

次元水深 y が 3 つの実数根を持つ限界条件を算出すると(2.26)式を得ることができる。

$$R = \frac{1}{4}b_1^2 + \frac{1}{27}a_1^3 \quad (2.25)$$

$$\eta_{\max} = 1 + \frac{1}{2}Fr_1^2 - \frac{3}{2}Fr_1^{\frac{2}{3}} \quad (2.26)$$

図 2-9 に示すような流れを考え、Bernoulli の式を適用すると(2.27)式を得る。これより発生した跳水・段波の移動速度が 0 となる条件を導出する。

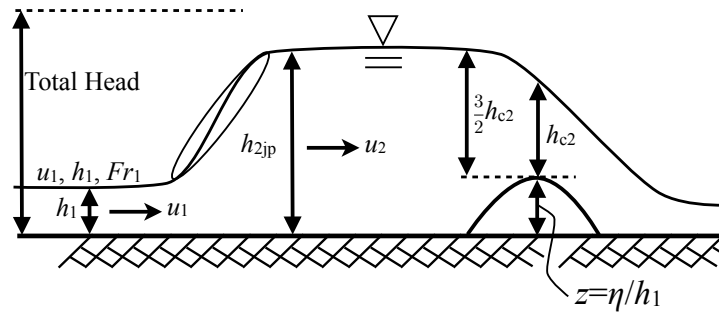


図 2-9 凸部を有する開水路流れで定義した水理諸元

$$h_{2jp} + \frac{u_2^2}{2g} = z_{\max} + \frac{3}{2}h_{c2} \quad (2.27)$$

ここで、左辺第 1 項は、

$$h_{2jp} = \frac{h_1}{2} \left(\sqrt{1 + 8Fr_1^2} - 1 \right) \quad (2.28)$$

左辺第 2 項は、

$$\frac{u_2^2}{2g} = \frac{1}{2} \left(\frac{q}{h_2} \right)^2 h_1 = \frac{1}{2} \frac{(u_1 h_1)^2}{gh_1} \frac{h_1}{h_2^2} = \frac{1}{2} \frac{u_1^2}{gh_1} \left(\frac{h_1}{h_2} \right)^2 h_1 = \frac{1}{2} Fr_1^2 \left(\frac{h_1}{h_2} \right)^2 h_1 \quad (2.29)$$

右辺第 2 項は、

$$h_{c2} = Fr_2^{\frac{2}{3}} h_2 \quad (2.30)$$

で表せる。また、 Fr_2 は次のように表すことができる。

$$Fr_2^2 = \frac{u_2^2}{gh_2} = \frac{u_2^2}{2g} \frac{2}{h_2} = Fr_1^2 \left(\frac{h_1}{h_2} \right)^3 \quad (2.31)$$

これらを(2.27)式に代入し、無次元河床凸部高さ η について整理することによって、発

生じた段波が静止跳水として停留する条件式(2.32)式を導くことが出来る

$$\eta = \frac{(1 + Fr_1^2)^{\frac{3}{2}} + 1}{16Fr_1^2} - \frac{1}{4} - \frac{3}{2}Fr_1^{\frac{2}{3}} \quad (2.32)$$

さらに、上流からの流れが凸を乗り越えられない境界条件として前述した限界水深を0とすると、(2.33)式となる。

$$h_{*c} = 0 \Rightarrow \frac{2}{3} \left(1 + \frac{1}{2}Fr_1^2 - \eta \right) = 0 \quad (2.33)$$

これを無次元河床凸部高さ η について整理することにより(2.34)式を得る

$$\eta = 1 + \frac{1}{2}Fr_1^2 \quad (2.34)$$

以上のように導出した(2.26)式、(2.32)式、(2.34)式を用いて凸部を有する開水路流れで推定される各種水面形を図 2-10 に示す。図中の黒の実線は(2.26)式を、射流域における領域1と領域4の間の黒い破線が(2.32)式を、領域2と領域3の間の灰色の線が(2.34)式を表している。ここで領域1は跳水及び段波が発生しない領域、領域2は跳水及び段波が発生する領域、領域3は流れが凸部を乗り越えられない領域、領域4は跳水及び段波が発生する場合も発生しない場合もある遷移領域であると推定される。例として領域2で発生した段波は、上流のフルード数が増加していくと、点線付近で跳水が消え、そこから減少していくと実線付近で跳水が発生すると理論的に推定することができる。

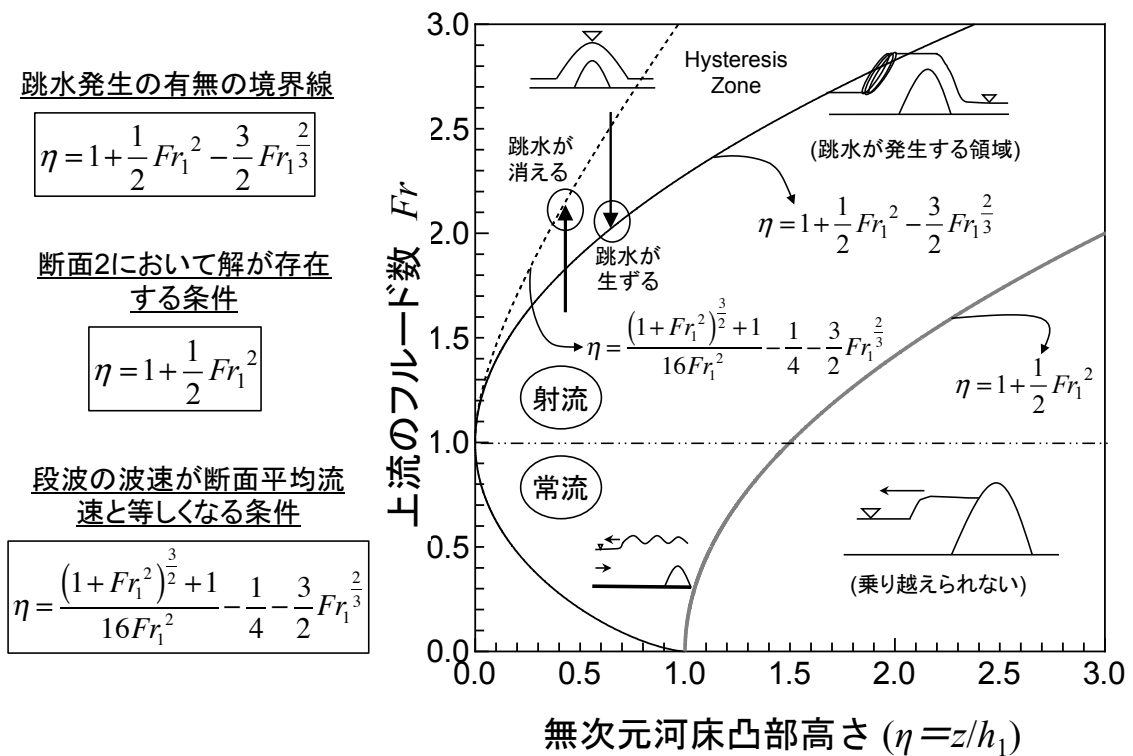


図 2-10 凸部を有する開水路流れで理論から推定される各種水面形

2. 4 開水路実験及び H. Rouse の実験結果による不等流水面形の存在範囲の検証

跳水・段波の存在領域と実現象との整合性を検証するため凸部(Case1)と縮流部(Case2)を設置した水路において水理実験を行った。検証実験は中央大学理工学部都市環境学科に設置している全長 15m 幅 0.9 m の三面鉄鋼製矩形横断面直線開水路を用いた。実験の様子を図 2-11 に示す。ここでは、断面形状のパラメーターとして無次元凸部高さ $\eta = z/h_1$ を定義する。なお、ここでの h_1 は測定地点での水深である。Case2 では断面縮小後の水路幅 b を河幅縮小率 $\varepsilon = (0.9 - b)/0.9$ が 0.09, 0.2, 0.31, 0.42, 0.63 となるように設定した。跳水の有無は明確な様子を呈するため目視によって判断した。

