博士論文

安定マッチング・メカニズムの理論的考察と学校選択市場への応用

平成27年3月

松八重　泰輔

目 次

序論

本稿は，「マーケット・デザイン」の基礎理論であるマッチング理論に新たな考察を与える.

マーケット・デザインとは, 近年, 急速に研究が進展した経済学の新しい分野であり，“Microeconomics Engineering” とよばれることもある.[1)]

伝統的な経済学は市場を与件としてみなし，それらの市場において誰が何をし，何が起こるのかを予測する，または予測しようとすることを中心に研究がなされてきた．それに対しマーケット・デザインは，市場を与件としては考えずに，経済学やゲーム理論での知見と実証研究や実験経済学からえられた教訓を統合して，実際の市場の制度設計や市場の運営を目的とした研究がなされている．極論をすれば，伝統的な経済学は学問的な成果を現実の制度設計に活用することが難しいといわれてきた.[2)] これに対し，マーケット・デザインは現実の市場を詳細に観察し，その市場を慎重に分析し，そこで生じている問題に対し具体的な解決法を研究し，それらの問題に対するいくつかの解決方法を提示してきた.[3)]

近年，この分野の研究が急速に発展してきた理由の一つは，現実の市場からの要請によるところが大きい．例えば，アメリカやヨーロッパにおける電波周波数帯を割当てるためのオークション，公立学校の選択制度や臓器移植プログラムなどの制度設計が，マーケット・デザインの研究成果により改善された.[4)] 2000 年以降，マーケット・デザインの理論的な発展は日進月歩で進み，応用先もますます広範囲になってきている.

[1)] マーケット・デザインをこのようによんだ最初の文献は Roth, Alvin E. (2008) とされている.

[2)] この視点は，Vulkan, N., Alvin E. Roth, and Z. Neeman (2013) においても言及されている.

[3)] マーケット・デザインの成功に関して，Roth, Alvin. E. (2013) を参照.

[4)] マーケット・デザインの研究が現実に適用された事例の詳細は，Roth, Alvin E. and Marild Sotomayor (1990) を参照.

マーケット・デザインの研究は，科学的な側面と職人技的な側面があるといわれている.[5] なぜならば，その研究はゲーム理論やメカニズム・デザインの定式化された分析道具を適用させる科学的な面と，一方，その理論を使って現実の問題を解決する場合，科学的に確立された知識を超えた判断が要求されるし，理論によってモデル化された状況とはかなり異なる現実の状況に対しその理論を適用するかどうかの判断をしなければならないという職人技的な面があるからである.[6]

マーケット・デザインの研究対象の中には，市場を機能させるルールがどのような性質を有しているのかを，明らかにする研究もある．それは，「非協力ゲーム理論」とよばれるゲーム理論の一分野を用いて分析がおこなわれている．その分析は，特定の環境やそのルールがもたらす帰結に対する各個人の行動のインセンティブに注目する．当然のことながら，特定の環境や問題ごとに異なる課題がある．それぞれの環境や問題の課題を解決・分析することは，現実の市場の制度設計においては非常に重要であるが，さまざまな環境や問題から生じる共通の課題や問題を分析することがマーケット・デザインの研究の中心となる.

マーケット・デザインで検討・分析される市場はより広い経済環境の一部部分にすぎない．しかしながら，その事実を考慮したモデルを構築することは，非常に困難である．つまり，マーケット・デザインの研究成果を適用させる市場は，厳密にモデル化することができない，より大きなゲームのサブ・ゲームにすぎないのである．そこで，マーケット・デザインの研究成果を実際の市場で実現するためには，その市場に多くの人々を参加させるために，より大きなゲームの「コア」となる結果が，それらの市場が導く結果となることが望ましい．言い換えると，マーケット・デザインによる理論予測が現実の市場で実現するためには，それらの市場外で取引を行うことを望むような人々が存在しないことが，重要となる.

マーケット・デザインの研究対象の市場やマーケット・デザインによって制度設計された市場が理論通りの結果を導くためには，モデルの中の市場以外の行動や機会を考慮したとしても，モデル内の市場の行動やルールにより，各人がその市場に参加するという均衡を導いていなければ

[5]Vulkan, N., Alvin E. Roth, and Z. Neeman (2013) を参照.
[6]例えば，経済学が一般的に想定されている主体は合理的であるが，現実の主体は合理的とはかぎらない.

ならない．Roth 教授は，マーケット・デザインの研究対象の市場やマーケット・デザインによって制度設計された市場が理論通りの結果を導くかどうかは,

- 「厚みのある市場」,
- 「滞りのない市場」,
- 「参加者の安全性」,
- 「単純さ」

が，重要なキーワードであると指摘している.[7)]

厚みのある市場とは，できる限り多くの取引を同時に行うことが可能である市場という意味である．つまり，その市場が理論通りの結果を導くためには，多くのオファーが市場にあり，その多くのオファー中からより好ましいオファーを選択できることが重要となる.

滞りのない市場とは，有効な取引を評価するのに十分な時間や資源がある市場を意味している．市場が滞っているとは物理的な意味で取引を実行するために必要な資源がないという意味だけではなく，多くのオファーの中からより望ましい選択をするために必要な情報がない場合も含んでいる．つまり，市場に滞りがある場合，多種多様な取引機会があったとしても，どの取引がより望ましいかの判断を困難にさせてしまう．理論通りの結果を導くためには，多種多様な選択肢がある市場のメリットを享受できるように滞りの問題を解消できるような市場になっていなければならない.

参加者の安全性とは，参加者がその市場以外で取引を行うよりも，その市場に参加した方が安全に取引が行えることを意味している．参加者にとってより望ましい取引を行うために情報や知性などが重要となる場合，市場のルールは，どのような戦略が参加者によって実行可能で，他の参加者が戦略的に振る舞うことでどのくらい結果が左右されるかも，ここでいう安全性の問題となる.

[7)] Roth, Alvin. E. (2013) を参照.

この安全性を考慮する点が，マーケット・デザインと類似の手法を用いて研究を行っているメカニズム・デザインとの差異を明確にする．メカニズム・デザインの研究は，異なるメカニズム間の比較とはそれぞれのメカニズムが実現する均衡の比較を主に行っている．しかしながら，マーケット・デザインの研究は，現実の問題も考慮して研究を行う．例えば，現実の市場において，市場参加者は他の参加者の均衡以外の行動とることによって生じるリスクも考慮するので，均衡と同様に均衡以外の最悪のケースも考慮して分析する必要がある．また，マーケット・デザインは，メカニズム・デザインで前提とされている仮定とは異なり，市場の制度設計者はゲームの全体を決して知らないことが前提とし，それゆえ，より大きなゲームの一部に対して制度設計を行っているという事実をもとに研究を行う必要がある．マーケット・デザインは，最終的に起こる均衡の市場全体を制度設計しようとしているのではなく，むしろ，望ましい均衡をもつ市場を制度設計し，その均衡を達成しようとしている．そのため，もし予想外の行動が現実でみられたら，その市場の制度設計は修正される．

このことは市場のルールそれ自身とそれに参加している参加者の行動の両方を「単純化」させる．ルールを単純化させることにより，参加者に実現する結果を明確にし，そのルールが本当に実行されたことを確認させる効果がある．ルールは単純かもしれないが，参加者による戦略は複雑なままかもしれない．戦略の複雑性は，より重要な問題となる可能性がある．なぜならば，よりよい結果を導く戦略を実行するのには費用がかかり，間違いや意図的な誤りを起こすことでよりよい結果がえられるならば，その市場の参加者は戦略の複雑性の影響を受けるからである．そのようなリスクは，市場参加者を減らす可能性がある．

本稿は，上記の視点をもって研究がなされているマーケット・デザインの基礎理論の一つである「マッチング理論」に焦点を絞る．マッチング理論とは，病院と研修医，法律家と裁判所，患者と腎臓ドナーのような Two sided のどちらかに参加している人たちをもう片方のサイドにいる参加者とマッチングさせる方法を研究する分野である．そのようなマッチングを考える際に，提案されたマッチングが「安定性」を満たさないならば，その市場で提案されたマッチングとは別

のマッチングをしようとし，その市場はとても非効率なものになってしまう．そこで，安定性という概念がマッチング理論において，重要かつ中心的な概念となる．

マッチング理論は数学者やコンピュータ・サイエンスの科学者によって，長年研究されてきたが，実践的な経済制度設計にも非常に役立つことから，経済学者の間でも注目されるようになった．この事実を顕著に表すこととして，2012 年には，この分野の貢献者である，Roth 教授と Shapley 教授がノーベル経済学賞を受賞した．

本稿は，マーケット・デザインの基礎理論であるマッチング理論に対し新たな視点と理論的な発展をおこなった下記の 5 本の論文をもとにして書かれている．各章は次のように構成されている．

第 1 章は，Gale, David and Lloyd Shapley (1962) から始まったマッチング理論の現在までの進展を，Abdulkadiroğlu, Atila and Tyfun Sönmez (2013) と同様の流れに沿って，できる限りわかりやすい証明を与えながら解説する．第 2 章は，Economics Bulletin に掲載された Matsubae, Taisuke (2010)“Impossibility of Stable and Non-Damaging Bossy Mechanism ” にもとづいた研究である．この研究は，いままで考察されていなかった安定メカニズムの負の性質を明らかにした研究である．第 3 章は，Matsubae, Taisuke (2012) の “A Note on Stable Matching Mechanisms” に基づいた研究で，片方の選好が単調に変化すると，安定なマッチング・メカニズムによって導出される結果がどのように変化するのかを明らかにした研究である．第 4 章は，Matsubae, Taisuke (2011a)“An Affirmative Action Policy as a Strategy on Two Sided Matching Market” に基づいた研究である．この研究は，マッチング理論において，制度として考えられていた積極的差別是正政策を，企業の戦略変数としてとらえた場合どのような結果が生じるのかを分析した最初の研究である．第 5 章は，Matsubae, Taisuke (2011b)“Do the Minority Students Benefit from Affirmative Action Policy in School Choice Market ?: Reconsidered” に基づいた研究である．積極的差別是正政策を学校選択制に応用した既存研究において示されている不可能性を解消するために，単純な形で積極的差別是正政策を強めることで可能性が実現できるかどうかを考察した研究である．第 6 章は，Matsubae, Taisuke (2013)“Group Affirmative Action Policy at School Choice” に基づい

た研究である．ここでは，前章や既存研究において積極的差別是正政策はマイノリティの学生の厚生を悪化させてしてしまう可能性が指摘されたていることを受けて，積極的差別是正政策の中身を吟味し改善することで，マイノリティの学生の厚生を改善できるかを考察した研究である．最後に，本稿において明らかにした研究結果をまとめて，付録において，本稿で研究していたメカニズムによって導出されるマッチングを求めるプログラムを記載しておく.[8)]

[8)] このプログラムは *Python 2.7.8* を用いて書かれている．*Python* は，C 言語などと同様の汎用のスクリプト言語である.

参考文献

Abdulkadiroğlu, Atila and Tyfun Sönmez (2013) *Matching Markets: Theory and Practice*, Vol. I of Advances in Economics and Econometrics: Theory and Applications, Tenth World Congress: Cambridge University Press.

Gale, David and Lloyd Shapley (1962) "College Admissions and the Stability of Marriage," *American Mathematical Monthly*, Vol. 69, No. 9, pp. 9-15.

Matsubae, Taisuke (2010) "Impossibility of Stable and Non-Damaging Bossy," *Economics Bulletin*, Vol. 30, pp. 2092-2096.

——— (2011a) "An Affirmative Action Policy as a Strategy on Two Sided Matching Market," *memeo*.

——— (2011b) "Do the Minority Students Benefit from Affirmative Action Policy in School Choice Market?: Reconsidered," *memeo*.

——— (2012) "A Note on Stable Matching Mechanisms," *memeo*.

——— (2013) "A Group Affirmative Action Policy at School Choice," *memeo*.

Roth, Alvin E. (2008) "Deferred Acceptance Algorithms: History, Theory, Practice, and Open Questions," *International Journal of Game Theory*, Vol. 6, pp. 537-569.

Roth, Alvin. E. (2013) *What Have We Learned from Market Design? in Handbook of Market Design*: Oxford Press.

Roth, Alvin E. and Marild Sotomayor (1990) *Two-Sided Matching: A Study in Game-Theoretic Modeling and Analysis*, Econometric Society Monograph Series: Cambridge University Press.

Vulkan, N., Alvin E. Roth, and Z. Neeman (2013) *Introduction in Handbook of Market Design*: Oxford Press.

第1章　マッチング理論

本章は，Abdulkadiroğlu, Atila and Tyfun Sönmez (2013) と同様の流れに沿って，マッチング理論のこれまでの研究の成果を紹介する．

1.1　はじめに

マッチングは市場において重要な機能の一つである．例えば，誰がどの仕事をえるのか，どの学校に入学するのか，誰が誰と結婚するのかなど，それらは経済的な場面だけではなく社会のさまざまな場面で，多くの人々にとって重要な問題である．

マッチング理論の研究は，Gale 教授と Shapley 教授による *American Mathematical Monthly* において 1962 年に発表された “College Admissions and the Stability of Marriage” が最初の研究といわれている.[1] 彼らの論文は, 次のような単純な Two sided マッチングのフレームワークで考察がおこなわれている．男性と女性（学生と学校）がマッチングされる相手に対して選好をもち，彼女らは互いにマッチしたいと考えている．彼らがその論文において関心があったことは，互いに納得するマッチングである「安定なマッチング」があるかどうかであった．つまり，マッチした男女が，お互いにより選好する男女と再マッチングを考えることがないようなマッチングが存在するかどうかを分析した．彼らはその論文において，そのような安定なマッチングは存在し，そのような安定なマッチングを求めるアルゴリズム，いわゆる Deferred Acceptance アルゴリズム (DA アルゴリズム) を提案した．このアルゴリズムは，一方のサイドにいる主体が別のサイドにいる主体に対して，選好の順序にしたがってプロポーズをすることによって機能するアルゴリズムであ

[1] Gale, David and Lloyd Shapley (1962)

る．そのアルゴリズムは，次のような手続きですすむ．最初にプロポーズする人は，自身の最も選好される人にプロポーズをする．受け入れることが可能な人数（例えば，結婚問題ならば一人）よりも多くのプロポーズを受けたならば，その中で最も選好する人以外の人は拒否されるが，拒否されなかったらといって，その人はすぐには受諾されず，プロポーズされた人によって留保される．留保した人を受諾するかどうかは，そのアルゴリズムが終了するまで決定しない．拒否された人は，2 番目に選好する新たな人にプロポーズをする，その結果，新たに拒否される人がでる（新たにプロポーズしてきた人が，留保されている人よりも選好するならば，留保されていた人も新たに拒否された人となる）．この一連の流れは，拒否された人が新たにプロポーズしたい相手がいなくなるまで続く．誰もプロポーズされなくなった（しなくなった）時点で，留保されている人は最終的に受諾され，それがマッチングとなる．

彼らの論文は，あらゆる選好プロファイルに対して安定な結果が存在し, 選好が厳密に順序づけられているとき，その市場の各サイドのどちらかからプロポーズしていくことで安定なマッチングを見つけることが可能な上記の DA アルゴリズムを提示し，そこで求まった安定なマッチングは，任意の安定なマッチングよりもどちらかのサイドにとっては，最も好まれる安定なマッチングであることを示した．さらにコアと Two sided マッチング市場の関連を示した．最後に，いわゆる一対一のマッチングの問題を拡張して，一対多（大学入学問題）の問題に拡張を行った．

現在，ニューヨーク市の高校やボストン市における学生と公立学校に対する入学は，以前に用いられていたシステムによって生じていた学生などによるそのシステムに対する不満を解消するために，DA アルゴリズムを使ったクリアリング・ハウスを再組織化した．また，米国の病院と研修医のマッチング問題にも同様のアルゴリズムが適用された.[2)]

マッチング理論の研究は上記のようにその理論を用いた制度設計だけではなく，マッチング理論によって制度設計されたクリアリング・ハウスを設計した際に，理論上予測していなかった（で

[2)] Gale, David and Lloyd Shapley (1962) が発表されるよりも以前 (1950 年代) からクリアリング・ハウスでこのアルゴリズムが用いられていた．DA アルゴリズムは多くの場所，例えば日本の早稲田高等学院から早稲田大学への学部振り分け，で用いられていた．つまり，Two-sided マッチングにおいてマッチングを生成する伝統的なやり方である．

きなかった）問題が生じたならば，その問題をどのように解消すべきかが新たな研究となる．

上記の研究に関連する研究として，1974 年に，Shapley 教授と Scarf 教授は “Cores and Indivisibility” という論文を *Journal of Mathematical Economics* の創刊号に掲載した.[3)] この論文で扱っているモデルは，単純な交換経済のモデルであった．各主体は，非分割財を一つ市場にもっていき，より好ましい財を持っている他の主体を探す．そこで消費される財の数は高々一つであるとした．彼らは，そのモデルにおいてコア配分があるかどうかを分析した．彼らは，コアの中のある配分が存在し，Gale 教授が考案した Top Trading Cycles アルゴリズム (TTC アルゴリズム) によってこの配分が求められることを示した．Gale 教授によって考案された TTC アルゴリズムをもとにしたアルゴリズムとその拡張は，発見からおよそ 30 年後に腎臓の臓器移植の割当てに適用されている．

マッチング市場の研究を網羅したサーベイは, いくつかすでに存在する．それらの中で最も有名なサーベイは，Roth, Alvin E. and Marild Sotomayor (1990) で，1990 年までの Two sided マッチング市場の研究を網羅している．Roth, Alvin E. (2008) は，DA アルゴリズムを中心にその歴史をまとめたサーベイである．それらのサーベイ論文は，基本的に Two sided マッチング市場に着目している．Abdulkadiroğlu, Atila and Tyfun Sönmez (2013) は，Two sided マッチングだけではなく One sided マッチングにも注目している．この研究と近い研究として Sönmez, Tyfun and M. Utku Ünver (2009) がある．本章は，後者に，かなり近いサーベイ研究である．次節以降で, マッチング・モデルの詳細のモデルと既存の主要な結果紹介していく．

1.2 Two sided マッチング・モデル

マッチング理論の最初の研究とされている Gale, David and Lloyd Shapley (1962) は，非常に関連のある 2 つの Two sided マッチング市場を考察した．その 2 つの唯一の違いは，一対一のマッチングを考えるか，一対多のマッチングを考えるのかの差である．しばしば，一対一のマッチン

[3)]Shapley, Lloyd and Herbert Scarf (1974) を参照。

グを「結婚市場」，一対多のマッチングを「大学入学市場」とよぶ．最初に「結婚市場」から紹介を行う．

1.2.1 結婚市場

結婚市場の構成要素として，2 つの交わらない主体の集合 $M := \{m_1, m_2, \ldots, m_n\}$ と $W := \{w_1, w_2, \ldots, w_p\}$ がある．つまり，$M \cap W = \varnothing$ となる．集合 M は男性の集合，集合 W は女性の集合とよばれる．各集合の代表的な元を $m \in M$ と $w \in W$ で表現する．両集合の代表的な要素を $i \in M \cup W$ と表記する．各男性 m は，他の主体の集合 W と自分自身 $\{m\}$ の上に完備性と推移性を満たす選好関係 R_m をもつ.[4] wR_mw' かつ $\neg(w'R_mw)$ の場合を，wP_mw' と表記する．自分自身に対して選好関係をもつということは，誰ともマッチしない可能性を意味する.[5] 選好関係 R_{m_i} は，次のような形で表記することにする．

$$R_m = w_1, w_2, m_i, w_3, \ldots, w_p.$$

この選好リストが意味することは，m にとって最も選好する人は w_1 で，二番目に選好する人は w_2 である．彼の三番目に選好する人は自分自身なので，誰ともマッチされないことを選好していることになる．つまり，この男性 m は，女性のある集合から選択する機会が与えられ，w_1 が存在するならば，w_1 を選択するであろう．また w_1 も w_2 も選択できないならば，誰ともマッチされないままでいることを選好することになる．誰ともマッチされないことよりも下位にある女性，例えば w_3 のような女性は，男性 m にとって**アンアクセプタブル**と呼ばれる．一般的に選好関係はアンアクセプタブルな主体を除いた形で表現されることが多い．アンアクセプタブルな主体以外は**アクセプタブル**な主体といわれる．任意の二人のアクセプタブルな主体の間に無差別がないか，

[4] 選好関係が完備性を満たすとは，主体 m に対して，任意の $w, w' \in W \cup \{m\}$ に対して，wR_mw' または $w'R_mw$ のどちらかが成り立つことをいう．選好関係が推移性を満たすとは，主体 m に対して，任意の w, w' そして w'' に対して，wR_mw' かつ $w'R_mw''$ であるならば，wR_mw'' が成り立つことである．

[5] 誰ともマッチしないことに対する別の解釈として，アウトサイド・オプションと解釈される場合がある．つまり，その市場の外で取引をおこなうということを意味する．

またはアクセプタブルな主体にマッチされることと，マッチされないことの間に無差別がないならば，彼女または彼の選好関係は**厳密な選好関係**をもつといわれる．

各女性 w に対しても同様に，男性の集合と彼女自身 $M \cup \{w\}$ 上に順序づけられた選好のリストは以下のように表記される．例えば，次のように彼女の選好関係は表記される．

$$R_w = m_1, m_2, w, m_3, \ldots, m_n.$$

この選好リストが意味することは，女性 w にとって最も選好する人は m_1 で，二番目に選好する人は m_2 であることである．彼女の三番目に選好する人は自分自身なので，誰ともマッチされないことを選好していることになる．つまり，この女性 w は，男性のある集合から選択する機会が与えられ，m_1 が存在するならば，m_1 を選択するであろう．また m_1 も m_2 も選択できないならば，誰ともマッチしないままでいることを選好することになる．

結婚市場は，$\left(M, W, \{R_i\}_{i \in M \cup W}\right)$ の三つ組みで表現され，男性と女性の選好関係は，一般的に厳密な選好関係を仮定する．

結婚市場における結果を，**マッチング**または**割当て**とよぶ．結婚市場のマッチングは，次のような性質を満たす写像 $\mu : M \cup W \to M \cup W$ である．

1. すべての $m \in M$ に対し $\mu(m) \notin W \Rightarrow \mu(m) = m$,
2. すべての $w \in W$ に対し $\mu(w) \notin M \Rightarrow \mu(w) = w$, かつ
3. すべての $m \in M$ と $w \in W$ に対し $\mu(m) = w \iff \mu(w) = m$.

つまり，あるサイドの主体は別のサイドの主体，または自分自身とマッチングする．また，w が m とマッチしているならば，m は w とマッチしていることを意味する．

マッチングに対する選好関係は，マッチした人に対する選好関係と同じになる．このことは，マッチングに対する外部性がないことを意味している．例えば，自分自身がマッチしている相手

は同じであるが，他の人がマッチしている相手が変化することによりマッチングに対する選好は変化しないことを意味する.

マッチング μ が**パレート効率的**であるとは，すべての主体 $i \in M \cup W$ に対して，$\nu(i) \, R_i \mu(i)$，かつある主体 $j \in M \cup W$ に対して，$\nu(j) \, P_j \mu(j)$ となるような他のマッチング ν が存在しないことを意味する.

マッチング μ が, **主体** $i \in M \cup W$ **によってブロックされる**とは,

$$\{i\} P_i \mu(i)$$

となる．もし任意の主体 i によるブロックがないならば，マッチング μ は**個人合理的**という．つまり，個人合理的なマッチングとは，**アクセプタブル**なマッチングということになる.

マッチング μ が**ペア** $(m, w) \in M \times W$ **によってブロックされる**とは,

$$w P_m \mu(m) \text{ かつ } m P_w \mu(w)$$

となるようなペア (m, w) が存在することである．つまり，マッチング μ でマッチされた相手よりもお互いに選好するペアが存在するならば，マッチング μ はペア (m, w) によってブロックされるという.

定義 1 (安定性)**.** マッチング μ が個人合理的かつペアによるブロックが存在しない場合，マッチング μ は**安定**であるという.

結婚市場において，安定なマッチングはパレート効率的であり，かつ安定なマッチングの集合はコアとなる.

定理 1 (Gale, David and Lloyd Shapley (1962))**.** すべての結婚市場において安定なマッチングが存在する.

Gale 教授と Shapley 教授は，次で示すアルゴリズムを開発し分析することによって上記の定理を示した.[6)]

【証明】

任意の結婚市場に対して，安定なマッチングを導出する男性プロポーズ DA アルゴリズムは次のアルゴリズムである.[7)]

男性プロポーズ DA アルゴリズム

ステップ 1 男性の方からプロポーズする状況を考える.（もし彼らにアクセプタブルな女性がいるならば) 各男性は彼の最も選好する女性に対してプロポーズをする．つまり, 彼の選好リストにおいてアクセプタブルな女性の最初に位置する女性にプロポーズをする．各女性は彼女にとってアクセプタブルではないすべての男性のプロポーズを拒否し，1 つ以上のアクセプタブルなプロポーズを受けた各女性は，その中で最も選好する男性を留保し，それ以外のすべての男性を拒否する．プロポーズをした男性の中で拒否されたなかった男性は，この時点でその女性に留保された状態になる.

ステップ $k \geq 2$ 任意のステップ k で，ステップ $k-1$ で拒否された任意の男性は，いままでのステップでプロポーズをしていない女性の中で最も選好する女性にプロポーズをする．ステップ $k-1$ で，留保されているか，アクセプタブルの女性にすべて拒否されているならば，そのとき彼はさらなるプロポーズをしない．プロポーズを受けている各女性は，アクセプタブルでない男性はすべて拒否し，以前のステップで留保した男性と新たにプロポーズしてきた男性の中で最も好む男性を留保し，それ以外は拒否する.

そのアルゴリズムは，任意の男性が女性によって拒否されなくなったステップの後に終了する.

[6)]Roth, Alvin E. (2008) によると，Gale 教授はモデルと安定性の定義を構築し，安定なマッチングは常に存在するという予測を仲間に送り，そのメールを受けた一人である Shapley 教授は，メールによって DA アルゴリズムと対応する証明を返信したそうである.

[7)]男性を女性に置き換えれば，女性プロポーズ DA アルゴリズムとなる.

この時点で，すべての男性はある女性に留保されているか，彼にとってアクセプタブルなすべての女性に拒否されているかのどちらかである．その後，女性は留保した男性と最終的にマッチする．任意のアクセプタブルなプロポーズを受けていなかった女性達とアクセプタブルな女性すべてに拒否された男性達は，誰ともマッチしないままとなる.[8)]

【アルゴリズムの有限性】男性と女性の人数は有限であり，任意の女性に対して，男性は 1 回以上プロポーズできないので，アルゴリズムは有限時間で終了する.

