開水路断面の不均一性に起因する不等流の水面形形成に関する基礎的研究

A Fundamental Study on Water Profiles in Non-uniform Open Channel Flows with Stream-wise and Sectional Variation of Channel Properties

土木工学専攻　銭潮潮

Chaochao Qian

１．　本研究の背景と目的

開水路水面形の解析は人間がその英知により流れを制御，利用する最も基本的な手法の一つである．開水路流れにおいて通常静水圧分布の仮定が成立するか否かによって，流れを漸変流と急変流（局所流）に分類している．本研究では，静水圧分布，非静水圧分布のいずれの流れ場における不等流の水面形も解析の対象としている．

水路床や水路断面特性が流れ方向に一様でない一般的な水路において，流れは水路床形状や横断面形状の流れ方向の変化特性の影響を受け不等流となり，上流から与える流量あるいはフルード数次第では流れの状態が常流から射流に，または射流から常流に遷移する．このような水面形遷移を有する流れにおいては，水面形を表す基本式の中に含まれる特異点が有限の近傍にある条件で解析しなくてはならない．その代表的な解析法として，岩佐のトポロジー的な数学を用いた特異点理論を応用い，特異点近傍の水面形特性を定性的かつ定量的に特定できることを示し[1]，不等流水面形の解析解に関する研究領域において，大きな貢献をなしていることは疑う余地もない．しかし，特異点理論は数学的に抽象的な手法であり，かつこれによる解析は水面形の水理構造の説明に議論の中心がおかれているきらいがある．

非静水圧を考慮しなければならない現象として，水路床や水路断面形状の変化，境界抵抗の非一様性により開水路流れには波状跳水と呼ばれる水面が滑らかに上昇する接続部を持ち，接続部より下流側には定在波列が存在する特徴を持つ水面形がある．その研究は Bazin[2]の実験から始まり，Boussinesq[3]，Kelvin[4]，Rayleigh[5]，Lemoine[6]，Benjamin & Lighthill [7]等によって多くの先駆的な研究がなされた．特に開水路の抵抗が無視できると仮定した場合，射流から常流への跳水を伴う遷移領域に波状跳水の領域が存在することを Benjamin と Lighthill は与えられた流量 Q の他に運動量フラックス S 及び Bernoulli 和 R の組み合わせにより理論的に示した論文 [7]は，開水路流れの本質を突くものである．その論文の共著者の一人である Benjamin は 40 年後，もう一度その理論の詳査を行い，彼らの理論の妥当性をより深化した証明を与えている [8]．しかし，未だ射流から常流の遷移問題の工学的解明が十分とは言えず，通常の不等流の水面形と定在波を伴う不等流の統一した基本式は存在しない．

以上の水理学をめぐる歴史的展開に続き，本研究は水理学の基礎をより盤石にすることを目的とし，開水路不等流の水面形に関する一次元解析法の精緻化を目指すものである．上流側のフルード数と水路形状因子の関係より不等流の水面形の存在範囲を解析的明示しつつ，既存の一次元開水路不等流水面形の解析解を現代的な手法により導出，実験で検証した．常流・射流間遷移・非遷移の特性を導出した解析解により釈明し，開水路不等流の水面形に関する水理学を充実させる．非静水圧を考慮し，定在波を伴うまたは波が発生しない開水路不等流の水面形を表す普遍的な基本式を新たに提案し，波と流れが共存する開水路不等流に関する水理学の完成度を高める．

２．　研究の内容と結果

縮流部のある開水路実験(直線区間の水路幅は 0.6m)より，実験水路のバルブ開度を徐々に上げ，流量をある流量(15.1L/s)まで増大させ，十分な時間を維持し最終的に不等流の水面形を形成させる．流量を増大させる過程においては，ある流量に達した際，縮流部上流側に単なる水面の振動ではなく，通過点に大きな水位上昇をもたらす段波が発生して測点を通過し，更に上流側に伝播することを確認した．そのときの波長は概ね 30cm であった．波

