

第4章 非静水圧を考慮した定在波を伴う開水路不等流の水面形

4. 1 概説

写真 4-1 に示すような定在波（波状跳水）を伴う開水路の水面形は前述の静水圧分布を仮定した水面形方程式によっては表現できず、**Boussinesq**¹⁾から始まる鉛直加速度を考慮した水面形方程式^{例えば、2)}が用いられる。また、渦動粘性項またはその効果を含むモデルが提案されている^{3), 4), 5)}。水面の基礎方程式と境界条件を摂動展開することによる水面形方程式の導出もある。

一方、開水路の抵抗が無視できると仮定した場合、射流から常流への跳水を伴う遷移領域に波状跳水の領域が存在することを **Benjamin** と **Lighthill** は与えられた流量 Q の他に運動量フラックス S 及び **Bernoulli** 和 R の組み合わせにより理論的に示した論文⁶⁾は、開水路流れの本質を突くものであるにも関わらず、その後工学の分野では意外にも参照されることの少ないものであった。しかし、その論文の共著者の一人である **Benjamin** は 40 年後、もう一度その理論の詳査を行い、彼らの理論の妥当性をより深化した証明を与えている⁷⁾。

このように射流から常流の遷移問題は理学的（数学的）に双曲型から楕円型へ微分方程式形が遷移する問題としてとらえ、広く理学に共通の問題として扱われ、尽きせぬ問題提供の場となってきたようである。著者らは **Benjamin** らと同様の観点を持ちつつ、彼らとは異なった手法を用い、射流から常流の遷移問題の工学的解明をめざし、開水路流れにおける運動量の定理から流線の曲率による鉛直加速度を考慮した水面形方程式を提案すると共にその解の特徴を示した。

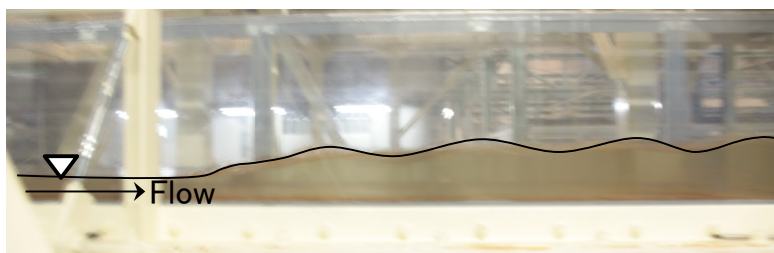


写真 4-1 実験水路による波状跳水の再現

4. 2 非静水圧を考慮した定在波を伴う開水路不等流の水面形基本式の導出

これまでの章においては、いずれも静水圧の仮定が成立するものとして扱った。しかし、流れ現象はほとんど非静水圧の流れ場であり、特に本章で扱う定在波が伴い、水路床形状水路境界面の抵抗はいずれも非一様な流れ場においては、静水圧仮定をした現象解明は非常に難しくなる。そこで非静水圧を考慮に入れ、これまでにある解析対象の条件に多く縛られる従来の限定的な不等流基本式と別に新たな普遍的な基本式を導出し、提案する。

4. 2. 1 流線の曲率を考慮した基本式の導出

水路幅が一定の開水路において、図 4-1 のように波を伴う流れ場を仮定する。

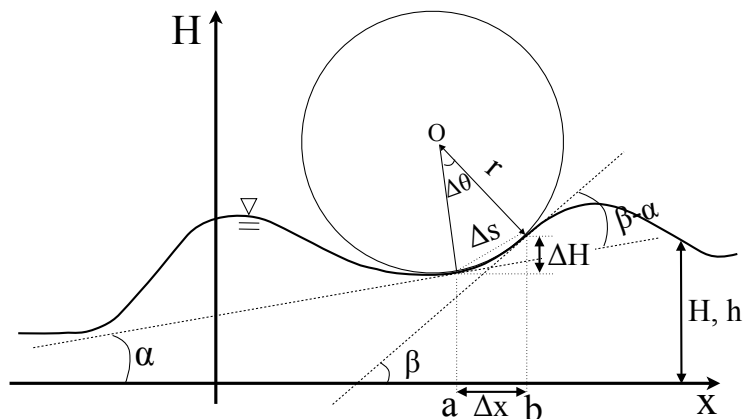


図 4-1 波を伴う流れ場の流線の曲率

流線の曲率半径は図 4-1 より、

$$r = \frac{\Delta s}{\Delta \theta} \quad (4.1)$$

ここで、 $\Delta \theta$ が極めて微小であり、図 4-1 に示す $\Delta x \rightarrow 0$ として整理すれば、

$$r = \sqrt{1 + \left(\frac{dH}{dx}\right)^2} \cdot \left(\frac{d^2H}{dx^2}\right)^{-1} \left(1 + \left(\frac{dH}{dx}\right)^2\right) \quad (4.2)$$