【アルゴリムの生み出す結果】そのアルゴリズムが生み出す結果は，マッチングである．なぜならば，各男性は任意の段階で高々 1 人の女性にしか留保されないし，各女性は任意の段階で高々 1 人の男性しか留保できないからである.

【アルゴリズムの結果の個人合理的】女性と男性は，アンアクセプタブルな人とは決してマッチングすることはないので，アルゴリズムの結果は個人合理的である.

【アルゴリズムの結果の安定性】そのアルゴリズムによって生み出されるマッチング μ が安定であることを見るために，ある男性 m とある女性 w が，このアルゴリズムによって生み出されるマッチング μ に対するブロッキング・ペアであると仮定する．つまり，このマッチング μ に対するブロッキング・ペア (m, w) が存在したとする: $wP_m\mu(m)$ かつ $mP_w\mu(w)$ となる．そのとき，女性 w は男性 m にとってアクセプタブルでなければならない．だから，彼は現在の相手にプロポーズする前に彼女 w にプロポーズしていなければならない．そのアルゴリズムが終了したときに，彼は女性 w に留保されていなかったので，彼は，彼女が男性 m よりも選好される男性 m' にプロポーズされたことによって拒否されていなければならない．それゆえ，w は男性 m よりも選好する男性とマッチング μ でマッチされている．なぜならば，最終的なマッチングパートナーは，その男性 m' かそれよりも選好される男性 m'' となり，彼女の選好は推移性を満たすので，女性 w にとって，男性 m を現在のマッチング μ の相手よりも好むことはないからである．したがって，m

[8)] このアルゴリズムは，無差別な選択肢が存在しなければ，うまく機能する．しかしながら，無差別な選択肢が存在するならば，無差別な選択肢の中から一つを選択するためのルールを導入する必要がある．そのようなルールを Tie Breaking Rule（タイ・ブレーキング・ルール）とよぶこともある．例えば，無差別な女性の中からアルファベットの順序で選択する．異なる主体が異なる方法で無差別な選択肢に対する順序づけをおこなう方法もある.

と w はマッチング μ のブロッキング・ペアとはなりえない．これは，ブロッキング・ペアが存在することに矛盾する．つまり，そのマッチングは，任意の個人またはペアによってブロックされないので，安定なマッチングであることがわかる． □

上記の証明で示した，男性プロポーズ DA アルゴリズムによる結果を，**男性最適安定マッチング**とよび，μ^M と表記する．男性と女性の役割を逆転したアルゴリズムは女性プロポーズ DA アルゴリズムとよばれる．その結果は**女性最適安定マッチング**といい，μ^W と表記する．この名前の由来は，下記の定理 2 からもわかる．

定理 2 (Gale, David and Lloyd Shapley (1962))**.** すべての男性と女性が厳密な選好関係をもつとき，男性最適安定マッチングは存在し，その安定なマッチングは他の安定なマッチングよりも弱い意味で選好される．さらに，男性プロポーズ DA アルゴリズムによって導出されるマッチング μ^M は男性最適安定マッチングとなる．

【証明】

最初に用語を定義する．w が m によって**達成可能**とは，$\mu(m) = w$ となるようなある安定なマッチングが存在することをいう．この定理を示すために，DA の任意のステップで，達成可能な女性に拒否される男性がいないことを示せば十分である．

背理法によって，ある女性によって拒否される男性がいたとする．ある男性 m が, ある達成可能な女性 w に最初のステップで拒否された場合を考える．つまり，このステップにおいて，女性 w は他の男性 m' を留保していることになる．したがって，$m' P_w m$ である．一方，DA の最初のステップであることと達成可能なマッチング μ から，$w P_{m'} \mu(m')$ となる．しかしながら，その 2 つの事実から，(m', w) はマッチング μ のブロッキング・ペアとなる．これは μ が安定なマッチングであることに矛盾する． □

女性最適安定マッチングに対しても同様の定理を示すことが可能である．

定理 3. すべての男性と女性の選好関係が厳密であるとき，すべての男性は，女性最適安定マッチングよりも任意の他の安定なマッチングを弱い意味で選好する．

【証明】

背理法の仮定より，ある男性 m に対して，$\mu^W(m)P_m\mu(m)$ となるような安定なマッチング μ が存在したとする．$\mu^W(m)=w$ となるような女性 w は，以前の定理 2 より他の安定なマッチングよりも弱い意味で選好する．しかしながら，選好関係が厳密であることにより，$mP_w\mu(w)$ となる．つまり，(m,w) は μ に対するブロッキング・ペアとなる．これは μ が安定なマッチングであることに矛盾する． □

いままでみてきたように，安定なマッチングは複数ある可能性がある．つまり，どのような安定なマッチングを実行するかによって，結婚できる場合や結婚できない場合があるかもしれない．したがって，参加者にとってどの安定なマッチングが実行されるかは，重要な問題となるかもしれない．しかしながら，次の**田舎病院定理**によってそのような問題が生じないことがわかる．

定理 4 (田舎病院定理 Roth, Alvin E. and Marild Sotomayor (1990), McVitie, D. G. and L. B. Wilson (1970))**.** 自分自身以外とマッチングしている主体の集合は，すべての安定なマッチングにおいて同じである．

【証明】

μ^M を男性最適安定マッチング，μ を任意な安定なマッチングとする．次のような集合を定義する．

$$\begin{aligned}\mu(W) &= \{m\in M : m=\mu(w)P_w w,\ \forall w\in W\},\\ \mu(M) &= \{w\in W : w=\mu(m)P_m m,\ \forall m\in M\}.\end{aligned}$$

$\mu^M(W)$ と $\mu^M(M)$ に対しても同様に定義される．安定なマッチングの個人合理性と男性最適安定

マッチングの性質より，μ で自分自身以外とマッチングしている男性は μ^M でも自分自身以外とマッチング可能である．つまり $\mu(W) \subset \mu^M(W)$ となる．μ^M は女性にとって最悪な安定なマッチングであるので，μ^M で自分自身以外とマッチングしている女性は，μ においても自分自身以外とマッチング可能である．つまり，$\mu^M(M) \subset \mu(M)$ となる．マッチングの定義より，$|\mu^M(M)| = |\mu^M(W)|$ かつ $|\mu(M)| = |\mu(M)|$ であるので，$|\mu^(W)| = |\mu(W)|$ かつ $|\mu^M(M)| = |\mu(M)|$ となる．したがって，$\mu^M(W) = \mu(W)$ かつ $\mu^M(M) = \mu(M)$ となる． □

安定なマッチングの集合の構造について考える．安定なマッチングの集合に対する構造の最初の研究は Knuth, Donald E. (1996) がある.[9] μ と μ' という 2 つのマッチングを考える．これらの 2 つのマッチングに対して, 次のような操作を考える．$\lambda = \mu \vee^M \mu' : M \cup W \to M \cup W$ は, μ と μ' のマッチングにおいて，男性はより選好する女性とマッチする．また，各女性はその 2 つのマッチングにおいて, より選好しない男性とマッチすることを決める操作である．$\nu = \mu \wedge^M \mu' : M \cup W \to M \cup W$ は，μ と μ' のマッチングにおいて，男性はより選好しない女性とマッチする．また，各女性は，その 2 つのマッチングにおいて, より選好する男性とマッチすることを決める操作である．マッチングの集合に関して，この操作を行った場合，その結果はマッチングとはならないことが次の例からもわかる．

例 1. 3 人の男性と女性がそれぞれ存在し，$M = \{m_1, m_2, m_3\}$, $W = \{w_1, w_2, w_3\}$ とする． 各自は，次のような選好関係を持っている．

$$\begin{aligned} P_{m_1} &= w_2, w_1, w_3, m_1 \quad P_{w_1} = m_1, m_3, m_2, w_1 \\ P_{m_2} &= w_1, w_3, w_2, m_2 \quad P_{w_2} = m_3, m_1, m_2, w_2 \\ P_{m_3} &= w_1, w_2, w_3, m_3 \quad P_{w_3} = m_1, m_3, m_2, w_3. \end{aligned}$$

[9] より一般的なマッチング・モデルに対するラティス構造の研究は，Blair, Charles (1988), Martínez, R., J. Massó, A. Neme, and J. Oviedo (2001), Sotomayor, Marilda (2000), Sotomayor, Marilda (2007), Fleiner, Tamas (2000) また Hatfield, John William and Paul Milgrom (2005) がある．

すべての可能なマッチングは，個人合理的である．なぜならば，すべての組 (m, w) は互いにアクセプタブルであるからである．マッチング μ と μ' が次のように与えられたとする．

$$\mu = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \quad \mu' = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ \\ w_3 & w_1 & w_2 \end{pmatrix}.$$

λ と ν の操作をすると，

$$\lambda = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3 & w_1 & w_2 & w_3 \\ \\ w_1 & w_1 & w_2 & m_2 & m_3 & m_3 \end{pmatrix}$$
$$\nu = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3 & w_1 & w_2 & w_3 \\ \\ w_3 & w_2 & w_3 & m_1 & m_2 & m_1 \end{pmatrix}.$$

しかしながら，もし μ と μ' が安定なマッチングであるならば，それらの操作の結果は安定なマッチングとなる．つまり，安定なマッチングの集合はラティスの構造をもつということになる．

定理 5 (Lattice theorem Knuth, Donald E. (1996))**.** すべての選好関係が厳密であるとき，μ と μ' が安定なマッチングであるならば，λ と ν の操作による結果はマッチングとなる．さらに，それらは安定なマッチングとなる．

【証明】

最初に，λ がマッチングとなることを示す．そのために，$\lambda(m) = w \iff \lambda(w) = m$ となることを示せば十分である．

Only if part: $\lambda(m) = w \Rightarrow \lambda(w) = m$ を示す．$\lambda(m) = w$ は，λ の定義より，w は μ と μ' でマッチングされている女性の中で m にとって，より選好される女性である．この事実を仮定して，$\lambda(w) = m$ となることを示す．これは，m が μ と μ' でマッチングしている男性の中で w にとって，より選好されない男性であることを意味する．背理法の仮定より，これが成り立たないとす

る．一般性を失わずに，$\mu(w)$ でマッチングされている男性 m' より m が選好されるとする．そのとき，マッチングの定義より μ において，m は w とは異なる女性 w' とマッチングしていることになる．このことは，λ の定義と選好関係の厳密性により，男性 m にとって，wP_mw' である．つまり，$wP_m\mu(m)$ かつ $mP_w\mu(w)$ である．これは，μ に対して (m,w) がブロッキング・ペアとなることを意味している．したがって，μ が安定なマッチングであることに矛盾する．

If part: $\lambda(w) = m \Rightarrow \lambda(m) = w$ を示す．λ のもとで誰かと結婚している男性の集合を M' とする：

$$M' = \{m : \ \lambda(m) \in W\} = \big\{m : \mu(m) \in W \text{ or } \mu'(m) \in W\big\}.$$

Only if part の結果から，任意の $w \in W$ と $m' \in M'$ に対して，$\lambda(m') = w$ ならば $\lambda(w) = m'$ となる．したがって，

$$\lambda(M') \subseteq \{w : \lambda\,(w) \in M\} = \big\{w : \mu(w) \in M \text{ and } \mu'(w) \in M\big\} = W'.$$

だから，$\lambda(M') \subseteq W'$ となる．定義により，

$$M' = \big\{m : \mu(m) \in W \text{ or } \mu'(m) \in W\big\} \supseteq \{m : \ \mu(m) \in W\} \supseteq \big\{m : \ \mu(m) \in W'\big\} = \mu(W').$$

μ は写像であるので，$\mu(W')$ と W' は同じ大きさとならなければならない．したがって，$M' \supseteq W'$ となる．$w = \lambda(m) = \lambda(m')$ ならば，$m = m' = \lambda(w)$ であるので，λ は一対一の写像である．つまり，M' と $\lambda(M')$ は同じ大きさになる．したがって，$\lambda(M') \supseteq W'$ となる．上記の事実から $\lambda(M') = W'$ となる．$m = \lambda(w)$ を仮定する．そのとき，$w \in W' = \lambda(M')$ となり，ある $m' \in M'$ に対して，$w = \lambda(m')$ となる．このことより，$m' = \lambda(w)$ となる．$\lambda(w)$ は一意であるので，m と異なる m' に対しては成り立たない．つまり，$\lambda(w) = m$ となる．

λ が安定なマッチングであることを示す．

個人合理性： λ が個人合理性を満たすことは，μ と μ' の安定性からわかる．なぜならば，それ

らの安定なマッチングにおいては，アンアクセプタブルな相手とはマッチしていないので，それらのより選好される方，またはより選好されない方もアクセプタブルな相手となる．

ブロッキング・ペアの非存在：背理法の仮定より，あるブロッキング・ペア (m, w) が λ に対して存在したとする．そのとき，m はブロッキング・ペアであることと，λ の定義により μ かつ μ' よりも w の方が選好される．同様に，w は m を mu または mu' のどちらかよりも選好されることになる．一般性を失うことなく，それを μ とする．しかしながら，それは μ のもとで (m, w) がブロッキング・ペアになること意味する．このことは m が安定なマッチングであることに矛盾する．

ν に関しても同様のロジックで証明される． □

この定理 5 の直観は，2 つの安定なマッチングがあるときに，男性にその中でより選好される女性を選択するように求められたときに，2 人以上の男性が同じ女性を選択することはないということである．

安定なマッチングの集合のラティス構造を用いて，以前で示した田舎病院定理の別証明を与える．

【田舎病院定理の別証明】

任意の 2 つの安定なマッチング μ と μ' と，M_μ と $M_{\mu'}$ をそれぞれのマッチングにおいて，ある女性とマッチされている男性の集合とする．W_μ と $W_{\mu'}$ も同様に，それぞれのマッチングにおいてある男性とマッチされている女性の集合とする．

λ を以前定義した μ と μ の操作とする．その操作の結果マッチングされた男性と女性の集合を μ_λ と W_λ とする．もし m が μ のもとで誰かとマッチングされているならば，誰ともマッチされないよりも誰かとマッチすることを選好するので，λ のもとでも誰かとマッチしていることになる．つまり，

$$M_\lambda = M_\mu \cup M_{\mu'}.$$

一方，女性は，どちらかのマッチングにおいて誰ともマッチしていないならば，λ のもとでもマッ

チングされないことになる．つまり，

$$W_\lambda = W_\mu \cap W_{\mu'}.$$

これらの事実により，$M_\lambda \supseteq M_\mu, M_{\mu'}$ かつ $W_\lambda \subseteq W_\mu, W_{\mu'}$ となる．以前の結果より，μ でマッチしている男性の数と女性の数は同じである．μ' の場合も同様である．つまり，$|M_\mu| = |W_\mu|$ かつ $|M_{\mu'}| = |M_{\mu'}|$ である．また，ラティス定理より，$|M_\lambda| = |W_\lambda|$ である．つまり，任意の安定なマッチングのマッチされている数は同じであることがわかる．$M_\lambda = M_\mu \cap M_{\mu'}$ であるので，$M_\mu = M_{\mu'}$ となる．つまり，任意の安定なマッチングにおいて，マッチしている男性の集合とマッチしている女性の集合は同じになる． □

もしある男性に彼をアンアクセプタブルとしている女性とマッチさせることができるならば，すべての男性は，男性最適安定マッチングよりも良くなるマッチングがあるかもしれない．しかしながら，個人合理性を満たすマッチングにおいて，すべての男性を厳密により選好される女性とマッチングさせることは不可能であることがわかっている．

定理 6 (男性にとって弱いパレート効率性 Roth, Alvin E. (1982a))**.** すべての $m \in M$ に対して，男性最適安定マッチング μ^M よりも厳密に選好される個人合理的なマッチング ν は存在しない．

【証明】

DA アルゴリズムを用いて証明をおこなう．

背理法で証明を行う．つまり，任意の男性 $m \in M$ に対して，$\nu(m) P_m \mu^M(m)$ であると仮定する．μ^M は，男性プロポーズ DA アルゴリズムによって導出されるマッチングであるので，ν は，そのアルゴリズムのもとで，プロポーズをしたがより選好される男性 m' の存在によって拒否された女性とすべての男性がマッチングしている．なぜならば，μ^M は個人合理性を満たすので，すべての男性が女性とマッチングしていることになる．そこで，それらの女性すべて $\nu(M)$ は，μ^M のもとで誰かとマッチングしているはずである．もし誰ともマッチしていないならば，その女性 w

と ν でマッチする男性 m が μ^M のブロッキング・ペアとなり，μ^M が安定なマッチングと矛盾するからである．したがって，$\mu^M(\nu(M)) = M$ となる．さらに，M のすべての男性は μ^M のもとですべてマッチしているので，$\mu^M(M) = \nu(M)$ となる．しかしながら，M のすべての男性は μ^M ですべてマッチされているので，そのアルゴリズムの最後のステップでプロポーズを受けている女性は，アクセプタブルな男性のプロポーズを拒否しない．つまり，そのアルゴリズムは，$\mu^M(M)$ のすべての女性がアクセプタブルなプロポーズを受けるとすぐに終了する．したがって，そのような女性は ν のもとでは誰ともマッチされていないはずである．しかしながら，$\mu^M(M) = \nu(M)$ に矛盾する． □

Roth, Alvin E. (1982a) において，ある男性にとっては，男性最適安定マッチングよりもより選好されるマッチングが存在する例が示されている．つまり，男性最適安定マッチングは男性にとっての強いパレート効率性は満たされないことになる．

例 2 (Roth, Alvin E. (1982a))**.** 3 人の男性と女性が存在し，$M = \{m_1, m_2, m_3\}$, $W = \{w_1, w_2, w_3\}$ とする．次のような選好関係を持っている．

$$\begin{aligned} P_{m_1} &= w_1, w_2, w_3, m_1, \quad P_{w_1} = m_2, m_1, m_3, w_1, \\ P_{m_2} &= w_2, w_1, w_3, m_2, \quad P_{w_2} = m_1, m_3, m_2, w_2, \\ P_{m_3} &= w_1, w_2, w_3, m_3, \quad P_{w_3} = m_1, m_2, m_3, w_3. \end{aligned}$$

すべての可能なマッチングは，個人合理的である．なぜならば，すべての組 (m, w) は，互いにアクセプタブルであるからである．マッチング μ^M が次のように与えられたとする．

$$\mu^M = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ w_2 & w_1 & w_3 \end{pmatrix}.$$

そこで次のような個人合理性を満たすマッチングを考える.

$$\mu = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}.$$

このマッチング μ は，μ^M よりも男性 m_1, m_2 は改善し，m_3 は μ^M と同じである.

一対一マッチングのインセンティブ

いままでは，各参加者の個人情報である選好が与えられたもとで，生み出される結果の性質であった．しかしながら，その個人情報を正しく表明するかどうかはわからない．ここでは，そのような問題に対する回答を，代表的な結果を通じて紹介する.

選好の表明に焦点を絞るため，各主体の集合 M と W は固定して考える．つまり，選好プロファイル $R = \{R_i\}_{i \in M \cup W}$ だけを用いて結婚市場を定義する.

$\mathscr{R}_i$ を主体 i のあらゆる選好関係の集合とする．$\mathscr{R} = \prod_{i \in M \cup W} \mathscr{R}_i$ をすべての選好プロファイルの集合とする．そして，$\mathscr{R}_{-i}$ を主体 i 以外のすべての主体の選好プロファイルの集合とする．$\mathscr{M}$ をあらゆるマッチングの集合とする.

（直接）メカニズムとは，各結婚市場に対してあるマッチングを決定するシステマチックな手続きである．形式的にいうと，$\varphi : \mathscr{R} \to \mathscr{M}$ となる写像である.

メカニズム φ が**安定**であるとは，任意の選好プロファイ $R \in \mathscr{R}$ に対して，$\varphi(R)$ が安定であることをいう．メカニズム φ が**効率的**であるとは，任意の選好プロファイル $R \in \mathscr{R}$ に対して，$\varphi(R)$ がパレート効率的であるときをいう．メカニズム φ が**個人合理的**であるとは，任意の選好プロファイル $R \in \mathscr{R}$ に対して，$\varphi(R)$ が個人合理的なマッチングであることをいう.

φ^M を男性最適安定マッチングを各市場に対して導出するメカニズムで，φ^W を女性最適安定マッチングを各市場に対して導出するメカニズムとする.

各メカニズム φ は，各市場に対して選好表明ゲームを導く．ここで，ゲームのプレイヤーの集合

は $M \cup W$，各プレイヤーの戦略空間は彼女の選好関係の集合 $\mathscr{R}_i$ で，結果はメカニズム φ によって決定される．

メカニズムが**耐戦略性**であるとは，真の選好を表明することが，選好表明ゲームにおいて支配戦略均衡になっていることである．形式的に記述すると，

$$\forall i \in M \cup W, \forall R_i \in \mathscr{R}_i, \forall R_{-i} \in \mathscr{R}_{-i}, \varphi_i\left(R_i, R_{-i}\right) R_i \varphi_i\left(R_i', R_{-i}\right).$$

耐戦略性の概念は非常に重要な概念であるが，安定性の概念との両立は不可能であることがしられている．

定理 7 (Roth, Alvin E. (1982a))**.** 安定性と耐戦略性の両方を満たすメカニズムは存在しない．

【証明】

この証明を行うために次のような例を示せば十分である．この例は，Abdulkadiroğlu, Atila and Tyfun Sönmez (2013) において用いている例である．2 人の男性と女性が存在し，$M = \{m_1, m_2\}$，$W = \{w_1, w_2\}$ とする．次のような選好関係を持っている．

$$\begin{aligned} P_{m_1} &= w_1, w_2, m_1 \quad P_{w_1} = m_2, m_1, w_1 \\ P_{m_2} &= w_2, w_1, m_2 \quad P_{w_2} = m_1, m_2, w_2 \end{aligned}$$

この市場において，2 つの安定なマッチングが存在する

$$\mu^M = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ w_1 & w_2 \end{pmatrix} \quad \mu^W = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ w_2 & w_1 \end{pmatrix}.$$

φ を任意の安定なメカニズムとする．そのとき，$\varphi(R) = \mu^M$ または $\varphi(R) = \mu^W$ である．

もし $\varphi(R) = \mu^M$ であるならば, w_1 が $P'_{w_1} : m_2$ と表明する．そうすることによって, $\varphi\left(R_{-w_2}, P'_{w_2}\right)$

によってより選好する μ^W が実現する.

もし $\varphi(R) = \mu^W$ であるならば, m_1 が $P'_{w_1} : w_1$ と表明する．そうすることによって, $\varphi\left(R_{-m_1}, P'_{m_1}\right)$ によってより選好する μ^M が実現する. □

さらに，Alcalde, José and Salvador Barberá (1994) によって，耐戦略性は安定性と両立しないばかりか，パレート効率性や個人合理性とも両立しないことが示されている.

定理 8 (Alcalde, José and Salvador Barberá (1994))**.** パレート効率性，個人合理性かつ耐戦略性のあるメカニズムは存在しない.