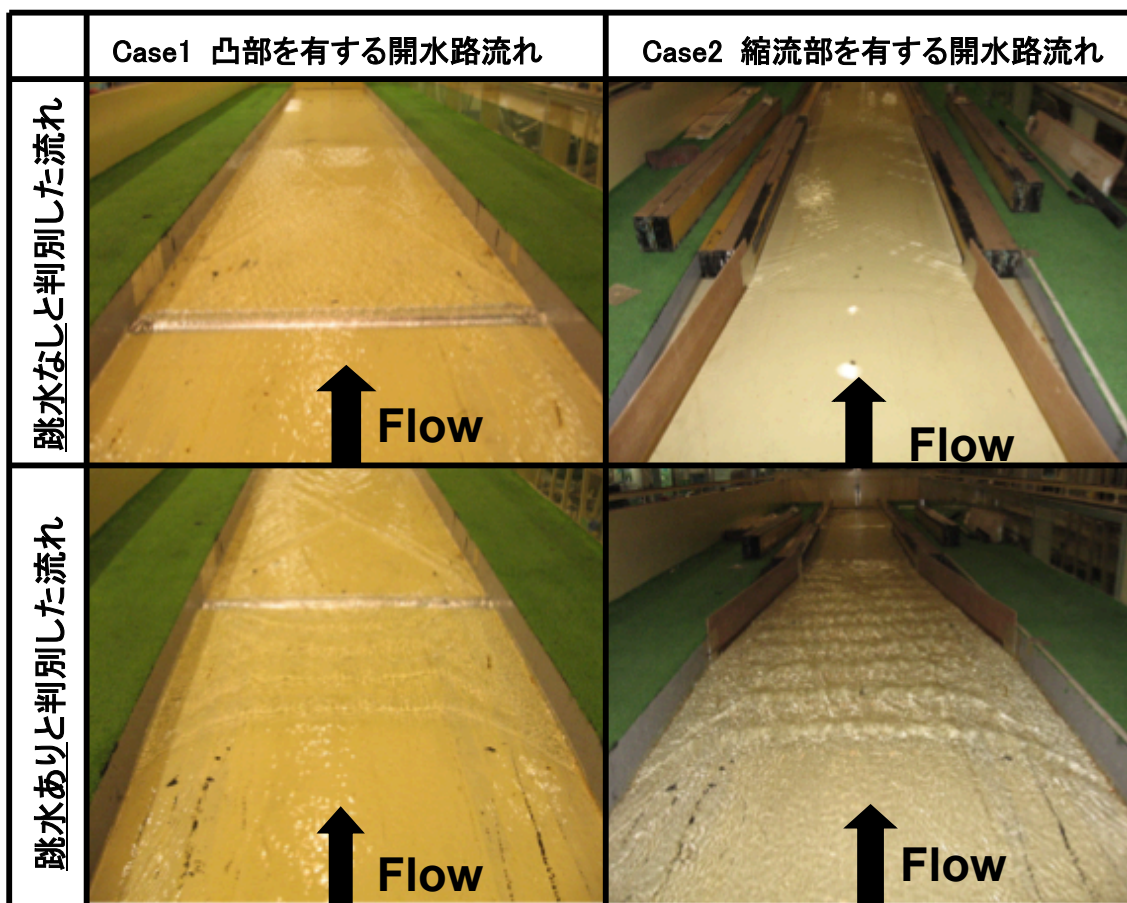


図 2-11 跳水有無の判別及びハンプ・縮流の設置状況

図 2-12 は Case2 の実験結果で、横軸に河幅縮小率、縦軸に上流のフルード数をとったものである。射流における実験では、河幅縮小率が 0.63 の時を除く全てのケースにおいて、水路床勾配を徐々に緩くしていくとある勾配に達した時点で縮流部付近において跳水が発生した。さらに勾配を緩くしていくと発生した跳水は上流側に遡上しながらその形状は薄れていった。また、常流における実験では、河幅縮小率が 0.20 及び 0.43 の時、徐々に勾配を大きくしていくと、ある勾配に達した時点で水路幅が狭まりきる断面の横断方向に小さな筋が現れ、本研究ではそれを緩やかな跳水と定義した。本実験で Case1, Case2 共に理論的に推定された水面形と実現象との整合性が高いことを示すことができた。

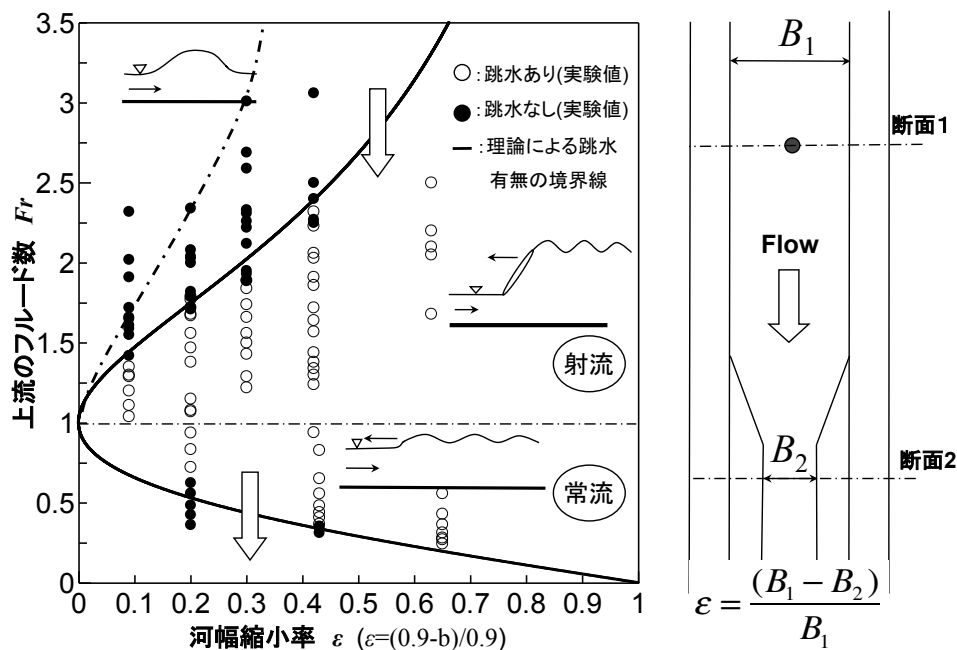


図 2-12 縮流率と上流端フルード数の関係からみた跳水の存在特性の実験的検証

同様に、凸部を有する開水路流れにおいて、跳水の有無を凸部の無次元化高さの上流端フルード数の関係を実験検証した。その結果を図 2-13 に示す。実験結果と理論を比較すると、跳水が発生している状態から上流のフルード数を徐々に増加させていった際は、点線付近で流れの状態が「跳水あり」から「跳水なし」に変わった。反対に、跳水が発生していない状態からフルード数を徐々に低下させていった際は、実線付近で流れの状態が「跳水なし」から「跳水あり」に変わった。この結果から、水路形状と上流のフルード数が共に等しい条件でも跳水が発生する場合と発生しない領域が存在し、その領域においての上述の特徴から、流れ状態の履歴効果がある領域であることが分かった。この結果により、縮流部を有する開水路の水面形の存在範囲に関する理論的解析が妥当であると言えよう。

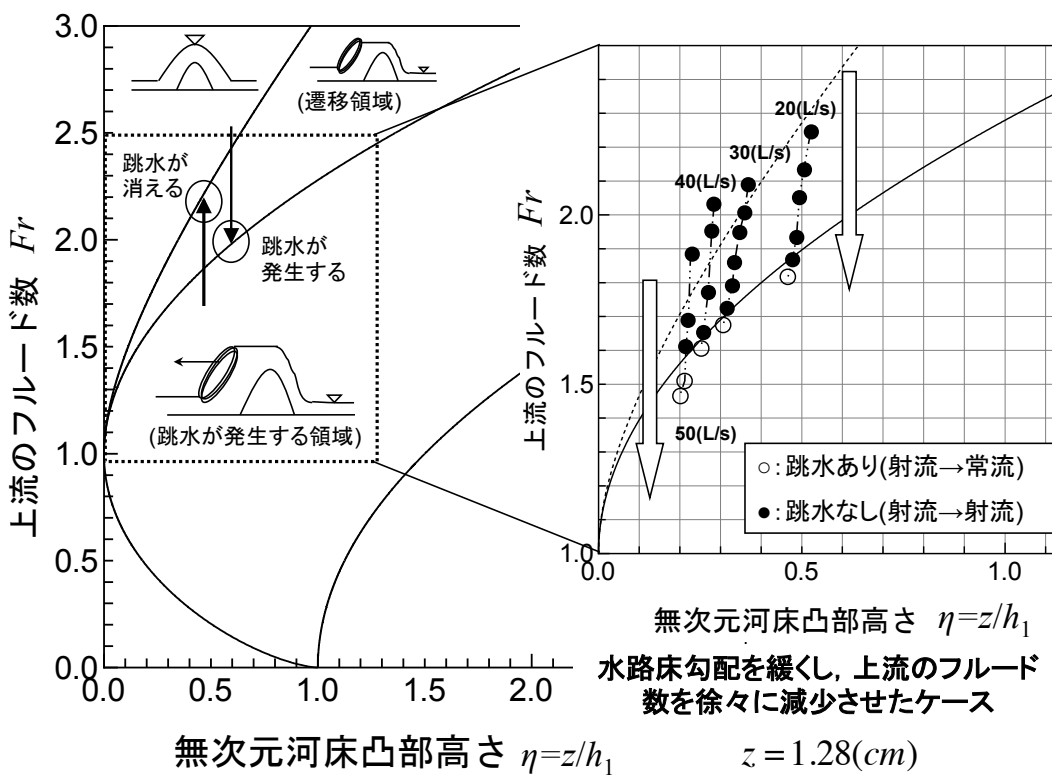
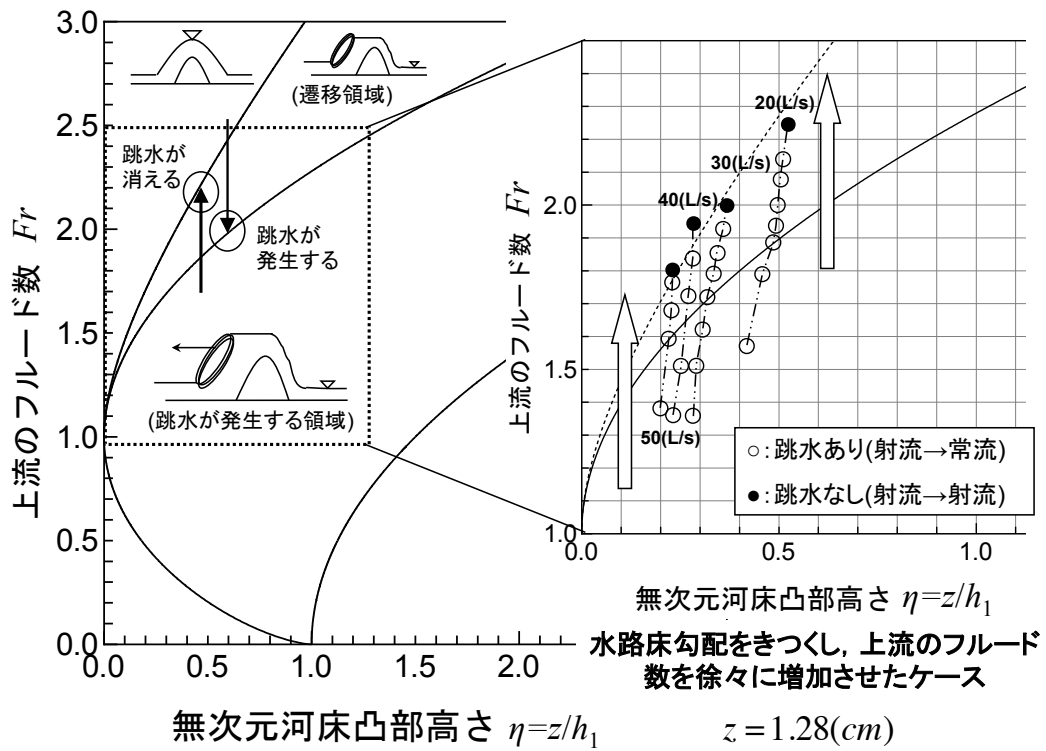