曲率半径の式が得られる。水面形方程式を導く際に波高・波長比の大きな波を考慮しないため、 $\frac{dH}{dx} \approx 0$ とおく。また、水路床が水平であるとする、水面で $\frac{d^2H}{dx^2} = \frac{d^2h}{dx^2}$ となる。流線の曲率が水面で最大、底面で最小であることから、Boussinesq⁴⁷⁾同様に曲率半

径 r は第一近似として水深内で線形に変化するとし、(4.2)式を整理すると、以下の曲率の式が得られる。ここに、 H は水位、 h は水深、 Z は水面からとった任意の水深である。 Z は下記 z と定義が異なることに注意されたい。

$$\frac{1}{r} = \frac{h-Z}{h} \frac{d^2 h}{dx^2} \quad (4.3)$$

一方水路床が非一様るとき、流線は水路床の形状に従って曲率半径をもつ。図 4-2 に示す水路床付近の曲率半径は $r_b(x)$ である。

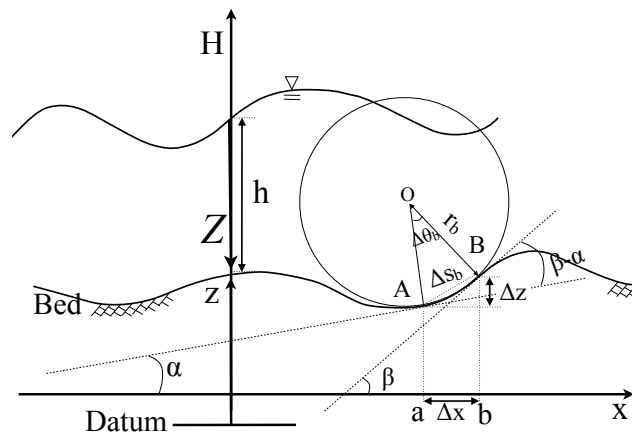


図 4-2 非一様水路床による流れ場の流線の曲率

水路床付近における水路床による曲率半径 $r_b(x)$ は上記水面における定在波による曲率半径と同様の方法によって求めることができる。水路床の起伏は急激なものでないと

し、 $\frac{dz}{dx} \approx 0$ であることから、

$$\begin{aligned} r_b &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2} \cdot \left(\frac{\frac{dz}{dx}(b) - \frac{dz}{dx}(a)}{\Delta x}\right)^{-1} \cdot \left(1 + \frac{dz}{dx}(b) \frac{dz}{dx}(a)}{\Delta x}\right) \\ &= \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} \cdot \left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right)^{-1} \cdot \left(1 + \left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right)^2\right) \\ &\approx \frac{d^2 z}{dx^2} \end{aligned} \quad (4.4)$$

となり、水路床での曲率半径(4.4)式を得る。曲率半径 r_b は水深内で線形に変化するとし、その分布は、

$$\frac{1}{r_b} = \frac{Z}{h} \frac{d^2 z}{dx^2} \quad (4.5)$$

になる。ここに、 h は水深、 z は基準から水路床までの距離、 Z は水面からとった任意の水深である。

鉛直方向において、曲率をもつ流線による鉛直加速度に重力加速度を加えたものが全体の加速度となる。本研究で扱う流れ場においては定在波による水面からの曲率と河床の非一様性による流線の曲率の二つの効果がる。よって任意地点における圧力差は(4.6)式となる。ここに、 U は断面平均流速である。

$$dp = \rho g \left[1 + \frac{U^2}{g} \left(\frac{h-Z}{h} \right) \frac{d^2 h}{dx^2} + \frac{Z}{h} \frac{d^2 z}{dx^2} \right] \quad (4.6)$$

