k}} + \frac{2}{\rho_{i,j,k} + \rho_{i,j,k+1}}\right)\phi_{i,j,k} + \left(\frac{2}{\rho_{i,j,k} + \rho_{i,j,k+1}}\right)\phi_{i,j,k+1}}{(\Delta z)^2} \\
& - \psi_{i,j,k}
\end{aligned} \tag{A.4.3}$$

ここに $(\nabla \cdot \mathbf{u}^F / \Delta t)_{i,j,k}$ を $\psi_{i,j,k}$ と表示した。

ここで $B_{x,i}^-$, $B_{x,i}^+$, $B_{y,j}^-$, $B_{y,j}^+$, $B_{z,k}^-$, $B_{z,k}^+$, $B_{i,j,k}^0$ を次のように定義し, 上式を式(A.4.4)の様に略記する。

$$\begin{aligned}
B_{x,i}^- &= \frac{\left(\frac{2}{\rho_{i-1,j,k} + \rho_{i,j,k}}\right)}{(\Delta x)^2}, & B_{x,i}^+ &= \frac{\left(\frac{2}{\rho_{i,j,k} + \rho_{i+1,j,k}}\right)}{(\Delta x)^2} \\
B_{y,j}^- &= \frac{\left(\frac{2}{\rho_{i,j-1,k} + \rho_{i,j,k}}\right)}{(\Delta y)^2}, & B_{y,j}^+ &= \frac{\left(\frac{2}{\rho_{i,j,k} + \rho_{i,j+1,k}}\right)}{(\Delta y)^2} \\
B_{z,k}^- &= \frac{\left(\frac{2}{\rho_{i,j,k-1} + \rho_{i,j,k}}\right)}{(\Delta z)^2}, & B_{z,k}^+ &= \frac{\left(\frac{2}{\rho_{i,j,k} + \rho_{i,j,k+1}}\right)}{(\Delta z)^2} \\
B_{i,j,k}^0 &= \left\{ \frac{\left(\frac{2}{\rho_{i-1,j,k} + \rho_{i,j,k}} + \frac{2}{\rho_{i,j,k} + \rho_{i+1,j,k}}\right)}{(\Delta x)^2} + \frac{\left(\frac{2}{\rho_{i,j-1,k} + \rho_{i,j,k}} + \frac{2}{\rho_{i,j,k} + \rho_{i,j+1,k}}\right)}{(\Delta y)^2} \right. \\
& \quad \left. + \frac{\left(\frac{2}{\rho_{i,j,k-1} + \rho_{i,j,k}} + \frac{2}{\rho_{i,j,k} + \rho_{i,j,k+1}}\right)}{(\Delta z)^2} \right\} \\
& = B_{x,i}^- + B_{x,i}^+ + B_{y,j}^- + B_{y,j}^+ + B_{z,k}^- + B_{z,k}^+
\end{aligned}$$

$$0 = B_{x,i}^- \phi_{i-1,j,k} + B_{x,i}^+ \phi_{i+1,j,k} + B_{y,j}^- \phi_{i,j-1,k} + B_{y,j}^+ \phi_{i,j+1,k} + B_{z,k}^- \phi_{i,j,k-1} + B_{z,k}^+ \phi_{i,j,k+1} - B_{i,j,k}^0 \phi_{i,j,k} - \psi_{i,j,k} \tag{A.4.4}$$

上式を $\phi_{i,j,k}$ を解く式に書き換える。

$$\phi_{i,j,k} = \frac{1}{B_{i,j,k}^0} \left(B_{x,i}^- \phi_{i-1,j,k} + B_{x,i}^+ \phi_{i+1,j,k} + B_{y,j}^- \phi_{i,j-1,k} + B_{y,j}^+ \phi_{i,j+1,k} + B_{z,k}^- \phi_{i,j,k-1} + B_{z,k}^+ \phi_{i,j,k+1} - \psi_{i,j,k} \right) \quad (\text{A.4.5})$$

上式の右辺を m 回目の反復回数で評価し、左辺を $m+1$ 回目の反復回数の値とすると次のように書くことができる。

$$\phi_{i,j,k}^{m+1} = \frac{1}{B_{i,j,k}^0} \left(B_{x,i}^- \phi_{i-1,j,k} + B_{x,i}^+ \phi_{i+1,j,k} + B_{y,j}^- \phi_{i,j-1,k} + B_{y,j}^+ \phi_{i,j+1,k} + B_{z,k}^- \phi_{i,j,k-1} + B_{z,k}^+ \phi_{i,j,k+1} - \psi_{i,j,k} \right)^m \quad (\text{A.4.6})$$

