

中央大学博士論文

開水路断面の不均一性に起因する不等流の水面形形成に関する基礎的研究

A Fundamental Study on Water Profiles in Non-uniform  
Open Channel Flows with Stream-wise and Sectional  
Variation of Channel Properties

Chaochao Qian

錢 潮潮

博士（工学）

中央大学大学院  
理工学研究科  
土木工学専攻

平成25年度

2014年3月



## 目 次

第 1 章 序論.....	1
1. 1 概説 .....	1
1. 2 開水路水面形に関する既往の研究と背景.....	2
1. 3 本研究の目的と概要 .....	4
参考文献.....	5
第 2 章 開水路断面の不均一性に起因する不等流の基本的特性.....	9
2. 1 概説 .....	9
2. 2 開水路不等流の形成過程に関する水理実験 .....	9
2. 3 BERNOULLI 定理による開水路断面形状の不均一性に起因する不等流の各種水面形の解析 .....	12
2. 3. 1 Bernoulli 定理の破綻条件による開水路断面形状の不均一性に起因する不等流の各種水面形の存在範囲 .....	13
2. 3. 1 (a) 水路幅が非一様である場合（縮流部をもつ開水路） ...	13
2. 3. 1 (b) 水路床が非一様である場合（凸部をもつ開水路） .....	17
2. 4 開水路実験及び H. ROUSE の実験結果による不等流水面形の存在範囲 .....	20
の検証.....	20
2. 5 結論 .....	25
参考文献.....	27
第 3 章 開水路断面形状の不均一性に起因する不等流水面形の解析解及びその特性.....	29
3. 1 概説 .....	29
3. 2 水路床摩擦を考慮しない場合の非一様断面形状を持つ開水路における不等流水面形の基本式.....	29
3. 2. 1 水平床でかつ流れ方向に一様横断面形状を有する場合 .....	31
3. 2. 2 水平床でかつ流れ方向に非一様横断面形状を有する場合 ...	31
3. 2. 3 水平床でかつ流れ方向に非一様矩形横断面形状を有する場合 .....	32
3. 2. 4 非一様床でかつ流れ方向に非一様横断面形状を有する場合	32
3. 2. 5 非一様床でかつ流れ方向に一様矩形横断面形状を有する場合	

.....	33
3. 3 水路床摩擦を考慮しない場合の非一様断面形状を持つ開水路における不等流水面形の解析解 .....	33
3. 3. 1 解析手法 .....	33
3. 3. 2 不等流水面形の解析解 .....	34
3. 3. 2 (a) 水平床かつ非一様矩形横断面開水路（縮流部をもつ開水路） .....	35
3. 3. 2 (b) 非一様床かつ一様矩形横断面開水路の場合（凸部をもつ開水路） .....	38
3. 4 開水路実験による非一様断面形状に起因する不等流水面形の解析解の検証 .....	42
3. 4. 1 開水路実験概要及び実験条件 .....	42
3. 4. 2 実験結果による解析解の考察 .....	45
3. 4. 3 導出した解析解による H. Rouse の開水路不等流実験の水面形の再現 .....	47
3. 5 結論 .....	49
参考文献 .....	51
<b>第 4 章 非静水圧を考慮した定在波を伴う開水路不等流の水面形 .....</b>	<b>54</b>
4. 1 概説 .....	54
4. 2 非静水圧を考慮した定在波を伴う開水路不等流の水面形基本式の導出 .....	54
4. 2. 1 流線の曲率を考慮した基本式の導出 .....	55
4. 2. 2 導出した基本式の特性 .....	59
4. 3 開水路実験による導出した基本式の再現性の検証 .....	61
4. 3. 1 開水路実験概要及び実験条件 .....	61
4. 3. 2 実験結果による考察 .....	62
4. 4 結論 .....	64
参考文献 .....	66
<b>第 5 章 結語 .....</b>	<b>68</b>
<b>謝辞 .....</b>	<b>71</b>

# 第 1 章

## 序論



# 第1章 序論

## 1. 1 概説

四大文明の誕生と繁栄または凋落はいつの時代も水、とりわけ河川が鍵(key)の役割を果たしてきた。ラウス(H. Rouse)<sup>1)</sup>によると、河川計画や河川の維持管理において用いられる水理学は人類が水の制御と利用の方法を確立するために、水の流れ現象の本質を抽出する基礎学問の一つとして人類社会発展の歴史と共に発展してきた。現代では多くの国において降雨に伴う洪水災害に対して人命や財産は河川の堤防によって守られていると言っても過言ではなく、これを実現するために河川ごとに立案される河川計画に立脚した治水事業のもとに流域内の洪水被害の軽減が図られている。このなかで川の流れの解析には水理学に基礎を置く各種の計算がなされており、河川計画の中の河道設計や洪水追跡を行う治水施策の実務において、開水路の水面形の解析は非常に重要な意義をもつ。福岡は最近の論著<sup>2)</sup>の中で特に水位・水面形に重点をおいた河川の維持管理の必要性を改めて強調している。いうまでもなく、開水路水面形の解析は人間がその英知により流れを制御、利用する最も基本的な手法の一つである。流体の流れ現象を始め様々な自然現象を表す支配数理方程式が人類の英知の結晶の一つとして生み出されてきた。

いまや、コンピュータの飛躍的な発展を遂げた時代において、これまでに難解とされてきたような基本方程式を含め、コンピュータの非常に高い繰り返し計算能力を利用すれば大抵のものは数値的な解を求めることは可能となった。コンピュータの発展と共に数値解法の進歩は今株価の予測から宇宙の形成まで社会のあらゆる分野に恩恵をもたらしていることは事実であろう。既存の基本方程式を用いればコンピュータによる数値解が高効率に求めることができ、かなりの現象をその数値解をもって説明できる便利さがゆえ、数値計算による研究が最盛の様相を呈している。一方、工学の一つとしての水理学の分野においては、その学問体系がかなり完成されたといわれ、その真髄というべき解析的な基礎研究は些か停滞気味にあることも事実であろう。Navier-Stokes の方程式の解を求める解析的な研究こそあれ、一般的な問題に対しての解析的な研究は少ない。本研究はその学問の真髄を突くものとして、コンピュータによる数値計算をベースとした研究の全盛時代に、今一度基礎的な解析に立ち返り、コンピュータを理論的解析に活用しつつ現象の真の特性により厳密な解釈を与える。