図 2-13 無次元凸部高さ と 上流端フルード数の関係からみた跳水の存在特性の実験的検証

また、これらの実験から、跳水なしの射流領域と跳水有りの射流領域の間の区間が実験の方向に依存し、水面形の履歴効果ははっきりと現れた。

さらに、1940年代前半、アイオワ大学の H. Rouse 教授（近代水理学の父と呼ばれた先駆的研究者の一人）によって凸部を有する開水路において、射流の水面形から跳水に遷移する実験過程をビデオで記録しており、その遷移の瞬間の画像を解析し、上記の理論解析の妥当性を検証した。実験は一点（1ケース）しかないが、非常に精密な実験であったため、本研究で継承している山田らの解析の妥当性を十分検証できる。解析画像を図 2-14 に示す。射流状態であった流れのフルード数を徐々に下げ、流れは射流状態から跳水が生じる。この過程は図 2-13 に示す後半の実験流れの状況と一致する。跳水に遷移する瞬間において、その点（凸部の最高点）でのフルード数が 1 となり、その点での水深が限界水深となる。上流端の水深（ h_{*1} ）を 1 とし、簡単な画像解析から凸部の高さ（ η_{\max} ）は上流端水深の 2.22 倍であり、凸部頂点上部における水深（ h_{*2} ）は上流端水深の 2.06 倍であることが分かる（各種水理量は図 2-14 を参照）。図 2-10 から分かるように、上流端（断面 I）のフルード数（ Fr_1 ）及び水路床高さ（ η ）より水面形（跳水）の存在範囲が決定される。ここで、水路幅は一樣であるため、流下方向における単位幅流量は一定である。上流端のフルード数（ Fr_1 ）は、

$$Fr_1 = \frac{u_1}{\sqrt{gh_1}} = \frac{q}{h_1 \sqrt{gh_1}} \quad (2.35)$$

に従う。ここで、単位幅流量 q は限界水深が現れる断面 II において $q = \sqrt{gh_c} = \sqrt{gh_2}$ の関係を(2.35)式に代入し、整理すると、

$$Fr_1^2 = \frac{h_c^3}{h_1^3} = \frac{h_{*2}^3}{h_{*1}^3} \Rightarrow Fr_1 = \sqrt{\frac{h_{*2}^3}{h_{*1}^3}} \quad (2.36)$$

上流端フルード数（ Fr_1 ）を求めることができる。上流端フルード数（ Fr_1 ）と無次元化凸部高さ（ η ）の関係を前節で導いた跳水有無の関係図にプロットしたものを図 2-15 に示す。赤点は H. Rouse 教授の実験画像より算出した Fr_1 - η 関係である。フルード数非常に高い精度で射流状態から跳水発生する瞬間の解析結果と一致している。その結果からも本解析手法の妥当性が証明された。

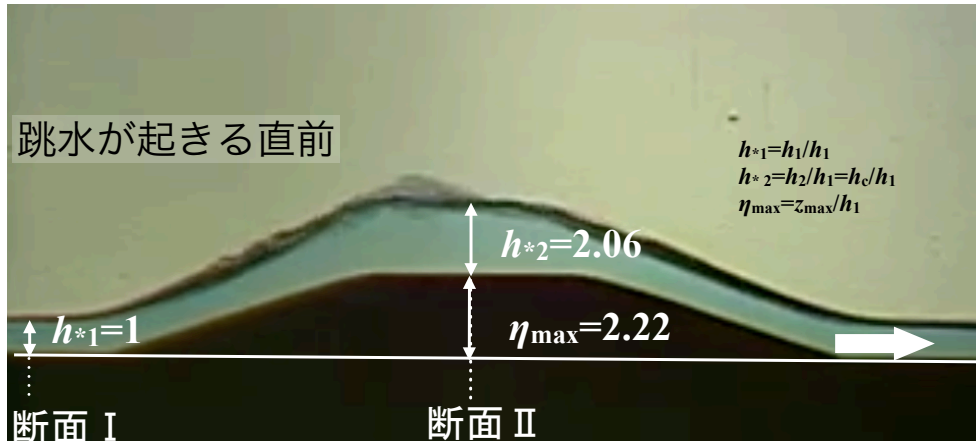


図 2-14 H. Rouse⁶⁾教授の実験 (1940s), 射流から跳水が発生する瞬間

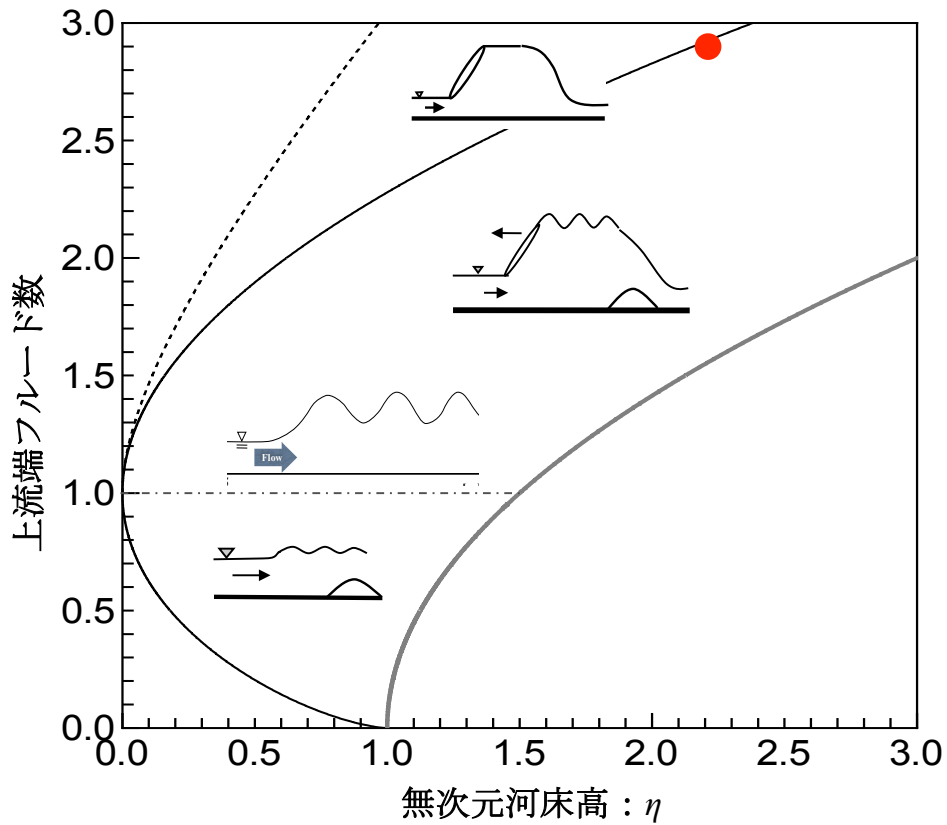


図 2-15 H. Rouse⁶⁾教授の実験 (1940s), 射流から跳水が発生する瞬間のフルード数と無次元河床高との関係

2. 5 結論

本章で得られた結論を以下に例挙する.