状段波が発生した後，時間とともに，段波が消え，不等流の水面形の形成に向かうことが分かる．この動的な過程において，痕跡水深（最大水深）が段波発生直前の水深より約５割高い．その後，流量が定常になるにつれ，不等流の水面形が形成された．不等流の水面形は静的な過程と見なせるものとかなり異なるダイナミックな過程であり，段波といった急激な水位上昇を伴いながら徐々に定常になっていき不等流の水面形が形成される．

形成された水面形について，開水路断面形状の非一様性によって生じる不等流の水面形は Bernoulli の定理を用い，上流端フルード数(Fr_1)と水路形状を表すファクター（無次元河床高：河床高と上流側水深比 $\eta=z/h_1$，縮流率：直線区間水路幅 B_1 と縮流部幅 B_2 の差と B_1 の比 $\varepsilon=(B_1-B_2)/B_1$）の関係よりその成立破綻条件を解析的に明らかにすることによって前節で述べた段波や跳水，の発生範囲を解析的に求めた．横断面形状が非一様（縮流部）区間での水深 h_2 と縮流部より上流側での水深 h_1 との比は $h_*= h_2/h_1$ である．縮流部より上流側の一様水路幅区間の横断面形状が非一様（縮流部をもつ）開水路の場合，跳水が発生する・しない限界の関係を求めた．また，発生した跳水・段波の移動速度が 0 となる条件は Bernoulli 定理を跳水・段波前後に適用することにより求めることができる．

同様の方法と手順により，非一様床(凸部を有する)開水路において，跳水が発生する・しない限界の関係及び発生した跳水・段波の移動速度が 0 となる条件は Bernoulli 定理を跳水・段波前後に適用することにより求めることができる．さらに，上流からの流れが凸を乗り越えられない境界条件を凸部高さと凸部より上流側一様区間のフルード数の関係を明示できる．これらの結果を**図-1** に示す．その結果を計 110 ケースの実験結果との比較よりその妥当性を検証している．また，H. Rouse の実験(1940 年代前半)よりもその妥当性を証明している．