## 1. 2 開水路水面形に関する既往の研究と背景

前節に述べたように河川の計画や維持管理において必要欠くべからざる学問として発展してきた水理学は主に管路流れの閉水路流れと自由水面を有する開水路流れの2つの理論構成となっており、開水路流れにおいても通常の水理学の教科書では、圧力分布の違いに基づき、流れを漸変流と急変流（局所流）に分類している。漸変流と急変流の明確な定義がなされているわけではないが、水面形を扱うときには通常、漸変流と局所流の流れ形態に適した理論体系<sup>3)</sup>に従っている。水理現象を解析する手段として、用途や解析条件の違いによって多少の相違はあるものの、流れ方向の流速等の物理量を水深方向に平均化した次元解析法は水理学の基礎を成す重要な解析手法であることはいままでもない<sup>4)</sup>。一様開水路の流量を一定とする漸変定常流解析に関する従来の研究は、等流水深と限界水深が交わることがない場合において、水面形の理論解として歴史的には一様矩形横断面をもつ開水路における Bresse の公式<sup>5)</sup> や一様放物線形横断面をもつ開水路における Tolkmitt の公式<sup>6)</sup>、一様任意形状をもつ開水路における Chow の公式<sup>7)</sup> などの擬似線形方程式によって水面形は一義的に求めることができるようになっている。日本での水理学発展の黎明期において物部<sup>8), 9)</sup>は同様の観点に立ち、実用を念頭におきつつ Chézy の平均流速の式を修正し、Bresse や Tolkmitt の計算法より一般的かつ比較的精度の高い背水曲線の計算手法を提案している。これらは基本式中の特異点が解析領域の無限遠に存在するとした条件のもとに、限界水深を中心とした理論（例えば Jaeger<sup>10)</sup> 参照）に従うものである。しかし水路床や水路断面特性が流れ方向に一様でない一般的な水路において、流れは水路床形状や横断面形状の流れ方向の変化特性の影響を受け不等流となり、上流から与える流量あるいはフルード数次第では流れの状態が常流から射流に、または射流から常流に遷移する。上述の水面形に関する解析ではこのような遷移を有する水面形を解析的に扱うことは不可能である。このような水面形遷移を有する流れにおいては、水面形を表す基本式の中に含まれる特異点が有限の近傍にあるとする条件で解析しなくてはならない。その代表的な解析法としては、トポロジ的な数学を用いた特異点理論<sup>11), 12), 13), 14), 15)</sup>を非線形力学に応用した Massé の方法<sup>16)</sup>がある。Escoffier もこの方法を水路床勾配の変化する開水路における遷移流れの解析に適用することを試みている<sup>17)</sup>。このような道具立ての上に、岩佐は開水路水理学への特異点理論を展開し<sup>例えば, 18), 19)</sup>、河床の形状特性によって、特異点近傍の水面形特性を定性的かつ定量的に分類・評価できることを示した。その応用例として、波状水路床をもつ不等流の水面形についての解析を示し、不等流の水面形に関する基礎的研究を発展させた<sup>20)</sup>。岩佐によるこれらの研究は不等流水面形の解析解に関する研究領域において、大きな貢



献をなしていることは疑う余地もない。しかし、特異点理論は数学的に抽象的な手法であり、かつこれによる解析は水面形自身の具体的な解析というよりは水面形形成の数学構造の解明に議論の中心がおかれているきらいがある。またその後、上記の基礎理論の上に摂動法を適用した解法による水面形の解析<sup>21)</sup>や水深積分をしたモデルに摂動法を適用した手法<sup>22), 23), 24)</sup>などの解析法が開発されている。一方、近年のコンピュータ性能の飛躍的な発展により、数値的に水面形を計算・予測する<sup>例えば、25), 26)</sup>解析法が発展し、数値解法は今や最も広く使われる手法となっている。

開水路流れには射流から常流の遷移時に現れる跳水がある。これは本来特異点をもつ現象ではあるが、跳水前後の共役水深を求めるためだけならば、跳水前後のコントロールボリュームに運動量の定理を用いた Kelvin の先駆的な理論<sup>27)</sup>がある。しかし、通常の漸変流の水面形や跳水の理論にしろ、いずれの手法も従来の静水圧分布の仮定のもとに構築されており、その限りにおいて一次元不等流の水面形に関する研究は実用上ほぼ完成したものと見なされよう。一方圧力の非静水圧分布を考慮しなければならない現象として、水路床や水路断面形状の変化により開水路流れには波状跳水と呼ばれる水面が滑らかに上昇する接続部を持ち、接続部より下流側には定在波列が存在する特徴をもつ水面形がある。このことは古くは Bazin による徹底的な実験的研究<sup>28), 29)</sup>が端緒になり、その後底面摩擦を考慮しないときの跳水（ボア(bore)）に対して、上記 Kelvin の理論がある(Lamb<sup>30)</sup>。彼の理論によると跳水では必ずエネルギー損失が生じるが、それは波の内部摩擦によるエネルギーの散逸によるものとしている。一方、Rayleigh<sup>31), 32)</sup>は定在波列を伴う跳水（波状跳水）時のエネルギー損失は摩擦によるものではなく、定在波列の運動量の放射（radiation）効果が原因であると指摘している。彼の理論では、定在波は  $\sin$  関数とし、流れの平均流速と定在波の位相速度を等しいとして波の分散関係式を用いて波長を計算し、さらに波動のもつエネルギーは流れ下る平均流速と流れを遡上する波動の群速度の差の分が跳水前後の検査面を通過し、これが上記の Kelvin の求めた跳水後の損失水頭に等しいとして定在波列の振幅を算出している。Rayleigh の理論に対して Favre は詳細な実験<sup>33)</sup>を行い、その理論を定性的に実証し、あるフルード数の範囲において碎波しない定在波列が発生することを明らかにしている。また、Lemoine<sup>34)</sup>は Favre の実験との比較をしつつ、Rayleigh の理論を詳細に再検討し、跳水の線形理論を完成させている。Rayleigh に始まる定在波列に関するこれらの一連の理論研究に続いて射流から常流への跳水を伴う遷移現象と波状跳水の領域の存在領域について、Benjamin と Lighthill は全く新しい理論構成<sup>35)</sup>を提出した。彼らの理論では、定在波列はクノイド波として扱われていることから本来非線形理論であり、与えられた流量  $Q$  の他に運動量フラックス（これを彼らは flow force と呼んだ） $S$  及び Bernoulli 和  $R$  の組

み合わせにより上流側で与えられたフルード数に対して波状跳水の存在理由と存在領域を理論的に示している。近年では波状跳水（定在波）のような射流・常流遷移する水面形に関して数値実験<sup>例えば, 36)</sup>による研究や、水深積分モデル<sup>22), 24)</sup>、多次元モデルによる研究が行われている