これは $\phi_{i\pm 1,j,k}^m$, $\phi_{i,j\pm 1,k}^m$, $\phi_{i,j,k\pm 1}^m$ を用いて新しい $\phi_{i,j,k}^{m+1}$ に更新する手続きであるため、次のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} \phi_{i,j,k}^{m+1} &= \phi_{i,j,k}^m \\ &+ \frac{1}{B_{i,j,k}^0} \left(B_{x,i}^- \phi_{i-1,j,k} + B_{x,i}^+ \phi_{i+1,j,k} + B_{y,j}^- \phi_{i,j-1,k} + B_{y,j}^+ \phi_{i,j+1,k} + B_{z,k}^- \phi_{i,j,k-1} + B_{z,k}^+ \phi_{i,j,k+1} - \psi_{i,j,k} \right)^m \end{aligned} \quad (\text{A.4.7})$$

上式について、プログラミングする際に計算効率が良くなるように i,j,k 順序を入れ替える。

$$\phi_{i,j,k}^{m+1} = \phi_{i,j,k}^m + \frac{1}{B_{i,j,k}^0} \left(B_{z,k}^- \phi_{i,j,k-1} + B_{y,j}^- \phi_{i,j-1,k} + B_{x,i}^- \phi_{i-1,j,k} - B_{i,j,k}^0 \phi_{i,j,k}^m + B_{x,i}^+ \phi_{i+1,j,k} + B_{y,j}^+ \phi_{i,j+1,k} + B_{z,k}^+ \phi_{i,j,k+1} - \psi_{i,j,k} \right)^m \quad (\text{A.4.8})$$

上式を **SOR** に変形すると次式となる。

$$\phi_{i,j,k}^{m+1} = \phi_{i,j,k}^m + \frac{\beta}{B_{i,j,k}^0} \left(B_{z,k}^- \phi_{i,j,k-1}^{m-1} + B_{y,j}^- \phi_{i,j-1,k}^{m-1} + B_{x,i}^- \phi_{i-1,j,k}^{m-1} - B_{i,j,k}^0 \phi_{i,j,k}^m + B_{x,i}^+ \phi_{i+1,j,k}^m + B_{y,j}^+ \phi_{i,j+1,k}^m + B_{z,k}^+ \phi_{i,j,k+1}^m - \psi_{i,j,k} \right) \quad (\text{A.4.9})$$

A.4.2 Bitonic Sort 法

1) Bitonic Sort 法によるソート手順

Bitonic Sort とは、2 の階乗分の配列を用意し、それぞれを半分に分けてソートを行う手法である⁹⁾。図-A.4.1 の同一列の矢印は同一行の他の矢印の比較結果に関係なく独立で大小関係と比較することが出来るため、ソートを行う際に並列化が可能となるメリットが有る。