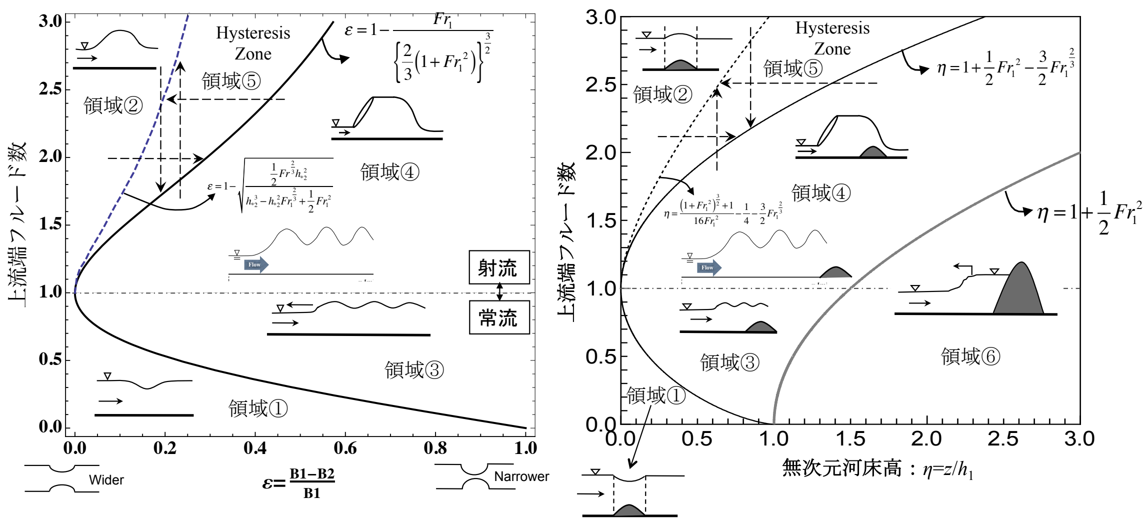

図-1　Bernoulli 定理による解析で得られた非一様断面を有する開水路の種々の水面形の存在範囲

上記解析は水面形の存在範囲を示したが，本研究ではさらに水面形を定量的解析的に求めた．流れが常流・射流間の遷移・非遷移する水面形解析解をもとめた．その解析は特異点付近の水面形を求めるため，扱う流れ区間が短く，摩擦を考慮しないものとする．基本式は水深に関する非線形の式でありかつ上述のような流れの状態が遷移する特異点が存在するため，人間が直接解析的に解くことはほぼ不可能である．Mathematica や MATLAB 等の数式処理言語を単純に用いたとしても最終的な解析解を求めることができない．そこで，本研究では数式処理システム Mathematica を援用しつつ Man-Machine 支援システム手法により，非一様水路幅（縮流部）及び非一様水路床（凸部）をもつ開水路不等流水面形の解析解を求めた．解析では Machine が解析的に解く過程において，分母が 0 になる可能性があると判断されるため，Machine による最終的な解析解まで得ることは不可能である．そこで，人間による引き継ぎ解析をし，最終的な解析解を導出した．非一様幅流れでは，Machine による煩雑な式

変形作業から最終的に，解析解ではなく，α を含む $\dfrac{\alpha^2\left(3g\alpha\left(\dfrac{Q^2}{gB^2}\right)^{1-\frac{2}{3\alpha}}+\dfrac{h(x)^{-\frac{2}{\alpha}}\left(Q^2(2-3\alpha)-2gB^2h(x)^3\right)}{B^2}\right)}{12g(-2+3\alpha)}=0$ が得られる．ここで，見かけ上の変数 α は 1 として整理すると，$2h(x)^3-3h_{c0}h(x)^2+h_c(x)^3=0$ 未知数水深に関する 3 次式が得られる．これをカルダノの解法を用いて解くことで，非一様幅（縮流部を有する）開水路不等流の水面形が解析的に求まる．同様の手法により，非一様床（凸部）開水路不等流の水面形も解析的に求まる．３次式のため水面形の解はそれぞれ３つあり，そのうち１つは物理的解釈不可能な負の水深を示すため，それは棄却した．よって，水面形に関する解析解はそれぞれ２つとなる．それらの**図-2** に示す．