ところで、山田ら<sup>37), 38)</sup>、Quimpo and yamada<sup>39)</sup>は狭窄部や水路床に凹凸部を有する非一様断面特性をもつ開水路流れに生ずる局所流としての各種水面形の存在範囲を運動量の定理から導かれる Bernoulli の定理の破綻条件として解析している。この解析により、縮流部または水路床凸部を有する開水路において、種々の水面形の存在範囲は上流端のフルード数と縮流率  $\epsilon$ 、または上流端のフルード数と凸部高さとの関係によって決定される特性を有していることを明らかにしている。

### 1. 3 本研究の目的と概要

開水路不等流の水面形は水理学、河川工学において最も基本的な学問の一つとし 19 世紀中葉から発展してきた。前節で述べた水理学をめぐる歴史的展開に続き、本研究は水理学の基礎をより盤石にすることを目的とし、開水路不等流の水面形に関する一次元解析法の精緻化を目指すものである。

開水路不等流の水面形は水路の断面形状や水路境界の材料特性による抵抗の不均一性に起因する非線形的な特性から、基本式の解析解を解き水面形を説明することはこれまでにできなかった。そのため、水理学の教科書では開水路不等流の水面形の特性を基本式から定性的に説明せざるを得なかった。水理学を理解するためには必ずしも十分とは言えない。特に流れ状態が常流・射流遷移する場合においては数値解が連続的に求まらず、水理学そのものに対する理解のみならず、実務においても簡単とは言えない。また、波状跳水といった定在波を伴う非静水圧を考慮しなくてはならない開水路の水面形においては、さらに別の基本方程式を必要とした。開水路実験を含め、現象としての開水路流れは波を伴うものもあればそれを伴わないものもある。ある区間において定在波があり、その他の区間においては定在波が起きない開水路流れも存在する。波状跳水（定在波）を伴う流れは大抵常流・射流間の状態が遷移することがある。このいずれの開水路不等流流れの状態をも表現できる基本式が求められている。そこで、本研究の具体的な主な目的として以下の二つが上げられる。

- (1) 既存の一次元開水路不等流水面形の解析解を現代的な手法により導出、検証し、不等流水面形を解析的に求めることが可能であることを示し、常流・射流間遷移・非遷移の特性を導出した解析解により釈明し、開水路不等流の水面形に関

する水理学を充実させる。

- (2) 非静水圧を考慮し、定在波を伴うまたは波が発生しない開水路不等流の水面形を表す普遍的な基本式を新たに提案し、波と流れが共存する開水路不等流に関する水理学の完成度を高める。

以上の目的のために、本論文は以下の構成により展開する。

第1章では、本研究で扱う一様開水路流れに関する水理学の発展、その成果を示し、本研究の位置づけを述べた。また、本研究の目的及び論文構成、概要を述べた。

第2章では、開水路の断面形状に起因する不等流の水面形の形成プロセスを開水路実験より示した。不等流の存在範囲に関する山田らの解析手法を詳細に展開し、開水路不等流水面形の全体像を示し、開水路実験及びおよそ70年前に行った H. Rouse の実験により本解析手法の合理性を検証した。本解析で得られた不等流水面形の存在範囲を参照しつつ本論文を展開した。

第3章では、静水圧流れ場を仮定し、運動量の定理から横流出・入や摩擦を考慮しない場合の不等流水面形の基本式を導出し、一般断面から一様矩形といった基本的な断面形状ごとの水面形基本式を示した。その中の最も基本的な断面形状特性である一様床かつ矩形横断面で非一様水路幅をもつ開水路、一様矩形横断面かつ非一様水路床の二種類の開水路における非線形不等流基本式の解析解を求め、その特性を調べた。導出した解析解の合理性を検証するため、開水路実験を行い、その結果を考察した。また、およそ70年前に行った H. Rouse の実験を本研究で導出した解析解を用いて考察を行った。

第4章では、非静水圧流れ場において、流線の曲率を考慮し、運動量の定理より非一様な水路形状や非一様な水路境界面の抵抗に起因する定在波を伴う不等流の基本式を導出し提案した。提案した基本式の特性を調べた。定在波を伴う流れの開水路実験を行い、提案した基本式の合理性・妥当性を検証した。

第5章では、本論文の各章で得られた結論をまとめた。

本論文の第2章と第3章は前半部分として、流れ場に静水圧仮定が適用されている。第4章では非静水圧流れ場を扱っている。

## 参考文献

- 1) Rouse, H. and Ince, S.: History of Hydraulics. 1957. (高橋裕・鈴木高明訳 1974: 水理学史. 鹿島研究所出版会).
- 2) 福岡捷二: 招待論文, 洪水流の水面形の観測の意義と水面形に基づく河川の維持管

- 理技術，河川技術論文集，第 12 卷：1-6. 2006.
- 3) 石原藤次郎（編）：水工水理学. 丸善株式会社：27-137, 1972.
  - 4) Rouse, H.: Fundamental Principles of Flow, Chapter 1, Engineering Hydraulics, Edit by Hunter Rouse. John Wiley and Sons. 1950.
  - 5) Bresse, J. A.: Cours de mécanique appliquée professé à l'Ecole des Ponts et Chaussées. Mallet-Bachelier, Paris. 1860.
  - 6) Tolkmitt, G.: Stauwerke. Handbuch der Ingenieurwissenschaften 3 (1/1). ed. 3, Engelmann. 1892.
  - 7) Chow, V. T. :Integrating the equations of gradually varied flow, Proc., ASCE, Vol. 81: 1-32. 1955.
  - 8) 物部長穂：背水曲線の一般的解法，土木学会誌，第 17 卷，第 6 号：441-460. 1931.
  - 9) Mononobe, N.: Back-water and drop-down curves for uniform channels, Transactions, ASCE, Vol. 103: 950-989. 1938.
  - 10) Jaeger, C.: Engineering Fluid Mechanics. Blackie. 1956.
  - 11) Poincaré, H.: Analysis situs. Journal de l'École Polytechnique, (2) 1:1-123 Poincaré, H.1899. Complément à l'Analysis Situs, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 13: 285-343. 1895.
  - 12) Poincaré, H.: Second complément à l'Analysis Situs, Proceedings of the London Mathematical Society 32: 277-308. 1900.
  - 13) Poincaré, H.: Sur certaines surfaces algébriques, troisième complément à l'Analysis Situs, Bulletin de la Société mathématique de France 30: 49-70. 1902(a).
  - 14) Poincaré, H.: Sur les cycles des surfaces algébriques: quatrième complément à l'Analysis Situs, Journal de mathématiques pures et appliquées. (4.) 8: 169-214. 1902(b).
  - 15) Poincaré, H.: Cinquième complément à l'analysis situs, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 18: 45-110. 1904.
  - 16) Massé, P.: Ressaut et Ligne d'eau dans les cours d'eau à pente variable (Hydraulic Jump and Flow Profile in Channels of Variable Slope), Revue Générale de l'hydraulique, Vol. 4, No. 19: 7-11 and No.20: 61-64. 1938.
  - 17) Escoffier, F.: Transition profiles in non-uniform channels, Journal of the Hydraulic Division, Proceeding of the ASCE, Vol. 82, HY3, 1006: 1-19. 1956.
  - 18) 岩佐義朗：幅の漸変する水路における水流の遷移現象と境界特性と関連に関する理論的研究，土木学会論文集，第 59 号・別冊（3-1）. 1958.
  - 19) 岩佐義朗：開水路における定常流の一般理論について，土木学会論文集，第 69 号：