【証明】

証明は，Alcalde, José and Salvador Barberá (1994) にしたがう．2 人の男女の結婚市場を考える．つまり, $M = \{m_1, m_2\}$, $W = \{w_1, w_2\}$ とする．φ を効率性と個人合理性を満たすメカニズムとする．証明すべきことは，それが耐戦略性をもたないことである．最初に次のような問題を考える.

$$\begin{aligned}(I) \quad P^1_{m_1} &= w_1, w_2, m_1 \quad P^1_{w_1} = m_2, m_1, w_1 \\ P^1_{m_2} &= w_2, w_1, m_2 \quad P^1_{w_2} = m_1, m_2, w_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(II) \quad P^2_{m_1} &= w_1, w_2, m_1 \quad P^2_{w_1} = m_2, w_1 \\ P^2_{m_2} &= w_2, w_1, m_2 \quad P^2_{w_2} = m_1, m_2, w_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(III) \quad P^3_{m_1} &= w_1, w_2, m_1 \quad P^3_{w_1} = m_2, w_1 \\ P^3_{m_2} &= w_2, w_1, m_2 \quad P^3_{w_2} = m_1, w_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(IV)\quad P^4_{m_1} &= w_1, m_1 \quad P^4_{w_1} = m_2, m_1, w_1 \\ P^4_{m_2} &= w_2, w_1, m_2 \quad P^4_{w_2} = m_1, m_2, w_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(V)\quad P_{m_1} &= w_1, m_1 \quad P_{w_1} = m_2, m_1, w_1 \\ P_{m_2} &= w_2, m_2 \quad P_{w_2} = m_1, m_2, w_2\end{aligned}$$

これらの選好プロファイルにおける個人合理性と効率性を満たすマッチングの集合は次のようになる.

$$(I)\quad \mu^1_1 = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ w_1 & w_2 \end{pmatrix} \quad \mu^1_2 = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ w_2 & w_1 \end{pmatrix}.$$

$$(II)\quad \mu^2_1 = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & \varnothing \\ \varnothing & w_2 & w_1 \end{pmatrix} \quad \mu^2_2 = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ w_2 & w_1 \end{pmatrix}.$$

$$(III)\quad \mu^3 = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ w_2 & w_1 \end{pmatrix}.$$

$$(IV)\quad \mu^4_1 = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ w_1 & w_2 \end{pmatrix} \quad \mu^4_2 = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & \varnothing \\ \varnothing & w_1 & w_2 \end{pmatrix}.$$

$$(V) \quad \mu^5 = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ \\ w_1 & w_2 \end{pmatrix}$$

$\varphi(R^1) = \mu^1_1$ であると仮定する．そとのき，$\varphi(R^2) = \mu^2_2$ であるならば，w_1 は $P^2_{w_2}$ を表明することにより，マッチングをより選好するマッチングに変更可能である．同様の議論があらゆる場合に生じる．このことは，効率性と個人合理性を満たすメカニズムが耐戦略性を満たさないことがわかる． □

安定性と耐戦略性に関するポジティブな一面として，結婚市場において，片側のサイドに関する耐戦略性は安定性と両立可能であるという事実がしられている．

定理 9 (Dubins, L. and D. Freedman (1981), Roth, Alvin E. (1982a))**.** 真の選好の表明は男性最適安定メカニズムのもとで，任意の男性にとって支配戦略となる．また，同様に真の選好の表明は女性最適安定メカニズムのもとで，任意の女性にとって支配戦略となる．

【証明】

主体による真の選好プロファイルを P とする．真の選好のもとで男性最適安定マッチングを μ^M とかく．同様に，表明された選好 P' や P'' のもとでの男性最適安定マッチングを μ'^M と μ''^M と記す．この定理の証明は，Roth, Alvin E. and Marild Sotomayor (1990) にしたがって，以下の補題を用いて証明を行う．

男性 m が P_m と異なる表明する方法はさまざまな方法がある．しかしながら，最初の補題は偽の選好を表明するインセンティブを考えるときに，ある種の単純な表明に注目すれば十分であることを示している．ある選好関係 P'_m を表明することによって，m は $\mu^M(m)$ から $\mu'^M(m)$ へ変化したとする．そのとき，彼は $\mu'^M(m)$ でマッチされた相手を，第一希望にするような違う選好関係 P''_m を表明することで同じ結果を得たとする．つまり，m が $\mu'^M(m)$ でマッチングされた相手とマッチするための選好の表明を考える．そこで，マッチしている相手を選好関係の一番最初に

もってくれば，$\mu'^M(m)$ でマッチしている相手とマッチすることが可能である．

補題 10 (Roth, Alvin E. (1982a))**.** μ'^M と μ''^M を P' と P'' のそれぞれの結婚市場の男性最適安定マッチングとする．そこで, $m \in M$ 以外の他の主体 i に対しては，$P''_i = P'_i$ とする．$\mu'^M(m)$ を P''_m の一番に選好される女性だとする．そのとき，$\mu''^M(m) = \mu'^M(m)$ となる．

【証明】

証明は Roth, Alvin E. and Marild Sotomayor (1990) にしたがう．明らかに，μ'^M は選好プロファイル P'' のもとで安定である．$\mu'^M(m)$ は P''_m の最初の選択肢であるので，μ''^M は男性最適であるから，$\mu'^M(m) = \mu''^M(m)$ となる． □

この補題は，定理 9 を証明するためには，真の選好を表明するよりも, より選好される結果を選好関係の一番にもってくるような選好関係の操作が，その主体の結果をよくしないことを示せば十分であることをいっている．次の補題は，m による単純な選好関係の操作は，m 以外の主体の結果が以前よりも同等かより選好されるならば，すべての男性は以前の結果よりも今回の結果を選好することを示している．

補題 11 (Roth, Alvin E. (1982a))**.** μ'^M は結婚市場 P' のもとでの男性最適安定マッチングであるとする．$m \in M$ 以外のすべての主体 i に対しては $P_i = P'_i$ であり，P'_M は $\mu'^M(m)$ の相手を一番にもってきた選好で，真の選好のもとで $\mu'^M(m) R_m \mu^M(m)$ であるとするならば，任意の男性 m' に対して，$\mu'^M(m') R_{m'} \mu^M(m')$ が成り立つ．

【証明】

Roth, Alvin E. and Marild Sotomayor (1990) にしたがって証明を行う．

$M^* = \{m_j : \mu^M(m_j) P_{m_j} \mu'^M(m_j)\}$ とする．背理法の仮定より $M^* \neq \varnothing$ であるとする．M^* の任意の男性 m_j は μ^M のもとでマッチされている．なぜならば，男性最適なマッチングは個人合理性を満たすからである．m 以外の男性は R と R' で同じ選好を表明し，m は M^* にいないので，

M^* の任意の男性 m_j は結婚市場 R' のもとで，男性最適 DA アルゴリズムのどこかのステップで μ^M でマッチしている相手に拒否されてなければならない．R' のもとで最初の s ステップで，ある m_j が $\mu^M(m_j)=w$ によって拒否とする．m と w は互いにアクセプタブルであるので，w は R のもとではプロポーズされたかった m_j よりより選好される m_k にステップ s でプロポーズを受けていなければならない．m_k が R のもとでプロポーズしなかったという事実から，$\mu^M(m_k)P_{m_k}w$ である．つまり, $m_k \in M^*$ となる．もしそうでないならば,

$$
\begin{aligned}
w \quad & R_{m_K} \quad \mu'^M(m_k) \\
& R_{m_k} \quad \mu^M(m_k) \\
& P_{m_k} \quad w,
\end{aligned}
$$

となり矛盾である．だから，$m_k \neq m$, $R_{m_k} = R'_{m_k}$, ステップ s より前のステップで，R' のもとでの $\mu^M(m_k)$ によって，m_k は拒否されていなければならない．したがって，それはステップ s の定義に矛盾する．つまり，$M^* = \varnothing$ であり，任意の $m_j \in M$ に対して，$\mu'^M(m_j)R_{m_j}\mu^M(m_j)$ となる． □

補題 12 (Blocking Lemma Martínez, R. and Marilda Sotomayory (1985))**.** μ を厳密な選好関係 P のもとでの個人合理的なマッチングとする．M' を μ^M より μ を選好する男性の集合とする．もし M' が非空であるならば，$\mu'(M')$ にいる女性 w と $M \setminus M'$ の男性 m が μ のブロッキング・ペアとなる．

【証明】

Roth, Alvin E. and Marild Sotomayor (1990) にしたがって証明をおこなう．

ケース 1: $\mu(M') \neq \mu^M(M')$ の場合から考える．$w \in \mu(M') \setminus \mu^M(M')$ を選択する．そこで, $w = \mu(m')$ とする．そのとき，$\mu(m')P_{m'}\mu^M(m')$ である．一方, w は，$m = \mu^M(w)P_w\mu(w)$ とな

る．なぜならば，そうでないならば μ^M の安定性に反するからである．しかしながら，m は M' にいない，なぜならば $\mu^M(M')$ に w はいないからである．そこで，m は $\mu(m)$ より w を選好する．つまり，μ に対して，$(,w)$ はブロッキング・ペアとなる．

ケース 2: $\mu^M(M') = \mu(M') = W'$ とする．w を W' にいて男性プロポーズ DA アルゴリズムにおいて最後にアクセプタブルな M' からプロポーズされた女性とする．w は，M' からのアクセプタブルな男性を拒否しているので，彼女が最後のプロポーズを受けているとき，w はある男性 m と留保している．この (m,w) がブロッキング・ペアになることを示す．m が M' にいるならば，他の女性にそのあとプロポーズしているはずである．しかしながら w が最後であることに矛盾する．一方，m は μ のもとでマッチングした女性よりも w をより選好する．また，m は w によって最後に拒否された男性である．だから，m を拒否する前に μ のもとでマッチングされている男性を拒否してなければばならない．つまり，$mP_w\mu(w)$ となり，(m,w) はブロッキング・ペアとなる．　□

次の定理を証明することにより以前の定理 9 が証明されたことになる．

定理 13 (Limits on successful manipulation Demange, Gabrielle, David Gale, and Marilda Sotomayor (1985))**.** R を主体の真の選好プロファイルとする．R' を R と異なるある提携（男性と女性）が偽の表明をした選好プロファイルとする． そのとき，R' のもとでのあらゆる安定なマッチング μ' は，提携のメンバー全員が真の選好にもとづいた安定なマッチングを厳密に選好することはない．

【証明】

真の選好のもとでの安定なマッチングを μ^M とし, 男性最適安定マッチングを考える．$M' \cup W'$ を偽の選好を表明することにより, μ^M よりも選好されるマッチングとなる非空な提携とする．その提携が偽の選好 R' を表明したときの安定なマッチングを μ' とする．これは真の選好もとで, 個人合理性を満たす．しかしながら，真の選好のもとで安定なマッチングとはならない．特に偽の選

好を表明したメンバーに対して，任意の $m \in M'$ に対して，$\mu'(m) P_m \mu^M(m)$ かつ $\mu'(w) P_w \mu^M(w)$ となる．M' の非空性と以前の補題により，μ' に対してブロッキング・ペアが存在する．ブロッキング・ペアはこの提携にいないので，μ' が R' のもとで安定であることに矛盾する． □

選好表明に関する事実として，任意の男性にとってアクセプタブルな女性のみを表明することも支配戦略となることがしられている．つまり，個人合理性を満たすメカニズムにおいて，アンアクセプタブルな女性の順番は無関係であるので，アクセプタブルな女性のみを表明する選好も真の選好表明と見なすことが可能である．それ以外の戦略は支配される．

主体はナッシュ均衡において，支配戦略をプレイすることができる．支配される戦略をプレイする主体がいないようなナッシュ均衡は**支配されない戦略のナッシュ均衡**といわれ，Martínez, R. and Marilda Sotomayory (1985) において，結婚市場において，任意の安定なマッチングは，支配されない戦略のナッシュ均衡の結果となることが示されている．また，Roth, Alvin E. (1985b) は，その逆の支配されない戦略のナッシュ均衡結果は，結婚市場の安定なマッチングとなることを示した．つまり，支配されないナッシュ均衡戦略の結果と結婚市場の安定なマッチングは同値となる．

1.2.2 大学入学市場

Gale, David and Lloyd Shapley (1962) において，結婚市場の拡張として研究された大学入学市場を紹介する．**大学入学市場** は 4 つ組 (S, C, q, R) で表現される．ここで，$S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ を学生の集合, $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_p\}$ を大学の集合，$q = \left\{q_{c_1}, q_{c_2}, \ldots, q_{c_p}\right\}$ を各大学における定員の集合，そして

$$R = \left\{R_{s_1}, \ldots, R_{s_n}, R_{c_1}, \ldots, R_{c_p}\right\}$$

を選好関係のリストとする．ここで，R_s を $C \cup \{\varnothing\}$ 上の学生 s の選好関係とする．R_c を学生の集合 2^S 上の c の選好関係とし，P_s, P_c を R_s, R_c から導出される厳密な選好関係とする．ある学生が

大学にとってアクセプタブルかどうかは，彼女のクラスにいる他の学生に依存しないと仮定して議論する．どの学生が望ましいかどうかは，クラスの構成には依存しないということである．この特徴を**レスポンシブ**という.[10)]

定義 2. 大学の選好関係 R_c がレスポンシブであるとは,

1. $|T| < q_c$ となる任意の $T \subseteq S$ と $s \in S \setminus T$ に対して,

$$(T \cup \{s\})\, P_c T \iff \{s\}\, P_c \varnothing.$$

2. $|T| < q_c$ となる任意の $T \subseteq S$ と $s, s' \in S \setminus T$ に対して,

$$(T \cup \{s\})\, P_c \left(T \cup \left\{s'\right\}\right) \iff \{s\}\, P_c \left\{s'\right\}.$$

マッチング，個人合理性，安定性の概念を一対一の結婚市場から一対多の大学入試市場に拡張する.

大学入学市場におけるマッチングは，次のような性質を満たす $\mu : C \cup S \to 2^{C \cup S}$ の対応となる.

1. すべての学生 s に対して，$|\mu(s)| = 1$, かつ任意の大学 c に対して $s \notin \mu(c)$ であるならば, $\mu(s) = \varnothing$;

2. すべての学生 $s \in S$ と $c \in C$ に対して, $\mu(s) = c \iff s \in \mu(c)$;

3. すべての学校 $c \in C$ に対して，$|\mu(c)| \leq q_c$ かつ $\mu(c) \subseteq S$.

マッチング μ が**学生** s **によってブロックされる**とは，$\varnothing P_s \mu(s)$ であり，**大学** c **によってブロックされるとは**，$\varnothing P_c \{s\}$ となるような学生 $s \in \mu(c)$ が存在することをいう．マッチングが学生と大学によってブロックされないならば，そのマッチングは**個人合理的**であるという.

マッチング μ が**ペア** (s, c) **によってブロックされるとは**,

[10)] Roth, Alvin E. (1985a) を参照

1. $cP_s\mu(s)$ かつ,
2. (a) $|\mu(c)| = q_c$ かつ $\{s\}\,P_c\,\{s'\}\ \exists s' \in \mu(c)$, または,

   (b) $|\mu(c)| < q_c$ かつ $\{s\}\,P_c\varnothing$.

このブロッキングの定義はレスポンシブな選好のときは適切となる.

マッチングが**安定**であるとは，そのマッチングが個人合理的かつペアによるブロックが存在しない場合をいう.

学生プロポーズ DA アルゴリズム

ステップ 1 学生からプロポーズする状況を考える．(もし彼女たちにとってアクセプタブルな学校が存在するならば) 各学生は第一希望の学校に応募する．その学校に応募された学生のなかで，アクセプタブルな学生を学校の定員まで仮入学させる．それ以外の学生は拒否する.

ステップ $k \geq 2$ 任意のステップ k において，ステップ $k-1$ で拒否された学生は，以前のステップまでで応募していない学校のなかで最も選好する学校に応募する．各学校は，ステップ $k-1$ までに仮入学させた学生と k 期に応募してきたアクセプタブルな学生のなかから, より選好する学生を定員まで仮入学させる．それ以外の学生は拒否する.

そのアルゴリズムは，アクセプタブルな学校に応募する学生がいなくなった時点で終了する．学生の数と学校の数が有限であるので，必ず有限のステップでそのアルゴリズムは終了する.

定理 14 (Gale, David and Lloyd Shapley (1962))**.** 大学入学市場において安定なマッチングは存在する.

証明は一対一の場合と同様の方法をもちいて行われるので省略する.

結婚市場における多くの結果が，大学入学市場においても移植される．なぜならば，q_c の定員の大学 c を，q_c 個の異なる大学と考えることにより，結婚市場に変換できるからである．もう少

し詳細に解説すると，大学入学市場 (S, C, q, R) が与えられると，次のように**その大学入学市場に関連づけられた結婚市場**を構築できる．

- 各大学 c_i を q_{c_i} に分割し，各分割された大学は一つの定員をもつ．各分割された大学ともともとの大学 c_i が学生 S に対してもっている選好関係は同じとする．大学の選好関係がレスポンシブであるからこのような操作しても問題は同じになる．
- C^* を大学の分割の集合とする．任意の学生 s の選好関係を C^* 上に拡張する．つまり，大学入学市場の選好において c_i の場所に分割されたその大学を適当な順番で配置する．

大学入学市場に対するマッチングが与えられると，その市場に関連づけられた結婚市場に対するマッチングを定義するのは容易である．つまり，もともとのモデルで大学 c とマッチした学生をより小さい順番がついている分割された大学にマッチさせていけばいいのである．

補題 15 (Roth, Alvin E. and Marild Sotomayor (1990))**.** 大学入学市場のマッチングが安定であるとこと対応する関連づけられた結婚市場のマッチングが安定であることは同値である．

証明は上記の事実から自明である．この補題により結婚市場で示された結果は，大学入学市場においても移植される．次にそれらのいくつかを列挙する．

- すべての学生にとって他の安定なマッチングと少なくとも同等に選好する**学生最適安定マッチング** μ^S が存在し，学生プロポーズ DA アルゴリズムはそのマッチング μ^S を導く．
- すべての大学にとって他の安定なマッチングと少なくとも同等に選好する**大学最適安定マッチング** μ^C が存在し，大学プロポーズ DA アルゴリズムはそのマッチング μ^C を導く．さらに，Roth, Alvin E. (1985b) は，任意の他の安定なマッチングでマッチしている学生のなかで，μ^C は q_C 番目までの学生とマッチすることを示した．
- 学生最適安定マッチングは大学にとって最悪な安定なマッチングである．同様に，大学最適安定マッチングは，学生にとって最悪な安定なマッチングである．

- マッチングしている学生の集合と各学校の埋まっている定員の集合はすべての安定なマッチングで同じである.
- 2 つの安定なマッチングに対し，以前定義した $\vee, \wedge$ の操作をおこなうことにより導出されたマッチングは安定なマッチングとなる.
- すべての学生 $s \in S$ に対して，$\nu(s) P_s \mu^S(s)$ となるような個人合理的なマッチング ν は存在しない.

定理 16 (田舎病院定理 Roth, Alvin E. (1986))**.** 大学入学市場においてすべての市場参加者の選好関係が厳密であるとき，ある安定なマッチングで定員を満たしていない大学は，あらゆる安定なマッチングで同じ学生の集合が割当てられる.

補題 17 (Roth, Alvin E. and Marilda Sotomayor (1989))**.** 大学入学市場においてすべての市場参加者の選好関係が厳密であるとする．μ と μ' を，ある学校 $c \in C$ に対して $\mu(c) \neq \mu'(c)$ となるような大学入学市場の安定なマッチングとする．$\hat{\mu}$ と $\hat{\mu}'$ を μ と μ' の関連づけられた結婚市場の安定なマッチングとする．もし学校 c のある分割 c^i に対して，$\hat{\mu}(c^i) P_c \hat{\mu}'(c^i)$ であるならば，c のすべての分割において，その関係が弱い意味で成り立つ.

【証明】

証明は，Roth, Alvin E. and Marild Sotomayor (1990) にしたがう．すべての $j > i$ に対して，$\hat{\mu}(c^j) P_c \hat{\mu}'(c^j)$ となることを示せば十分である．背理法の仮定により, $\hat{\mu}(c^j) P_c \hat{\mu}'(c^j)$ であるが $\hat{\mu}'(c^{j+1}) P_c \hat{\mu}(c^{j+1})$ となるような j が存在する．田舎病院定理によって，$\hat{\mu}'(c^j) \in S$ となる．そこで，$s' \in \hat{\mu}'(c^j)$ とすると，$c_j = \hat{\mu}'(s') P_{s'} \mu(\hat{s'})$ となる．さらに，$\hat{\mu}(s') \neq c^{j+1}$ である, なぜならば, $s' P_c \hat{\mu}'(c^{j+1}) R_c \hat{\mu}(c^{j+1})$ だからである．それゆえ，$c^{j+1} P_{s'} \hat{\mu}(s')$ となる．この事実は，その市場に関連づけられた結婚市場において，添え字の数が大きくなると選好の下位に位置するからである．したがって，s' と c^{j+1} は $\hat{\mu}$ のブロッキング・ペアとなる．これは，マッチング μ が安定性であると

いう事実に矛盾する. □

この補題により，上記の大学入学市場に対する田舎病院定理が示されたことになる.

結婚市場とは異なり，大学は大学最適安定マッチングよりも厳密に選好する個人合理的なマッチングが存在する（結婚市場において，各サイドの人たちは，該当する最適な安定マッチングを個人合理的なマッチングよりも弱い意味で選好する.）. この差異の要因は，学校の定員の間で暗黙の競争が働いていることから生じている. 例えば，3 人の定員の枠をもつ学校が，2 人目の学生をとるために，3 人目でよりよい学生をとる機会を失ってしまう可能性があるからである. 次の例はその事実を示している.

例 3 (Abdulkadiroğlu, Atila and Tyfun Sönmez (2013)). 2 人の学生と学校が存在し，$S = \{s_1, s_2\}$, $C = \{c_1, c_2\}$. $q_{c_1} = 2, q_{c_2} = 1$ とする. 次のような選好関係を持っている.

$$\begin{aligned} P_{s_1} &= c_1, c_2, s_1 \quad P_{c_1} = \{s_1, s_2\}, s_2, s_1, c_1 \\ P_{s_2} &= c_2, c_1, s_2 \quad P_{c_2} = s_1, s_2, c_2 \end{aligned}$$

$$\mu^C = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} \quad \nu = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 \\ c_2 & c_1 \end{pmatrix}.$$

すべての大学が，大学最適安定マッチング μ^C を個人合理的なマッチング ν より厳密に選好している.

大学入学市場：選好操作

より小さなクラス（結婚市場）で得られた不可能性の結果は，より大きなクラス（大学入学市場）においても不可能性となる. それゆえ次の 2 つの結果が成り立つ.

定理 18 (Roth, Alvin E. (1982a)). 大学入学市場において，安定性と耐戦略性は両立しない.

定理 19 (Alcalde, José and Salvador Barberá (1994)). 大学入学市場において，個人合理性，耐戦略性かつパレート効率性を満たすメカニズムは存在しない.

次の定理は，結婚市場から移植されたポジティブな結果である.

定理 20 (Roth, Alvin E. (1985b)). 学生最適安定メカニズムのもとで，すべての学生にとって真の選好を表明することは支配戦略となる.

しかしながら，結婚市場とは異なり，大学最適安定メカニズムのもとで，大学が真の選好を表明することは，支配戦略とはならない.

定理 21 (Roth, Alvin E. (1982a)). すべての大学が真の選好を表明することが，支配戦略となるような安定なマッチング・メカニズムは存在しない.

【証明】

不可能性定理なので，例示を用いて証明をおこなう．4 人の学生と 3 つの学校が存在する．$S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$, $C = \{c_1, c_2, c_3\}$. $q_{c_1} = 2, q_{c_2} = 1, q_{c_3} = 1$. 次のような選好関係を持っている.

$$
\begin{aligned}
P_{s_1} &= c_3, c_1, c_2, s_1 \quad P_{c_1} = s_1, s_2, s_3, s_4, c_1 \\
P_{s_2} &= c_2, c_1, c_3, s_2 \quad P_{c_2} = s_1, s_2, s_3, s_4, c_2 \\
P_{s_3} &= c_1, c_2, c_3, s_3 \quad P_{c_3} = s_3, s_1, s_2, s_4, c_3 \\
P_{c_4} &= c_1, c_2, c_3, s_4.
\end{aligned}
$$

このモデルの安定なマッチングは,

$$
\mu(P) = \begin{pmatrix} s_3, s_4 & s_2 & s_1 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}.
$$

しかしながら，もし c_1 が $P'_{c_1} = s_1, s_4, c_1, s_2, s_3$ と表明したならば，一意な安定なマッチングは，

$$\mu(P_{-c_1}, P'_{c_1}) = \begin{pmatrix} s_1, s_4 & s_2 & s_3 \\ \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}.$$

となり，学校 c_1 はより選好する学生とマッチすることになる． □

大学入学市場：定員の操作

学生 S と学校 C は固定して考える．学校は以前のような選好のみではなく，定員数を決めることが可能であるので，定員が戦略的に決まる可能性が生じる．その場合の問題点を紹介する．

大学入学市場 (R, q) において，学校 c が**定員を通じてメカニズムの結果を操作するとは**，ある $q'_c < q_c$ に対して，

$$\varphi\left[R, q_{-c}, q'_c\right](c) P_c \varphi\left[R, q_{-c}, q_c\right](c)$$

ということが成り立つ．

あるメカニズムが**定員に関する操作に対して耐性があるとは**，定員を通じてメカニズムの結果を操作することはできないということである．

次の定理は，これに対するネガティブな回答となる．

定理 22 (Sönmez, Tyfun (1997))**.** 少なくとも学生が 3 人，学校 2 校ある場合，定員を通じて結果を操作することに耐性がある安定なメカニズムは存在しない．

【証明】

Sönmez, Tyfun (1997) の証明にしたがたう．不可能性定理なので，例示を用いて証明を行う．3 人の学生と 2 つの学校が存在する．$S = \{s_1, s_2, s_3\}$, $C = \{c_1, c_2\}$. $q_{c_1} = 2, q_{c_2} = 2$. 次のような選

好関係を持っている.

$$
\begin{aligned}
P_{s_1} &= c_2, c_1, s_1 \quad P_{c_1} = s_1, s_2, s_3, c_1 \\
P_{s_2} &= c_1, c_2, s_2 \quad P_{c_2} = s_3, s_2, s_1, c_2 \\
P_{s_3} &= c_1, c_2, s_3.
\end{aligned}
$$

このモデルの安定なマッチングは,

$$
\mu_1 = \begin{pmatrix} s_2, s_3 & s_1 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix}.
$$

しかしながら，もし c_2 が $q'_{c_2} = 1$ と表明したならば，安定なマッチングは,

$$
\mu_2 = \begin{pmatrix} s_1, s_2 & s_3 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix}.
$$

となり，学校 c_2 はより選好する学生とマッチすることになる. □

この結果は，学校プロポーズ DA アルゴリズムの場合には，さらに条件が弱められる.

定理 23 (Sönmez, Tyfun (1997))**.** 学校最適安定メカニズムのもとでは，学校と学生の数が少なくとも 2 あるならば，定員を通じて結果を操作することが可能である.

【証明】

Abdulkadiroğlu, Atila and Tyfun Sönmez (2013) で使われている例を用いて証明を行う．2 人の学生と 2 つの学校が存在する．$S = \{s_1, s_2\}$, $C = \{c_1, c_2\}$．$q_{c_1} = 2, q_{c_2} = 1$．次のような選好関

係を持っている.

$$
\begin{aligned}
P_{s_1} &= c_1, c_2, s_1 \quad P_{c_1} = s_2, s_1, s_3, c_1 \\
P_{s_2} &= c_2, c_1, s_2 \quad P_{c_2} = s_1, s_2, c_2.
\end{aligned}
$$

このモデルの学校最適安定マッチングは,

$$
\mu^C = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix}.
$$

しかしながら，もし c_1 が $q'_{c_1} = 1$ と表明したならば，安定なマッチングは,

$$
\mu'^C = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 \\ c_2 & c_1 \end{pmatrix}.
$$

となり，学校 c_1 はより選好する学生とマッチすることになる. □

しかしながら，学校の選好を少ないよりも多いほうが選好されるように制約することにより，Konishi, Hideo and M. Utku Ünver (2006) が示したように，学生最適安定マッチングは，定員を通じて結果を操作することはできない．上記の例は，そのように選好を制約したとしても，やはり学校最適安定メカニズムは，定員を通じて結果を操作することは可能であることを示している.

1.3 One sided マッチング・モデル

この節では，Two sided マッチング・モデルと同様にマッチング理論において重要な One sided マッチング理論を解説する.