- (1) 不等流の水面形は必ず不定流の過程を経て形成されることが実験によって確認し、流量が上昇過程においては非一様水路床断面をもつ開水路において上流側に伝播する段波が発生する. 時間と共に段波が消え不等流の水面形が形成される. 段波の通過点は大きな水深がもたらされる.
- (2) 不等流の形成過程から、不等流は不定流と対等の独立した現象ではなく、不定流の特殊な状態である. つまり、不定流の一種であると考えられる.
- (3) Bernoulli の定理の破綻条件を解析的に導出し、破綻する条件を跳水は発生限界とし、上流側のフルード数と無次元凸部高さ、または上流側のフルード数と水路縮小率の関係より見られる跳水の有無を軸とした各種水面形の存在範囲を解析的に明示した.
- (4) 開水路水理実験より、各種水面形の存在範囲を検証した. 実験より、流れ状態（跳水あり・跳水なし）の履歴効果が存在する範囲は解析で得られた結果と一致することを示した.
- (5) 理論的に導いた跳水・段波の発生領域を水路実験及び H. Rouse 教授の実験映像から解析した結果で検証し、整合性が高いことを示した.
- (6) 本研究の全体を通して本章で示した各種水面形の存在範囲をベースに議論を展開するため、各種水面形の存在範囲図をもう一度総括して図 2-16, 図 2-17 に示す. 図中の破線矢印は実験の方向を示している. 矢印の先端において、流れの状態（跳水あり・跳水なし）の遷移が発生することを表している.

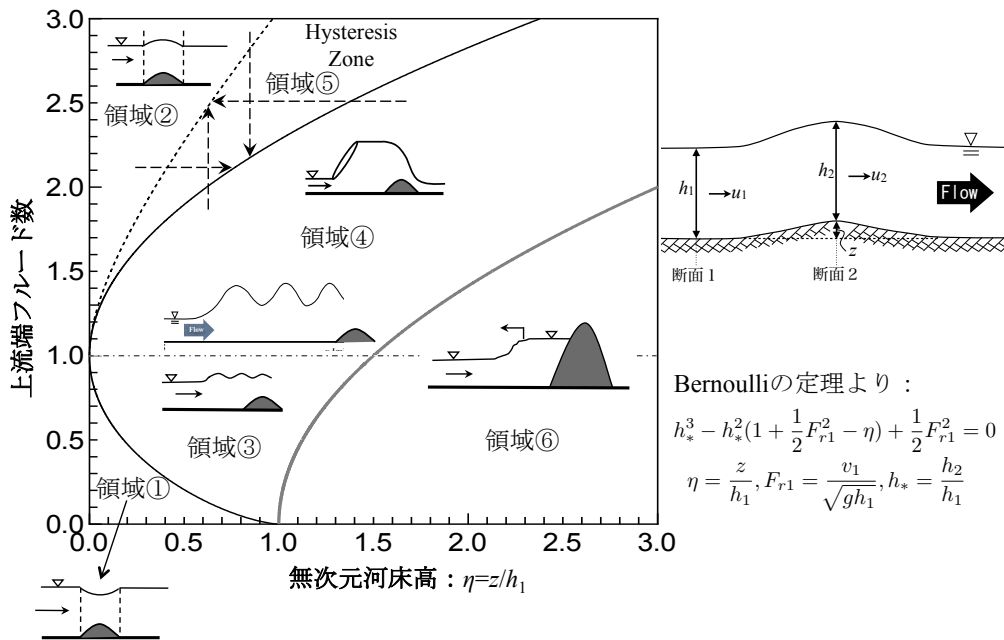


図 2-16 凸部を有する開水路における種々の水面形の存在範囲 (Fr_1 - η 関係)

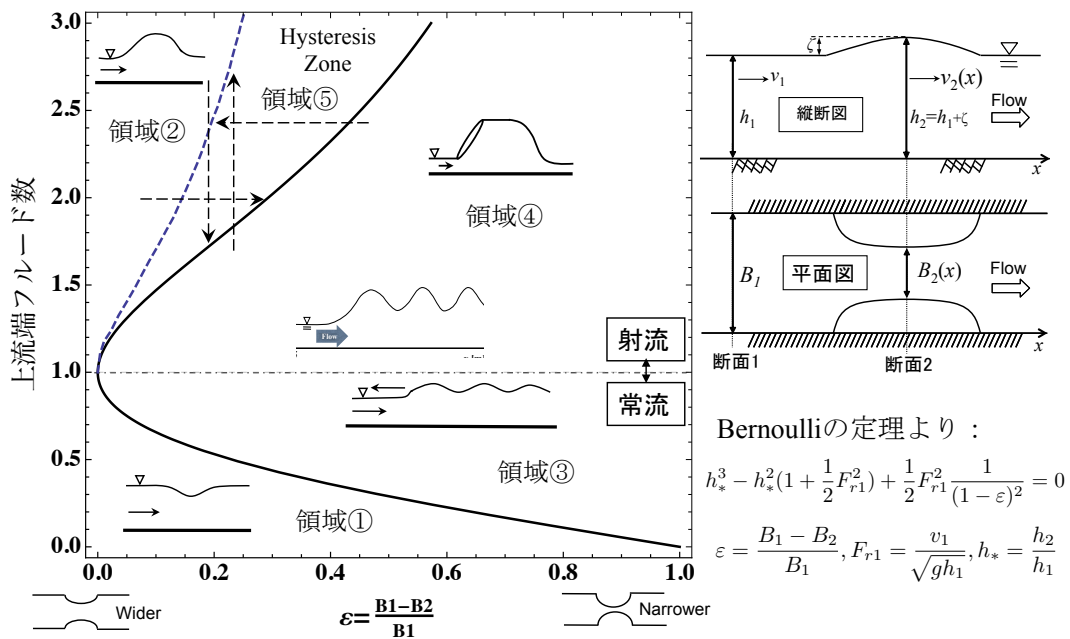


図 2-17 縮流部を有する開水路における種々の水面形の存在範囲 (Fr_1 - ε 関係)

参考文献

- 1) 土木学会平成 20 年度都賀川出水調査団 (団長: 藤田一郎): 河川整備基金助成事業,

2008 年 7 月 28 日突発的な集中豪雨による都賀川水難事故に関する調査研究。
<http://www.kasen.or.jp/seibikikin/h21/pdf/rep3-03h.pdf>.

- 2) 山田正・水子龍彦・竹本典道：断面形状の変化に伴う水面形遷移に関する研究，土木学会第 43 回年次学術講演会講演概要集：480-481. 1988.
- 3) 山田正・池内正幸・村上良宏：溪流を模擬した開水路流れの水面形遷移と抵抗則に関する研究，第 30 回水理講演会論文集：73-78. 1986.
- 4) 高木隆一，佐藤直良，山田正：幅の変化する水路(狭窄,拡幅)を流れる不等流の水面形の解析解，第 60 回土木学会関東支部年次研究発表会講演概要集, Vol.13:131-132, 1986.
- 5) Quimpo, M. and Yamada, T.: General Hydraulic Characteristics of an Open Channel with Narrow Path, Proceeding of World Environmental and Water Resources Congress 2009: 1-10. doi: 10.1061/41036(342)273. 2009.
- 6) IIHR website:
<http://www.iuhr.uiowa.edu/research/publications-and-media/films-by-hunter-rouse/>

第3章

開水路断面形状の不均一性に起因する
不等流水面形の解析解及びその特性

第3章 開水路断面形状の不均一性に起因する不等流水面形の解析解及びその特性

3.1 概説

特異点を無限遠としない場合の不等流水面形の解析解に関する研究として、ほとんど唯一と言っても過言ではないのは岩佐の理論^{1), 2), 3), 4)}であろう。常流・射流流れにおける特異点近傍の水面形の理論的解析がかなりのところまで定性的かつ定量的な評価を可能にした。その数学的構造の複雑さやトポロジー的な数学手法の抽象さがゆえ、実用的であるとは言いがたい面もある。本章では、常流・射流状態の遷移・非遷移不等流水面形のより明解な解析解を導出し、その合理性・正当性を開水路水理実験により検証した。最後に、H. Rouse 教授により 1940 年代前半で行われた非常に緻密な実験^{5), 6)}を本研究で導出した解析解を用いて実証した。