- 9-16. 1960.
- 20) Iwasa, Y. and Kennedy, J. F.: Free surface shear flow over a wavy bed, *Journal of Hydraulic Division, ASCE*, Vol. 94(3): 431-454. 1968.
  - 21) Mizumura, K.: Free-surface profile of open-channel flow with wavy boundary, *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE*, Vol. 121(7): 533-539. 1995.
  - 22) 細田尚・多田彰秀：鉛直加速度を考慮した基礎式による開水路流れ定在波の水面形解析，*水工学論文集*，第 38 巻：457-462. 1994.
  - 23) 駒居優・細田尚・音田慎一郎：Boussinesq 方程式を用いた単独突起上の開水路流れの水面形分類について，*応用力学論文集*，Vol.9：909-916. 2006.
  - 24) 細田尚・Manoj LANGHI：簡易な水深積分モデルによる跳水部の水面形の再現解析について，*土木学会論文集 B1 (水工学)*，Vol.69，No.4：I\_833-I\_888. 2013.
  - 25) Bhallamudi, S.M. and Chaudhry, M.H.: Computation of flows in open-channel transitions, *Journal of Hydraulic Research*. Vol.30. No.1: 77-93. 1992.
  - 26) 呂福祿・藤田裕一郎・鈴木智晴：急拡・急縮部をもつ開水路の流れ特性に関する研究，*水工学論文集*，第 44 巻：509-514. 2000.
  - 27) Kelvin, Lord. (William Thomson, 1st Baron Kelvin): On stationary waves in flowing water. London, Edinburgh and Dublin philosophical magazine and journal of science, Vol.22, 5th series: 445-452. 1886.
  - 28) Bazin, H.: Recherches Expérimentales sur la Propagation des Ondes, Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences. Vol. 19: 495-644. 1865.
  - 29) Darcy, H. P. G. and Bazin, H. E.: Recherches hydrauliques, Imprimerie Impériales, Paris, France. Parties 1ère et 2ème. 1865.
  - 30) Lamb, H.: Hydrodynamics, 6th ed. Cambridge University Press. London. 1932.
  - 31) Rayleigh, L.: On waves, London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, Vol.1, 5th series: 257-279. 1876.
  - 32) Rayleigh, L.: On the theory of long wave and bores, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character (1905-1934)*, No. 90, 324-328. 1914.
  - 33) Favre, H.: Étude théorique et expérimentale de la propagation des intumescences dans les canaux découverts. Paris: Dunod. 1935.
  - 34) Lemoine, R.: Sur les ondes positives de translation dans les canaux et sur le ressaut ondulé de faible amplitude, *La Houille Blanche*, No. 2. Grenoble. 1948.
  - 35) Benjamin, T. B. and Lighthill, M. J.: On Cnoidal waves and bores, *Proceedings of the*

- Royal Society of London, Series A, Mathematical and Physical Sciences, Vol. 224, No. 1159: 448-460. 1954.
- 36) Montes, J.S. and Chanson, H.: Characteristics of undular hydraulic jumps, Results and calculations, Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, Vol. 124(2): 192-205. 1998.
- 37) 山田正・水子龍彦・竹本典道：断面形状の変化に伴う水面形遷移に関する研究，土木学会第43回年次学術講演会講演概要集：480-481．1988．
- 38) 山田正・池内正幸・村上良宏：溪流を模擬した開水路流れの水面形遷移と抵抗則に関する研究，第30回水理講演会論文集：73-78．1986．
- 39) Quimpo, M. and Yamada, T.: General Hydraulic Characteristics of an Open Channel with Narrow Path, Proceeding of World Environmental and Water Resources Congress 2009: 1-10. doi: 10.1061/41036(342)273. 2009.

## 第2章

# 開水路断面の不均一性に起因する不等流の 基本的特性





## 第2章 開水路断面の不均一性に起因する不等流の基本的特性

### 2.1 概説

水理学の教科書や現場の河川計画管理において、開水路不等流についてこれまでの長い間その概念は時空間的に流れの流速、水深等の水理量が一様でない不定流に対し、不等流は空間的にのみ一様でない流れとして不定流と対等の独立した現象として扱われてきた。不等流の「時間的にみれば一定である」との観点から、不等流はあたかも最初から神様の仕業かのように一瞬にして形成されるかの印象を受ける。しかし、不等流も流れ状態の一種に過ぎず、その形成は必ず時間的な過程を経なければならない。その形成過程において水理量は必ず時間的な変化を伴う。一般的に不等流が「時間的にみれば一定である」との見方は少なくとも不等流が形成されるまでは不可能であることは容易に想像できる。本章では水面が堰き上げられ、防災面において災害発生リスクが増大しやすい縮流部や水路床凸部を有する開水路を対象に等流水面形が形成される過程を水理実験により示し、形成後の各種不等流水面形の特性を静水圧仮定のもと Bernoulli の定理によって解析を行っている。