住宅配分と住宅市場

住宅配分問題は，Hylland, Aanund and Richard Zeckhause (1979) によって最初に考えられた．住宅配分問題は，(A, H, P) の 3 組で表現される．ここで，A は主体の集合，H は財の集合，つまり住宅の集合で，各主体 $a \in A$ は住宅の上に厳密な選好 P_a(弱い選好は R_a で表現する) をもっている．$P = (P_a)_{a \in A}$ は選好プロファイルである．

この問題に対する現実への応用は，臓器移植，会社の部署の配置，学校選択などがある．

マッチング μ は，どのような財を誰が所有するかを明らかにする．$\mu(a)$ を a が所有する家を決定する．

マッチング μ が**パレート効率的**であるとは，次のような他のマッチングが存在しないことをいう．

- すべての主体 $a \in A$ に対して，$\nu\,(a)\,R_a \mu(a)$ かつ，
- ある主体 $b \in A$ に対して，$\nu(b) P_b \mu(b)$ となる．

そのような条件を満たさないマッチング μ は，マッチング ν によって**パレート支配される**という．

メカニズムとは，各選好プロファイルのもとでマッチングを割当てるルールである．$\varphi(P)$ は主体たちが P を表明したときに，実現するマッチングである．

あるメカニズム φ が**耐戦略性を満たす**とは，真の選好を表明することが支配戦略（他の人がどんな行動をしたとしても最適な行動となる戦略）となることをいう．

あるメカニズム φ が**パレート効率的である**とは，すべての選好プロファイル P に対して，φ がパレート効率的であることをいう．

Serial Dictatorship メカニズム (SD メカニズム)

SD メカニズムはある順番を特定化し，一番の人に彼女の最も好きな財を選択でき，次の人に残っている中で最も好きな財を選択することができる，それを順番に繰り返していくものである．

メカニズム π^f は最初に，優先順位の関数 f を特定化する．いま，$f(i)$ と書いた場合，優先順位が i 番目となる主体を特定化する．次に $f(1)$ は彼女の最も選好する財を受け取り，$f(2)$ の主体が，$f(1)$ の主体が選択した財以外の残りの財から最も選好する財を受け取る，それが順番に繰り返される．

SD メカニズムは実行するのがかなり容易である．なぜならば，順番を決め，それにしたがって好きな順に財を受け取るという単純なメカニズムだからである．その利点のため，現実によく使われている．そのような現実的な側面の研究として，Kojima, Fuhito. and Mihai Manea (2010), Che, Yeon-Koo and Fuhito Kojima (2010) などがある．

SD メカニズムが現実で用いられる理由を示す定理として，次の定理がある．

定理 24 (Abdulkadiroğlu, Atila and Tyfun Sönmez (1998))**.** SD メカニズムはパレート効率的である．

【証明】

背理法によって証明を行う．$\mu = \pi^f(P)$ をパレート支配するマッチング ν が存在すると仮定する．μ においてマッチングされる財よりも選好される財を ν で割当てられている主体 $a = f(i)$ がいると仮定する．そのとき，$j < i$ のある主体 $b = f(j)$ は, $\nu(a) = \mu(b)$ となっている．なぜならば，ν よりも最初に与えられた順番で, よりよいものを与えられていることはないからである．しかしながら，パレート支配の仮定と $\nu(b) P_b \mu(b)$ は成り立たないから，$\nu(b) = \mu(b)$ である．これは矛盾である． □

定理 25 (Abdulkadiroğlu, Atila and Tyfun Sönmez (1998))**.** SD メカニズムは耐戦略性を満たす．

【証明】

f を優先順位とする．$f(1)$ の人は，偽の選好を表明するインセンティブはない．$f(2)$ の人も同様である．したがって，全員が偽の選好を表明するインセンティブはない． □

SD メカニズムは，パレート効率性と耐戦略性を満たすメカニズムである．SD メカニズムのさらなる性質として，次のような性質がある．

主体が提携を組んで選好を操作する可能性がないという，いわゆる, グループ耐戦略性という性質がある．形式的にいうと，次のようになる．$P_B = (P_a)_{a\in B}$ と $P_{-B} = (P_a)_{a\in A\setminus B}$ とする．メカニズム φ が**グループ耐戦略性がある**とは，次のような主体のグループ $B \subset A$ と選好 P'_B が存在しないことをいう．

- すべての主体 $a \in B$ に対して，$\varphi\left(P'_B, P_{-B}\right)(a) R_a \varphi(P_B, P_{-B})(a)$ かつ,
- 少なくとも一人の主体 $b \in B$ に対して，$\varphi\left(P'_B, P_{-B}\right)(b) P_b \varphi(P_B, P_{-B})(b)$ が成り立つ．

言い換えると，グループ耐戦略性をあるメカニズムが満たすとは，提携に属する主体が偽の選好を表明したとしても，必ず，そのグループのメンバーの誰かは，真の選好を表明するよりも悪化するということである．

定理 26 (Abdulkadiroğlu, Atila and Tyfun Sönmez (1998))**.** SD メカニズムはグループ耐戦略性を満たす．

【証明】

このメカニズムの本質は，自分の順番になったときに選択することができる．つまり，彼女は自分の順番になったときに，残っている財から自分の最も選好する財を選択することができる．したがって，真の選好以外を表明すると，必ず真の選好を表明したときに得られた財よりもよくはならない．たとえ，提携を組んだとしても同様である． □

SD メカニズムはさらに良い性質をもっている．それは**ニュートラル**とよばれる性質である．この定義は Svensson, Lars G. (1999) によって導入された概念である．ニュートラルというの，割当ては財の名前に依存しないということである．たとえば，最初の主体 $f(1)$ が獲得する財は，財の名前を改めてつけたとしても財自身は変化しなということである．

r を住宅の置換とする．つまり，$r(h)$ は住宅 h が置換 r のもとで，どのような名前がつけられるかを表現している．P^r を各住宅 h が，$r(h)$ によって名前がつけられたときの選好プロファイルとする．メカニズム φ がニュートラルであるとは，任意の置換 r と任意の選好プロファイルに対して，すべての主体 $a \in A$ に対して，$\varphi(P^r)(a) = r(\varphi(P)(a))$ となる．

Svensson, Lars G.（1999) はこの性質とグループ耐戦略性が SD メカニズム特有の性質であることを示した．これにより，SD メカニズムと他のメカニズムとの違いが明確化された．

Top Trading Cycles メカニズム (TTC メカニズム)

Shapley, Lloyd and Herbert Scarf (1974) は次のような性質をもった**住宅市場** $\left((a_k, h_k)_{k\in\{1,2,\ldots,n\}}, P\right)$ を考察した．

- $\{q_1, a_2, \cdots a_n\}$ は主体の集合，$\{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$ は住宅の集合である．a_k は h_k の住宅を所有している．
- 各主体 a は住宅に対する厳密な選好 P_a をもっている．

以前に説明した住宅配分問題と非常に類似した市場である．違いは，ある人が，必ず住宅を所有していることである. **マッチング** μ とは，誰がどの住宅を獲得するかの写像である．$\mu(a)$ は主体 a が μ において獲得した住宅である．以前と同様に，**メカニズム**は主体が選好プロファイル P を表明したときにマッチング $\varphi(P)$ を決めるルール φ である．

メカニズムが**耐戦略性**を満たすとは，すべての主体にとって真の選好を表明することが支配戦略になることである．

メカニズムが**パレート効率的**であるとは，任意の選好プロファイル P において，$\varphi(P)$ がパレート効率的になることである．

Two sided マッチングと同様に，決められたマッチングが安定であるかどうかは，そのマッチングから離脱する主体のグループが存在しないかどうかに依存する．**コア**の概念をここでも考える．

マッチング μ が**コア**であるとは，次のような主体の提携 B とマッチング ν が存在しないことをいう.

- 任意の主体 $a \in B$ に対して，$\nu(a)$ は $a \in B$ の初期の住宅であり，かつ
- すべての $a \in B$ にとって $\nu(a) R_a \mu(a)$ であり，ある $b \in B$ に対して，$\nu(b) P_b \mu(b)$ となる.

コアの概念はゲーム理論における協力ゲームの中心的な解概念であり，Two sided マッチングにおける安定性の概念はコアと同値であった.

あるマッチングが**個人合理的**であるとは，すべての主体が，少なくとも彼女の初期の住宅よりも選好される住宅を獲得していることをいう．コア・マッチングは個人合理的であり，パレート効率的である.

定理 27 (Shapley, Lloyd and Herbert Scarf (1974))**.** 任意の住宅市場に対してコア・マッチングが存在する.

彼らは，この事実を，Two sided マッチングにおいて，Gale, David and Lloyd Shapley (1962) による存在定理の証明と同様にアルゴリズムを示すことにより証明を行っている.

【証明】

TTC アルゴリズム

ステップ 1 各主体は，彼女が最も選好する住宅を所有者に対して指を指す．この結果，必ずあるサイクルが存在し，2 つ以上のサイクルが交わることはない．なぜならば，住宅に対する選好は厳密であるからである．すべてのサイクルを取り除き，そのサイクルの中にいる主体が指を指している住宅をその人に割当てる.

ステップ $k \geq 2$ 任意のステップ k で，その時点で残っている住宅のなかから，まだ残っている主体は最も選好する住宅の所有者に対して指を指す．この時点において，1 期と同様にサイク

ルは必ずでき，2 以上のサイクルが交わることはない．サイクルを取り除き，そのサイクルの中にいる主体は指を指している住宅が割当てられる．

有限回のステップでこのアルゴリズムは終了する．

μ を TTC アルゴリズムによって生じた結果とする．示すべきことは μ がコアの要素であるということである．μ がある提携によってブロックされないことを示せばよい．

背理法の仮定より，μ がコアでないとする．そのときある提携により μ はブロックされるはずである．$C_1, C_2, \ldots, C_k$ と TTC アルゴリズムにおける取り除いた順番のサイクルであるとする．C_1 にいる主体は，μ でマッチングされた住宅よりもより選好されることはない．なぜならば，もし C_1 にいる主体がブロッキングとなる提携 B にいるならば，$C_1 \subseteq B$ か $C_1 \cap B$ である．C_1 の主体は，彼女らの最も選好する住宅を獲得しているので，彼女らは ν のもとで，互いの初期保有を獲得していて，μ と無差別になる．次に，$B \setminus C_1$ が ν を通じて μ をブロックする場合を考える．$C_2 \cap (B \setminus C_1)$ の主体をよりよくすることはできない．その議論をすべてのサイクルで逐次的におこなっていくと，$B = \varnothing$ となり，μ に対するブロッキング提携があることに矛盾する． $\square$

ここで，TTC アルゴリズムがどのようなものか具体的な例を用いて解説する．

例 4. 主体の集合 $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ とし，各主体は住宅に対して次のような選好をもっている．

$$
\begin{aligned}
P_{a_1} &= h_5, h_4, h_3, h_2, h_1 \quad P_{a_4} = h_2, h_1, h_3, h_5, h_4 \\
P_{a_2} &= h_3, h_1, h_5, h_2, h_4 \quad P_{a_5} = h_1, h_3, h_2, h_4, h_5 \\
P_{a_3} &= h_1, h_2, h_3, h_4, h_5.
\end{aligned}
$$

ここで, h_i は a_i の最初の住宅とする．

ステップ 1 で，彼女たちは一番選好する住宅の所有者を指さす．つまり，a_1 は a_5, a_2 は a_3, a_3 は h_1, a_4 は h_2, a_5 は a_1 を指さす．その結果 $a_1 \to a_5 \to a_1$ というサイクルができるので，そのサ

イクルのメンバーはその指した住宅を獲得する．その結果，そのサイクルに属していた主体と住宅はその市場から取り除かれる．

ステップ 2 で，残りのメンバーは，残っている住宅に対して一番選好する住宅の所有者を指さす．つまり，a_2 は a_3, a_3 は a_2, a_4 は a_2 を指さす．その結果, $a_2 \to a_3 \to a_2$ というサイクルができるので，そのサイクルのメンバーは，彼女が指した住宅を獲得する．そこで，そのサイクルのメンバーと住宅がその市場から取り除かれる．

ステップ 3 で，残りのメンバーは，残った住宅で最も選好する住宅の所有者を指さす．つまり，a_4 は a_4 をさす．その結果 $a_4 \to a_4$ というサイクルができ，彼女は自分の住宅を獲得することになる．

このステップでその市場に残っている主体は存在しないので，アルゴリズムは終了する．つまり，この市場に対する，TTC アルゴリズムの結果 $\varphi^T(P)$ は，

$$\varphi^T(P) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ h_5 & h_3 & h_2 & h_4 & h_1 \end{pmatrix}.$$

となる．

ここで，後の学校選択でも用いられる TTC アルゴリズムの同値の表現を紹介する．

TTC アルゴリズムの同値表現

ステップ 1 各主体は，彼女が最も選好する住宅を指す．各住宅は，初期保有者をさす．この結果，必ずあるサイクルが存在し，2 つ以上のサイクルが交わることはない．なぜならば，住宅に対する選好は厳密であるからである．すべてのサイクルを取り除き，そのサイクルの中にいる主体が指を指している住宅をその人に割当てる．

ステップ $k \geq 2$ 任意のステップ k で，その時点で残っている住宅の中から，まだ残っている主体は最も選好する住宅の所有者に対して指を指す．この時点において，1 期と同様にサイクル

は必ずでき，2 つ以上のサイクルが交わることはない．サイクルを取り除き，そのサイクルの中にいる主体は指を指している住宅が割当てられる．

コアの中に他のマッチングが存在するかどうかに対する答えとして次のような定理がある．

定理 28 (Roth, Alvin E. and Andrew Postlewaite (1977))**.** TTC アルゴリズムによって導かれるマッチングは，唯一のコア・マッチングである．

【証明】

TTC アルゴリズムを用いることによりコア・マッチング μ が導かれるので，いま一意性を示すためにそれ以外のコア・マッチング $\nu(\neq \mu)$ が存在したと仮定する．

そこで，TTC アルゴリズムの中で，最初に $\mu(a) \neq \nu(a)$ となるような主体を一人とってくる．C_i をその主体 a を含むサイクルの主体の集合とする．そのとき，C_i の前にマッチングされた任意の主体 b は $\nu(a) = \mu(b)$ である，なぜならば C_i はそのように構成されているからである．

TTC アルゴリズムより，任意の $a \in C_i$ の主体に対して，$\mu(a) R_a \nu(a)$ となる，なぜならば，ν のマッチングにおいて，彼女らがより選好するすべての財は，C_i の前にマッチされているからである．そのとき選好の厳密性より $\mu(a) P_a \nu(a)$ となる．

任意の $a \in C_i$ の主体に対して，$\mu(a)$ は C_i の他の主体の初期保有であるので，μ によって ν から離脱するインセンティブをもつ．したがって，ν がコアであることに矛盾する． □

TTC メカニズムはよい性質をもつ．TTC メカニズムは，耐戦略性をもつことがわかっている．

定理 29 (Roth, Alvin E. (1982b))**.** TTC メカニズムは耐戦略性を満たす．

【証明】

ψ を TTC メカニズムとする．P を選好プロファイルとする．$C_1, C_2, \ldots, C_k$ を TTC アルゴリズムによって取り除かれた順番のサイクルであるとする．$\mu = \psi(P)$ として，TTC メカニズムによって割当てられた結果とする．

いま，C_1 の主体たちは，一番にできたサイクルであるので，選好 P のもとで，最も選好される住宅を獲得している．したがって，彼女たちは真の選好以外を表明するインセンティブはない．$A \setminus C_1$ の主体が，異なる選好関係を提出したとしても，C_1 の主体の割当ては変更しない．

そこで，P にかんして $H \setminus \cup_{i=1}^{l-1} \{\mu(c_i)\}$ における μ は，C_l にとってもっとも選好される住宅である．つまり，自分が入っている以前にできたサイクルの主体の割当は，どのような選好を表明したとしても変更しないので，やはり真の選好を表明した場合よりもよりよい住宅は割当てられない．つまり，TTC メカニズムのもとで，真の選好以外を表明するインセンティブがないことがわかる． □

これ以外にも TTC メカニズムには良い性質がある．そのような事実からも，DA メカニズムとともに多くの現実のマーケットデザインで用いられることがわかる．

定理 30 (Ma, Jinpeng (1994))**.** あるメカニズムが耐戦略性，パレート効率性かつ個人合理性をみたすならばその場合に限りそのメカニズムは TTC メカニズムである．

証明

ここでの証明方法は，Sönmez, Tyfun (1994) や Svensson, Lars G.（1999) による証明方法である．TTC メカニズムが，耐戦略性，パレート効率性かつ個人合理性を満たすことは示してあるので，その逆のメカニズムが耐戦略性，パレート効率性かつ個人合理性を満たすならば，TTC メカニズムであることを示す．

φ がパレート効率性 (PE)，耐戦略性 (SP)，かつ個人合理性 (IR) を満たすメカニズムとする．P を選好プロファイルとする．$\mu = \varphi(P)$ とする．μ は個人合理性を満たすので，$\mu(a_i)R_i h_{a_i}$ である．

次のような選好プロファイル P' を考える．もし $\mu(a_i) \neq h_i$ であるならば，h_i を $\mu(a_i)$ のすぐ下におく，つまり，$\mu(a_i)$ は最後の個人合理的な住宅である．他の住宅の相対的順序は P と同じにする．任意の $h, h' \in H \setminus \{h_i\}$ に対して，$hP'_{a_i}h'$ は $hP_{a_i}h$ となり，また，．任意の $h, h' \in H \setminus \{h_i\}$ に対して，$\mu(a_i)P'_{a_i}h'$ は $\mu(a_i)P_{a_i}h$ となる．

もし $\mu(a_i) = h_i$ であるならば，$P = P'$ である．

このような選好の操作をコアを変化させないので，TTC メカニズム ψ において，

$$\psi(P) = \psi(P')$$

である．

PE, SP かつ IR を満たすメカニズム φ が選好プロファイル P' のもとで，TTC メカニズム ψ と一致することを示す．つまり，

$$\varphi(P') = \psi(P')$$

を示す．

$\nu = \varphi(P')$ とする．$\psi(P')$ の TTC アルゴリズムによって，とりのぞかれた順のサイクルを $C_1, C_2, \ldots, C_k$ とする．$\nu(a_i) \neq \mu(a_i)$ となる主体 $a_i \in C_1$ がいると仮定する．φ の個人合理性により $\nu(a_i) = h_i$ である．しかしながら，そのとき φ の個人合理性により，任意の $a_l \in C_1$ に対して，$\nu(a_l) = h_l$ となる．いま，彼女たちが彼女の選好における初期保有の代わりに，より選好する財を得たとしても，マッチングの残りは変化しない．これを新たなマッチングと考える．

この新たなマッチングは P' のもとでマッチング ν をパレート支配する．しかしながら，これは P' のもとでパレート効率的であることに矛盾する．つまり，サイクルの最初の主体 $a \in C_1$ たちは，$\nu(a) = \mu(a)$ となる．

次に C_2 のある主体 a_l に対して，$\nu(a_l) \neq \mu(a_l)$ であったと仮定する．$\mu(a_l)$ よりも選好される住宅はすべて，μ のもとで C_1 の主体に配分されているのと φ の IR によって，任意の $a_i \in C_2$ に対して，$\nu(a_i) = h_i$ となる．C_2 の主体たちに初期保有よりもよりよい住宅 $\mu(a_i)$ をえることは，その他の主体のマッチングは変化させないので，マッチングとなる．さらにそのマッチングは，ν をパレート支配する．これは φ が PE であることに矛盾する．つまり，$\nu(a_i) = \mu(a_i)$ が C_2 のすべての主体に対して成り立つ．

この議論を C_k まで続けることによって，$\varphi(P') = \psi(P')$ であることがわかる．この証明の過程より，個人合理性かつパレート効率性を満たすマッチングは P' のもとで一意であることがわかる．

次に，示すべきことは，P' の選好のもとで，PE，SP, IR を満たすメカニズムと P のもとでそれらの条件を満たすメカニズムは同値であることを示す．つまり，

$$\varphi(P) = \varphi(P')$$

であることを示す．

数学的帰納法で証明を行う．

$J = \{a\} \subseteq A$ とする．φ が耐戦略性を満たすことより，

$$\varphi\left(P_a, P'_{-a}\right)(a) \quad R_a \quad \varphi\left(P'\right)(a) \text{ かつ}$$
$$\varphi\left(P'_a, P'_{-a}\right)(a) \quad R'_a \quad \varphi\left(P_a, P'_{-a}\right)(a)$$

である．選好関係の厳密性より，上記の関係は

$$\varphi\left(P_a, P'_{-a}\right)(a) = \varphi\left(P'\right)(a)$$

となり，2 つの異なる問題に対して，同じ住宅を割当てることになる．そこで，どちらの問題においても，この割当は，PE かつ IR であることがわかる．それゆえ $\varphi(P')$ は一意なパレート効率的かつ個人合理的なマッチングであることがわかる．したがって，

$$\varphi\left(P_a, P'_{-a}\right) = \varphi\left(P'\right)$$

となる．

$k>1$ とし，帰納法の仮定より，$|B| \leq k$ となる $B \subseteq A$ に対して，

$$\varphi\left(P_B, P'_{-B}\right) = \varphi\left(P'\right)$$

とする．

$|B| = k+1$ の場合を証明する．

$a \in B$ をとってきて，φ が SP を満たすことより，

$$\begin{aligned} \varphi\left(P_B, P'_{-B}\right)(a) \quad R_a \quad \varphi\left(P_{B\setminus\{a\}}, P'_{-(B\setminus\{a\})}\right)(a) \text{ かつ} \\ \left(P_{B\setminus\{a\}}, P'_{-(B\setminus\{a\})}\right)(a) \quad R'_a \quad \varphi\left(P_B, P'_{-B}\right)(a) \end{aligned}$$

となる．選好が厳密であることより，$\varphi\left(P_B, P'_{-B}\right)(a) = \varphi\left(P_{B\setminus\{a\}}, P'_{-(B\setminus\{a\})}\right)(a)$ となり，帰納法の仮定より，$\varphi\left(P_{B\setminus\{a\}}, P'_{-(B\setminus\{a\})}\right)(a) = \varphi(P')(a)$ となる．したがって，

$$\varphi\left(P_a, P'_{-a}\right) = \varphi\left(P'\right)$$

をえる．つまり，PE，IR を満たすメカニズムは一意であることがわかる． □

Svensson, Lars G. (1999) によって示されたこととして，耐戦略性，パレート効率性，個人合理性を満たす場合，後の章で議論する non-bossiness になることが示されている．その事実と Papai, Szilvia (2000) によって示された耐戦略性と non-bossinessi がグループ耐戦略性を満たすことと同値であることから，TTC メカニズムは次のようにも特徴付けられる．

定理 31. あるメカニズムがグループ耐戦略性，パレート効率性かつ個人合理性を満たすならば，その場合に限りそのメカニズムは TTC メカニズムである．

ここで住宅配分問題と住宅市場の問題を統一的にとらえた，**居住者がいる住宅配分問題**を解説する．この問題は，Abdulkadiroğlu, Atila and Tyfun Sönmez (1999) によって，大学の住宅問題

を解決するめに研究がなされた.

ある主体はすでに自分の住宅をもっているが，さらによりよい住宅を求めて，マッチングに参加するような状況を考えている．一方，その参加者の中には，まだ住宅をもっていない新人がいる.

各主体は，マッチングされない状況とすべての住宅に対して厳密な選好をもっている.

空き家と居住者のいる住宅が存在する．このモデルは，住宅配分問題と住宅市場の両方の一般化と見なすことができる．住宅市場は，すべての主体は居住地をすでにもっていて空き家はない状況である，一方，住宅配分問題は，すべての参加者が居住地もっていない新人である.

カーネギーメロン大学，デューク大学，ノースウエスタン大学またペンシルバニア大学の学部生に対する住宅の割当で使われていたメカニズムは，次のようなメカニズムである.

1. 割当てに参加したいか既存の住宅のままでいるかどうかを既存の居住者は選択する．現在の住宅で良いと思う人はその住宅を維持できる，参加する場合はすべての住宅が割当の対象となる.

2. 主体の優先順位が決められる．その優先順位はランダムに決められるかもしれないし，あるグループにとって有利になるかもしれない.

3. 有効な住宅と主体に対して SD メカニズムが適用される.

このメカニズムは，あまり良いメカニズムとはいえない．なぜならば，すでに住宅を所有している主体は，参加して割当てられた住宅が，その住宅よりもよりよい住宅が得られるかどうかの保証はなにもない．つまり，個人合理性を満たさないのである．その結果，既存の居住者は，たとえ移動したいと思っていても，そのメカニズムに参加しない可能性がある．このような結果，取引に損失が発生し，生じたマッチングがパレート効率性を満たさない場合が生じる.

そのような問題を解消するために次のようなアルゴリズムが Abdulkadiroğlu, Atila and Tyfun Sönmez (1999) によって提案された．そのアルゴリズムは,“You Request My House - I Get Your Turn (YRMH-IGYT)” と呼ばれている．このアルゴリズムに順番 f を与えることにより，SD メ

カニズムの一般化になる.

1. 優先順位の最も高い主体が，彼女の最も選好する住宅を受け取り，優先順位の次の主体が，残っている中で最も選好する住宅を受け取る．この操作が，既存の居住者がいる住宅を希望する主体があらわれるまで続く.
2. もしその希望する住宅の居住者がすでに住宅を得ていたならば，次の優先順位に進む．そうでなければ，希望した住宅の居住者に順番がうつる．その次は以前の優先順位にもどる.
3. もし任意のステップでサイクルができれば，そのサイクルの主体たちは希望の住宅をえる．そして，残っている住宅で同じ手続きを繰り返す.

ここで，YRMH-IGYT アルゴリズムを例で確認する.

例 5. 主体の集合 $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ とし，各主体は住宅に対して次のような選好をもっている．a_1 は既存の居住者で，h_1 の住宅をもっている．その他は，すべて新人であるとする．f は $\{a_2, a_3, a_5, a_1, a_4\}$ で与えられているとする.

$$\begin{aligned}
P_{a_1} &= h_5, h_4, h_1, h_2, h_3 \quad P_{a_4} = h_2, h_1, h_3, h_5, h_4 \\
P_{a_2} &= h_3, h_1, h_5, h_2, h_4 \quad P_{a_5} = h_1, h_3, h_2, h_4, h_5 \\
P_{a_3} &= h_1, h_2, h_3, h_4, h_5.
\end{aligned}$$

優先順位の一番高い a_2 が最も選好する住宅である h_3 をえる．次に優先順位の高い a_3 が，残っている住宅の中で最も選好する住宅 h_1 を選択する．h_1 は既存の住宅であるので，a_1 が次に選択できる主体になる．そこで a_1 は，h_5 を選択する．優先順位の順番に戻り，a_5 が残りの住宅から最も選好する住宅 h_2 を選択する．次の優先順位は a_1 であるが，すでに選択しているので，a_4 に移

り，残りの住宅の中で最も選好する住宅 h_4 を選択する．その結果アルゴリズムは終わる．最終的な割当は次のようになる．

$$\varphi^f(P) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ h_5 & h_3 & h_1 & h_4 & h_2 \end{pmatrix}.$$

YRMH-IGYT メカニズムは，以前のメカニズムを以下の意味で，一般化している．

- 既存の居住者がいない場合は，SD メカニズムとなる．
- TTC メカニズムは，すべてが既存の居住者でかつ空き家がない場合
- すべての空き家に対しては優先順位の高い人に所有権があるとみなすことにより，TTC と同じアルゴリズムになることから，YRMH-IGYT は TTC の変形ともみなすことができる．

つまり，TTC メカニズムのよい性質は，ほとんど YRMH-IGYT に移植されることが Abdulkadiroğlu, Atila and Tyfun Sönmez (1999) によって示されている．

定理 32 (Abdulkadiroğlu, Atila and Tyfun Sönmez (1999))**.** YRMH-IGYT メカニズムは，パレート効率的，個人合理的かつ耐戦略性をみたす．

SD メカニズムとは異なり，既存の居住者は自分の住宅を希望する主体がいるならば，優先順位をその人よりも上位につけることが可能である．したがって，既存の住宅よりも選好しない住宅が割当てられることはないので，個人合理的なメカニズムとなる．

Sönmez, T. and M. Utku Ünver (2005) は次の概念を導入することで，YRMH-IGYT メカニズムの固有の特徴が明らかになった．

新たに導入された概念は，**整合的**という概念である．この概念は，ある主体が問題から取り除かれたときに，割当てがどのように変化するのかを考えた概念である．つまり，メカニズムが整

合的であるとは，メカニズムが実行された問題の割当てと，そこでの主体を何人か取り除いた後の部分問題の割当は変化しないということである．

定理 33 (Sönmez, T. and M. Utku Ünver (2005))**.** メカニズムが整合的，弱くニュートラル，パレート効率性，個人合理性，かつ耐戦略性を満たすものは，YRMH-IGYT メカニズムのみである．

この事実からも，TTC(YRMH-IGYT) メカニズムが様々な状況で用いられる正当性がわかる．また実験によっても，TTC メカニズムが大学の住宅を割当てに使われていた, いままでのメカニズムよりも優れていることが示されている.[11)]

優先順位に基づかれた非分割財の配分問題

One sided マッチングを実際の社会に応用するにときに，Two sided マッチングで用いられている多くの概念が利用されている．例えば，One sided マッチングにおいてはモノと考えているが，それらのモノを獲得するには優先順位がある．それらのモノを獲得する優先順位は，全てのモノで同じかもしれないし，または異なるかもしれない．数学的には，優先順位も選好関係も類似した性質をもっている．一つの可能な変換は，それらの優先順位を「モノの選好関係」として扱う方法である．それは One sided マッチングを Two sided マッチングに変換する有効な方法である．両者の重要な差異は，結果に対する安定性の取り扱いである．Two sided マッチングではすべての主体に課している安定性の概念が，One sided マッチングにおいては安定性に対する適切で，意味のある概念がないので，この変換はあまり有効ではないといっけんみえる．しかしながら，Two sided マッチング市場における安定性の概念は，優先順位にもとづかれた非分割財の配分問題における**正当化された妬みがない**という，公平性に関する基本的な概念に密接に関係している．Balinski, Michel and Tayfun Sönmez (1999) の学生配置モデルは，この視点を指摘した最初のモデルである．このモデルは，統一試験により学校の入学に対する優先順位が決定するトルコ

[11)] Che, Yeon-Koo and Tyfun Sönmez (2002) を参照.