圧力分布は圧力差 $p(Z)$ を任意の Z で積分することにより得られ、さらに水深全体にわたる圧力 $p(x)$ は圧力の鉛直分布 $p(Z)$ を水深 h で積分することにより得られ、

$$\begin{aligned} p(x) &= \int_0^h \int \rho g \left[1 + \frac{U^2}{g} \left(\frac{h-Z}{h} \right) \frac{d^2 h}{dx^2} + \frac{Z}{h} \frac{d^2 z}{dx^2} \right] dZ dZ \\ &= \frac{1}{2} \rho g h^2 + \rho \frac{q^2}{3} \frac{d^2 h}{dx^2} + \rho \frac{q^2}{6} \frac{d^2 z}{dx^2} \end{aligned} \quad (4.7)$$

となる。ここに、単位幅流量 $q=Uh$ である。(4.7)式の右辺第1項は静水圧を表し、右辺第2項は水面定在波の曲率による非静水圧からの寄与、第3項は非一様水路床の曲率による非静水圧分布からの寄与を表し、水深及び水路床高に関する二階微分項の正負によって圧力の増減を表していることは一目瞭然である。次に運動量の定理に外力としてせん断応力や重力を加え、 dx で除すると、

$$\frac{d(\rho h U^2)}{dx} = -\frac{dp}{dx} - \tau_w - \rho g h \frac{dz}{dx} \quad (4.8)$$

と表せる。ここに τ_w は水路境界面のせん断力である。

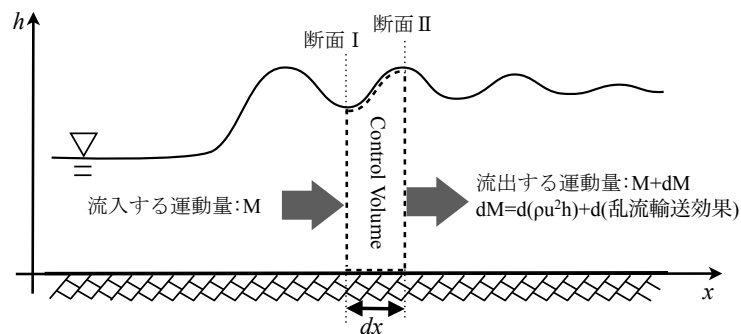


図 4-3 定在波を伴う流れ場における運動量の輸送

また、 $d(\rho U^2 h)$ は移流のみの運動量輸送効果である。本研究で扱う流れ場は定在波を伴うものであり、乱流場である。そのため、より厳密には運動量の輸送は移流によるもの ($\rho U^2 h$) 以外、乱流拡散による輸送効果もある (図 4-3)。乱流による運動量の輸送に関して、与えられる乱流場の問題に応じて単純なものから非常に詳細で複雑なものまで様々なモデルがある。本研究では定在波を伴う不等流の水面形の本質をシンプルに捉えることを目的にしており、最も基本的な仮定をおき、乱流拡散による運動量の輸送は水深の勾配に比例するとした。この仮定を流れ場の条件に応じて、最も適した乱流モデルを用いることにより、それぞれの問題に最適な基本式を導出することが可能である。微小区間のコントロールボリュームを挟む二つの断面間の運動量の変化量 dM は

$$d(\rho h U^2) + d(\rho k \frac{dh}{dx}) \quad (4.9)$$

となる。よって、(4.8)式のより厳密な式形は

$$\frac{d(\rho h U^2) + d(\rho k \frac{dh}{dx})}{dx} = -\frac{dp}{dx} - \tau_w - \rho g h \frac{dz}{dx} \quad (4.10)$$

になる。ここに、 k は拡散係数であり一定値とする。(4.7)式より、

$$\frac{dp(x)}{dx} = \rho g h \frac{dh}{dx} + \rho \frac{q^2}{3} \frac{d^3 h}{dx^3} + \rho \frac{q^2}{6} \frac{d^3 z}{dx^3} \quad (4.11)$$

が得られ、(4.11)式を(4.10)式に代入して整理すると、

$$\frac{d^3 h}{dx^3} + k \frac{d^2 h}{dx^2} + \frac{3}{q^2} \left(g h - \frac{q^2}{h^2} \right) \frac{dh}{dx} + \frac{1}{2} \frac{d^3 z}{dx^3} = -\frac{3}{q^2} \left(\frac{\tau_w}{\rho} + g h \frac{dz}{dx} \right) \quad (4.12)$$