### 2.2 開水路不等流の形成過程に関する水理実験

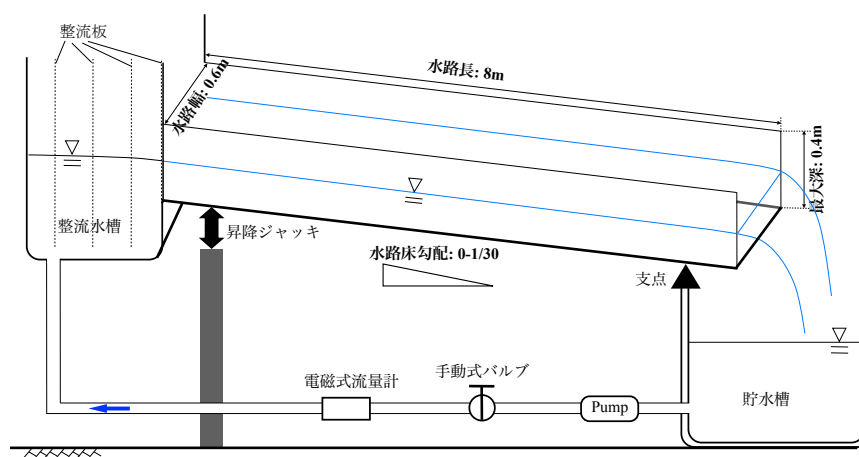


図 2-1 水理実験用開水路概要図

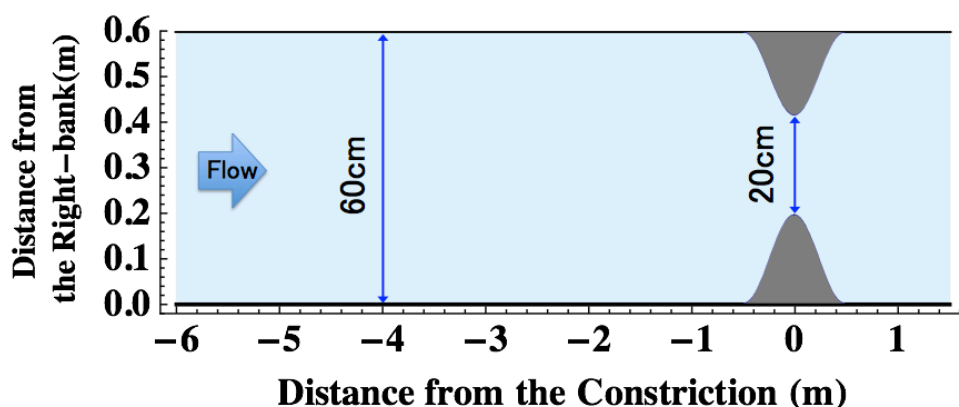


図 2-2 縮流部を有する開水路平面図

図 2-1 に示す中央大学理工学部都市環境学科に設置している矩形横断面，両面ガラス張り，SUS 金属製，傾斜可変開水路を用いて実験を行っている．水路幅が図 2-2 に示すように水路に構造物を設置し，およそ 40cm にわたり最小通水幅が 20cm になる縮流区間を設けた．最小通水幅が下流端から 2m の地点になっており，この縮流区間の水路幅が

$$0.6 - 0.4e^{\frac{-x^2}{0.09}} \quad (2.1)$$

に従う．

図 2-1 に示す実験水路のバルブ開度を徐々に上げ，流量をある流量(15.1L/s)まで増大させ，十分な時間を維持し最終的に不等流の水面形を形成させる．本節では不等流が形成されるまでのプロセスにおいての特性を議論する．本実験で流速，水深，水位の計測に用いた計測機器は，それぞれ計測精度を十分に検証したケネック社製の 3 次元電磁流速計，デジタルポイントゲージ，サーボ式水位計である．

流量を増大させる過程においては，ある流量に達した際，縮流部上流側に単なる水面の振動ではなく，通過点に大きな水位上昇をもたらす段波が発生して測点を通過し，更に上流側に伝播することを確認した．写真 2-1 に示す．そのときの波長は概ね 30cm であった．図 2-3 は縮流部より上流側 1.5m の水路中央で計測した水深時系列である．測点では波状段波が発生した後，時間とともに，段波が消え，不等流の水面形の形成に向かうことが分かる．この動的な過程において，痕跡水深（最大水深）が段波発生直前の水深より約 5 割高い．その後，流量が定常になるにつれ，不等流の水面形が形成された．

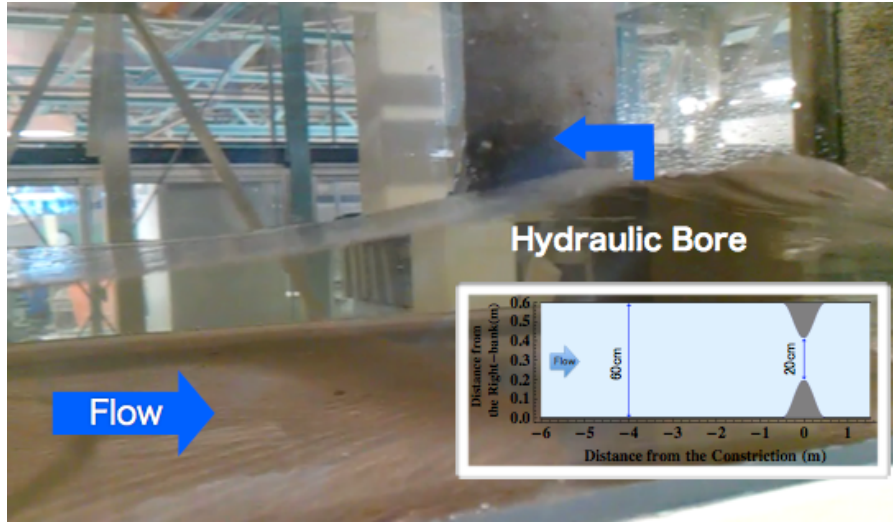


写真 2-1 縮流部を有する開水路に観測される段波 (Hydraulic Bore)