の学校入学制度の研究であった．この研究と非常に関連があるのが，Abdulkadiroğlu, Atila and Tyfun Sönmez (2003) である．このモデルは公立学校の子供たちの学校選択を研究している．それらの二つのモデルの差異は，正当化された妬みがない状態は，学生配置問題においては必ず考慮すべきだが，学校選択の場合はそこまで考慮する必要がないということである．学生配置問題において優先順位は試験で決められているので，その性質は尊重されるべきであるが，学校選択の場合，優先順位は住所やその学校にすでに兄弟が入学しているかなど，よりフレキシブルな要素に依存して決まるという事実から，学校選択制において学生配置問題より，安定性の概念が尊重されていない理由である．

ここでは学生配置問題を中心に概観する．

学生配置問題は，学生の集合 $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$，学校の集合 $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_m\}$，$R = \{R_{s_1}, R_{s_2}, \ldots, R_{s_n}\}$ を学生の選好プロファイル，$q = (q_{c_1}, q_{c_2}, \ldots, q_{c_m})$ を学校の定員ベクトル，$T = \{t_1, t_2, \ldots, t_k\}$ をスキルカテゴリーの集合，$f = (f^{s_1}, \ldots, f^{s_n})$ をテストプロファイル，各学校のスキルカテゴリーを決める写像を $t : C \to T$ とする．q_{c_i} を c_i の定員，R_{s_i} を学生 s_i の学校とアウトサイドオプションの上の選好関係，$f^{s_i} = \left(f^{s_i}_{t_1}, \ldots, f^{s_i}_{t_k}\right)$ は s_i の各技術カテゴリーのテストの点とする．各学校 c は $t(c)$ の点のみを考慮する．

各学生配置問題に対して，**関連づけられた大学入学問題**を $t(c)$ のランキングにもとづいて各学校 c の選好関係に対応するように構築する．マッチングは大学入学問題と同じように定義される．次の概念は，大学入学問題の安定性の概念に非常に関連する．

マッチング μ が**正当化された妬みがない**とは，s が $\mu(s')$ の学校を彼女が割当てられている学校より選好したとしても，$\mu(s')$ のカテゴリーにおいて s' よりも低いランクである．つまり，割当てられている学校よりも選好する学校に割当てられている学生は，その学校に関するカテゴリーのランキングにおいて，その学校に割当てられている学生よりも低いということである．[12)]

メカニズムが**正当化された妬みがない**とは，そのメカニズムがつねに正当化された妬みがない

[12)] 正当化された妬みがないという概念は，安定性よりも少し弱い概念であることがわかる．

マッチングを選択するということである．最も単純なケースは，唯一のスキルカテゴリーのときである．つまり，すべての学校で同じテストを行っている．この場合，Balinski, Michel and Tayfun Sönmez (1999) によって，同じテストの点の学生がいないならば，正当化された妬みがなく，パレート効率的なメカニズムが唯一存在することが示され，テストの点が高い順にもとづかれた SD メカニズムが，そのメカニズムとなるとが示された．

マッチングが**個人合理的**であるとは，割当てられた学校よりもアウトサイドオプションを選好するような学生がいないマッチングである．また，マッチングが**無駄がない**とは，学生が割当てられた学校より，一つ以上の定員の空きがある大学を選好することがないマッチングである．Balinski, Michel and Tayfun Sönmez (1999) は，個人合理的，無駄がない，正当化された妬みがないマッチングは，大学入学問題における安定性を満たすマッチングと同値であることを示した．

マッチング理論を現実に応用した最初の研究は，Roth, Alvin E. (1984) であり，彼は当時，米国で病院と研修医を割当てるメカニズムは病院最適安定メカニズムであることを示した．Balinski, Michel and Tayfun Sönmez (1999) も類似の考察を行っている．トルコの高校生を大学に割当てるメカニズムは大学最適安定メカニズムであるということを示した．しかしながら，両者には重要な違いがある．病院最適安定メカニズムは，病院の選好を考慮する場合には適切なメカニズムである．しかし，大学最適安定メカニズムは，大学の定員という稀少な席を割当てるメカニズムとしてはあまり適切ではない．学生最適安定メカニズムの方が，学生配置問題においては，有用なメカニズムと考えられる．以下で紹介する一連の研究はそのことを指摘している．

学生配置問題に対して大学最適安定マッチング・メカニズム (College Optimal Stable mechanism (COSM)) を関連づけられた大学入学問題において大学最適安定マッチングを選択するメカニズムとする．学生最適安定メカニズム (Student Optimal Stable Mechanism(SOSM)) を関連づけられた大学入学問題において学生最適安定マッチングを選択するメカニズムとする．

定理 34 (Gale, David and Lloyd Shapley (1962), Balinski, Michel and Tayfun Sönmez (1999))**.** SOSM は，正当化された妬みのない任意の他のマッチングをパレート支配する．

定理 35 (Roth, Alvin E. (1982a), Dubins, L. and D. Freedman (1981))**.** SOSM は耐戦略性をもつ.

定理 36 (Alcalde, José and Salvador Barberá (1994))**.** SOSM は，正当化された妬みがなく，個人合理的で，かつ耐戦略性を満たす唯一のメカニズムである.

このことは，以前の定理（安定性と学生にとっての耐戦略性をみたす唯一のメカニズムが学生プロポーズ DA メカニズムである）と安定性の同値として正当化された妬みがない，個人合理性を満たし，無駄がないということから容易に示すことができる.

COSM メカニズムの別の欠点として，COSM メカニズムのもとでは，たとえ学生のテストの点がよくなったとしても，以前のテストの点で割当てられていた学校よりも望ましくない学校が割当れられる可能性がある．そのメカニズムが，テストの点がよくなることにより，以前の点で割当てられていた学校より希望順位の低い学校が割当れられる学生がいないならば，そのメカニズムは**改善が尊重される**という．Balinski, Michel and Tayfun Sönmez (1999) により，SOSM は改善が尊重され，個人合理的で，無駄がなく，正当化された妬みをもたない唯一のメカニズムであることが示されている.

この結果により，SOSM は正当化された妬みがないということを優先する市場においては，最も適したメカニズムということになる．この要求は優先順位が標準的なテストにもとづいて順序づけられているならば，適切な要求とみなせるであろう．しかしながら，正当化された妬みがないという要求はパレート効率性を犠牲にする可能性がある．次の例はそれを示している.

例 6 (Roth, Alvin E. (1982a))**.** 3 人の学生 s_1, s_2, s_3 と 3 つの学校 c_1, c_2, c_3 があり，それらの選好と優先順位は下記のようである.

$$\begin{aligned} P_{s_1} &= c_2, c_1, c_3, \quad P_{c_1} = s_1, s_2, s_3, \\ P_{s_2} &= c_1, c_3, c_2, \quad P_{c_2} = s_2, s_3, s_1, \\ P_{s_3} &= c_1, c_2, c_3, \quad P_{c_3} = s_3, s_2, s_1. \end{aligned}$$

この選好のもとでの，正当化された妬みのない唯一のマッチング μ であるが ν によってパレート支配されている．

$$\mu = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & s_3 \\ \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \quad \nu = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & s_3 \\ \\ c_2 & c_1 & c_3 \end{pmatrix}$$

SOSM は，他の正当化された妬みがないマッチングをパレート支配するが，それ自身パレート効率的でない場合がある．

1.4 学校選択市場

この節で，Abdulkadiroğlu, Atila and Tyfun Sönmez (2003) によって提案された学校選択制のモデルとその後の研究成果を紹介する．学生配置問題と同様に学校選択制においても，割当てられた結果が，正当化された妬みがないようにすることは大事である．しかしながら，多くの学区では，それを満たさないメカニズムが長い間，採用されつづけてきた．一方，正当化された妬みがないことと効率性が両立するようなメカニズムは存在しないので，効率性を満たすメカニズムはどのようなメカニズムがあり，そのメカニズムは他にどのような望ましい性質を有するか等も学校選択市場を研究する上では重要となってくる．

Abdulkadiroğlu, Atila and Tyfun Sönmez (2003) によって提案された**学校選択市場**は，5 つの要素 $(S, C, q, R_S, \succeq_C)$ から構成されている．S は有限な学生の集合，C は有限な学校の集合，$q = (q_c)_{c \in C}$ は各学校 c の定員のリスト，$R_S = (R_s)_{s \in S}$ は各学生 s の選好プロファイル，$\succeq_C = (\succeq_c)_{c \in C}$ は各学校 c の優先順位のリストである．各学生 s の選好関係 R_s は，完備性，反射性，推移性を満たす $C \cup \{\varnothing\}$ 上の選好関係で，各学校 c の優先順位 $\succeq_c$ は，完備性，反射性，推移性を満たす $S \cup \{\varnothing\}$ 上の優先順位である．ここで，$\varnothing$ はマッチされないままでいる，いわゆるアウトサイドオプションを意味している．各学生，各学校ともに厳密な選好関係と優先順位をもっているとする．つま

り，任意の異なる $c, c' \in C$ に対して，cP_sc' または $c'P_sc$ となり，その厳密な選好関係を P_s という記号で表記する．また，学校の優先順位に関しても厳密な場合優先順位を表すために $\succ$ という記号を用いる．

学校選択市場の結果は，学生をどの学校に入学させるのかを特定化する**マッチング**である．そのマッチングは, 次のような性質を満たす写像 $\mu : S \cup C \to 2^{S \cup C}$ である．

- すべての学生 $s \in S$ に対して，$|\mu(s)| \leq 1$ で $\mu(s) \subseteq C$,
- すべての学校 $c \in C$ に対して，$|\mu(c)| \leq q_c$ で $\mu(c) \subseteq S$, かつ
- 任意の学生 s と学校 c に対して，$c = \mu(s)$ であるならば，その場合に限り $s \in \mu(c)$ である．

マッチング μ が **実現可能**であるとは，すべての $s \in \mu(c)$ と $c \in C$ に対して，$s \succeq_c \varnothing$ であることである．パレート効率性，個人合理性は学生配置問題と同様に定義され，安定性は大学入学問題の定義にしたがう．安定マッチングが他の安定マッチングにパレート支配されないならば，その安定マッチングを**学生最適安定マッチング**と定義する．

学校選択市場で関心のある性質，パレート効率性，安定性，または耐戦略性は，政策的な意味で重要であると考えられる性質（たとえば，本稿の後半で議論する積極的差別是正政策の効果など）である．効率的なマッチングは，パレートの意味で学生の厚生を効率化し，安定性は，Balinski, Michel and Tayfun Sönmez (1999) の意味で正当化された妬みがなく，無駄がないということを意味している．学生最適安定マッチングは，安定性を満たすマッチングのなかで学生の厚生をもっとも効率化している．序章でも触れたが，耐戦略性を満たすメカニズムは，学校選択をする際の意思決定を単純化する効果がある．

次に紹介する**ボストン・メカニズム**は，Abdulkadiroğlu, Atila and Tyfun Sönmez (2003) によって理論的に定式化されたメカニズムであるが，2005 年までボストンで用いられ，米国の他の多くの学区でも使用されていたメカニズムである．

ボストン・メカニズム

各学校の学生に対する優先順位は外生的に決められている．例えば，米国のボストンにおいて，優先順位は住所，入学を希望している学生の兄弟または姉妹がその学校にすでに入学しているかどうかで決められ，もし同条件の学生がいた場合のタイブレイクとして，クジが用いられていた．各学生は学校に対する選好順序を提出し，その提出された選好順序と優先順位にしたがって学生を学校に割当てていく．

ステップ 1 提出された学校に対する選好順序の第一希望のみを考える．各学校に対して，提出された希望順位が一位である学校に，各学生を定員まで入学させる．もし定員を超えている場合，その学校の優先順位の高い順に定員まで入学させる．

ステップ $k > 1$ 以前のステップで入学できなかった学生は，選好順序の k 番目の学校を考える．その学校の定員にまだ空きがあるならば，空きの人数だけ優先順位にしたがって入学させる．

各ステップごとにマッチングは決まり，そのアルゴリズムは，マッチングする学生がいなくなったら終了する．

ボストン・メカニズムは，学生が提出した選好順序にもとづいて, 学生の第一希望の学校にできるかぎり多くの学生を割当て，次に学生の第二希望の学校にできる限り多くの学生を割当てるという手続きによってマッチングを決めるメカニズムである．

ボストン・メカニズムには，多くの欠点がある．例えば，最終的なマッチングは安定性を満たさないし，耐戦略性も満たさない．ボストン・メカニズムが，耐戦略性を満たさないことと安定性を満たさないことを例で解説する．

例 7. 3 人の学生 s_1, s_2, s_3 と 3 つの学校 c_1, c_2, c_3 があり，それらの選好と優先順位は下記のようで

ある．各学校の定員は 1 名であるとする．

$$\begin{aligned} P_{s_1} &= c_2, c_1, c_3, \quad P_{c_1} = s_1, s_2, s_3, \\ P_{s_2} &= c_1, c_3, c_2, \quad P_{c_2} = s_2, s_3, s_1, \\ P_{s_3} &= c_1, c_2, c_3, \quad P_{c_3} = s_3, s_2, s_1. \end{aligned}$$

ボストン・メカニズムによる結果は,

$$\mu = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & s_3 \\ c_2 & c_1 & c_3 \end{pmatrix}$$

そこで，もし学生 S_3 が $P'_{s_3} = c_2, c_1, c_3$ と表明したならば,

$$\mu' = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & s_3 \\ c_3 & c_1 & c_2 \end{pmatrix}$$

となり，s_3 のマッチングは P'_{s_3} を提出することにより，よりよい学校に入学できることになる．また，この例は安定性も満たしていない．なぜならば，(s_3, c_2) がブロッキング・ペアとなるからである．

この例からもわかるように，ある学校を第二希望としている学生は，その学校を第一希望にしている学生によって，優先順位を失ってしまう．つまり，相対的に低い優先順位の学校を第一希望にするのは，リスクとなる．したがって，学生が自身の優先順位の高い学校を上位に置くような選好を表明するインセンティブがボストン・メカニズムには存在する．つまり，ボストン・メカニズムは，真の選好を表明するインセンティブを減少させてしまう．

Abdulkadiroğlu, Atila and Tyfun Sönmez (2003) は，その問題に対する 2 つの耐戦略性を満たすメカニズムを提案した．一つは，学生プロポーズ DA メカニズム，このメカニズムは学生最適

安定マッチングを導く．もう一つのメカニズムが，TTC メカニズムである．このメカニズムは，効率的なマッチングを導くことが知られている．あらためて前者を SOSM，後者を TTC メカニズムと呼ぶことにする．

以前の考察を学校選択市場に適用すると次のような結果をえる．

定理 37 (Gale, David and Lloyd Shapley (1962))**.** 学校選択市場 $(S, C, q, R_S, \succeq_C)$ が与えられると，SOSM はその問題において安定性を満たし，すべての学生は，他の安定なマッチングよりも SOSM のマッチングを弱い意味で選好する．

定理 38 (Roth, Alvin E. (1982a), Dubins, L. and D. Freedman (1981))**.** SOSM は耐戦略性を満たす．つまり，すべての学生にとって真の選好を表明することが支配戦略となる．

SOSM の追加的な望ましい性質として，ある学生にとって学校の優先順位が改善されると，改善前よりもよい結果を生むという**改善が尊重される**という性質がある.13) また，すべての学生が SOSM の結果よりも厳密に選好する個人合理的なマッチングは存在しない，という弱パレート効率性を満たす.14) つまり，SOSM は，あらゆる安定なマッチングにおいて最も望ましいマッチングを生み出すメカニズムである．Balinski, Michel and Tayfun Sönmez (1999) は，以前述べたようにトルコの学生配置問題は COSM メカニズムと同値であることを示し，SOSM へ変更することを推奨した．ボストンやニューヨークの学校選択市場において，ボストン・メカニズムから SOSM に変更され，現在も SOSM が使用されている．そのような事実からも，SOSM が理論上だけでなく現実に運用する上でも有用なメカニズムであることがわかる．

しかしながら，SOSM は下記の例が示すように，パレート効率性が満たされない．

例 8. 3 人の学生 s_1, s_2, s_3 と 3 つの学校 c_1, c_2, c_3 があり，それらの選好と優先順位は下記のようで

13)学生配置問題の節や Abdulkadiroğlu, Atila and Tyfun Sönmez (1999) を参照.
14)Roth, Alvin E. (1982a), Kojima, Fuhito (2007), Kojima, Fuhito and John William Hatfield (2010) を参照

ある．各学校の定員は 1 名であるとする．

$$
\begin{aligned}
P_{s_1} &= c_2, c_1, c_3, \quad P_{c_1} = s_1, s_2, s_3, \\
P_{s_2} &= c_1, c_3, c_2, \quad P_{c_2} = s_2, s_3, s_1, \\
P_{s_3} &= c_1, c_2, c_3, \quad P_{c_3} = s_3, s_2, s_1.
\end{aligned}
$$

SOSM による結果は,

$$
\mu = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & s_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}
$$

一方,

$$
\nu = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & s_3 \\ c_2 & c_1 & c_3 \end{pmatrix}
$$

というマッチング ν は，μ をパレート支配する．

Ergin, Haluk (2002) は，SOSM がパレート効率性を満たすための必要十分条件を示した．その条件は，学校の優先順位が非循環的であるということである．つまり，SOSM で非効率性が生じる原因は，学生の応募に対して，拒否の連鎖が原因となっている．この原因を解消する条件が，Ergin, Haluk (2002) の提案した優先順位の非循環性である．この条件は現実の多くの学校選択市場で満たされていないので，彼の研究は，現実の学校選択市場において SOSM を用いた結果は，効率的な割当てとはならないことを示唆している．

Abdulkadiroğlu, Atila and Tyfun Sönmez (2003) は，効率性を満たすもう一つのメカニズムとして TTC メカニズムを提案した．TTC メカニズムが，そのもう一つのメカニズムである．そのメカニズムにおいて，まず，学生は学校の選好順序を提出する．その選好に基づいた学校選択市

場が与えられると，各ステップで，すべての学生は定員に空きがある限り彼女の最も選好する学校を希望する．定員に空きのあるすべての学校 c は，自身の優先順位に基づいて，最も上位にあり，まだ割当てられてない学生を希望する．各ステップで，少なくとも一つのサイクルが存在する．学校と学生のサイクル $(s_1, c_1, \cdots s_K, c_K)$，その列の意味は，最初の学生が希望している学校を次の要素とし，その学校の優先順位が一番高い学生が次の要素でという形で続き，最後の学校の優先順位が一番高い学生は，一番最初の要素の学生を指しているということを意味する．つまり，すべての $k = 1, 2, \ldots, K$ に対して，学生 s_k は学校 c_k とマッチし，学校 c_k の定員は 1 減少する．そのアルゴリズムは，割当てられていない学生がいなくなると終了する．

TTC メカニズムは，住宅市場に対する TTC メカニズムの応用である．簡単にいうと，学生に対してより選好される学校とマッチするために優先順位を交換するメカニズムである．次の定理が示すように，以前の住宅市場における TTC メカニズムの良い性質は学校選択市場においても同様に移植される．

定理 39 (Abdulkadiroğlu, Atila and Tyfun Sönmez (2003))**.** 学校選択市場における TTC メカニズムは耐戦略性を満たし，パレート効率的なマッチングを導く．

TTC メカニズムはパレート効率的で，SOSM はパレート効率的ではないが，その 2 つのメカニズムは一般的に，パレートの意味でランクは付けられない．そのことを Abdulkadiroğlu, Atila and Tyfun Sönmez (2013) の例を用いて紹介する．

例 9 (Abdulkadiroğlu, Atila and Tyfun Sönmez (2013))**.** 3 人の学生 s_1, s_2, s_3 と 3 つの学校 c_1, c_2, c_3 があり，それらの選好と優先順位は下記のようである．各学校の定員は 1 名であるとする．

$$\begin{aligned} P_{s_1} &= c_2, c_1, c_3, \quad P_{c_1} = s_1, s_3, s_2, \\ P_{s_2} &= c_1, c_3, c_2, \quad P_{c_2} = s_2, s_1, s_3, \\ P_{s_3} &= c_1, c_2, c_3, \quad P_{c_3} = s_2, s_1, s_3. \end{aligned}$$

SOSM による結果は,

$$\mu^{SOSM} = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & s_3 \\ c_2 & c_3 & c_1 \end{pmatrix}$$

一方，TTC による結果は,

$$\mu^{TTC} = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & s_3 \\ c_2 & c_1 & c_3 \end{pmatrix}$$

μ^{SOSM} は μ^{TTC} をパレート支配しないし，また μ^{TTC} は μ^{SOSM} をパレート支配しない.

この例からの素朴な疑問は，SOSM の結果をパレート支配する，効率的でかつ耐戦略性のあるメカニズムが存在するかどうかである．しかしながら，Kesten, Onur (2010) により，学校が厳密な優先順位をもつとき，SOSM をパレート支配し，効率的かつ耐戦略性のあるメカニズムは存在しないということが示された.

Kesten, Onur (2010) は，学生が彼女の優先順位を放棄したとしても結果が悪くならないときに，SOSM が効率的になるアルゴリズムを提案した.

SOSM と TTC メカニズムのパレートの意味での比較はできないが，SOSM とボストン・メカニズムを比較すると明らかに SOSM が優れたメカニズムである．ボストン・メカニズムは，真の選好を表明するインセンティブがないので，学生が真の選好を表明することは期待できない．しかしながら，Ergin, Haluk and Tayfun Sönmez (2006) は，学校の優先順位が厳密であるときに，ボストン・メカニズムのすべてのナッシュ均衡の結果は，真の選好のもとで安定であり，SOSM の支配戦略の結果がボストン・メカニズムのあらゆるナッシュ均衡の結果を弱い意味で支配することを示した.

学校選択制市場をマッチング問題として捉えなおすことにより，世界中のいくつかの都市で学生の学校への割当は，これまでの研究成果に基づいて再設計された．ボストンにおいて，最初，TTC

メカニズムがボストン・メカニズムに置き換えられることが推奨されたが，SOSM が 2005 年から採用された.[15)] ニューヨークにおいては，2003 年に SOSM が採用された.[16)]

この論文の後の章にも関連する研究の発展を紹介する．それは，制約下の学校選択の問題である．学校選択は，性別，人種，経済的なバランスを考慮する必要があるが，それらをどのように考慮すべきかが一つの重要な問題となってきている．米国の多くの学区において，どのように人種や性別などのバランスをとるかは，自発的ないし裁判所による要請でおこなわれている.

Abdulkadiroğlu, Atila and Tyfun Sönmez (2003) は学生のタイプと学校にタイプ別の定員を設け，その各タイプ別の定員の制約がどのように機能するのかを考察した．つまり，各学生はどれかのタイプに属し，各タイプの定員を設けることで，各学校は各タイプの定員に制約をもつようにモデル化したことになる．学校にマッチされたあるタイプの学生の数は，その学校のタイプ別の定員を超えることはない．すべての学校において，すべてのタイプの定員の和は，学校全体の定員を超えないようにする．そのような場合，SOSM は次のように修正される.

タイプ別の定員をもつ学生プロポーズ DA アルゴリズム

ステップ 0 学生は学校に対する選好順序を提出する.

ステップ 1 提出した選好順序の中で最も選好する学校に，各学生を応募させる．その学校において，各学生のタイプに分け，各タイプの定員の人数まで，そのタイプに属する学生を優先順位にしたがって仮入学させる．それ以外の学生はすべて拒否する.

ステップ $k>1$ ステップ $k-1$ までに拒否された学生は，まだ拒否されていない学校の中で最も選好する学校に応募させる．その学校は応募した学生とそれまでに仮入学させた学生と同じタイプの学生の中から，そのタイプの定員まで優先順位にしたがって仮入学させる.

[15)] Abdulkadiroğlu, Atila, Parag A. Pathak, Alvin E. Roth, and Tayfun Sönmez (2005), Abdulkadiroğlu, Atila., Parag A. Pathak, Alvin E. Roth, and Tayfun Sönmez (2006) を参照.
[16)] Abdulkadiroğlu, Atila, Parag A. Pathak, and Alvin E. Roth (2005) を参照.