の水面形方程式が得られる。ここに、 z は基準面から上向きにとった座標である。水深全体で運動量が保存され、運動量の流れ(momentum flow)あるいは流体力(flow force)の観点からも同様に(4.12)式を得ることができる。(4.12)式の右辺が0であれば、左辺が積分可能となり三階微分項がなくなる。波状跳水(定在波)は発生しなく、流れのみとなる。せん断応力や水路勾配は波を減衰させるだけでなく、波を発生させる契機となることが

分かる。ここで、限界水深 $h_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}}$ 、 $\eta = \frac{h}{h_c}$ 、 $\xi = \frac{x}{h_c}$ 、 $\zeta = \frac{z}{h_c}$ を用いて(4.12)式を無

次元化すると、無次元化した水面形方程式(4.13)式を得る。

$$\frac{d^3 \eta}{d\xi^3} + k \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} + \frac{1}{2} \frac{d^3 \zeta}{d\xi^3} + 3 \left(\eta - \frac{1}{\eta^2} \right) \frac{d\eta}{d\xi} = -3 \left(f_0 + \eta \frac{d\zeta}{d\xi} \right) \quad (4.13)$$

ここに、 $f_0 = \frac{\tau_w h_c^2}{\rho q^2}$ は無次元化したせん断応力を表し、摩擦抵抗係数である。ここで、

拡散係数 k は一定値であり、Witham⁵⁾によると拡散係数 k は $k=a(Fr_{upperend}-1)$ の式形となる。本研究は実験との比較から、 $a=0.01\sim 1$ 程度を使っている。

$$\underbrace{\frac{d^3\eta}{d\xi^3}}_{\text{分散}} + k \underbrace{\frac{d^2\eta}{d\xi^2}}_{\text{拡散}} + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{d^3\zeta}{d\xi^3}}_{\text{底面曲率の効果}} + 3 \underbrace{\left(\eta - \frac{1}{\eta^2} \right) \frac{d\eta}{d\xi}}_{\text{不等流の水面形}} = -3 \left(f_0 + \eta \frac{d\zeta}{d\xi} \right) \quad (4.14)$$

(4.14)式左辺第1項と第2項はそれぞれ波の分散の効果と拡散の効果を表し、第3項は水路床の非一様性による効果を表している。第1項分散項の効果が小さいほど跳水の第一波の高さが小さい一方、跳水の発生位置は分散効果が小さいほど上流側になる。分散項の効果がほとんどなければ跳水より下流側の波は発生せず、水面形は階段状の流れのみとなる。また、第2項は発生する定在波の流れ方向減衰を表現し、拡散係数 k が小さければ拡散の効果が小さく、波状跳水の流れ方向の減衰は弱く、反対に拡散係数 k が大きければ波は下流側に伝播すると共に急速に減衰する。さらに、左辺第1, 2, 3項

の効果を考慮しなければ、左辺第4項と右辺だけの式 $\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{f_0 + \eta \frac{d\zeta}{d\xi}}{\eta - \frac{1}{\eta^2}}$ となり、これは

不等流の水面形の最も基本的な式形になる。これらの特徴から、(4.14)式は定在波や跳水が伴う場合の水面形も表現できるより一般的な不等流の水面形の基本式と言えよう。

4. 2. 2 導出した基本式の特徴

前項で導出した基礎式(4.14)式は未知量、無次元化水深 η に関する3階の微分項を含む非線形方程式である。解析条件として、(4.15)式に示す水路上流端の水深は問題ごとにあらかじめ与える一定値であり、上流端での水深の勾配や水面曲率がないものである。

$$\left. \begin{aligned} \eta_{upperend} &= \frac{h_{upperend}}{h_c} \\ \frac{d\eta_{upperend}}{d\xi} &= 0 \\ \frac{d^2\eta_{upperend}}{d\xi^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

ここに、 $\eta_{upperend}$ は水路上流端の無次元化水深である。上流端の境界水深、フルード数 Fr が水面形の形成に決定的な影響を与えることを意味する。そこで、簡単のため勾配が十分小さい水路を想定し、境界条件である上流端の水深、 $Fr_{upperend}$ を与え、拡散係数

k は $k=a(Fr_{upperend}-1)$ に従い、上流端のフルード数によって異なる値になるように設定した。水面形の形成に与える影響を図 4-4 に示す。表 4-1 に計算諸元を示す。