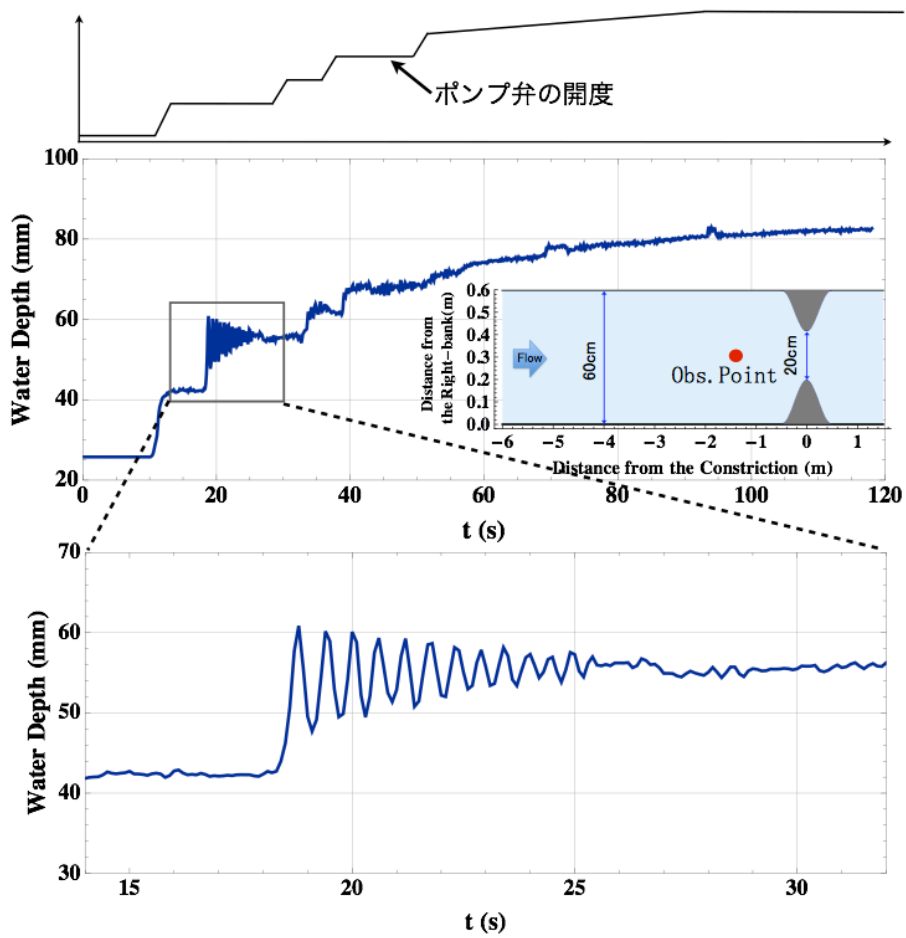


図 2-3 縮流部より上流側 1.5m 地点における水深の時系列

(実験条件 :  $i=1/400$ ,  $q_{\max}=0.025\text{m}^2/\text{s}$ , 上流端  $Fr=0.3$ , 横断面形状・水路幅  $0.6-0.4e^{-\frac{x^2}{0.09}}$ )

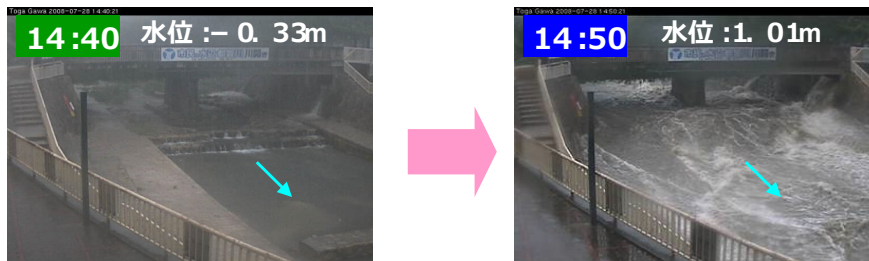
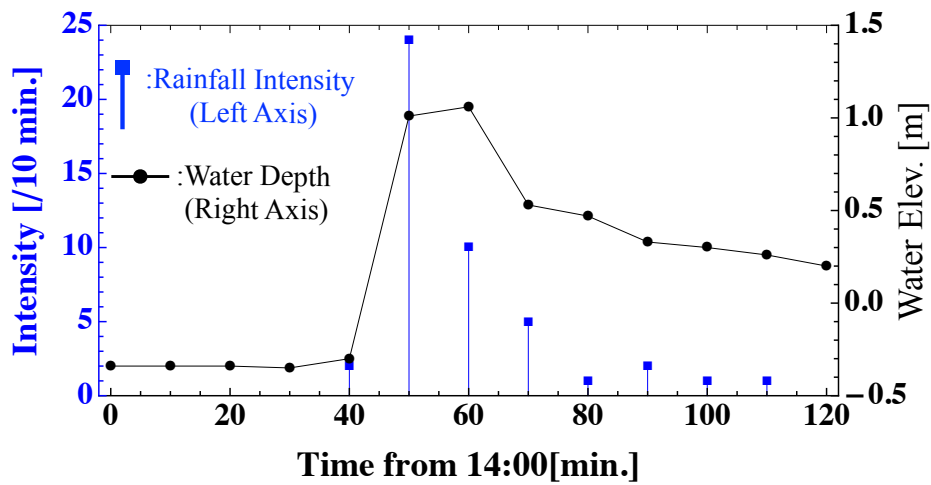


図 2-4 2008 年 7 月 兵庫県都賀川で起きた局地豪雨による急激な出水<sup>1)</sup>  
(小学生を含め 5 名が遭難)

つまり、不等流の水面形は静的な過程と見なせるものとはかなり異なるダイナミックな過程であり、段波といった急激な水位上昇を伴いながら徐々に定常になっていき不等流の水面形が形成される。このプロセスはダイナミックなもので、防災上においては非常に注意しなければならないだろう。近年多発する短時間局地豪雨が発生した際に、図 2-4 に示すような 10 分間で 1.3m 以上河川の水位は急激な上昇がみられ、そこに河道形状に縮流や河床凸部がある場合はこのような段波が発生することが予想される。

## 2. 3 Bernoulli 定理による開水路断面形状の不均一性に起因する不等流の各種水面形の解析

山田ら<sup>2), 3), 4), 5)</sup>の解析手法を継承し、開水路断面形状の非一様性によって生じる不等流の水面形は Bernoulli の定理を用い、上流端フルード数( $Fr_1$ )と水路形状を表すファクター（無次元河床高と縮流率、下項参照）の関係よりその成立破綻条件を解析的に明らかにすることによって前節で述べた段波や跳水の発生範囲を解析的に求める。跳水の有

無，フルード数が 1 を境に常・射流間の水面形遷移条件や履歴効果について詳述する。

### 2. 3. 1 Bernoulli 定理の破綻条件による開水路断面形状の不均一性に起因する不等流の各種水面形の存在範囲

開水路の断面形状は水路幅が非一様である場合（縮流部をもつ開水路）と水路床が非一様である場合（凸部をもつ開水路）の 2 種類をそれぞれ解析する．ここで，水路幅及び水路床は流れ方向に緩やかに変化するとし，水路断面の非一様性によるキャビテーションの効果を考慮しない．

#### 2. 3. 1 (a) 水路幅が非一様である場合（縮流部をもつ開水路）

水平床かつ静水圧仮定が成立する場合，図 2-5 に示すような縮流部を持つ開水路流れにおいて上流(断面 1)のフルード数と河幅縮小率の関係式を導出する．断面 1，断面 2 にそれぞれ連続式(2.2)式と Bernoulli の定理(2.3)式を適用した．