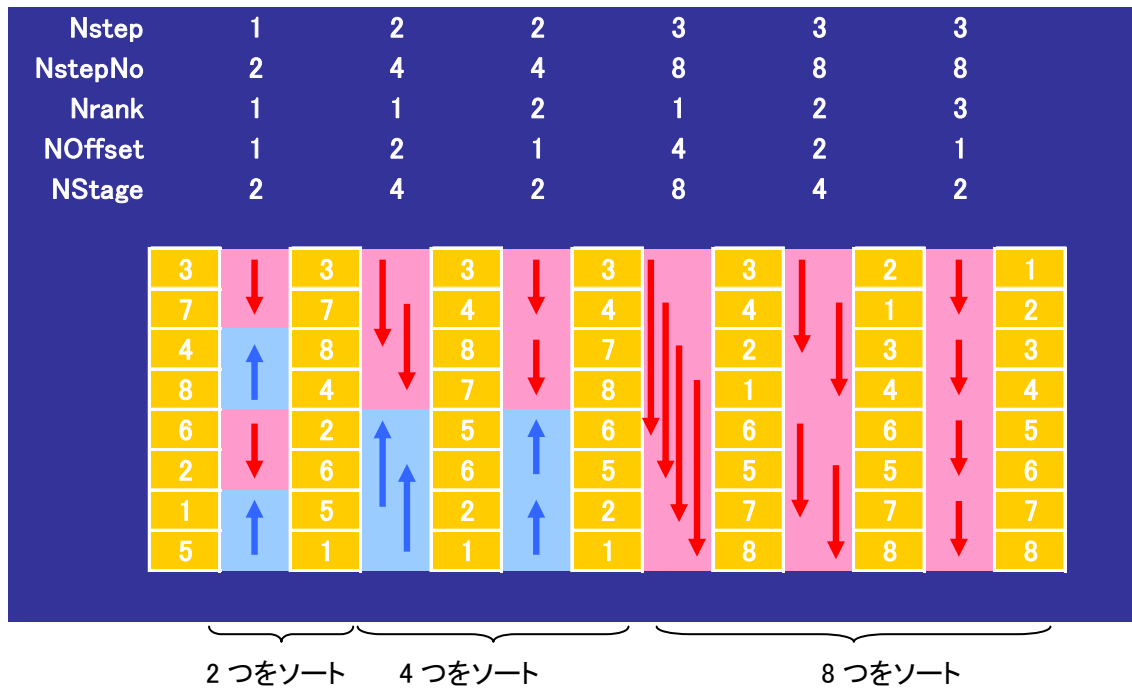


図-A.4.1 Bitonic Sort 法によるソート手順

次頁に図 4-14 (p56) に示す Bitonic Sort におけるセル番号による粒子番号の並び替えの演算処理を示す。

```

do nstep=1,n
  nstepno=2**nstep
do nrank=1,nstep
  noffset=2***(nstep-nrank)
  nstage=2*noffset

do m=1,2***(n-1) !この do ループ を並列化
  mi=mod(m-1,noffset)+nstage*(int((m-1)/noffset))+1
  mj=mi+noffset
  nacdc=mod(int((m-1)/(nstepno/2)),2)

  if(nacdc.eq.0)then
    if(ibit(mi).gt.ibit(mj))then !ibit( )はソート用の粒子の番号 mj が属する
c                               セル番号 id を記憶する変数
c ibit( )は粒子数に対し大きな要素の最大数を持つため、粒子に関連しない要素には、
c ソートに関連しないようにセル番号 id の最大数より大きな値を事前に入力する.
      jbrec=ibit(mj)
      njbrec=ibitni(mj) !ibit( )はソート用の粒子の番号 mj の基礎粒子番号 ni を記憶する変数
      ibit(mj)=ibit(mi)
      ibitni(mj)=ibitni(mi)
      ibit(mi)=jbrec
      ibitni(mi)=njbrec
    endif ! if(ibit(mi).gt.ibit(mj))then
  else ! if(nacdc.eq.0)then
    if(ibit(mj).gt.ibit(mi))then
      ibrec=ibit(mi)
      nibrec=ibitni(mi)
      ibit(mi)=ibit(mj)
      ibitni(mi)=ibitni(mj)
      ibit(mj)=ibrec
      ibitni(mj)=nibrec
    endif ! if(ibit(mj).gt.ibit(mi))then
  endif ! if(nacdc.eq.0)then
enddo !m

enddo !nrank
enddo !nstep

```

2) Bitonic Sort 法と通常の簡易なソートとの計算数の比較

Bitonic Sort 法と通常の簡易なソートにおける計算数の比較を行う。

a) Bitonic Sort 法における計算数

図-A.4.1 の場合の Bitonic Sort 法による計算数は、次の式で計算される。

$$\text{計算数 } S = \frac{8}{2} + 2 \times \frac{8}{2} + 3 \times \frac{8}{2} = 4 + 2 \times 4 + 3 \times 4 = 24 \quad (\text{A.4.10})$$

項数 $m = \log_2 8 = 3$ (項)

第1項 : 2つをソート

第2項 : 4つをソート

第3項 : 8つをソート

これより N 個の場合は次の式となる。

$$\text{計算数 } S = \frac{N}{2} + 2 \times \frac{N}{2} + 3 \times \frac{N}{2} \cdots m \times \frac{N}{2} = (1 + 2 + 3 + \cdots + m) \frac{N}{2} \quad (\text{A.4.11})$$

項数 $m = \log_2 N$

$N = 2^n$ の場合

項数 $m = \log_2 N = \log_2 2^n = n$

計算数 $S = (1 + 2 + 3 + \cdots + n) 2^{n-1}$

$$S = (1 + 2 + 3 + \cdots + n - 1 + n) 2^{n-1}$$

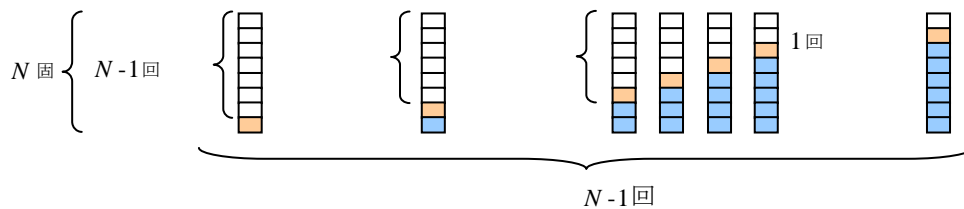
$$S = (n + n - 1 + \cdots + 3 + 2 + 1) 2^{n-1}$$