3.2 水路床摩擦を考慮しない場合の非一様断面形状を持つ開水路における不等流水面形の基本式

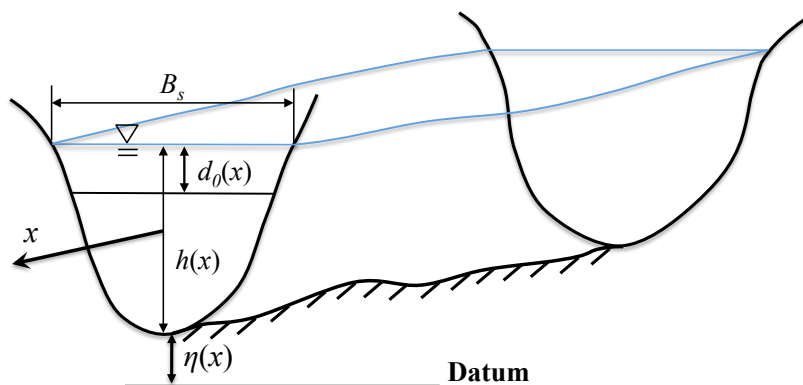


図 3-1 非一様断面形状を有する開水路の概要と記号の定義

一般に水理学の教科書^{例えば, 7), 8), 9)}で紹介される開水路不等流基礎式の導き方には2通りある。そのうちの1つは岩佐によるものであり、彼の水理学の教科書¹⁰⁾に記されているように三次元 Navier-Stokes 方程式を開水路断面で積分した形で流れ方向次元基礎式を導く方法である。参考文献 7)はこの岩佐の方法によるものである。もう1つは初めから摩擦抵抗（或いは摩擦損失）を考慮した次元 Bernoulli の定理を用い、連続式と共に次元不等流の基本式を導く方法がある（これを椎貝は MIT 流とよんでいた）。基

本式としてはどちらも同じ式形に至るが、本研究ではこれを今一度運動量の定理を前面に出す形で一般断面形状をもつ開水路水面形の基本式を導出する。図 3-1 に示す一般断面開水路において、水路床や壁面への浸透や横流入・出がないとき微小長さ dx をもつ検査体に入出入りする流量 $Q(x, t)$ の差は通水面積 $A(x, t)$ の時間変化として現れる。このとき連続の方程式は

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (3.1)$$

となる。 x は流下方向座標であり、さらに定常流を扱う場合には連続式は u を流下方向の断面平均流速とすると $Q = uA = \text{const.}$ である。ここで流れを流管として断面平均の Bernoulli の定理を考えると下記の式が成り立つ。

$$\frac{\alpha}{2g} \left(\frac{Q}{A} \right)^2 + \eta + \lambda h = \text{const.} \quad (3.2)$$

ここに、 α は流管内の流速分布に起因する運動量補正係数、 λ は非静水圧分布のときの Jaeger の圧力分布係数¹¹⁾、 η は基準面から水路床までの距離、 h は水深である。一次元定常流において η 及び h はともに空間 x のみの関数であり、(3.2)式を x で微分すると、

$$\frac{Q^2}{2g} \frac{d}{dx} \left(\frac{\alpha}{A^2} \right) + \frac{d}{dx} (\eta + \lambda h) = 0 \quad (3.3)$$

を得る。本節では水理現象の本質を単純に抽出するため、以下 α と λ は 1 として扱う。通水断面積 A は水深 $h(x)$ の関数であり、

$$A = A(h(x)) \quad (3.4)$$

と表すことができる。この関係より(3.3)式左辺第 1 項の微分は、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{A^2} \right) &= -\frac{2}{A^3} \left(\frac{\partial A}{\partial x} \Big|_{h(x)} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial A}{\partial h} \Big|_x \frac{dh}{dx} \right) \\ &= -\frac{2}{A^3} \left(\frac{\partial A}{\partial x} \Big|_{h(x)} + \frac{\partial A}{\partial h} \Big|_x \frac{dh}{dx} \right) \end{aligned} \quad (3.5)$$

となる。(3.5)式を(3.3)式に代入すると、

$$-\frac{Q^2}{gA^3} \left(\frac{\partial A}{\partial x} \Big|_{h(x)} + \frac{\partial A}{\partial h} \Big|_x \left(\frac{d\eta}{dx} + \frac{dh}{dx} \right) \right) + \frac{d\eta}{dx} + \frac{dh}{dx} = 0 \quad (3.6)$$

となり、(3.6)式を整理すると、

$$\frac{dh}{dx} = \frac{-\frac{d\eta}{dx} + \frac{Q^2}{gA^3} \frac{\partial A}{\partial x} \Big|_{h(x)}}{1 - \frac{Q^2}{gA^3} \frac{\partial A}{\partial h} \Big|_x} \quad (3.7)$$

(3.7)式に示す一般的な水路床と横断面形状をもつ開水路水面形の基本式が得られる。
(3.7)式は水深 h に関する基本式であり、これを水位 $H(x)=h(x)+\eta(x)$ で表すと、

$$\frac{dH}{dx} = \frac{-\frac{Q^2}{gA^3} \frac{\partial A}{\partial h} \Big|_x \frac{d\eta}{dx} + \frac{Q^2}{gA^3} \frac{\partial A}{\partial x} \Big|_{h(x)}}{1 - \frac{Q^2}{gA^3} \frac{\partial A}{\partial h} \Big|_x} \quad (3.8)$$

となる。上記(3.7)式あるいは(3.8)式が以下に展開する水深・水位に関する基本式となる。

式あるいは(3.8)式で示したように、横断面や水路床の形状は開水路定常流れの水面形の形成に密接な関係にあることは明らかである。図 3-1 で示す開水路の概要を参考に、水路床と横断面の基礎的な形状条件を設定し、それらの条件での水面形の基本式を示す。本研究においては解析区間が短いことから、摩擦の効果を考慮しない解析を行う。

3. 2. 1 水平床でかつ流れ方向に一様横断面形状を有する場合

水路床が水平であり、任意形状の一様横断面を考えると、

$$\frac{d\eta}{dx} = 0, \quad \frac{\partial A}{\partial x} = 0 \quad (3.9)$$

であり、水面形基本式(3.7)式、あるいは(3.8)式に代入すると、水面形は $\frac{\partial h}{\partial x} = 0$ 水平であることは容易に分かる。

3. 2. 2 水平床でかつ流れ方向に非一様横断面形状を有する場合

横断面が流れ方向に非一様であることは $\frac{\partial A}{\partial x} \neq 0$ であることを意味する。このとき、水平床のため水路床高 $\eta(x)=const.$ となとなり、(3.7)式を整理すると、

$$\frac{dh}{dx} = \frac{\frac{Q^2}{gA^3} \frac{\partial A}{\partial x} \Big|_{h(x)}}{1 - \frac{Q^2}{gA^3} \frac{\partial A}{\partial h} \Big|_x} \quad (3.10)$$

となり、この式が水平床非一様横断面を有する不等流の水面形基本式となる。

3. 2. 3 水平床でかつ流れ方向に非一様矩形横断面形状を有する場合

横断面形状は矩形であるが，流下方向に水面幅が増減する水平床流れにおいて，通水幅を $B_s(x)$ とすると，矩形横断面のため，水路幅は鉛直方向で一定であることから，

$$\left. \frac{\partial A}{\partial h} \right|_x = B_s(x), \quad \left. \frac{\partial A}{\partial x} \right|_{h(x)} = h \frac{\partial B_s}{\partial x} = h \frac{dB_s}{dx} \quad (3.11)$$

となる．(3.11)式より(3.7)式は

$$\frac{dh}{dx} = \frac{\frac{Q^2}{gB_s^3} \frac{dB_s}{dx} \frac{1}{h^2}}{1 - \frac{Q^2}{gB_s^2} \frac{1}{h^3}} \quad (3.12)$$

となり，水平床非一様矩形断面の場合の不等流の水面形基本式を得る．上式の分母を 0 とする流れの特異点において，限界水深が定義されるが，Bernoulli 及び Böss の定理¹²⁾ によっても限界水深が定義され，

$$h_c = \sqrt[3]{\frac{1}{g} \left(\frac{Q}{B_s} \right)^2} \quad (3.13)$$

となる．(3.13)式を(3.12)式に代入すると水平床非一様矩形断面の場合の不等流の基本式は，

$$\frac{dh}{dx} = \frac{\frac{Q^2}{gB_s^3} h \frac{dB_s}{dx}}{h^3 - h_c^3} \quad (3.14)$$

となる．(3.14)式は次章に示す解析の基本式となる．

3. 2. 4 非一様床でかつ流れ方向に非一様横断面形状を有する場合

矩形の横断面が流下方向に水面幅が増減するだけでなく，水路床も流下方向に変化する場合は(3.7)式及び(3.11)式より，

$$\frac{dh}{dx} = \frac{-\frac{d\eta}{dx} + \frac{Q^2}{gB_s^3} \left. \frac{\partial A}{\partial x} \right|_{h(x)}}{1 - \frac{Q^2}{gA^3} \left. \frac{\partial A}{\partial h} \right|_x} = \frac{-\frac{d\eta}{dx} + \frac{Q^2}{gB_s^3} \frac{\partial B_s}{\partial x} \frac{1}{h^2}}{1 - \frac{Q^2}{gB_s^2} \frac{1}{h^3}} \quad (3.15)$$