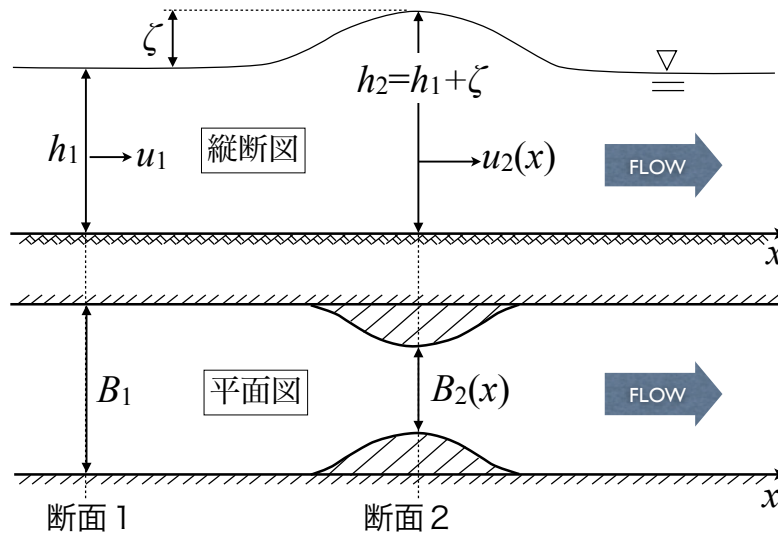


図 2-5 縮流部を有する開水路流れの概要と水理諸元

$$v_1 h_1 B_1 = v_2 (h_1 + \zeta) B_2 \quad (2.2)$$

$$\frac{1}{2g} v_1^2 = \frac{1}{2g} v_2^2 + \zeta \quad (2.3)$$

(2.2)式, (2.3)式より  $v_2$  を消去し整理することにより(2.4)式の3次方程式が得られる。 $h_*$ は断面での水深  $h_2$  を上流の水深  $h_1$  で除した無次元水深( $h_* = h_2/h_1$ ),  $Fr_1$ は断面1でのフルード数,  $Fr_2$ は断面2でのフルード数と定義する。凸部を有する開水路流れでは河道形状のパラメーターを無次元凸部河床高さで表現したが, ここでは河幅縮小率  $\varepsilon = (B_1 - B_2)/B_1$  を定義する。

$$h_*^3 - h_*^2 \left\{ 1 + \frac{1}{2} Fr_1^2 \right\} + \frac{1}{2} Fr_1^2 \frac{1}{(1 - \varepsilon)^2} = 0 \quad (2.4)$$

開水路において, 段波, 波状跳水, 跳水が発生するかしないかは現象としても非常に興味深い, 水理学としての学問にとっても重要な基礎的知見である。そこで, (2.4)式を用いて, 跳水の発生限界条件を示す。(2.4)式を(2.5)式のような3次式に置き換える。

$$f(h_*) = h_*^3 + ah_*^2 + c = 0 \quad (2.5)$$

$$a = - \left\{ 1 + \frac{1}{2} Fr_1^2 \right\}, \quad c = \frac{1}{2} Fr_1^2 \frac{1}{(1 - \varepsilon)^2} \quad (2.6)$$

Cardano の解法を用い(2.7)式と置き変える。

$$x^3 + a_1x + b_1 = 0 \quad (2.7)$$

$$a_1 = -\frac{1}{3}a^2, \quad b_1 = \frac{2}{27}a^3 + c \quad (2.8)$$

ここで, 3つの実数根を持つ条件は判別式を用いて(2.9)式で表すことができ, 無次元水深  $h_*$ が3つの実数根を持つ限界条件を算出すると(2.10)式を得ることができる。

$$R = \frac{1}{4}b_1^2 + \frac{1}{27}a_1^3 \quad (2.9)$$

$$\varepsilon_{critical} = 1 - \frac{Fr_1}{\left\{ \frac{2}{3}(1 + Fr_1^2) \right\}^{\frac{3}{2}}} \quad (2.10)$$

この  $\varepsilon_{critical}$  は跳水が発生するか否かの限界条件となる。また, 図 2-6 に示すような流れを考え, Bernoulli の式を適用すると(2.11)式を得る。これより発生した跳水・段波の移動速度が 0 となる条件を導出する。

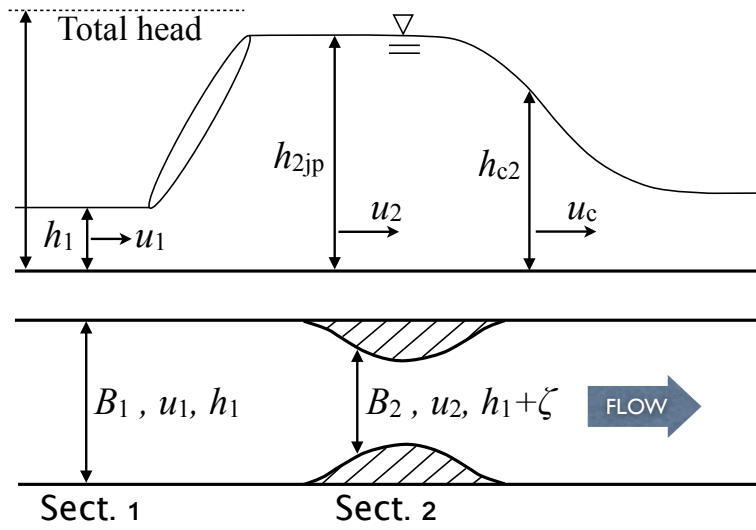


図 2-6 縮流部縮流部を有する開水路流れで定義した水理諸元

$$h_{2jp} + \frac{u_2^2}{2g} = h_{c2} + \frac{u_c^2}{2g} \quad (2.11)$$

ここで、左辺第 2 項は、

$$\frac{u_2^2}{2g} = \frac{1}{2} Fr_1^2 \left( \frac{h_1}{h_2} \right)^2 h_1 \quad (2.12)$$

右辺第 1 項は、

$$h_{c2} = Fr_2^{\frac{2}{3}} h_2 \quad (2.13)$$

右辺第 2 項は、

$$\frac{u_c^2}{2g} = \left( \frac{B_2 h_2}{B_c h_{c2}} \right) \frac{u_2^2}{2g} \quad (2.14)$$

で表すことができる。さらに  $Fr_2$  は次のように表すことができる ( $q$  : 単位幅流量)。

$$Fr_2^2 = \frac{u_2^2}{gh_2} = \frac{\left( \frac{q_2}{h_2} \right)^2}{gh_1} \frac{h_1}{h_2} = \frac{u_1^2 h_1^2}{gh_1} \frac{h_1}{h_2^3} = Fr_1^2 \left( \frac{h_1}{h_2} \right)^3 \quad (2.15)$$

よって、(2.11)式は、

$$h_{2jp} + \frac{1}{2} Fr_1^2 \left( \frac{h_1}{h_2} \right)^2 h_1 = Fr_2^{\frac{2}{3}} h_2 + \frac{u_c^2}{2g} = \left[ \left( \frac{h_1}{h_2} \right)^3 Fr_1^2 \right]^{\frac{1}{3}} + \left( \frac{B_2}{B_c} \right)^2 \left( \frac{h_2}{h_{c2}} \right)^2 \frac{u_2^2}{2g} \quad (2.16)$$

となる。

水路縮小率  $\varepsilon$  について整理することで発生した段波が静止跳水として停留する条件式 (2.17) 式を導くことができる。

$$\varepsilon = 1 - \sqrt{\frac{\frac{1}{2} Fr_1^3 h_*^2}{h_*^3 - h_*^2 Fr_1^3 + \frac{1}{2} Fr_1^2}} \quad (2.17)$$