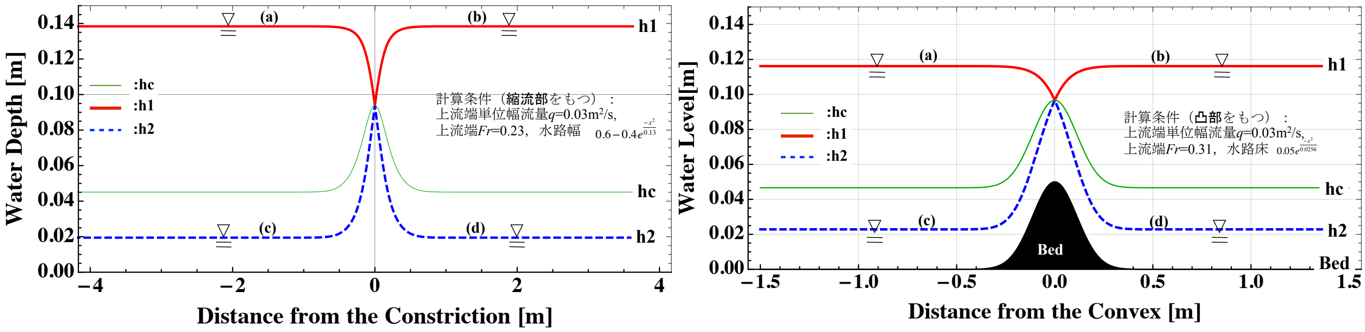

図-2　非一様断面形状に起因する不等流水面形の解析解の一例

解析解を示す**図-2** より，(a)→(b)は常流から常流への水面形，(c)→(d)は射流から射流への水面形，(c)→(b)は射流から常流への水面形，(a)→(d)は常流から射流への 4 つの遷移あるいは非遷移の水面形を表すことができるものであることが分かる．本解析解結果もまた開水路実験より検証し，本解析解を用い，1940 年代前半に H. Rouse によって行われた実験の水面形に適用し，高い精度で実験結果を説明できた．

射流から常流への遷移流れ場問題の工学的解明をめざし，開水路流れにおける運動量の定理から流線の曲率による鉛直加速度を考慮した水面形方程式を提案すると共にその解の特徴を示した．水面の曲率及び水路床の曲率が共に水深内において線形的に変化すると Boussinesq 流の第一次近似を仮定し，流線の曲率による鉛直方向の加速度の効果を考慮した非静水圧分布流れ場として解析した．さらに，流れ場は乱流場であることを考慮し，乱流による運動量の輸送効果を加えたより厳密な運動量の定理を適用した．運動量の定理に外力としてせん断応力や重力を加え，限界水深 $h_c=\sqrt[3]{\dfrac{q^2}{g}}$，$\eta=\dfrac{h}{h_c}$，$\xi=\dfrac{x}{h_c}$，$\zeta=\dfrac{z}{h_c}$ を用いて無次元化すると，無次元化した基本式，

$$\underbrace{\frac{d^3\eta}{d\xi^3}}_{\text{分散}}+k\underbrace{\frac{d^2\eta}{d\xi^2}}_{\text{拡散}}+\underbrace{\frac{1}{2}\frac{d^3\zeta}{d^3\xi}}_{\text{底面曲率の効果}}+\underbrace{3\left(\eta-\frac{1}{\eta^2}\right)\frac{d\eta}{d\xi}=-3\left(f_0+\eta\frac{d\zeta}{d\xi}\right)}_{\text{不等流の水面形}}$$

が得られる．式の右辺が 0 であれば，左辺が積分可能となり三階微分項がなくなる．波状跳水（定在波）は発生しなく，流れのみとなる．せん断応力や水路勾配は波を減衰させるだけでなく，波を発生させる契機となることが分かる．左辺第 1 項と第 2 項はそれぞれ波の分散の効果と拡散の効果を表し，第 3 項は水路床の非一様性による効果を表している．さらに，左辺第 1，2，3 項の効果を考慮しなければ，左辺第 4 項と右辺だけの式となり，これは不等流の水面形の最も基本的な式形になる．この特徴から，導出した定在波を伴う場合の水面形も表現できる一元化した普遍的な不等流の水面形の基本式と言えよう．導出した基本式を用いて，実験水路で起こした波状跳水を伴う不等流水面形の再現性を検証した．実験条件を**表-1** に示し，実験，解析結果を**図-3** に示す．いずれのケースにおいても，跳水部より上流側の境界条件から，跳水接続部，定在波水面形のいずれの部分も非常に高い精度で再現できることが分る．よって，本研究で

提案する運動量の定理に基づくより普遍的な不等流の基本方程式は高精度であり，十分合理的妥当なものであると言えよう．本基本式の解を求める方法はまだ完全に確立していないことは今後の課題の１つである．

表-1　水路実験及び計算諸条件

Case	流量(L/s)	上流端 F_r	勾配	凸部(最高:2, 3cm)	k	f_0
i	22.6	1.41	1/250	$0.02e^{-\frac{x^2}{0.0256}}$ (:2)	0.2	0.0001
ii	38.9	1.37	1/200	$0.02e^{-\frac{x^2}{0.0256}}$ (:2)	0.02	0.0001
iii	37.4	1.45	1/160	$0.03e^{-\frac{x^2}{0.0256}}$ (:3)	0.03	0.001