すべての学生が，さらに応募する学校がなくなったら，そのアルゴリズムは終了する．各学生たちは，そのアルゴリズムが終了した時点で，仮入学している学校に入学できることになる．

このアルゴリズムの性質は，制約のない DA アルゴリズムの多くの性質が引き継がれる．つまり，以前の SOSM と類似の性質を，タイプ別の定員をもつ SOSM でも有することがしられている．

定理 40 (Roth, Alvin E. (1984))**.** 学校の優先順位が厳密で定員が与えられたもとで，タイプ別の定員をもつ SOSM が導く，定員を尊重した学生最適安定マッチングは，他の定員を尊重した安定なマッチングをすべての学生にとって弱い意味で選好される．

さらに，Abdulkadiroğlu, Atila (2005) により，タイプの定員をもつ SOSM は耐戦略性をもつことが示されている．Hatfield, John William and Paul Milgrom (2005) はより一般的な優先順位のもとで，SOSM が耐戦略性を満たすことを示している．

Abdulkadiroğlu, Atila (2009a) や Ehlers, Lars (2009) は，学校に割当てられる各タイプの学生の最低人数をモデルに導入した．そして，彼らは，最低人数の制約は安定性とは両立しないしことを示し，安定性の概念を弱めることで学生最適安定マッチングを発見するアルゴリズムを提案した．

選好順序の提出

戦略的な思考が苦手な（できない）人がいたとしても，耐戦略性を満たすメカニズムであるならば，自身の真の選好を表明すればよりよい結果が得られるので，どのような人がそのメカニズムに参加したとしても，思考能力に差がでない．その視点から，耐戦略性をもつメカニズムは，参加者間の思考能力の公平性の概念としても考ええられる．Pathak, Parag and Tyfun Sönmez (2008) は，戦略性に富んだ人とそうでない人の両方のモデルを研究することで，耐戦略性を満たすメカニズムに上記のような新しい視点をいれた．彼らは，ボストン・メカニズムのナッシュ均衡を分析し，SOSM の支配戦略均衡の結果とそのナッシュ均衡を比較した．彼らの結果によると，ボス

トン・メカニズムを SOSM に変更するということは，「すべての参加者を一律に扱う方法である」という考えを明らかにした．

提出する選好順序をすべての学校に関してではなく，決まった数の学校しか提出できない場合がある．2005 年より前のボストンにおいては，高々 5 つの学校の順序しか提出できなかった．ニューヨークの高校の入学においては，高々 12 校だけの順序しか提出できなかった．Haeringer, Guillaume and Flip Klijn (2009) は，学生が固定された数の学校しか選好順序を提出できないもとで，様々なメカニズムによって導出される選好顕示ゲームを考察した．彼らは，ナッシュ均衡の結果に対する，効率性と安定性に注目した．彼らによると，SOSM は，安定性を満たさないマッチングを導く戦略がナッシュ均衡となる可能性があることと，TTC メカニズムは，効率性を満たさないマッチングを導く戦略がナッシュ均衡となる可能性を示した．

他の学校選択に関する研究

Two sided マッチング理論の多くの研究は，選好関係に無差別な選択肢がある場合を分析する理論的な難しさから，すべての参加者が厳密な選好関係を持つ場合を中心に考えてきた．一方，学校選択の研究は, 学生が，少なくともある学校によってどのように順序づけられるかの中には，無差別な順序の場合も考察している．それは新たな効率性，安定性，そして耐戦略性に新たなトレードオフを発生させた．[17)]

SOSM と TTC メカニズムは，学校の優先順位が厳密であることが必要なので，どちらかのメカニズムを用いるときには，学校の優先順位に無差別がある場合，タイブレイクを導入する必要がある．

学校の優先順位に無差別がある場合，互いにパレート支配されない 2 つ以上の学生最適安定マッチングがあるかもしれない．しかしながら，Ehlers, Lars (2006) によると，学生の選好にもとづいたタイブレイクを導入すると，SOSM は，すべての学生最適安定マッチングを導くことが可能

[17)] Erdil, Aytek and Haluk Ergin (2008) や Abdulkadiroğlu, Atila, Parag A. Pathak, and Alvin E. Roth (2009) を参照.

であることを示した．Erdil, Aytek and Haluk Ergin (2008) によると，優先順位に無差別がある場合，SOSM は耐戦略性を満たさなくなることが示されている．選択肢間で無差別な場合，どのようにタイブレイクに関する研究は，現在も積極的に研究が続けられている問題である．

学校選択制は，One sided マッチングの問題と Two sided マッチング問題の特徴を同時に表現している．たとえば，多くの学区が入学のための試験を課している．その場合，学校選択制の問題が一般的な公立学校の入学と同様に試験を通じた入学可能な学校からなるとき，試験が必要な学校の学生に対するランキングは，入試の公平性の側面が重要視されるが，公立学校の優先順位には公平性の観点はあまり重視されないかもしれない．言い換えると，安定性は試験を課す学校では制約となるが，公立学校の学校選択制では，安定性は制約にならないかもしれない．類似の問題は，学校が戦略的であり，学生の間に選好をもつときにも生じるかもしれない．その場合，安定性は戦略的な学校にとっては制約的な条件となる．

既存研究の多くは，One sided マッチングと Two sided マッチングを別々に扱っているが，両者を統合したようなモデルも Abdulkadiroğlu, Atila (2009b) によって考えられた．安定性はある人には課せられるが，それ以外の人たちには課せられないようなモデルである．彼は，任意の安定なマッチングによってパレート支配されない安定なマッチングを導くメカニズムを提示した．その問題が One sided マッチング，または Two sided マッチングに縮約されるとき，その解は SOSM，または TTC メカニズムにそれぞれぞれ縮約される．そのモデルは，学校の優先順位に無差別がある場合も統合している．また，Ehlers, Lars and Alexander Westkampy は，試験で入学する学校が存在する学校選択制を研究している．しかしながら，彼らは公立学校が，すべての学生の間で無差別としている．それは，Erdil, Aytek and Haluk Ergin (2008) や Abdulkadiroğlu, Atila, Parag A. Pathak, and Alvin E. Roth (2009) の特殊ケースである．彼らは，耐戦略性を満たす，試験で入学する学校に対する優先順位の条件を明らかにしている．

Che, Yeon-Koo and Tyfun Sönmez (2006) から始まった，学校選択制の実験研究に関して簡単に概観する．理論的な結果と整合的に，ボストン・メカニズムの方が，SOSM よりも選好に関して

高い割合で操作されるという実験結果をえている．また，ボストン・メカニズムにおける効率性は，TTC メカニズムや SOSM よりも統計的に低いことが示されている．しかしながら，理論的な結論とは異なり，SOSM の方が TTC メカニズムよりも，彼らの実験環境において効率的であることが統計邸に示されている．Pais, Joana and Agnes Pinter (2008) は，不完備情報のもとで実験を行ったとき，TTC メカニズムは効率性の面で，SOSM やボストン・メカニズムよりよくなることを発見した．さらに，わずかではあるが，TTC メカニズムは SOSM よりも真の選好を表明する割合が高かった．Calsamiglia, Cterina, Guillaume Haeringer, and Flip Klijn (2010) は，学生の学校に対する選好順序の数を制約した実験をおこなった．このことは戦略的操作を増加させることを発見した．この制約は，効率性と安定性の割合を減少させることも発見した．Featherstone, Clayton and Muriel Niederle (2008) は，学校の優先順位が無差別となる状態で，その無差別をランダムにな処理するようなタイブレイク・ルールを導入し，選好は個人情報であるとき，ボストン・メカニズムは SOSM よりも効率的であったことが示された．

1.5　おわりに

この章において，Gale, David and Lloyd Shapley (1962) からはじまったマッチング理論の現在までの進展をマッチング・モデルに焦点を絞って解説をおこなった．

その発展の流れをまとめておく．

Gale, David and Lloyd Shapley (1962) は，Tow sidede マッチングを一対一マッチングの結婚問題と一対多マッチングの大学入学問題を定式化し，そこでの解概念である安定性を定式化し，安定性を満たすマッチングの存在とそれを発見するアルゴリズム，DA アルゴリズムを提示した．

その後，安定性を満たすメカニズムがどのような性質をもつかが研究され，その中で最も重要な概念である耐戦略性と効率性が，安定性を満たすメカニズムとどのように関連するのかが研究されてきた．

もう一つの流れとして，Shapley, Lloyd and Herbert Scarf (1974) による One sided マッチング

問題がある．このマッチング問題は非分割財をどのように配分するかの問題であり，具体的には住宅をどのように配分するかの研究がなされた．そこで，上記と同様にゲーム理論で使われていたコアという概念を，このモデルの解概念として考えた．Shapley, Lloyd and Herbert Scarf (1974) は，住宅市場におけるコアの存在とそれを発見するアルゴリズムである TTC アルゴリズムを提示した．

社会的要請から，学校に学生をどのように配置するかの問題は，上記の二つの理論を使って分析し，現実の学校と学生の配置問題にそこでの研究成果が用いられた．

現実に研究成果が使われるようになると，実際に運用したことから発生した問題に対する理論研究の要請が生じた．例えば，学校の優先順位に無差別がある場合，どのようにタイブレイクするのがいいのか，または学生が提出する選好順序がすべての学校に対して提出できない場合，どのような結果が起こるのか，後の章で中心的な話題となる学校内の学生の人種，性別などのバランスを考慮した学生配置問題において，どのような結果が起こるのかなどがある．

ここでは触れなかったが，マッチング理論が現実に応用されたものとして腎臓交換問題がある．移植という方法が，腎臓疾病において最も望ましい方法である． 2010 年 7 月の時点で，米国の腎臓移植を待っている患者は 85,000 人以上存在する．2009 年時点で，16,829 のドナーのうち 10,442 が死亡したドナーで，6,387 は生きているドナーである．同年, 35,123 人の腎臓移植を希望する患者のリストに参加し，腎臓移植を待っている間に 4,789 人の患者が死亡した．臓器売買は多くの国で違法であるため，寄付が腎臓移植のためのほぼ唯一の源であり，実質的な臓器不足の問題がある．生きている人による腎臓提供は，臓器移植において非常に有用であるが，多くの潜在的な臓器提供者は，血液型の非互換性，または組織拒絶で利用することができないことが多い．この問題に対してマッチング理論が応用された．例えば，New England Program for Kidney Exchange (NEPKE) は，ここで紹介した TTC メカニズムを用いている．この分野に関連する詳細のサーベイは，Sönmez, Tyfun and M. Utku Ünver (2013) を参照されたし．

参考文献

Abdulkadiroğlu, Atila (2005) "College Admissions with Affirmative Action," *International Journal of Game Theory*, Vol. 33, pp. 535-549.

——— (2009a) "Controlled School Choice," *memeo.*

——— (2009b) "Generalized Matching: One- and Two-Sided Matching Together," *memeo.*

Abdulkadiroğlu, Atila and Tyfun Sönmez (1998) "Random Serial Dictatorship and the Core from Random Endowments in House Allocation Problem," *Econometrica*, Vol. 66, pp. 689-701.

——— (1999) "House Allocation with Existing Tenants," *Journal of Economic Theory*, Vol. 88, pp. 233-260.

——— (2003) "School Choice: A Mechanism Design Approach," *American Economic Review*, Vol. 93, pp. 729-747.

——— (2013) *Matching markets: theory and practice*, Vol. I of Advances in Economics and Econometrics: Theory and Applications, Tenth World Congress: Cambridge University Press.

Abdulkadiroğlu, Atila, Parag A. Pathak, Alvin E. Roth, and Tayfun Sönmez (2005) "The Boston Public School Match," *American Economic Review, Papers and Proceedings*, Vol. 95, pp. 368-371.

Abdulkadiroğlu, Atila., Parag A. Pathak, Alvin E. Roth, and Tayfun Sönmez (2006) "Changing the Boston School Choice Mechanism: Strategy-Proofness as Equal Access," *memeo.*

Abdulkadiroğlu, Atila, Parag A. Pathak, and Alvin E. Roth (2005) "The New York City High School Match," *American Economic Review, Papers and Proceedings*, Vol. 95, pp. 364-367.

——— (2009) "Strategy-Proofness versus Efficiency in Matching with Indifferences: Redesigning the NYC High School Match," *American Economic Review, Papers and Proceedings*, Vol. 99, No. 5, pp. 1954–1978.

Alcalde, José and Salvador Barberá (1994) "Top Dominance and the Possibility of Strategy-Proof Stable Solutions to Matching Problems," *Economic Theory*, Vol. 4, No. 3, pp. 417-435, May.

Balinski, Michel and Tayfun Sönmez (1999) "A Tale of Two Mechanisms: Student Placement," *Journal of Economic Theory*, Vol. 84, pp. 73-94.

Blair, Charles (1988) "The Lattice Structure of the Set of Stable Matchings with Multiple Partners," *Mathematics of Operations Research*, Vol. 13, pp. 619-628.

Calsamiglia, Cterina, Guillaume Haeringer, and Flip Klijn (2010) "Constrained School Choice: An Experimental Study," *American Economic Review*, Vol. 100, No. 4, pp. 1860-1874.

Che, Yeon-Koo and Fuhito Kojima (2010) "Asymptotic Equivalence of Probabilistic Serial and Random Priority Mechanisms," *Econometrica*, Vol. 78, No. 8, September.

Che, Yeon-Koo and Tyfun Sönmez (2002) "Improving Efficiency of On-Campus Housing: Improving Efficiency of On-Campus Housing: An Experimental Study," *American Economic Review*, Vol. 92, No. 5, pp. 1669-1686.

——— (2006) "School Choice: An Experimental Study," *Journal of Economic Theory*, Vol. 127, pp. 2002-2031.

Demange, Gabrielle, David Gale, and Marilda Sotomayor (1985) "Multi-Item Auctions," *Journal of Political Economy*, Vol. 94, pp. 863-872.

Dubins, L. and D. Freedman (1981) "Machiavelli and the Gale-Shapley Algorithm," *American Mathematical Monthly*, Vol. 88, pp. 485-494.

Ehlers, Lars (2006) "Respecting Priorities When Assigning Students to Schools," *memeo.*

——— (2009) "School Choice with Control," *memeo.*

Ehlers, Lars and Alexander Westkampy"Breaking Ties in School Choice: (Non-)Specialized Schools," *memeo.*

Erdil, Aytek and Haluk Ergin (2008) "What's the Matter with Tie Breaking? Improving Efficiency in School Choice," *American Economic Review*, pp. 669-689.

Ergin, Haluk (2002) "Efficient Resource Allocation on the Basis of Priorities," *Econometrica*, Vol. 70, pp. 2489-2497.

Ergin, Haluk and Tayfun Sönmez (2006) "Games of School Choice under the Boston Mechanism," *Journal of Public Economics*, Vol. 90, pp. 215-237.

Featherstone, Clayton and Muriel Niederle (2008) "Ex Ante Efficiency in School Choice Mmechanisms: An Experimental Investigation," *memeo.*

Fleiner, Tamas (2000) "Stable and Crossing Structures," *Ph.D. dissertation, Centrum voor Wiskunde en Informatica (CWI), Amsterdam,.*

Gale, David and Lloyd Shapley (1962) "College Admissions and the Stability of Marriage," *American Mathematical Monthly*, Vol. 69, No. 9, pp. 9-15.

Haeringer, Guillaume and Flip Klijn (2009) "Constrained School Choice," *Journal of Economic Theory*, Vol. 149, pp. 1921-1947.

Hatfield, John William and Paul Milgrom (2005) "Matching with Contracts," *American Economic Review*, Vol. 95, No. 4, pp. 913-935, September.

Hylland, Aanund and Richard Zeckhause (1979) "The Efficient Allocation of Individuals to Positions," *Journal of Political Economy*, Vol. 87, pp. 293-314.

Kesten, Onur (2010) "School Choice with Consent," *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 125, No. 3, pp. 1297-1348.

Knuth, Donald E. (1996) *Stable Marriage and Its Relation to Other Combinatorial Problems: An Introduction to the Mathematical Analysis of Algorithms (crm proceedings and lecture notes)*: Ameriacn Mathematical Society.

Kojima, Fuhito (2007) "The Law of Aggregate Demand and Welfare in the Two-Sided Matching Market," *Economis Letters*, Vol. 99, pp. 581-584.

Kojima, Fuhito and John William Hatfield (2010) "Substitutes and Stability for Matching with Contracts," *Journal of Economic Theory*, Vol. 145, pp. 1704-1723.

Kojima, Fuhito. and Mihai Manea (2010) "Incentives in the Probabilistic Serial Mechanism," *Journal of Economic Theory*, Vol. 145, pp. 106-123.

Konishi, Hideo and M. Utku Ünver (2006) "Games of Capacity Manipulation in Hospital-Intern Markets," *Social Choice and Welfare*, Vol. 27, pp. 3-24.

Ma, Jinpeng (1994) "Strategy-Proofness and the Strict Core in a Market with Indivisibilities," *International Journal of Game Theory*, Vol. 23, pp. 75-83.

Martínez, R. and Marilda Sotomayory (1985) "Ms. Machiavelli and the Stable Matching Problem," *American Mathematical Monthly*, Vol. 92, pp. 261-268.

Martínez, R., J. Massó, A. Neme, and J. Oviedo (2001) "On the Lattice Structure of the Set of Stable Matchings for a Many-to-One Model," *Optimization*, Vol. 50, pp. 439-457.

McVitie, D. G. and L. B. Wilson (1970) "Stable Marriage Assignment for Unequal Sets," *BIT*, Vol. 10, pp. 295-309.

Pais, Joana and Agnes Pinter (2008) "School Choice and Information: An Experimental Study on Matching Mechanisms," *Games and Economic Behavior*, Vol. 64, No. 1, pp. 303-328.

Papai, Szilvia (2000) "Strategyproof Assignment by Hierarchical Exchange," *Econometrica*, Vol. 68, pp. 1403-1433.

Pathak, Parag and Tyfun Sönmez (2008) "Leveling the Playing Field: Sincere and Sophisticated Players in the Boston Mechanism," *American Economic Review*, Vol. 98, pp. 1636-1652.

Roth, Alvin E. (1982a) "The Economics of Matching: Stability and Incentives," *Mathematics of Operations Research*, Vol. 7, pp. 617-628.

——— (1982b) "Incentive Compatibility in a Market with Indivisible Goods," *Economics Letters*, Vol. 9, pp. 127-132.

——— (1984) "The Evolution of the Labor Market for Medical Interns and Residents: A Case Study in Game Theory," *Journal of Political Economy*, Vol. 92, pp. 991-1016.

——— (1985a) "The College Admissions Problem Is Not Equivalent to the Marriage problem," *Journal of Economic Theory*, Vol. 36, pp. 277-288.

——— (1985b) “Misrepresentation and Stability in the Marriage Problem,” *Journal of Economic Theory*, Vol. 34, pp. 383-387.

——— (1986) “On the Allocation of Residents to Rural Hospitals: A General Property of Two-Sided Matching Markets,” *Econometrica*, Vol. 54, pp. 425-427.

——— (2008) “Deferred Acceptance Algorithms: History, Theory, Practice, and Open Questions,” *International Journal of Game Theory, special Issue in Honor of David Gale on his 85th birthday*, Vol. 36, pp. 537-569, March.

Roth, Alvin E. and Andrew Postlewaite (1977) “Weak versus Strong Domination in a Market with Indivisible Goods,” *Journal of Mathematical Economics*, Vol. 4, pp. 131-137.

Roth, Alvin E. and Marild Sotomayor (1990) *Two-Sided Matching: A Study in Game-Theoretic Modeling and Analysis*, Econometric Society Monograph Series: Cambridge University Press.

Roth, Alvin E. and Marilda Sotomayor (1989) “The College Admissions Problem: Revisited,” *Econometrica*, Vol. 57, pp. 559-570.

Shapley, Lloyd and Herbert Scarf (1974) “On Cores and Indivisibility,” *Journal of Mathematical Economics*, Vol. 1, pp. 23-28.

Sönmez, T. and M. Utku Ünver (2005) “House Allocation with Existing Tenants: An Equivalence,” *Games and Economic Behavior*, Vol. 52, pp. 153-185.

Sönmez, Tyfun (1994) “Strategy-Proofness in Many-to-One Matching Problems,” *Economic Design*, Vol. 1, pp. 365-380.

——— (1997) “Manipulation via Capacities in Two-Sided Matching Markets,” *Journal of Economic Theory*, Vol. 77, pp. 197-204.

Sönmez, Tyfun and M. Utku Ünver (2009) *Matching, Allocation, and Exchange of Discrete Resources*, Handbook of Social Economics,: Elsevier.

——— (2013) *Market Design for Kidney Exchange in Handbook of Market Design*: Oxford Press.

Sotomayor, Marilda (2000) "Existence of Stable Outcomes and the Lattice Property for a Unified Matching Market," *Mathematical Social Sciences*, Vol. 39, pp. 119-132.

——— (2007) "Connecting the Cooperative and Competitive Structures of the Multiple-Partners Assignment Game," *Journal of Economic Theory*, Vol. 134, No. 1, pp. 155-174. May.

Svensson, Lars G. (1999) "Strategy-Proof Allocation of Indivisible Goods," *Social Choice and Welfare*, Vol. 16, pp. 557-567.

第2章　マッチング理論における安定性と Non-damaging bossy の両立不可能性定理

この章は，*Economics Bulletin* に掲載された Matsubae, Taisuke (2010) “Impossibility of Stable and Non-damaging bossy Mechanism ” にもとづかれた研究である．

2.1　はじめに

マッチングは，多くの市場において重要な役割を担っている．例えば，ある会社の就職を希望している労働者，学校に入学を希望している学生，結婚を考えている人々など，経済のみならず社会においてマッチングは重要な問題である．つまり，マッチング理論は，誰が誰と（どれと）マッチするのかを研究する分野である．したがって，マッチングの結果は，生活やキャリアに対して重要な影響を及ぼす．Two sided マッチング理論は，以前も紹介したように， Gale, David and Lloyd Shapley (1962) によって提案され分析された．そこでは，主体には，例えば労働者と企業，学校と学生，病院と研修医，また，男性と女性のような二つのタイプが存在する．そのような状況で，どのようなマッチングができるかを分析した．

1 章でも述べたようにマッチング理論に関する研究で最も積極的に研究されている分野の一つが，任意の市場に対して，マッチングを決定するメカニズムがどのような性質を満たすのかを研究する分野である．マッチング理論は，多くの現実的な問題に対して有用な答えを提案している．マッチング理論の実証研究において，ある性質を満たすメカニズムは，応用先で期待された結果が

達成されるが，その性質を満たさないメカニズムは，期待された結果が達成されないことが既存研究により実証されている．理論とその応用した結果の実証研究として，Roth, Alvin E. (2002) がある．

マッチング問題を考える市場のメカニズムをデザインするとき，そのメカニズムが安定性を満たすかどうかが中心となっている．上でも述べたように，安定性を満たすメカニズムは，期待された結果が応用先でも達成している．メカニズムが安定性を満たすとは，簡単にいうと，そのメカニズムによって導かれたマッチングから離脱するインセンティブが，各主体においてもペアにおいても存在しない．

一方，メカニズムの性質を考える上で重要な性質として，この章の中心となる **Nonbossy** という性質がある． この概念は，Satterthwaite, Mark A. and Hugo Sonnenschein (1981) によって導入された概念であり，多くの配分問題を考える上で重要な性質である．あるメカニズムが Nonbossy を満たすとは，自身の選好を操作することで，自分自身の配分は変更させないで，他の主体の配分を変更させることはできないという概念である．これは耐戦略性と関連する概念である．耐戦略性とは，自分の真の選好を表明することが支配戦略であるという概念であった．つまり，真の選好以外を表明したとしてもより選好するマッチングとはならないということを意味している．一方，Nonbossy の概念は，自身のマッチングは変化させずに，他の主体のマッチングに影響を及ぼす選好表明がないということである． Nonbossy は，以前解説した耐戦略性の公平性とは異なるが，ある種の公平性の概念とみなすことができる．なぜならば，ある主体が彼女自身のマッチングは変化しないにもかかわらず，他の人のマッチングを変更できるということは，ある種の「不公平」を生じさせる．この視点は，Kojima, Fuhito (2010) においても指摘されている．また，あるメカニズムが Nonbossy を満たさないならば，選好表明に関して戦略的な操作をするかもしれない．なぜならば，ある人が他の人に影響を与えることができるならば，その人に真の選好以外の表明をしてもらって，よりよい結果を得るかもしれない．その見返りに，後でより選好するマッチングを得られた主体は，彼女に何らかの金銭的な支払いを行うかもしれない．また，より悪い

方向として，真の選好を表明した場合よりも選好しないマッチングとなる主体に対して，そうしないことの見返りに金銭を要求するかもしれない．

Nonbossy が満たされないメカニズムは，新たな様々な問題を生じさせるので，それに関する研究が積極的になされている．たとえば，Nonbossy と耐戦略性の概念は，グループ耐戦略性と同値であることが，Papai, Szilvia (2000) によって示され，彼女は効率的かつグループ耐戦略性を満たす配分メカニズムを研究し，そのメカニズムの特徴付けをおこなった．また，彼女の研究と類似の研究として，Pycia, Marek and M. Utku Ünver (2009) がある．Ergin, Haluk (2002) は，学校選択制のもとで，学生プロポーズ DA メカニズムの結果が Nonbossy となる市場の特徴を明らかにした．その条件の下で, 学校選択制の学生プロポーズ DA メカニズムは，安定性かつグループ耐戦略性を満たすメカニズムであることを示した．

この章の最も関連する研究は，Kojima, Fuhito (2010) である．彼は，マッチング市場において，メカニズムを設計する人が安定性と Nonbossy をメカニズムが満たす重要な性質と考えるときに，そのようなメカニズムは構築可能かどうかを考察し，否定的な回答，つまり，安定性と Nonbossy が両立するメカニズムは存在しないことを示した．

そこで，本章のもとになっている Matsubae, Taisuke (2010) は，Nonbossy の概念を弱めた，**Non-damaging bossy** という概念と安定性の両立の可能性を研究している．つまり，Nonbossy ならば，Non-damaging bossy となる概念を新たに定義する．Non-damaging bossy という概念は，たとえ自分の結果を変化させることなく，他の人の結果を変更することが可能であっても，それが他の人にとって悪化させる結果を導かないならば，Non-damaging bossy を満たすという概念である．この概念は，以前に議論した後者の意味，つまり, 悪化させないことに対する見返りに金銭的な支払いが要求される可能性は排除できている．しかしながら，前者の意味，改善してもらうため見返りに金銭的な支払いをおこなう可能性は排除できていない．しかしながら，たとえそのような金銭的な支払い行為が行われたとしても，結果を悪化させないので，最小の公平性は維持できていると考えられる．

しかしながら，本章の結論は，残念ながら，そのようなメカニズムは存在しない．つまり，安定性と Non-damaging bossy が両立するようなメカニズムは存在しないということなる．

2.2 Two Sided マッチング・モデル

(S, C, R) の（一対一の）マッチング・モデルを考える.[1] 2 つの交わらない主体の集合 $S := \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ と $C := \{c_1, c_2, \ldots, c_m\}$ がある．つまり，$S \cap C = \varnothing$ である．集合 S を学生の集合，集合 C を学校の集合とよぶ．各学生 $s \in S$ は，学校の集合と自分自身の上に完備性と推移性を満たす選好関係 R_s をもつ.[2] cR_sc' かつ $\neg(c'R_sc)$ の場合を，cP_sc' とかく．自分自身に対して選好関係をもつということは，誰ともマッチングしない可能性も考慮していることを意味する．たとえば，選好関係 R_s は，次のような形で表現することにする．

$$R_s = c_1, c_2, s, c_3, \ldots, c_m.$$

この選好リストが意味することは，s が最も選好する学校は，c_1 で二番目に選好する学校は，c_2 である．彼の三番目の選好する学校は自分自身なので，誰ともマッチされないことを選好していることになる．つまり，この学生 s は，学校のある集合から選択する機会が与えられ c_1 が存在するならば，c_1 を選択するであろう．また c_1 も c_2 も選択できないならば，どの学校ともマッチされないままでいることを選好することになる．どの学校ともマッチされないことよりも下位にある学校，例えば c_3 のような学校は，学生 s にとって**アンアクセプタブル**と呼ばれる．一般的に選好関係はアンアクセプタブルな主体を除いた形で表現されることが多い．アンアクセプタブルな主体以外は**アクセプタブル**な主体といわれる．任意の二人のアクセプタブルな主体の間に無差別な

[1] ここでの結論は一対多のマッチング・モデルにおいても成り立つ．

[2] 選好関係が完備性を満たすとは，任意の学生 s と任意の $c, c' \in C \cup \{s\}$ に対して，cR_sc' または $c'R_sc$ のどちらかが成り立つ．選好関係が推移性を満たすとは，任意の学生 s と任意の学校 c, c' そして c'' に対して，cR_sc' かつ $c'R_sc''$ であるならば，cR_sc'' が成り立つことである．

ものがないか，かつアクセプタブルな主体にマッチされることと, マッチされないことの間に無差別がないならば，彼女または彼の選好関係は**厳密な選好関係**をもつといわれる.