以上より導出した(2.10)式, (2.17)式を用いて縮流部を有する開水路流れで推定される各種水面形を図 2-7 に示す。図中の黒の実線は(2.10)式を表し、領域 1 と領域 3 の間の太い破線は(2.17)式を表している。ここで領域 1 は跳水及び段波が発生しない領域、領域 2 は跳水及び段波が発生する領域、領域 3 は跳水及び段波が発生する場合も発生しない場合もある遷移領域であると推定される。例として領域 2 で発生した段波は、上流のフルード数が増加していくと、点線付近で段波が消え、そこから減少していくと実線付近で段波が発生すると理論的に推定することができる。

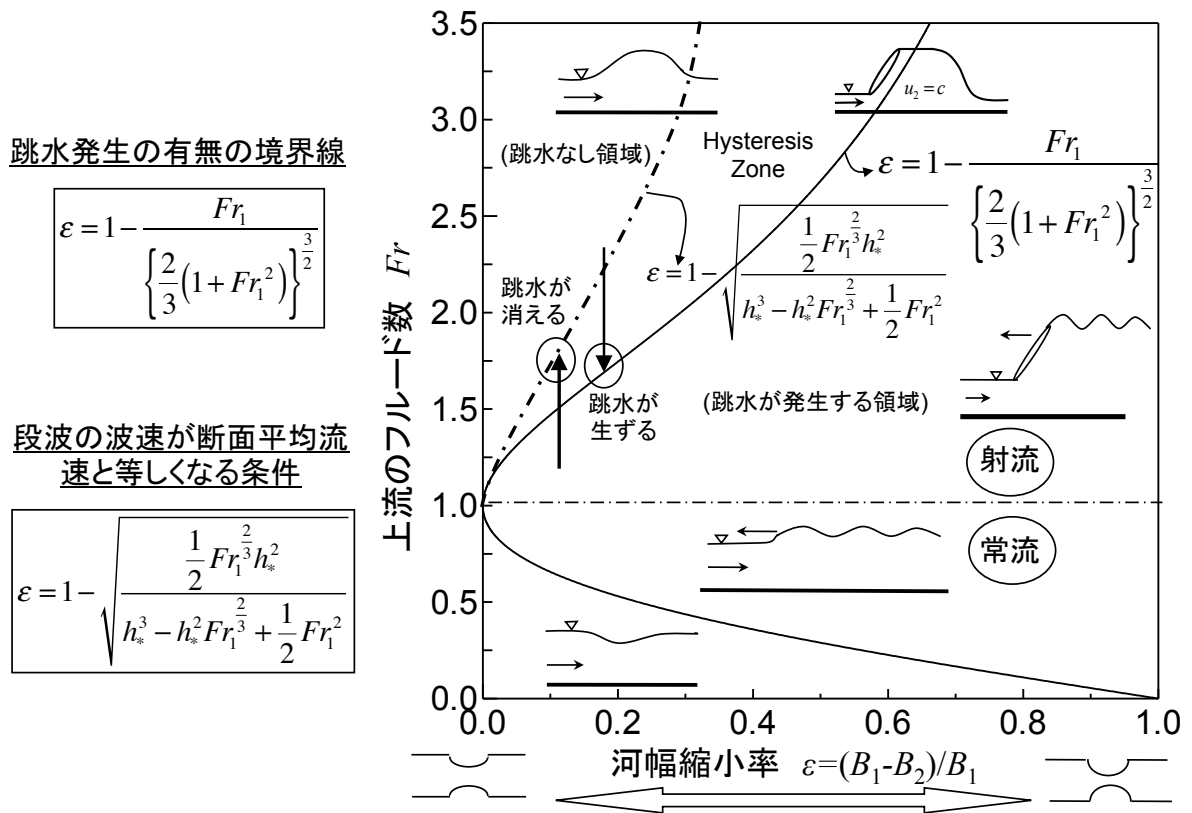


図 2-7 縮流部を有する開水路流れで理論から推定される各種水面形



2. 3. 1 (b) 水路床が非一様である場合（凸部をもつ開水路）

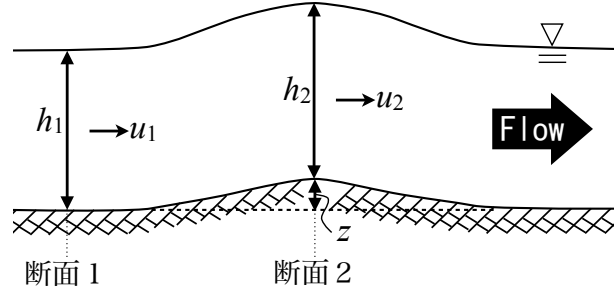


図 2-8 凸部を有する開水路流れで定義した水理諸元

図 2-8 に示すような凸部を持つ開水路流れにおいて上流(断面 1)のフルード数と無次元河床凸部高さの関係式を導出する. 断面 1, 断面 2 に対して連続式と Bernoulli の定理を適用した式を(2.18)式, (2.19)式に示す.

$$v_1 h_1 = v_2 h_2 \quad (2.18)$$

$$\frac{1}{2g} v_1^2 + h_1 = \frac{1}{2g} v_2^2 + h_2 + z \quad (2.19)$$

式(2.18), (2.19)式より  $v_2$  を消去し整理することにより(2.20)式の 3 次方程式が得られる. ここで,  $h_*$  は断面 2 での水深  $h_2$  を上流の水深  $h_1$  で除した無次元水深,  $Fr_1$  は断面 1 でのフルード数,  $Fr_2$  は断面 2 でのフルード数,  $\eta = z/h_1$  は無次元河床凸部高さとして定義する.

$$f(h_*) = h_*^3 - h_*^2 \left\{ 1 + \frac{1}{2} Fr_1^2 - \eta \right\} + \frac{1}{2} Fr_1^2 = 0 \quad (2.20)$$

(2-20)式を用い, Cardano の解法により, 跳水・段波が発生する領域を導出する.

(2-20)式を(2-21)式に置き換え,

$$f(h_*) = h_*^3 + ah_*^2 + c = 0 \quad (2.21)$$

$$a = - \left\{ 1 + \frac{1}{2} Fr_1^2 - \eta \right\}, \quad c = \frac{1}{2} Fr_1^2 \quad (2.22)$$

Cardano の解法より,

$$x^3 + a_1 x + b_1 = 0 \quad (2.23)$$

$$h_* = x - \frac{a}{3}, \quad a_1 = -\frac{1}{3} a^2, \quad b_1 = \frac{2}{27} a^3 + c \quad (2.24)$$

ここで  $h_*$  が 3 つの実数根を持つ条件は判別式を用いて(2.25)式で表すことができ, 無