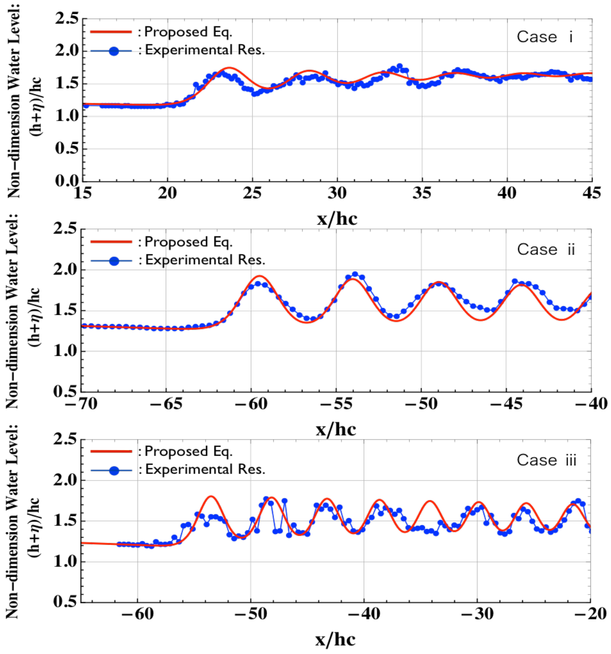

図-3　提案する基本式より求めた定在波（波状跳水）を伴う不等流水面形と実験結果の比較

３．　結論

以上の研究結果から，それは水理学の基礎をより盤石にすることを目的とし，開水路不等流の水面形に関する一次元解析法の精緻化の目的は概ね達成できたと言えよう．上記いずれの成果も理論解析をベースとし新しい解析結果や解析手法が得られており，必ず直ちに全ての研究結果が実用に結びつくこと難しいであろう．しかし，その中の波状跳水を伴う不等流は実際の河川に起きる現象であり，波状跳水の波峰の水深は共役水深で求める跳水の水深より大きく超過することは**図-3** より分かる．本来無視できるようなものではなく，河川計画，防災の実務において非常に重要な意味を持つことは明らかであるにもかかわらず，これまでの実務では考慮されていない．最後に，本研究は基礎水理学の発展の流れにあることを念頭におきつつ少しでも基礎水理学の更なる発展に寄与できれば深甚である．

参考文献

1)　岩佐義朗　1958：幅の漸変する水路における水流の遷移現象と境界特性と関連に関する理論的研究．　土木学会論文集．　第 59 号・別冊　（3-1）．

2)　Bazin, H. 1865: Recherches expérimentales sur la propagation des ondes. (Experimental Research on Wave Propagation.) Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences, Paris, France, Vol. 19, pp. 495-644.

3)　Boussinesq, P. J. 1877: Essai sur la théorie des eaux courantes. Imprimerie Nationale, Paris.

4)　Kelvin, Lord. (William Thomson, 1st Baron Kelvin) 1886. On stationary waves in flowing water. London, Edinburgh and Dublin philosophical magazine and journal of science, Vol.22, 5th series: 445-452.

5)　Rayleigh, L. 1914: On the theory of long wave and bores. Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character (1905-1934). No. 90, 324-328.

6)　Lemoine, R. 1948: Sur les ondes positives de translation dans les canaux et sur le ressaut ondulé de faible amplitude. La Houille Blanche, No. 2. Grenoble.

7)　Benjamin, T. B. and Lighthill, M. J. 1954: On Cnoidal waves and bores. Proceedings of the Royal Society of London, Series A, Mathematical and Physical Sciences, Vol. 224, No. 1159: 448-460.

8)　Benjamin, T. B. 1995: Verification of the Benjamin-Lighthill conjecture about steady water waves. Journal of Fluid Mechanics. Vol. 295: 337-356.