表 4-1 定在波を伴う水面形の計算諸元と共役水深

Run	$\eta_{upperend}$	$Fr_{upperend}$	$k=Fr_{upperend}-1$	f_0	$\frac{\eta_{downend}}{\eta_{upperend}}$	$\frac{1}{2}(\sqrt{1+8Fr_{upperend}^2}-1)$
1	0.7	1.71	0.71		1.97	1.97
2	0.75	1.54	0.54		1.74	1.73
3	0.8	1.40	0.4		1.54	1.54
4	0.85	1.28	0.28	0.001	1.38	1.37
5	0.9	1.17	0.17		1.24	1.23
6	0.95	1.08	0.08		1.14	1.12
7	1.0	1.0	0.08		1.06	1
8	1.05	0.93	0.08		0.93	0.91

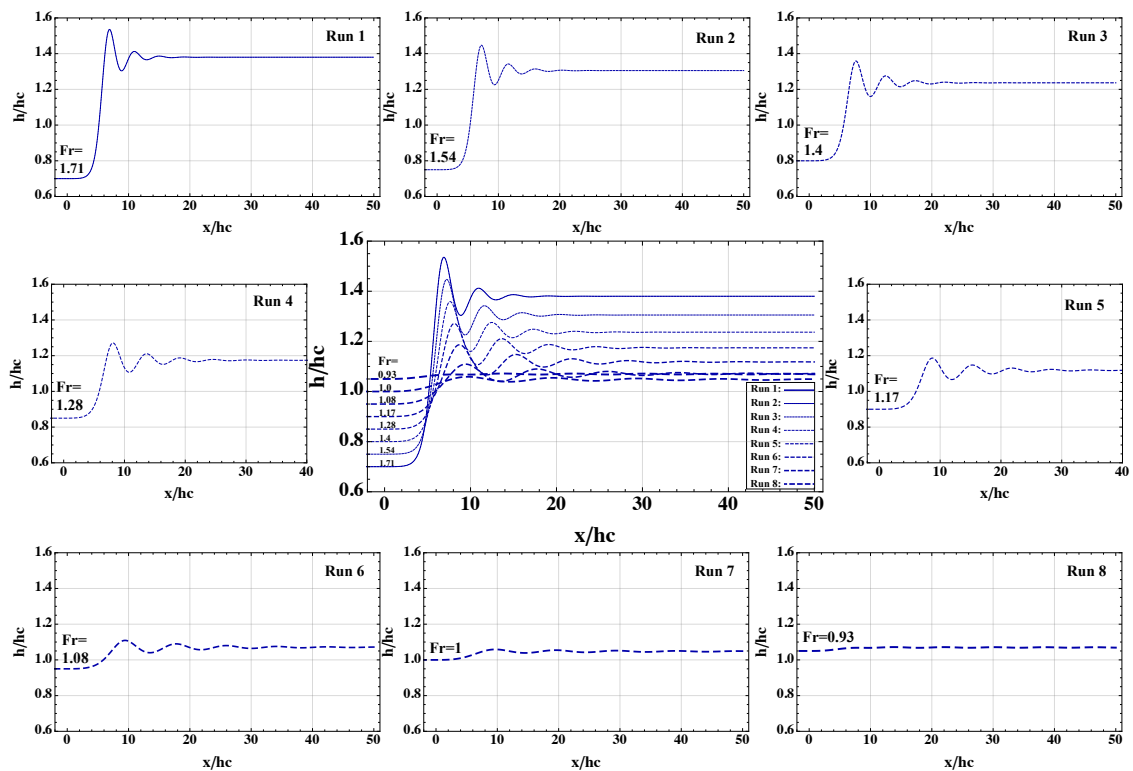


図 4-4 上流端の水深・ Fr と形成される波状跳水の水面形の関係

(上流端フルード数が 1 より小さいときは一様水面を示し、それより大きくなるにつれ波状跳水、(強)跳水の水面形を示す)

図 4-4 から、上流端のフルード数 $Fr_{upperend} > 1$ の条件において跳水が発生していることが分かる。また、 $Fr_{upperend}$ が 1 より大きく 1.4 前後の値で、最も波状跳水が発生しているように見える。一方、それよりも大きければ跳水（強跳水）が発生する。1 以下の場合は定在波も跳水も起きず水面は一直線になる。