となり，非一様床で流れ方向に幅の変化する矩形横断面形状を有する不等流の水面形の基本式を得る．

3. 2. 5 非一様床でかつ流れ方向に一様矩形横断面形状を有する場合

横断面が矩形で水面幅が一定で水路床高さのみが流下方向に変化するとき、

$$\frac{\partial A}{\partial h} = \frac{A}{h} = B_s = \text{const.}, \quad \frac{\partial B_s}{\partial x} = \frac{dB_s}{dx} = 0 \quad (3.16)$$

であり、(3.16)式より、(3.7)式を整理すると、非一様床で一様矩形横断面を有する不等流の水面形の基本式は(3.17)式となる。

$$\frac{dh}{dx} = \frac{-\frac{d\eta}{dx}}{1 - \frac{Q^2}{gB_s^2} \frac{1}{h^3}} \quad (3.17)$$

3. 3 水路床摩擦を考慮しない場合の非一様断面形状を持つ開水路における不等流水面形の解析解

本研究では開水路の基礎的な断面形状の非一様性による不等流基本式の解析解を求めることにより、その特性を解析的に解明する。その対象の一つは流下方向に水平床で非一様な矩形横断面の場合 ((3.14)式)、もう一つは非一様床でかつ一様矩形横断面の場合 ((3.17)式) の2種類である。

3. 3. 1 解析手法

流れ方向に一般的な断面をもつ開水路流れの水面形の基本式(3.7)式の分子が 0 になる場合には、流れは等流となる。一方、分母が 0 になる場合はその点が微分方程式の特異点となり、この特異点を境に流れの状態が常流から射流への遷移発生する。この点においては(3.7)式より、

$$\left. \frac{\partial A}{\partial h} \right|_x = B_s = \frac{gA}{u^2} \quad (3.18)$$

となる。このとき(3.18)式から、

$$1 - \frac{u^2 B^2 h^2}{gB^3 h^3} B = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 - \frac{u^2}{gh} = 0 \quad (3.19)$$

となり，その点におけるフルード数 Fr は

$$Fr = \frac{u}{\sqrt{gh}} = 1 \quad (3.20)$$

となる．上式よりその点（特異点）における流速と水深を用いるとフルード数 Fr が 1 になることより，その点における水深は限界水深になっていることが分かる．

不等流水面形の解析解は水理現象を理解する一大基礎として非常に重要である．しかし，前章で示したように，一般断面開水路流れの水面形基本式が非線形微分方程式であり，かつ上述のような流れの状態が遷移する特異点が存在するため，(3.8)，(3.9)式の解析解を求めることは難しく，未だに確立した解析解は得られていない¹³⁾．Qian らは数式処理言語を援用した手法により不等流の水面形の解析解の導出を試みている¹⁴⁾．本研究は断面形状を矩形とし，水路幅（横断面）及び水路床形状が一定でない水路における不等流水面形の解析解を Qian らの解析手法¹⁴⁾を用いて導出した．本研究は断面形状を矩形とし，水路幅（横断面）及び水路床形状が一定でない水路における不等流水面形の解析解を導出した．

(3.10)，(3.14)，(3.17)式に示すような基礎的な水路形状条件においての水面形基本式は，水深に関する非線形の式であり，かつ上述のような流れの状態が遷移する特異点が存在するため，人間が直接解析的に解くことはほぼ不可能である．一方，これらいずれの式も分母が 0 になる場合があるため，仮に Mathematica や MATLAB 等の数式処理言語を単純に用いたとしても最終的な解析解を求めることができない．そこで，本研究では数式処理システム Mathematica を援用しつつ Man-Machine 支援システム手法により，水路幅及び水路床が変化する不等流水面形の解析解を求めた．Man-Machine システムにおいて，Machine（本研究では Mathematica を指す）の組込みコマンド DSolve を援用し，非常に煩雑な代数的演算作業は機械（コンピュータ）にさせることにする．本解析では Machine が解析的に解く過程において，分母が 0 になる可能性があるためと判断されるため，Machine による最終的な解析解まで得ることは不可能である．そこで，人間による引き継ぎ解析が必要となり，これをもって最終的な解析解を導出する．以下にそれを示す．

3. 3. 2 不等流水面形の解析解

前節で述べたように，異なる水路形状条件において，不等流水面形の基本式もそれに従い，様々な形を成す．本研究は横断面形状が矩形で水路幅と水路床がそれぞれ非一様である最も基本的な非一様形状条件における基本式(3.14)式と(3.17)式の解析解を求めることとした．

3. 3. 2 (a) 水平床かつ非一様矩形横断面開水路（縮流部をもつ開水路）

横断面形状が図 3-2 の鳥瞰図に示すように流下方向に変化する場合（本研究では縮流部と成す）の基本式(3.14)式について解析解を求める。

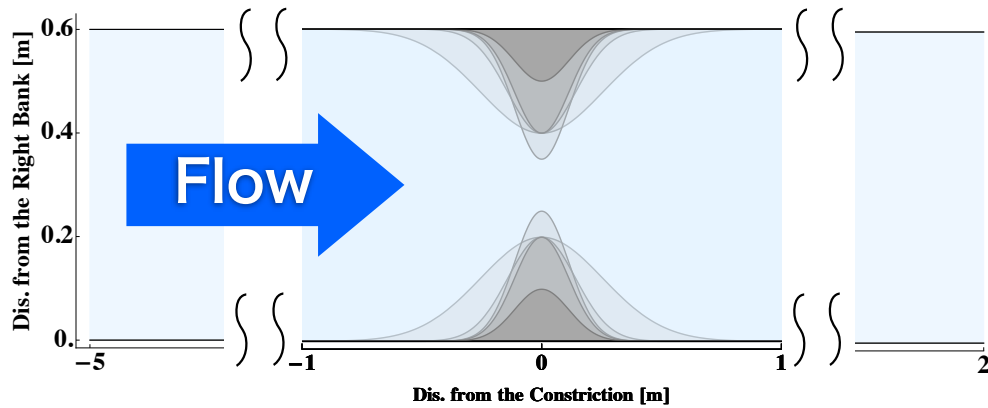


図 3-2 縮流部を有する開水路流れの平面図

ここでは横断面形は矩形であるため、通水幅 $B_s(x)=B(x)$ とおく。また、断面は単位幅流量 Q/B と限界水深 h_c の関係により、(3.13)式は、

$$\frac{dh}{dx} = \frac{\alpha \frac{Q^2}{gB^3} h \frac{dB}{dx}}{h^3 - h_c^3} \quad (3.21)$$

と整理される。ここに、 α は補正係数であり、最初からある特定の確定値を代入して解くと、計算が途中で中断し、いかなる結果を出すことも不可能になる。それは、Machine が解析的に解く過程において、分母に 0 となる項が生じるためである。そのため、コマ

ンド文、 $\text{DSolve} \left[\left\{ h'[x] = \frac{\alpha \left(\frac{Q}{gB[x]^3} h[x] D[B[x], x] \right)}{h[x]^3 - h_c[x]^3} \right\}, h[x], x \right]$ のように、 α は見かけ

上の変数としたまま解く必要がある。Machine から最終的に、解析解ではなく、 α を含む以下の式が得られる。

$$\frac{\alpha^2 \left(3g\alpha \left(\frac{Q^2}{gB(0)^2} \right)^{1-\frac{2}{3\alpha}} + \frac{h(x)^{-\frac{2}{\alpha}} (Q^2(2-3\alpha) - 2gB^2h(x)^3)}{B(x)^2} \right)}{12g(-2+3\alpha)} = 0 \quad (3.22)$$

ここに、 $B(0)$ は図 3-2 に示す最も狭い断面の水路幅である。後述する本研究の非一様水路幅実験ケースにおいても、図 3-2 に示す水路横断面条件で行った。

未知関数水深 $h(x)$ について解くには、(3.22)式の左辺が 0 となればよいことは明らかである。見かけ上の変数としておいた α は 1 とし、左辺の分母が 0 にならないことから、以下の(3.23)式が得られる。(3.23)式は一見複雑そうな形をしているが、

$$3g \left(\frac{Q^2}{gB(0)^2} \right)^{\frac{1}{3}} + \frac{-Q^2 - 2gB(x)^2 h(x)^3}{B(x)^2 h(x)^2} \quad (3.23)$$