各学校 c に対しても同様に，集合 $S \cup \{c\}$ 上に順序づけられた選好がリストとして表現される. 例えば，次のような選好関係がある.

$$R_c = s_1, s_2, c, s_3, \ldots, s_n.$$

この選好リストが意味することは，c が最も選好する学生は，s_1 で二番目に選好する学生は，s_2 である．この学校の三番目の選好する学生は自分自身なので，誰ともマッチされないことを選好していることになる．つまり，この学校 c は，学生のある集合から選択する機会が与えられ，s_1 が存在するならば，s_1 を選択するであろう．また s_1 も s_2 も選択できないならば，だれともマッチされないままでいることを選好することになる.

学生と学校の選好関係に関して，厳密な選好関係を仮定する．各学生 $s \in S$ に対して， $\mathcal{R}_s$ を $C \cup \{s\}$ におけるあらゆる選好関係の集合とする．また，同様に， 各学校 $c \in C$ に対して，$\mathcal{R}_c$ を $S \cup \{c\}$ のあらゆる選好関係の集合とする．$R \in \mathcal{R} = \prod_{i \in S \cup C} \mathcal{R}_i$ と表記する.

マッチング･モデルにおける結果は, **マッチング**または**割当て**とよばれる．マッチング $\mu : S \cup C \rightarrow S \cup C$ h 次のような性質を満たす写像である.

1. 任意の学生 $s \in S$ に対して，$\mu(s) \notin C \Rightarrow \mu(s) = \varnothing$,
2. 任意の学校 $c \in C$ に対して，$\mu(c) \notin S \Rightarrow \mu(c) = \varnothing$, かつ
3. 任意の学生 $s \in S$ と学校 $c \in C$ に対して，$\mu(s) = c \iff \mu(c) = s$.

つまり，あるサイドの主体は別のサイドの主体, または自分自身とマッチングする．また, c が s とマッチしているならば，s は c とマッチしていることを意味する．マッチングに対する主体の

選好は，マッチングされる相手に対する選好によって決定される．このことは，マッチングに対する外部性がないことを意味している．例えば，自分自身がマッチングしている相手は同じであるが，他の人がマッチングしている相手が変化することによりマッチングに対する評価は変化しないということである．$\mathcal{M}$ を $S \cup C$ 上のあらゆるマッチングの集合とする．

あるマッチング μ が**ある主体** $i \in S \cup C$ **によって，ブロックされる**とは，$iP_i\mu(i)$ となることをいう．任意の主体によるブロックがないとき，マッチング μ は**個人合理的**という．つまり，個人合理的なマッチングとは，アクセプタブルなマッチングということになる．

あるマッチング μ が**ペアー** $(s,c) \in S \times C$ **によってブロックされる**とは，

$$cP_s\mu(s) \text{ かつ } sP_c\mu(c)$$

となるようなペアが存在することである．つまり，マッチング μ でマッチングした相手よりもお互いに選好するようなペアが存在するならば，そのマッチングはそのペアによってブロックされるという．

定義 3 (安定性)**.** マッチング μ が，もし任意の主体またはペアによってブロックされないならば，**安定**であるという．

メカニズムとは，各マッチング市場において，マッチングを決定する手続きである．つまり，そのマーケットにいる主体を固定して考えると，メカニズムは，写像 $\phi : \mathcal{R} \to \mathcal{M}$ である．任意の選好プロファイルに対して，安定なマッチングを選択するメカニズムを**安定メカニズム**という．Gale, David and Lloyd Shapley (1962) は，全てのマッチング市場に対して，安定メカニズムは存在し，すべての選好プロファイルのもとで，安定なマッチングを発見する DA アルゴリズムを提案した．特に，任意の選好プロファイルに対し，学生プロポーズ DA アルゴリズムによる安定なマッチングをつねに導出するメカニズムを**学生最適安定メカニズム**という．

2.3 結果

Kojima, Fuhito (2010) は，安定性と Nonbossy が両立するメカニズムは存在しないことを示した．この概念は，Satterthwaite, Mark A. and Hugo Sonnenschein (1981) によって導入された概念である．メカニズムが Nonbossy の性質を満たすとは，自分自身の結果を変更することなしに，他の主体の結果を変更することはできない．つまり，自分の結果を変更して他の人の結果を変更することは認めている．この概念を数学的に書くと次のようになる．

定義 4 (Nonbossiness)**.** メカニズム ϕ が Nonbossy の性質を満たすとは，任意の選好プロファイル $R = (R_i, R_{-i})$, $R' = (R'_i, R_{-i})$ と任意の主体 i に対して，$\phi_i(R'_i, R_{-i}) = \phi_i(R)$ のときに $\phi(R'_i, R_{-i}) = \phi(R)$ となることである．

注意 41 (Theorem 1. (Kojima, Fuhito (2010)))**.** 安定性と Nonbossy が両立するメカニズムは存在しない．

Nonbossy の概念をつぎのように弱めることにより，安定性との両立可能性を研究する．

定義 5. メカニズム ϕ が Non-damaging bossy の性質を満たすとは， 任意の選好プロファイル $R = (R_i, R_{-i})$ と $R' = (R'_i, R_{-i})$ と任意の主体 i, j に対して，$\phi_i(R'_i, R_{-i}) = \phi_i(R)$ ならば $\phi_j(R'_i, R_{-i}) R_j \phi_j(R)$ が成り立つことである．.

メカニズムが Non-damaging bossy であるとは，自身の結果を変更させずに他の主体の結果を悪くすることはないということを要求している性質である．

注意 42. Nonbossy ならば，Non-damaging bossy である．

残念ながら，安定性と Non-damaging bossy を両立するようなメカニズムは存在しない．このことは次の定理で示される．Kojima, Fuhito (2010) と同様に例を用いて証明をおこなう．

定理 43. 任意の市場に対し安定性と Non-damaging bossy を両立するようなメカニズムは存在しない．

【証明】

3 人の学生と 3 つの学校で次のような選好関係 P をもつ市場を考える.

$$
\begin{aligned}
P_{s_1} &: c_2, c_1, c_3, s_1, \\
P_{s_2} &: c_2, c_3, c_1, s_2, \\
P_{s_3} &: c_1, c_2, c_3, s_3, \\
P_{c_1} &: s_1, s_2, s_3, c_1, \\
P_{c_2} &: s_3, s_2, s_1, c_2, \\
P_{c_3} &: c_3
\end{aligned}
$$

ここで，例えば，P_{s_1} は，学校 c_2 に入学することを第一希望とし，c_1 の学校に入学することを第二希望とし，第三希望は c_3 に入学することであり，彼女にとってこの市場にあるすべての学校がアクセプタブルである．また，学校 c_3 にとって最も選好する学生は自分自身なので，この学校に入学できる学生はだれもいないことになる．つまり，この学校にとってすべての学生はアンアクセプタブルとなる.

この市場において，一意な安定なマッチング $\mu(P)$ が存在する：

$$
\mu(P) = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \varnothing \\ s_1 & s_3 & \varnothing & s_2 \end{pmatrix}
$$

この結果は，学校 c_1 は学生 s_1 とマッチし， 学校 c_2 は学生 s_3 とマッチし, そして学校 c_3 と学生 s_2 は誰ともマッチしないことを意味する.

学生 s_2 が $P'_{s_2} : s_2$ と表明し，他のすべての主体は以前と同じである場合の市場を考えてみる．そ

のとき，次のような 2 つの安定なマッチング μ と μ' が存在する.

$$\mu = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \varnothing \\ \\ s_3 & s_1 & \varnothing & s_2 \end{pmatrix},$$

と

$$\mu' = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \varnothing \\ \\ s_1 & s_3 & \varnothing & s_2 \end{pmatrix}.$$

そこで，選好プロファイル $P' = (P'_{s_2}, P_{-s_2})$ が表明されたとき, 安定なマッチングをメカニズムは選択しなければならない.

メカニズム $\phi(P') = \mu$：

この場合, $\phi_{s_2}(P'_{s_2}, P_{-s_2}) = \phi_{s_2}(P)$. しかしながら, たとえば, 学校 c_1 は, $\phi_{c_1}(P)$ を $\phi_{c_1}(P'_{s_2}, P_{-s_2})$ より選好する．つまり， この $\phi(P') = \mu$ は Non-damaging bossy の性質を満たさないことになる.

メカニズム $\phi(P') = \mu'$：

一方，メカニズムが μ' を選択した場合を考える． つまり，$\phi(P'_{s_2}, P_{-s_2}) = \mu'$ である． そこで，$P''_{c_3} : s_1, s_3, c_3$ を考える．そのとき，安定メカニズム $\phi(P'_{s_2}, P''_{c_3}, P_{-s_2,c_3})$ は次のような結果を導く.

$$\phi(P'_{s_2}, P''_{c_3}, P_{-s_2,c_3}) = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \varnothing \\ \\ s_3 & s_1 & \varnothing & s_2 \end{pmatrix}$$

したがって, $\phi_{c_3}(P'_{s_2}, P''_{c_3}, P_{-s_2,c_3}) = \phi_{c_3}(P'_{s_2}, P_{-s_2})$ となる．しかしながら, 学校 c_1 は $\phi_{c_1}(P'_{s_2}, P_{-s_2})$ を $\phi_{c_1}(P'_{s_2}, P''_{c_2}, P_{-s_2,c_2})$ より選好する． つまり，そのメカニズム ϕ は，Non-damaging bossy の性質を満たさない. □

Ergin, Haluk (2002) が示しているように，片側のみの Nobossy を考えた場合も Kojima, Fuhito (2010) と同様の不可能性を得る.

系 44 (Ergin, Haluk (2002))**.** 全ての学生に対して Nonbossy かつ安定なメカニズムは存在しない.

しかしながら，ここで提案した Non-damaging bossy を学生にのみ課した場合，学生最適安定メカニズムは，この性質を満たす.

定義 6. メカニズム ϕ が**片側 Non-damaging bossy を満たす**とは，任意の学生 $s \in S$ とその学生の任意の選好プロファイル R と $R' = (R'_s, R_{-s})$ に対して，$\phi_s(R'_s, R_{-s}) = \phi_s(R)$ ならば $\phi_{s'}(R'_s, R_{-s}) R_{s'} \phi_{s'}(R)$ が成り立つことである.

定理 45. 学生最適安定メカニズムは，片側 Non-damaging bossy を満たす.

【証明】

背理法の仮定より，ある学生 s に対して $\phi_s(R'_s, R_{-s}) = \phi_s(R)$ であるとき，$\phi_{s'}(R) P_{s'} \phi_{s'}(R'_s, R_{-s})$ となる学生 s' が存在したとする.

最初の条件より，R'_s は少なくとも $\phi_s(R)$ の学校をアクセプタブルより上位にもってくる選好の変更しかできない．なぜならば，そうでないならば，もとの学校にさえマッチされないからである．そこで考えられる可能性は，もとの選好のもとでアクセプタブルな学校の中で，$\phi_s(R)$ の学校をもとの選好より上位にもっていくか，または下位にもっていくかである.

上位にもっていく場合，他の学生と競合する機会を減らすことにより，他の学生が悪くなる可能性はないことにより，最初の仮定に矛盾する.

下位にもっていく場合，他の学生と競合する可能性がある．しかしながら，そのアルゴリズムの最後に学生 s がマッチしている学校は変化しないので，その学校より上位にもっていた学校すべてに拒否されているはずである．したがって，他の学生がそれによって悪化することはないので，その仮定に矛盾する. □

このことは，学校選択制のように One sided マッチングの状況を考えるときには，自分の結果を変更させることなく他の主体の結果を変更させる可能性はあるが，それは悪化させることはないということなる.

2.4 おわりに

Kojima, Fuhito (2010) は，安定性と Nonbossy が両立するメカニズムは存在しないことを示した．つまり，彼は安定性を重視すると，自分の結果を変更しないで他の主体の結果を変更させる可能性は避けられないということを示した．つまり，その変化は，安定性に対する費用と考えることができる．このことは，以前に議論した安定性に対して効率性が費用となるということとは別に，安定性に費用が存在することを明らかにしたことになる．

さらに，本章では，Nonbossy を自然の形で弱めた Non-damaging bossy に変更したとしても，その費用は免れないことを示した．ある視点では，Kojima, Fuhito (2010) よりも悪い結果とも解釈できる．つまり，自分の結果を変えずに，他の主体を悪化させる可能性があることを明確化したからである．

さらに，Matsubae, Taisuke (2010) の拡張として，片側だけに Non-damaging bossy を課した場合には，学生最適安定マッチングメカニズムはその性質を満たすことを示した．このことは，Ergin, Haluk (2002) が示した否定的な回答をある程度，回復する発見である．なぜならば，学校選択制などの One sided マッチングにおいて，学生最適安定メカニズムを用いれば，自分の結果を変えずには他の学生の結果を悪化させることはないからである．

参考文献

Ergin, Haluk (2002) "Efficient Resource Allocation on the Basis of Priorities," *Econometrica*, Vol. 70, pp. 2489-2497.

Gale, David and Lloyd Shapley (1962) "College Admissions and the Stability of Marriage," *American Mathematical Monthly*, Vol. 69, No. 9, pp. 9-15.

Kojima, Fuhito (2010) "Impossibility of Stable and Nonbossy Matching Mechanism," *Economics Letters*, Vol. 107, pp. 69-70.

Matsubae, Taisuke (2010) "Impossibility of Stable and Non-Damaging Bossy Matching Mechanism," *Economics Bulletin*, Vol. 30, pp. 2092-2096.

Papai, Szilvia (2000) "Strategyproof Assignment by Hierarchical Exchange," *Econometrica*, Vol. 68, pp. 1403-1433.

Pycia, Marek and M. Utku Ünver (2009) "A Theory of House Allocation and Exchange Mechanisms," *memeo.*

Roth, Alvin E. (2002) "The Economist as Engineer: Game Theory, Experimentation, and Computation as Tools for Design Economics," *Econometrica*, Vol. 70, pp. 1341-1378.

Satterthwaite, Mark A. and Hugo Sonnenschein (1981) "Strategy-Proof Allocation Mechanisms at Differentiable Points," *Review of Economic Studies*, Vol. 48, pp. 587-597.

第3章　安定マッチング・メカニズムに関する考察

この章は，Matsubae, Taisuke (2012) の “A Note on Stable Matching Mechanisms” にもとづいて書かれている．

3.1　はじめに

繰り返しになるが，マッチング理論による研究は，Gale 教授と Shapley 教授が *American Mathematical Monthly* において 1962 年に発表した “College Admissions and the Stability of Marriage” が最初の研究といわれている.[1] 彼らが提案したマッチングの解概念として「安定性」という解概念がある．もし与えられたマッチングに対して，そのマッチングよりも誰ともマッチしない方がより選好する主体が存在しない，かつもとのマッチングよりも選好するマッチングを形成するペアが存在しないならば，そのマッチングは “安定マッチング” であるといわれる．彼らは，この安定マッチングが必ず存在し，それを発見するアルゴリズム，いわゆる DA アルゴリズムを示した．その後，彼らの提示した理論はマッチング理論とよばれ，そのマッチング理論を応用し，さまざまな現実の問題を解決した.[2]

マッチング理論を応用した一つの問題に，学生配置問題がある．トルコの大学において，学生にとってどのような入学制度がよりよいものか，また現状はどのような性質をもった制度なのかに対する回答を試みようとした研究が，この問題の端緒といわれている．この問題に対する研究は，Balinski, Michel and Tayfun Sönmez (1999) が最初といわれている．彼らは，標準化されたテストを用いた中央集権的な大学入学市場を考え，新たなマッチング・モデルのクラスを考察し

[1] Gale, David and Lloyd Shapley (1962)
[2] 本稿の 1 章や Roth, Alvin. E. (2013) を参照.

た．彼らは，トルコの大学で用いられているメカニズムの欠点を指摘し，それを改善するメカニズムを提案した．

そのモデルの中で一つの重要な性質として提案された，**改善を尊重する**という性質がる．この概念の拡張を本章において考察する．この概念を簡単にいうと，たとえば，大学入学試験などで学生の点数がよくなったときに，その良くなった学生はより望む大学に入学することができるようなメカニズムであるならば，そのメカニズムは改善を尊重するメカニズムといわれる．つまり，その性質を満たすメカニズムのもとで学生の大学への入学の問題を考えるならば，点数が上がった学生は必ずいままでよりも，より選好する大学に入学できるということである．学生最適安定メカニズムはこの性質を満たすことを彼らは示した．

本章において，この概念をグループ全体が改善した場合に尊重されるかどうかを検討する．つまり，あるグループの評価があがったならば，そのグループに属する主体全員が以前よりも良い結果をえることができるメカニズムが存在するかどうかを考察する．

Balinski, Michel and Tayfun Sönmez (1999) と類似の研究として，Hatfield, John William, Fuhito Kojima, and Yusuke Narita (2011) がある．彼らは，学校がある改善，例えば，校内にエアー・コンディショナーを作る，野球場を作る等をした場合，よりよい学生を獲得できる安定なメカニズムが存在するかどうかを考察している．それに対しては否定的な回答がえられている．また，効率性を満たすメカニズムにがあるかどうかに関しても否定的な回答がえられている．その否定的な回答に対する解決方法として，市場を大きくすることでその問題を解決可能であることを示した．具体的にいうと，市場を大きくすることで，学生最適 DA メカニズムは安定性とその性質が両立可能であることを示した．

3.2　大学入学市場

大学入学市場 は 4 つ組み (S, C, q, R) で表現される．ここで, S は有限の学生の集合 $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$, $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_p\}$ を有限の大学の集合，$q = \left\{q_{c_1}, q_{c_2}, \ldots, q_{c_p}\right\}$ を各大学における定員の集合で

その各要素は有限の整数である，そして

$$R = \left\{R_{s_1}, \ldots, R_{s_n}, R_{c_1}, \ldots, R_{c_p}\right\}$$

を選好関係のリストとする．ここで，R_s を $C \cup \{\varnothing\}$ 上の学生 s の選好関係とする．R_c を学生の集合 2^S 上の c の選好関係とする．P_s, P_c を R_s, R_c から導出される厳密な選好関係とする．ここでは，学生が大学にとってアクセプタブルかどうかは，彼女のクラスにいる他の学生に依存しないと仮定して議論する．つまり，どの学生が望ましいかどうかは学生の構成には依存しない．この特徴を**レスポンシブ**という.[3)] ここで, 各選好プロファイルを $R_S = (R_s)_{s\in S}$, $R_C = (R_c)_{c\in C}$ と表記し $R = R_S \times R_C$ とする． あらゆる選好プロファイルの集合を $\mathcal{R}$ とする.

定義 7. 大学の選好関係 R_c がその学校の定員に関してレスポンシブであるとは,

1. $|T| < q_c$ となる任意の $T \subseteq S$ と $s \in S \setminus T$ に対して,

$$(T \cup \{s\})\, P_c T \iff \{s\}\, P_c \varnothing.$$

2. $|T| < q_c$ となる任意の $T \subseteq S$ と $s, s' \in S \setminus T$ に対して,

$$(T \cup \{s\})\, P_c \left(T \cup \left\{s'\right\}\right) \iff \{s\}\, P_c \left\{s'\right\}.$$

大学入学市場におけるマッチングは，次のような性質を満たす．$\mu : C \cup S \to 2^{C\cup S}$ の対応となる.

1. すべての学生 s に対して，$|\mu(s)| = 1$, かつ任意の大学 $c \in C$ に対して $s \notin \mu(c)$ であるならば，$\mu(s) = \varnothing$;

2. すべての学生 $s \in S$ と $c \in C$ に対して, $\mu(s) = c \iff s \in \mu(c)$;

[3)] Roth, Alvin E. (1985) を参照.

3. すべての学校 $c \in C$ に対して，$|\mu(c)| \leq q_c$ かつ $\mu(c) \subseteq S$.

$\mathcal{M}$ を $S \cup C$ 上のあらゆるマッチングの集合とする．

マッチング μ が**学生 s によってブロックされる**とは，$\varnothing P_s \mu(s)$ であり，**大学 c によってブロックされるとは**，$\varnothing P_c \{s\}$ となるような $s \in \mu(c)$ が存在することをいう．マッチングが学生と大学によってブロックされないならば，**個人合理的**という．

マッチング μ が**ペア (s, c) によってブロックされるとは**,

1. $cP_s\mu(s)$ かつ,
2. (a) $|\mu(c)| = q_c$ かつ $\{s\}\, P_c\, \{s'\}\ \exists\, s' \in \mu(c)$, または,

   (b) $|\mu(c)| < q_c$ かつ $\{s\}\, P_c \varnothing$.

このブロッキングの定義はレスポンシブな選好のときは適切となる．

マッチングが**安定**であるとは，個人合理的かつペアによるブロックが存在しない場合をいう．

Gale, David and Lloyd Shapley (1962) は，すべての選好プロファイルのもとで，安定なマッチングを発見する，次のような学生プロポーズ DA アルゴリズムを提案した．

学生プロポーズ DA アルゴリズム

ステップ 1 学生からプロポーズする状況を考える．(もし彼女たちにアクセプタブルな学校があるならば) 各学生は第一希望の学校に応募する．その学校に応募した学生の中で，アクセプタブルな学生を学校の定員まで仮入学させる．それ以外の学生は拒否される．

ステップ $k \geq 2$ 任意のステップ k で，ステップ $k-1$ で拒否された任意の学生は，今までのステップで応募していない学校の中で最も選好する学校に応募する．各学校は，ステップ $k-1$ までに仮入学している学生と k 期に応募してきたアクセプタブルな学生の中から，より選好する学生を定員まで仮入学させる．それ以外の学生は拒否する．

そのアルゴリズムは，アクセプタブルな学校に応募する学生がいなくなったら終了する．学生の数と学校の数が有限であるので，有限のステップで終了する．

3.3 提携の改善

大学入学市場 (R_S, R'_C, q) が (R_S, R_C, q) に対する**提携** $S' \subseteq S$ **の改善とは**，任意の $s, s' \in S'$, $\tilde{s}, s^* \notin S'$ かつ任意の大学 $c \in C$ に対して，

- $sP_cs' \iff sP'_cs'$,
- $s^*P_c\tilde{s} \iff s^*P'_c\tilde{s}$, かつ
- $sP_cs^* \Longrightarrow sP'_cs^*$

の場合である．

メカニズムとは，各マッチング市場に対して，マッチングを決定する手続きである．つまり，そのマーケットにいる主体を固定して考えると，メカニズムは，選好プロファイルの集合からマッチングの集合への写像 ϕ である: $\phi : \mathcal{R} \to \mathcal{M}$．任意の選好プロファイルに対して，安定マッチングを選択するメカニズムを**安定メカニズム**という．特に，任意の市場に対して，学生最適安定マッチングを導出するメカニズムを学生最適安定メカニズム (SOSM) とよぶ．[4)] $\phi(P_S, P_C, q)(s)$ をあるメカニズムのもとで，市場 (P_S, P_C, q) における学生 s がマッチングした学校を表記する．

定義 8. 市場 (P_S, P_C, q) のもとで，メカニズム ϕ が**提携の改善を尊重する**とは，学生の任意の提携 $S' \subseteq S$ と全ての学生 $s' \in S'$ に対し，(P_S, P'_C, q) が学生の提携 S' の改善であるとき

$$\phi(P_S, P'_C, q)(s')R_{s'}\phi(P_S, P_C, q)(s')$$

となることである．

[4)] 学生最適安定マッチングの詳細は前章を参照．

定理 46. 任意の大学入学市場を考える．任意の提携 $S' \subseteq S$ に対して, SOSM は提携 S' に対する改善を尊重する.

【証明】

SOSM が任意の提携に対して改善を尊重することを示す．つまり，SOSM によるマッチング μ^S と提携の改善をおこなった SOSM によるマッチング μ'^S と任意の提携 $S' \subseteq S$ とそのメンバー $s' \in S'$ に対して, $\mu'^S(s')R_{s'}\mu^S(s')$ となることを示す.

背理法の仮定より，SOSM が提携に対する改善を尊重しないとする．(P_S, P_C, q) における提携 S' に対する改善を (P_S, P'_C, q) とする．μ'^S と μ^S を SOSM によるそれぞれのマッチングとする. 背理法の仮定より，次のような提携 S' と選好 P と P' が存在する.

すべての $s' \in S'$ に対し

$$\mu^S(s')P_{s'}\mu'^S(s').$$

μ^S は (P_S, P'_C, q) おいて安定なマッチングではない, なぜならば μ^S は (P_S, P_C, q) において学生最適安定マッチングであるからである.

いま，提携 S' のメンバーが μ^S となる相手のみをアクセプタブルであると選好を表明する場合を考える.

$P^*_{S'}$ を提携 S' に対するその選好プロファイルとする.

μ^S が $(P^*_{S'}, P_{-S'}, P'_C, q)$ において安定マッチングであることを示す.