$$2S = n(n + 1) 2^{n-1}$$

$$S = n(n + 1) 2^{n-2}$$

b) 通常の簡易なソートの計算数

通常の簡易なソートの場合の計算数を次に示す。



$$N-1 + N-2 + \cdots + 3 + 2 + 1 = S$$

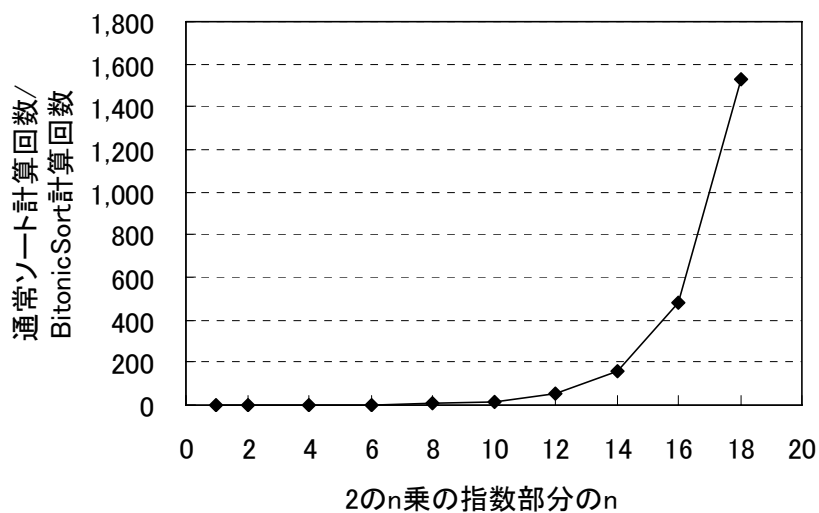
$$1 + 2 + 3 + \cdots + N-2 + N-1 = S$$

$$\frac{(N-1)N}{2} = 2S$$

$$S = \frac{(N-1)N}{2}$$

c) Bitonic Sort 法と通常の簡易なソートとの計算数の比

Bitonic Sort 法と通常の簡易なソートとの計算数の比較を図 A. 4. 2 に示す. 粒子数が多くなるほど Bitonic Sort 法が有利となることがわかる.



n	N =(2^n)	計算回数		通常/ BitonicSort
		通常ソート	Bitonic Sort	
		$N(N-1)/2$	$n(n+1)2^{n-2}$	
1	2	1	1	1.0
2	4	6	6	1.0
4	16	120	80	1.5
6	64	2,016	672	3.0
8	256	32,640	4,608	7.1
10	1,024	523,776	28,160	18.6
12	4,096	8,386,560	159,744	52.5
14	16,384	134,209,536	860,160	156.0
16	65,536	2,147,450,880	4,456,448	481.9
18	262,144	34,359,607,296	22,413,312	1533.0

図 A. 4. 2 通常ソートと Bitonic Sort の演算数の比較

補遺の参考文献

- 1) 牛島省, 山田修三, 藤岡奨, 禰津家久: 3次元自由水面流れによる物体輸送の数値解法 (3D MICS) の提案と適用性の検討, 土木学会論文集 B, Vol.62, No.1, pp.100-110, 2006.
- 2) 石原繁: テンソル 科学技術のために, 株式会社裳華房, 第13版3刷発行, 2011.
- 3) 後藤仁志: 数値流砂水理学 森北出版, 2004.
- 4) 大熊政明: 新・工業力学 例題から応用への展開 数理工学社, 2005.
- 5) 岩永 信之: ++C++;// 未確認飛行 C Homepage 画像処理 , (<http://ufcpp.net/study/image/index.html>).
- 6) 堀 源一郎: ハミルトンと四元数一人・数の体系・応用, 海鳴社, 2007.
- 7) 牛島省, 福谷彰, 藤岡奨, 禰津家久: 3次元流体中を移動する任意形状物体の数値解法, 水工学論文集, 第51巻, pp.847-852, 2007.
- 8) 梶島岳夫: 乱流の数値シミュレーション, 株式会社養賢堂, 第4版発行, 2010.
- 9) 今給黎隆: t-pot Homepage Bitonic sort (<http://www.t-pot.com>).