共役水深に着目する。表-2 に示している $\frac{\eta_{downend}}{\eta_{upperend}}$ は本研究で導出した基本式（微分方程式）より算出した水路十分下流側水深と十分上流側水深で得られる共役水深の関係である。また、 $\frac{1}{2}(\sqrt{1+8Fr_{upperend}^2}-1)$ は代数的理論解析による共役水深関係である。いずれの計算ケースにおいても、非常に高い精度で一致しており、また、拡散係数 k の大小は共役水深の関係に全く影響していないことが分かる。さらに、 f_0 は波状跳水を発生させる一種の契機である。 f_0 が 0.001 以下である場合、跳水の位置に若干の影響はあるものの、共役水深の関係に全く影響を及ぼすものではない。 $f_0=0$ なら、波も跳水も起きず、水面は直線のままとなる。

4. 3 開水路実験による導出した基本式の再現性の検証

本章前節までに導出したより普遍的な不等流の基本式の妥当性・合理性を検証するために、図 2-1 及び表 3-1 に示す中央大学工学部都市環境学科に設置している開水路を用いた実験を行った。開水路内に波状跳水が発生するきっかけとなる小さな凸部を水路床横断方向に設置した。以下に実験及び結果を示す。

4. 3. 1 開水路実験概要及び実験条件

図 4-5 に示すように、水路床におよそ 40cm にわたって最大高さ 2, 3cm に達するような僅かな凸部を有する全長 8m 幅 0.6m の直線矩形開水路を用いた実験を行った。この僅かな凸部は波状跳水を生じさせる契機となる。水路床の局所的な形状変化の影響をできるだけ除くため、上記凸部以外は一様床を用いた。その縦断形状を図 4-5 に示す。その他の詳細条件を表 4-2 に示す。

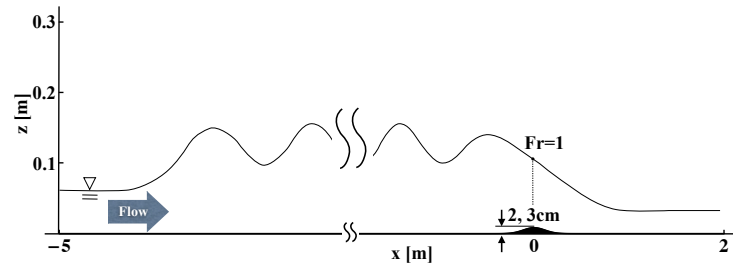


図 4-5 定在波が存在する流れを再現する実験水路の縦断概要図

表 4-2 定在波が存在する流れの水路実験の実験及び計算諸条件

Case	流量(L/s)	上流端 F_r	勾配	凸部(最高:2, 3cm)	k	f_0
i	22.6	1.41	1/250	$0.02e^{-\frac{x^2}{0.0256}}$ (:2)	0.2	0.0001
ii	38.9	1.37	1/200	$0.02e^{-\frac{x^2}{0.0256}}$ (:2)	0.02	0.0001
iii	37.4	1.45	1/160	$0.03e^{-\frac{x^2}{0.0256}}$ (:3)	0.03	0.001

4. 3. 2 実験結果による考察

図 4-6 は開水路実験より得られた水面形と導出した基本方程式から求めた水面形を比較したものである。流量や河床勾配、凸部の高さの違いにより発生する定在波の減衰条件が異なる。それは拡散係数によって十分再現できる。いずれのケースにおいても、跳水部より上流側の境界条件から、跳水接続部、定在波水面形のいずれの部分も非常に高い精度で再現されていることが分る。ケース iii の計測密度が他の 2 ケースの 1/3 であるため、ケース iii の実験値が他の 2 ケースよりばらつくように見える。また、ケース iii の 5 波目のみが導出した基本式により再現した波状と逆の位相を示している、波峰が表現できていないように見える。それは計測値の密度にも関係するが、最も根本的な原因は実験水路での波状の特性によるものと考えられる。本実験では水路の縦断中央線に沿って水面形を計測した。しかし、写真 4-2 に示すように、水面は中央に向かって波峰が低下あるいは顕著な峰としてなくなっているように見える。ケース iii の 5 波目は波峰が低下している期間に計測された可能性がある。この問題は、Chanson⁸⁾らも実験で確認しており、それは壁面からのある種の衝撃波が水路中央でぶつかり合い、波峰がつぶれ

てしまうと同時に空気が混入される. 本実験ではサーボ式波高計を水面形の計測に用いており, 空気が多く混入された場合, サーボの検出部が実際の波高よりも低い値を示す傾向がある. このような水面形状の極めて高い一致性及び前節で述べた共役水深の関係から, 本研究で提案する運動量の定理に基づく流線の曲率を考慮した非正水圧流れ場における波状跳水といった定在波を伴う不等流の基本方程式は高精度であり, 十分合理的妥当なものであると言えよう. 上流端の境界条件のみから求めた水面形であるがゆえ, 下流側の境界条件による影響を考慮できない. 今後は下流側の境界条件の影響を考慮し, 水路床凸部より下流側までの水面形を高精度で再現できるものに完成していく.