限界水深と単位幅流量の関係を考慮しつつ、上式を整理すると、未知関数 $h(x)$ に関する 3 次の代数式が得られる。

$$2h(x)^3 - 3h_{c0}h(x)^2 + h_c(x) = 0 \quad (3.24)$$

上式より縦断方向の水深（水面形） $h(x)$ は縦断方向の限界水深の関数であることが分かる。この h_{c0} は水路幅最小となる断面での限界水深 $h_c(0)$ である。 h_{c0} は問題ごとに与えられる量である定常流量 Q 及び最小水路幅 $B(0)$ から求まる。(3.23)、(3.24)式から、水面形の非線形性は水路幅の非一様性によるものであることが分かる。

上記水深 $h(x)$ に関する三次式は Cardano の解法を用いて解くことで水面形を解析的に得ることができる。その結果数学的に以下の三つの解が得られ、(3.25)、(3.26)、(3.27)式に示し、それらの解析解を図 3-3 に示す。図 3-3 から三次式の解の特性である三つの解のうち一つ ($h3$) は負の値を示し、物理的な意味を持たない。その結果非一様幅開水路不等流水面形の解析解は以下の(3.25)、(3.26)式に示す二つとなる。興味あることは、一見解の式形中に虚数が現れつつ、実際の解が実数となることは一般的に三次式の解の公式 (Cardano 公式) の特徴であり、このことが歴史的には数学史において長い間複素数の概念が出現しなかった理由となっている¹⁵⁾。

$$h1(x) = \frac{1}{2} \left(h_{c0} + \frac{h_{c0}^2}{\left(h_{c0}^3 - 2h_c(x)^3 + 2\sqrt{-h_{c0}^3 \cdot h_c(x)^3 + h_c(x)^6} \right)^{\frac{1}{3}}} + \left(h_{c0}^3 - 2h_c(x)^3 + 2\sqrt{-h_{c0}^3 \cdot h_c(x)^3 + h_c(x)^6} \right)^{\frac{1}{3}} \right) \quad (3.25)$$

$$h2(x) = \frac{1}{2}h_{c0} + \frac{i(i+\sqrt{3})h_{c0}^2}{4\left(h_{c0}^3 - 2h_c(x)^3 + 2\sqrt{-h_{c0}^3 \cdot h_c(x)^3 + h_c(x)^6}\right)^{\frac{1}{3}}} - \frac{1}{4}(1+i\sqrt{3})\left(h_{c0}^3 - 2h_c(x)^3 + 2\sqrt{-h_{c0}^3 \cdot h_c(x)^3 + h_c(x)^6}\right)^{\frac{1}{3}} \quad (3.26)$$

$$h3(x) = \frac{1}{2}h_{c0} - \frac{(1+i\sqrt{3})h_{c0}^2}{4\left(h_{c0}^3 - 2h_c(x)^3 + 2\sqrt{-h_{c0}^3 \cdot h_c(x)^3 + h_c(x)^6}\right)^{\frac{1}{3}}} + \frac{1}{4}i(i+\sqrt{3})\left(h_{c0}^3 - 2h_c(x)^3 + 2\sqrt{-h_{c0}^3 \cdot h_c(x)^3 + h_c(x)^6}\right)^{\frac{1}{3}} \quad (3.27)$$

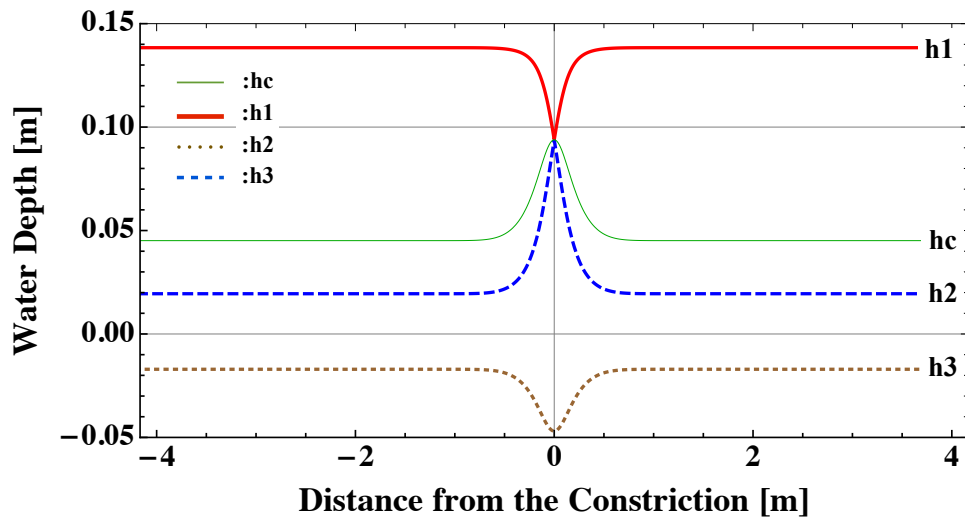


図 3-3 非一様矩形横断面（縮流部）に起因する不等流水面形基本式の解析解

（計算条件：上流端単位幅流量 $q=0.03\text{m}^2/\text{s}$ ，上流端 $Fr=0.23$ ，水路幅 $0.6 - 0.4e^{\frac{-x^2}{0.13}}$ m）

上記解析解のうち、物理的意味をもつ解析解(3.25)，(3.26)式を図 3-4 に示す。図から解析解は、(a)→(b)は常流から常流への水面形、(c)→(d)は射流から射流への水面形、(c)→(b)は射流から常流への水面形、(a)→(d)は常流から射流への4つの遷移あるいは非遷移の水面形を表すことができるものであることが分かる。後述の非一様水路床における解析解もこの3次式の解と全く同様の性質をもつ。

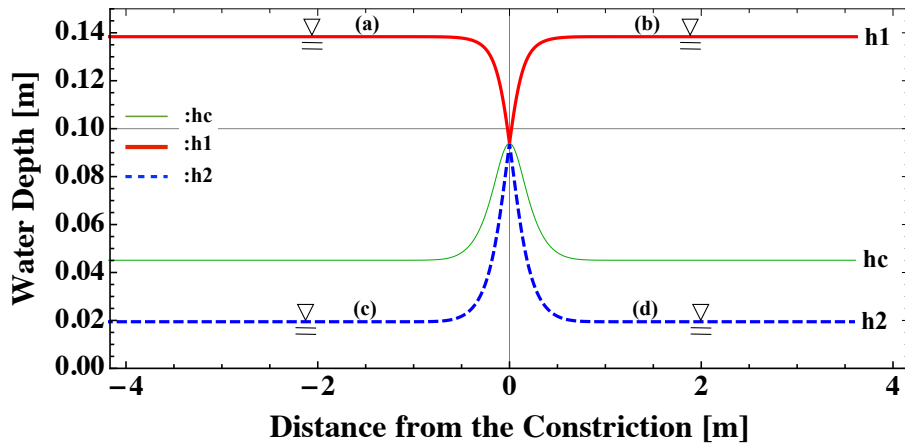


図 3-4 非一様矩形横断面（縮流部）に起因する不等流水面形の解析解の一例

（計算条件：上流端単位幅流量 $q=0.03\text{m}^2/\text{s}$ ，上流端 $Fr=0.23$ ，水路幅 $0.6-0.4e^{-x^2/0.13}$ m）

3. 3. 2 (b) 非一様床かつ一様矩形横断面開水路の場合（凸部をもつ開水路）

水路床が図 3-5 に示すように、流下方向に一様でない場合（本研究では凸部を例に）、不等流水面形の基本式(3.17)式の解析解について述べる。

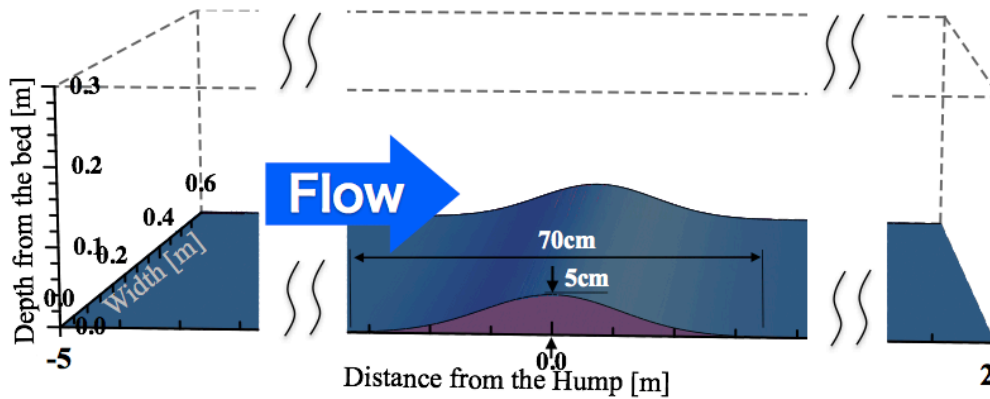


図 3-5 非一様床矩形実験開水路の概要

（流下方向 70cm に渡って最高高さ 5cm の凸部をもつ水路床）

より一般性を考え、(3.18)式を与える水理量としての上流端水深 h_0 で無次元化し、整理すると、

$$\frac{d\tilde{h}}{d\tilde{x}} = \frac{-\frac{d\tilde{\eta}}{d\tilde{x}}\tilde{h}^3}{\tilde{h}^3 - Fr_0^2} \quad (3.28)$$