写真 4-2 実験水路での波状跳水を伴う水面形

(カメラの露出時間 : 1.1s)

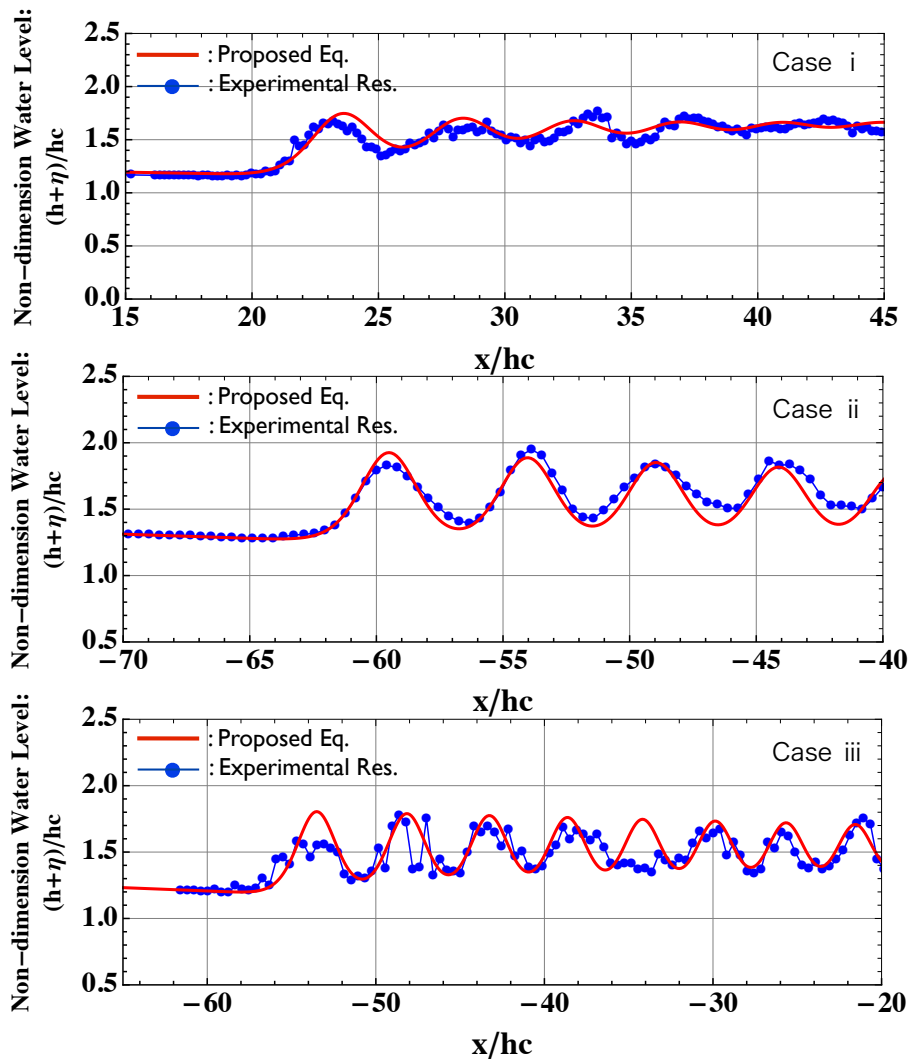


図 4-6 提案する基本式より求めた定在波（波状跳水）を伴う不等流水面形と実験結果の比較

4. 4 結論

本章では、非静水圧流れ場において波状跳水（定在波）を伴う不等流水面形の基本式を導出し、その特徴を詳細に調べたものである。本章で議論する水面形の存在範囲は以下の図 4-7 に示し、本章から得られた見知を以下にまとめる。図 4-7 に関して、水色で表示された範囲内に存在する水面形を本研究で提案する基本式より解析可能であることを意味する。存在範囲から、常流・射流間の遷移・非遷移、波状跳水を含む非常に幅広い種類の不等流の水面形を解析可能である。

- (1) 水面定在波及び水路床の曲率が水深内において Boussinesq の一次線形近似のも