無次元化された水面形の基本式が得られる．ここに， \tilde{O} は無次元量であり， Fr_0 は上流側一様水深部におけるフルード数である．(3.28)式に対して，前項同様に **Machine** の組み込みコマンド **DSolve** を援用して解析解を導出する．前項同様，三つの解析解(3.29), (3.30), (3.31)式が得られる．

$$\begin{aligned} \tilde{h}1(\tilde{x}) &= \frac{1}{3}(C - \tilde{\eta}(\tilde{x})) \\ &+ \frac{2^{\frac{2}{3}}(C - \tilde{\eta}(\tilde{x}))^2}{3\left(-27Fr_0^2 + 4C^3 - 12C^2\tilde{\eta}(\tilde{x}) + 12C\tilde{\eta}(\tilde{x})^2 - 4\tilde{\eta}(\tilde{x})^3 + 3\sqrt{3}Fr_0\sqrt{27Fr_0^2 - 8C^3 + 24C^2\tilde{\eta}(\tilde{x}) - 24C\tilde{\eta}(\tilde{x})^2 + 8\tilde{\eta}(\tilde{x})^3}\right)^{\frac{1}{3}}} \\ &+ \frac{\left(-27Fr_0^2 + 4C^3 - 12C^2\tilde{\eta}(\tilde{x}) + 12C\tilde{\eta}(\tilde{x})^2 - 4\tilde{\eta}(\tilde{x})^3 + 3\sqrt{3}Fr_0\sqrt{27Fr_0^2 - 8C^3 + 24C^2\tilde{\eta}(\tilde{x}) - 24C\tilde{\eta}(\tilde{x})^2 + 8\tilde{\eta}(\tilde{x})^3}\right)^{\frac{1}{3}}}{3 \times 2^{\frac{2}{3}}} \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} \tilde{h}2(\tilde{x}) &= \frac{1}{3}(C - \tilde{\eta}(\tilde{x})) \\ &- (1 - i\sqrt{3}) \frac{(C - \tilde{\eta}(\tilde{x}))^2}{3 \times 2^{\frac{2}{3}} \left(-27Fr_0^2 + 4C^3 - 12C^2\tilde{\eta}(\tilde{x}) + 12C\tilde{\eta}(\tilde{x})^2 - 4\tilde{\eta}(\tilde{x})^3 + 3\sqrt{3}Fr_0\sqrt{27Fr_0^2 - 8C^3 + 24C^2\tilde{\eta}(\tilde{x}) - 24C\tilde{\eta}(\tilde{x})^2 + 8\tilde{\eta}(\tilde{x})^3}\right)^{\frac{1}{3}}} \\ &- (1 + i\sqrt{3}) \frac{\left(-27Fr_0^2 + 4C^3 - 12C^2\tilde{\eta}(\tilde{x}) + 12C\tilde{\eta}(\tilde{x})^2 - 4\tilde{\eta}(\tilde{x})^3 + 3\sqrt{3}Fr_0\sqrt{27Fr_0^2 - 8C^3 + 24C^2\tilde{\eta}(\tilde{x}) - 24C\tilde{\eta}(\tilde{x})^2 + 8\tilde{\eta}(\tilde{x})^3}\right)^{\frac{1}{3}}}{6 \times 2^{\frac{2}{3}}} \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} \tilde{h}3(\tilde{x}) &= \frac{1}{3}(C - \tilde{\eta}(\tilde{x})) \\ &+ (1 + i\sqrt{3}) \frac{(C - \tilde{\eta}(\tilde{x}))^2}{3 \times 2^{\frac{2}{3}} \left(-27Fr_0^2 + 4C^3 - 12C^2\tilde{\eta}(\tilde{x}) + 12C\tilde{\eta}(\tilde{x})^2 - 4\tilde{\eta}(\tilde{x})^3 + 3\sqrt{3}Fr_0\sqrt{27Fr_0^2 - 8C^3 + 24C^2\tilde{\eta}(\tilde{x}) - 24C\tilde{\eta}(\tilde{x})^2 + 8\tilde{\eta}(\tilde{x})^3}\right)^{\frac{1}{3}}} \\ &+ (1 - i\sqrt{3}) \frac{\left(-27Fr_0^2 + 4C^3 - 12C^2\tilde{\eta}(\tilde{x}) + 12C\tilde{\eta}(\tilde{x})^2 - 4\tilde{\eta}(\tilde{x})^3 + 3\sqrt{3}Fr_0\sqrt{27Fr_0^2 - 8C^3 + 24C^2\tilde{\eta}(\tilde{x}) - 24C\tilde{\eta}(\tilde{x})^2 + 8\tilde{\eta}(\tilde{x})^3}\right)^{\frac{1}{3}}}{6 \times 2^{\frac{2}{3}}} \end{aligned} \quad (3.31)$$

ここに現れる C は積分常数である．水深が限界水深となる地点を $x=0$ とし，本研究では図 3-5 に示すように，凸部の最高点を通る横断面である． C を求める条件として，

この点（横断面）において， $\tilde{h}(0) = \tilde{h}_c = Fr_0^{\frac{2}{3}}$ がある．これにより上式を整理すると，

$$\left. \begin{aligned} Fr_0 &= 0, \\ C - \tilde{\eta}(0) &\neq 0, \\ \frac{1}{2} \left(-2^{\frac{2}{3}}C + i2^{\frac{2}{3}}\sqrt{3}C - 2^{\frac{5}{3}}(C - \tilde{\eta}(0)) + 2^{\frac{2}{3}}\tilde{\eta}(0) - i2^{\frac{2}{3}}\sqrt{3}\tilde{\eta}(0) \right) \end{aligned} \right\} \quad (3.32)$$

$$\left. \begin{aligned} Fr_0 &= 0, \\ C - \tilde{\eta}(0) &\neq 0, \\ \frac{1}{2} \left(-2^{\frac{2}{3}} C - i 2^{\frac{2}{3}} \sqrt{3} C - 2^{\frac{5}{3}} (C - \tilde{\eta}(0)) + 2^{\frac{2}{3}} \tilde{\eta}(0) + i 2^{\frac{2}{3}} \sqrt{3} \tilde{\eta}(0) \right) & \end{aligned} \right\} \quad (3.33)$$

$$\left. \begin{aligned} Fr_0 &\neq 0, \\ C &= \frac{1}{2} \left(3Fr_0^{\frac{2}{3}} + 2\tilde{\eta}(0) \right), \\ \frac{3}{4} \left(2^{\frac{2}{3}} Fr_0^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{2}{3}} \sqrt{3} \sqrt{-Fr_0^{\frac{4}{3}}} - 2^{\frac{5}{3}} (-Fr_0^2)^{\frac{1}{3}} \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.34)$$

$$\left. \begin{aligned} Fr_0 &\neq 0, \\ C &= \frac{1}{2} \left(3Fr_0^{\frac{2}{3}} + 2\tilde{\eta}(0) \right), \\ -\frac{3}{4} \left(-2^{\frac{2}{3}} Fr_0^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{2}{3}} \sqrt{3} \sqrt{-Fr_0^{\frac{4}{3}}} + 2^{\frac{5}{3}} (-Fr_0^2)^{\frac{1}{3}} \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.35)$$

となり，求めたい水面形ごとに(3.32)，(3.33)，(3.34)，(3.35)式のいずれかを満たせばよい．(3.32)，(3.33)式から， Fr_0 が0になることは流れが存在しないことを意味するため，ダム貯水池のように上流側の流れの流速が無視できる場合である．また，一見(3.34)，(3.35)式から， Fr_0 が虚数となるが，これは前節同様三次式を解く Cardano の公式の数学的特徴⁴⁴⁾であり，最終的には実数の解になる．(3.34)，(3.35)式から，積分常数

$$C = \frac{1}{2} (3Fr_0^{\frac{2}{3}} + 2\tilde{\eta}_{\max}) = \frac{3}{2} Fr_0^{\frac{2}{3}} + \tilde{\eta}_{\max} \quad (3.36)$$

が求まる．ここに， $\tilde{\eta}_{\max} = \tilde{\eta}(0)$ である．(3.36)式を(3.29)，(3.30)，(3.31)式に代入すると(3.28)式の解析解となる．一見複雑そうな式だが，開水路上流端のフルード数及び縦断方向の水路床形状の二つの量から水面形を解析的に求めることができる．また， Fr_0 は既知であることから，水深は水路床高さのみの関数となる．水理物理量の次元を還元した解析解(3.29)，(3.30)，(3.31)式を図 3-6 に示す．図 3-6 から三次式の解の特性である三つの解のうち一つ (h_3) は負の値を示し，物理的な意味を持たない．その結果，非一様床不等流水面形の無次元化された水深に関する解析解は (3.29)，(3.30)式の二つとな