μ^S は $(P^*_{S'}, P_{-S'}, P'_C, q)$ において個人合理的である.

背理法の仮定より，μ^S が $(P^*_{S'}, P_{-S'}, P'_C, q)$ のあるペア (s, c) によってブロックされたと仮定する．もし $s \notin S'$ の s のペア (c, s) がブロッキング・ペアであるならば, このペアは (P_S, P_C, q) においても，μ^S を必ずブロックする．しかしながら，これは矛盾である.

もし $s \in S'$ の s のペア (c, s) がブロッキング・ペアであるならば, このペアは，$(P^*_{S'}, P_{-S'}, P'_C, q)$ においてブロックはできない．なぜならば，それは，$(P^*_{S'}, P_{-S'}, P'_C, q)$ のもとで最も選好される

ペアだからである.

つまり，個人合理性とブロッキング・ペアが存在しないことより，μ^S は，$(P^*_{S'}, P_{-S'}, P'_C, q)$ において安定なマッチングである.

さらに，μ^S は $(P^*_{S'}, P_{-S'}, P'_C, q)$ における任意の他の安定なマッチングをパレート支配するので，次のようにならなければならない.

$$\phi^S(P^*_{S'}, P_{-S'}P'_C, q)(s') = \mu^S(s').$$

そこで最初の背理法の仮定より，

$$\phi^S(P^*_{S'}, P_{-S'}P'_C, q)(s')P_{s'}\phi^S(P_S, P'_C, q)(s').$$

つまり，このことは提携 S' が結合して真の選好以外の表明することにより，そこに属するメンバー全員が厳密に，真の選好を表明するよりも良くなっていることを意味している．しかしながら，これは Dubins, L. and D. Freedman (1981) の事実に矛盾する. □

次に，改善を尊重するのと逆に，改悪も尊重するかを考える．つまり，大学入学問題 $(P_S, \bar{P}_C, q)$ は次のような場合, (P_S, P_C, q) に対する**提携** $S' \subseteq S$ **の改悪**という． 任意の $s, s' \in S'$, $\tilde{s}, s^* \notin S'$ かつ $c \in C$ に対して， sP_cs' ならば sP'_cs', $\tilde{s}P_cs$ ならば $\tilde{s}\bar{P}_cs$, かつ $s^*P_c\tilde{s}$ ならば $s^*P_c\tilde{s}$ である.

定義 9. メカニズム ϕ **提携の改悪を尊重する**とは, 次のような場合である．任意の提携 S' とそのすべてのメンバー $s' \in S'$ に対して， (P_S, P'_C, q) を提携 S' における (P_S, P_C, q) の改悪とすると，

$$\phi_{s'}(P_S, P_C, q), R_{s'}\phi_{s'}(P_S, P'_C, q)$$

となる.

定理 47. 任意の提携 $S' \subseteq S$ に対して, SOSM は学生の提携の改悪を尊重する.

【証明】

SOSM が任意の提携に対して改悪を尊重することを示す．つまり，SOSM によるマッチング μ^S と提携の改悪をおこなった SOSM によるマッチング μ'^S と任意の提携 $S' \subseteq S$ とそのメンバー $s' \in S'$ に対して, $\mu^S(s')R_{s'}\mu'^S(s')$ となることを示す.

背理法の仮定より，SOSM が提携に対する改悪を尊重しないとする．(P_S, P_C, q) における提携 S' に対する改悪を (P_S, P'_C, q) とする．μ'^S と μ^S を SOSM によるそれぞれのマッチングとする. 背理法の仮定より，次のような提携 S' と選好 P と P' が存在する.

任意の $s' \in S'$ に対し

$$\mu'^S(s')P_{s'}\mu^S(s').$$

μ'^S は (P_S, P_C, q) おいて安定なマッチングとはならない．なぜならば, μ^S は (P_S, P_C, q) において学生最適安定マッチングであるからである.

提携 S' のメンバーが μ'^S のみがアクセプタブルであると選好を表明する場合を考える.

$P^*_{S'}$ を提携 S' に対するその選好プロファイルとする.

μ'^S が $(P^*_{S'}, P_{-S'}, P_C, q)$ において安定マッチングであることを示す.

μ'^S は $(P^*_{S'}, P_{-S'}, P_C, q)$ において個人合理的である.

背理法の仮定より，μ'^S が $(P^*_{S'}, P_{-S'}, P_C, q)$ のあるペア (c, s) によってブロックされたと仮定する．もし $s \notin S'$ の s のペア (c, s) がブロッキング・ペアであるならば, このペアは (P_S, P'_C, q) において μ^S を必ずブロックする．しかしながら，これは矛盾である.

もし $s \in S'$ の s のペア (c, s) がブロッキング・ペアであるならば, このペアはが $(P^*_{S'}, P_{-S'}, P_C, q)$ においてブロックはできない．なぜならば，それは，$(P^*_{S'}, P_{-S'}, P_C, q)$ のもとで最も選好されるペアだからである.

つまり，個人合理性とブロッキング・ペアが存在しないことより，μ'^S は，$(P^*_{S'}, P_{-S'}, P_C, q)$ において安定なマッチングである.

さらに，μ'^S は $(P^*_{S'}, P_{-S'}, P_C, q)$ における任意の他の安定なマッチングをパレート支配するので, 次のようにならなければならない.

$$\phi^S(P^*_{S'}, P_{-S'}, P_C, q)(s') = \mu'^S(s').$$

そこで最初の背理法の仮定より,

$$\phi^S(P^*_{S'}, P_{-S'}, P_C, q)(s') P_{s'} \phi^S(P_S, P_C, q)(s').$$

つまり，このことは提携 S' が結合して真の選好以外の表明をすることにより，そこに属するメンバー全員が厳密に，真の選好を表明するよりも良くなっていることを意味している．しかしながら，これは Dubins, L. and D. Freedman (1981) の事実に矛盾する. □

メカニズム ϕ が**提携に関する単調性を尊重する**とは，全ての提携 $S' \subseteq S$ に対して，ϕ が改悪と改善を提携に関して尊重することをいう.

つまり，定理 46, 47 から次のような系を導くことができる.

系 48. 任意の提携 $S' \subseteq S$ に対して, SOSM は提携に関して単調性を尊重する.

このことは，SOSM を学生配置問題において用いる一つの理由を示したことになる．この章の結論は，Balinski, Michel and Tayfun Sönmez (1999) の主張の一般化である，つまり，SOSM は，任意の学生の提携に対して，その提携の評価が上がったならば，その提携のメンバーは良い結果をえるメカニズムである．ここでの結論は，本稿でも論じる積極的差別是正政策におけるマイノリティの学生の厚生の改善効果とも関連する．このことは，後の章で論じる.

学生に対する単調性は SOSM によって満たされる性質だが，学校側に関してはそのような性質はないことが次の例からもわかる.

例 10. 次のような問題を考える．学校と学生の集合 $C = \{c_1, c_2, c_3\}$, $S = \{s_1, s_2, s_3\}$ とし， 選好

関係は次のように与えられているとする.

$$\begin{aligned}
P_{c_1} &: s_2, s_1, s_3, \\
P_{c_2} &: s_1, s_2, s_3, \\
P_{c_3} &: s_1, s_2, s_3, \\
P_{s_1} &: c_1, c_2, c_3, \\
P_{s_2} &: c_3, c_1, c_2, \\
P_{s_3} &: c_1, c_2, c_3.
\end{aligned}$$

このとき，一意な安定なマッチングは次のように与えられる.

$$\mu = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ s_1 & s_3 & s_2 \end{pmatrix}$$

そこで，学生 s_1 が学校 $C^*(= \{c_1, c_2\})$ のランキングを改悪したとする，

$$P'_{s_1} : c_3, c_1, c_2,$$

そして，他の主体 $i \neq s_1$ に対しては，$P'_i = P_i$ である．このとき，安定なマッチングは，次のように与えられる.

$$\mu' = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ s_2 & s_3 & s_1 \end{pmatrix}$$

学校 c_1, c_2 の両方を改悪したにもかかわらず，学校 c_1 は改善し，一方，学校 c_2 悪化している.

3.4 おわりに

この章において，学生最適安定メカニズムが様々な現実的な問題に対して用いられている利点に，新たな視点を与えた．この研究は，Balinski, Michel and Tayfun Sönmez (1999) の拡張となっている．彼らは各学生個人に焦点を与えたが，ここでの研究は学生のグループに焦点を与えた．数学的な意味でも一般化になっている．

しかしながら，学校側に関しては，最後の例も示しているように，学生が学校の評価を変更した場合，そのことにより学校が受ける結果を尊重しない．このような研究は，Hatfield, John William, Fuhito Kojima, and Yusuke Narita (2011) によってなされている．彼らは，学校が何らかの投資活動，たとえば学生にとってよりよい施設を設けるインセンティブと，安定性を導くメカニズムが存在するかの研究を行ったが，通常のマッチング理論においては否定的な回答がえられている．しかしながら，市場を大きくすることにより，この問題は解消できるという結論も彼らは示している．

参考文献

Balinski, Michel and Tayfun Sönmez (1999) "A Tale of Two Mechanisms: Student Placement," *Journal of Economic Theory*, Vol. 84, pp. 73-94.

Dubins, L. and D. Freedman (1981) "Machiavelli and the Gale-Shapley Algorithm," *American Mathematical Monthly*, Vol. 88, pp. 485-494.

Gale, David and Lloyd Shapley (1962) "College Admissions and the Stability of Marriage," *American Mathematical Monthly*, Vol. 69, No. 9, pp. 9-15.

Hatfield, John William, Fuhito Kojima, and Yusuke Narita (2011) "Promoting School Competition through School Choice: Promoting School Competition through School Choice: A Market Design Approach," *memeo.*

Matsubae, Taisuke (2012) "A Note on Stable Matching Mechanisms," *memeo.*

Roth, Alvin E. (1985) "The College Admissions Problem Is Not Equivalent to the Marriage problem," *Journal of Economic Theory*, Vol. 36, pp. 277-288.

Roth, Alvin. E. (2013) *What Have We Learned from Market Design? in Handbook of Market Design*: Oxford Press.

第 4 章　Two sided マッチング市場における戦略としての積極的差別是正政策

この章は，Matsubae, Taisuke (2011)“An Affirmative Action Policy as a Strategy on Two Sided Matching Market” をもとに書かれている．

4.1　はじめに

多くの経済環境において，マッチング市場は存在する．マッチング市場は，2 つのサイドに分かれた市場で，例えば，男性と女性，労働者と会社，従業員と社内の部署，学生と学校，病院と研修医などがある．それらの一方のサイドが，他方のサイドとマッチしたいと考えている状況をマッチング市場とよぶ．1 章でも解説したように，多くの研究者たちは，Two sided マッチング市場の理論を積極的に研究している．マッチング理論の研究は，理論的な関心もさることながら，現実の組織のデザインなどと密接に関係することから，多くの研究者がこの分野に非常に関心をもっている．この章は，企業または学校などが，Two sided マッチング市場の文脈で積極的差別是正政策を裁量的に自由に決めることが可能な状況をモデル化し，企業などが積極的差別是正政策を裁量的に実施する場合，市場の結果にどのような影響があるのかを考察する．

Two sided マッチング市場（多対一マッチング問題）の分析は， Gale, David and Lloyd Shapley (1962) による論文が発端である．彼らによって提案された労働者プロポーズ DA アルゴリズムは，現実にそのアルゴリズムを適用するにあたって十分有用な性質を有している．この労働者プロポーズ DA アルゴリズムによって導かれるマッチングは，安定性を満たし, 他の安定なマッチングをパレート支配するマッチングとなる．1 章，その他の章でも解説したように，安定性は，Gale, David and Lloyd Shapley (1962) によって提案されたマッチング市場の解概念の一つである．後に形式的に定義するが，簡単に述べると，安定マッチングとは，その市場に参加している人たちが，マッチしないよりもそのマッチングを選好し，かつ労働者は，いまマッチしている会社とは別のより選好する会社が存在したとしても，その会社はマッチングで割当てられた労働者のほうを選好する場合，そのマッチングは安定であるといわれる．さらに，労働者プロポーズ DA アルゴリズムは，労働者の選好表明に関して次のような望ましい性質をもつ．すべての労働者にとって真の選好を表明することが支配戦略となる，いわゆる労働者の選好に関して耐戦略性がある.[1)]

以前の章でも述べたように，就職または学校入学において，積極的差別是正政策は，差別的扱いを是正するにあたって重要な役割を持っている．積極的差別是正政策は，社会のあらゆるグループに対して機会の平等を担保するものである．その政策は，政府や教育機関によって，あらゆる社会のマイノリティがすべてのプログラムに参加できることを保証するように設定されている．

以前の章でも述べたように，マッチング理論の文脈において，積極的差別是正政策を考慮した研究は存在する.[2)]

Abdulkadiroğlu, A. (2005) は，大学入学問題の文脈において，積極的差別是正政策を考慮した学生（労働者）プロポーズ DA アルゴリズムは，すべの学生（労働者）に対して，真の選好を表明することが支配戦略になることを示した．

Kojima, Fuhito (2012) の研究は，学校選択の文脈において，積極的差別是正政策の厚生に与える効果を分析した．そこで，彼は，積極的差別政策を行うことで，すべてのマイノリティの厚生が悪化するような状況があることを示した.[3)]

ここでは，企業が積極的差別是正政策を実行するかどうかを戦略的に選択できる状況を分析する．[4)] 企業はそのような状況が与えられたときに，マイノリティの厚生を悪化させるだけではな

[1)]詳細の議論は，Roth, Alvin E. and Marild Sotomayor (1990) を参照．

[2)]Abdulkadiroğlu, A. (2005) や Kojima, Fuhito (2012).

[3)]Hafalir, Isa E., M. Bumin Yenmez, and Muhammed A. Yildirim (2013) は，Kojima, Fuhito (2012) とは異なる，積極的差別是正政策を考え，Kojima, Fuhito (2012) と同様にマイノリティの厚生を調べた．彼らの積極的差別是正政策のもとでは，Kojima, Fuhito (2012) とは異なり，あるマイノリティは，弱い意味でより選好される学校に入学することができるということを示した．

[4)]1 章でも解説したように，企業側の選好に関する戦略的行動に着目した研究も多く存在する．労働者の場合とは異

く，その企業にとってより良い結果を生み出すために，積極的差別是正政策を実行するような状況がないことと安定性は両立可能かどうかを研究する．つまり，企業は戦略的に積極的差別是正政策を利用し，その結果マイノリティの厚生を悪化させるような状況を発生させないかどうかを研究することは重要である．そこで，そのようなことが起こらないで，かつ安定なメカニズムがあるかどうかを検討する．企業が積極的差別是正政策を実行することでその企業はより望ましい労働者を獲得し，その企業にいるマイノリティの労働者の厚生を悪化させることを，企業による積極的差別是正政策の濫用と定義する．積極的差別是正政策を行うことで，その企業はより望ましい労働者を得ないか，またはマイノリティの厚生を悪化させていないならば，そのメカニズムは積極的差別是正政策の濫用に耐性があるという．しかしながら，本章は，積極的差別是正政策の濫用に耐性のある安定なメカニズムは存在しないことを示す．分析方法は，伝統的な不可能性定理を示す方法に従っている．例えば，Roth, Alvin E. (1982),Sönmez, Tyfun. (1997), Sönmez, Tyfun. (1999), Kojima, Fuhito (2012), Matsubae, Taisuke (2010) などを参照されたし．

4.2 職探しマッチング・モデル

ここでは，タイプ別の定員をもつ，次のような職探しマッチング問題を考える．ここでは，単純化のため，マジョリティとマイノリティの 2 つのタイプのみが市場にいる状況を考える．[5)]

タイプ別の定員をもつ職探しマッチング問題，または**職探し市場**は次のように構成されている．

1. $W = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ を有限な労働者の集合，

なり，任意の安定なマッチングを生み出すメカニズム（この場合，労働者プロポーズ DA メカニズムを含んでいる）は，すべての企業にとって真の選好を表明することは支配戦略とはならない．つまり，どんな安定メカニズムであっても，企業は真の選好を表明する代わりに偽の選好を表明することで，より選好する結果を得ることが可能ということである． Roth, Alvin E. (1982) は，任意の安定なメカニズムにおいて，企業は選好を戦略的に操作する可能性があることを示した．また，企業が募集人数も戦略変数となりうる．つまり，企業は募集定員を操作することにより，より選好する労働者を獲得することが可能な場合がある．Ehlers, Lars (2010) は，2 種類の定員を通じた戦略的操作が可能であることを示した．彼は，安定でかつ彼が定義した定員を減らすことによる戦略操作（これをタイプ II 戦略操作といっている）に耐性をもつメカニズムは存在しないことを示した．タイプ II 戦略的操作がないとは，企業は人数を減らすことにより，より望ましい労働者を得ることはできないということ意味する．Sönmez, Tyfun. (1997) は，少なくとも 3 人の労働者と 2 つの企業があるとき，定員を通じた耐戦略性と安定性が両立するメカニズムが存在しないことを示した．彼は，もしメカニズムが定員を通じた戦略的操作が可能ならば，そのとき，選好を通じた戦略的操作が可能であることも示した．

[5)] ここでの結果は，マジョリティがマイノリティより多いかどうかに依存しない．

2. $F=\{f_1,f_2,\ldots,f_m\}$ を有限な会社の集合,

3. 労働者の選好プロファイル $R_W=(R_{w_1},R_{w_2},\ldots,R_{w_n})$ で, R_{w_i} は, 労働者 $w_i\in W$ の会社 F とアンマッチ (アンマッチは $\varnothing$ と表記する) 上の選好関係である．選好関係は，厳密な選好関係であると仮定する．P_{w_i} は，次のように定義される．任意の会社 f,f' に対して，$f'P_{w_i}f$ であるならば，$f'R_{w_i}f$ か，または $fR_{w_i}f'$ のどちらかしか成り立たない．もし $fP_{w_i}\varnothing$ ならば, そのとき, 会社 f は労働者 w_i にとって**アクセプタブル**であるといわれる．労働者の集合は，二つの労働者のタイプに分割される．すなわち，集合 W^M を**マジョリティの労働者の集合**，そして W^m を**マイノリティの労働者の集合**とする.

4. 会社の選好プロファイル $\succeq_F=(\succeq_{f_1},\succeq_{f_2},\ldots,\succeq_{f_m})$ とし，$\succeq_{f_i}$ を会社 $f_i\in F$ の W とアンマッチ (アンマッチは $\varnothing$ と表記する) 上の選好関係である．その選好関係は厳密であり，そして**定員にレスポンシブ**であると仮定する.[6) 7)] $w'\succeq_f w$ または $w\succ_f w'$ のどちらかしか成り立たないならば，$w'\succ_f w$ と表記する． もし $W'\succ_f\varnothing$ であるならば, そのとき，労働者の集合 $W'\subset W$ は，会社 f にとって**アクセプタブル**であるといわれる.

5. 各会社 $f\in F$ に対して, $\mathbf{q}_f=(q_f,q_f^M)$ を会社 f の**定員ベクトル**とよぶ． ここで，このベクトルの第一要素 q_f は，その会社 f 全体の定員を表現し，第二要素 q_f^M をマジョリティの労働者に対する定員を表現している.

ある職探し市場を $G=(W,F,(R_w)_{w\in W},(\succeq)_{f\in F},(\mathbf{q}_f)_{f\in F})$ と表記する.

マッチングの概念を次のよう定義する.[8)]

マッチング μ は， 集合 $W\cup F$ から $W\cup F$ のあらゆる部分集合への写像で，次のような性質をもつ.

[6)] 会社 f の選好関係 $\succeq_f$ が定員 q_f にレスポンシブであるとは, (a) すべての $w,w'\in W$ に対して, もし $\{w\}\succ_f\{w'\}$ であるならば, そのとき，任意の $W'\subseteq W\setminus\{w,w'\}$ に対して, $W'\cup\{w\}\succ_f W'\cup\{w'\}$, (b) すべての $w,w'\in W$ に対して， $\{w\}\succ_f\varnothing$ であるならば，そのとき，$|W'|<q_f$ となるような任意の $W'\subseteq W$ に対して，$W'\cup\{w\}\succ_f W'$, かつ (c) $|W'|>q_f$ となるような $W'\subseteq W$ に対して， $\varnothing\succ_c S'$ となる.

[7)] ここでの結果は，定員に対してレスポンシブの選好を仮定しているがより広いクラスの選好関係でも成り立つ.

[8)] Kojima, Fuhito (2012) を参照.

1. すべての労働者 w に対して，$|\mu(w)| = 1$, かつ $\mu(w) = \varnothing$ ならば，すべての会社 $f \in F$ に対し $w \notin \mu(f)$, [9] [10]

2. すべての労働者 $w \in W$ と会社 $f \in F$ に対し $\mu(w) = f$ であるならば，その場合に限り $w \in \mu(f)$,

3. 任意の会社 $f \in F$ に対し $|\mu(f)| \leq q_f$ かつ $\mu(f) \subseteq W$ である,

4. 任意の会社 $f \in F$ に対し $|\mu(f) \cap W^M| \leq q_f^M$ である.

このマッチングの定義は， 1-3 の標準的な定義に加えて，4 が, このモデルにおいては必要である． 4 の意味することは，各会社 f にマッチしたマジョリティの労働者は，マジョリティの定員 q_f^M 以下でなければならないことを要求している．$\mathcal{M}$ をマッチングの集合とする.

このモデルにおける安定なマッチングを定義する.[11]

マッチング μ が**安定**であるとは，次の条件を満たすことである.

1. 任意の労働者 $w \in W$ に対して, $\mu(w) R_w \varnothing$ で, かつ任意の会社 $f \in F$ と任意の労働者 $w \in \mu(f)$ に対し $w \succeq_f \varnothing$ であり，かつ

2. もし $f P_w \mu(w)$ となる労働者 w と会社 f のペア $(w, f) \in W \times F$ が存在するならば,

   (a) $|\mu(f)| = q_f$ かつ，ある労働者 $w' \in \mu(f)$ に対して，$w' \succ_f w$, または

   (b) $w \in W^M$, $|\mu(f) \cap W^M| = q_f^M$，かつ, あるマジョリティの労働者 $w' \in (\mu(f) \cap W^M)$ に対して，$w' \succ_f w$

   のどちらかが成り立つ.

[9] $\mu(f) = \{w \in W \mid \mu(w) = f\}$
[10] 各労働者は，一つの会社かまたは何処にもマッチされないかであるので，中括弧を外して表記する：$\mu(w) = \{f\}$ の代わりに $\mu(w) = f$ とかき，かつ $\mu(w) = \{w\}$ の代わりに $\mu(w) = w$ とかく.
[11] Kojima, Fuhito (2012) を参照.

この定義は，(2b) 以外標準的なものであるが，労働者 w がマジョリティに属しているとき， たとえ会社 f の全体の定員に空きがあり，かつアクセプタブルな労働者であったとしても，マジョリティの定員が埋まってしまっていて，いまその会社にマッチされているマジョリティの労働者よりも選好されない状況であることを意味している．

メカニズムは，次のような各市場 G に対する，写像 ϕ で表現される．つまり，$\phi : G \to \mathcal{M}$ となり，各市場に対してあるマッチングを決定する．

メカニズム ϕ が安定であるとは， $\phi(G)$ は任意の市場 G に対し決定されたマッチングが，安定なマッチングとなることをいう． 市場 G に対し労働者 w がマッチした会社を $\phi_w(G)$ と表記する．また，$\phi_f(G)$ を市場 G で会社 f に，そのメカニズムによってマッチされた労働者の集合とする．

安定メカニズムを $\phi^S(\cdot)$ と表記する．

4.3 積極的差別是正政策の濫用耐性と安定性

この節では，積極的差別是正政策を私的利益のみに用いることがない，安定なメカニズムが存在するかを考察する．

各会社が，積極的差別是正政策を実行するかどうかを，各会社の裁量に任されている状況を考える．しかしながら，各会社は積極的差別是正政策以外の目的で定員や選好を操作することは，法律や制度などによって禁止されているとする．なぜならば，1 章でも述べたように，会社による定員や選好の戦略的操作と安定性は両立しないのは，すでに示されている事実であるからである．

会社 f が**積極的差別是正政策を実施する**とは，$q_f = \tilde{q}_f$, $q_f^M > \tilde{q}_f^M$ となるようにマジョリティの定員を減らすことである．つまり，$\tilde{\mathbf{q}}_f = \left(\tilde{q}_f, \tilde{q}_f^M\right)$ である．

市場 $G = (W, F, (R_w)_{w \in W}, (\succeq)_{f \in F}, (\mathbf{q}_f, \mathbf{q}_{-f}))$ を考える． その市場 G とは別の市場 $\tilde{G} = (W, F, (R_w)_{w \in W}, (\succeq)_{f \in F}, (\tilde{\mathbf{q}}_f, \mathbf{q}_{-f}))$ を会社 f が積極的差別是正政策を実施した市場とする．

定義 10. メカニズム ϕ のもとで， 市場 G において会社 f が**積極的差別是正政策を濫用する**とは，次のような条件を満たすことである．

1. 会社 f によって積極的差別是正政策が実施された市場 $\tilde{G}$ が存在し，かつ

2. $w \succ_f w'$ となるような $w \in \phi_f(\tilde{G})$ と $w' \in \phi_f(G)$ が存在し，かつ $\phi_{w''}(G) P_{w''} \phi_{w''}(\tilde{G})$ となるような $w'' \in W$ が存在する．

この定義は，ある会社 f が積極的差別是正政策を実施したときの市場 $\tilde{G}$ において，マイノリティの労働者は，以前よりもより悪い会社とマッチし，積極的差別是正政策を実施した会社は，以前よりもよりよい労働者を獲得しているような場合を積極的差別是正政策を濫用していると考える．このような状況は，明らかに，本来の積極的差別是正政策の目的に反している．そこで，そのような状況を防止できる安定なメカニズムがあるかどうかを考察する．

任意の市場において，あるメカニズムのもとで，積極的差別是正政策を濫用する会社が存在しないならば，そのメカニズムは**積極的差別是正政策の濫用に耐性がある**と考える．そこで，積極的差別是正政策の濫用に対する耐性を満たす安定なメカニズムが存在することを期待したい．しかしながら，次の定理が示すように，残念ながら，安定かつ積極的差別是正政策の濫用に耐性があるメカニズムは存在しない．

定理 49. 任意の市場に対して，積極的差別是正政策の濫用に対する耐性がある安定なメカニズムは存在しない．

【証明】

反例を用いて証明を行う．

次のような市場 G を考える．

$$G = (W, F, (R_w)_{w \in W}, (\succeq_f)_{f \in F}, (\mathbf{q}_f)_{f \in F}).$$

市場 G は次のように構成されている．

労働者の集合 $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$, 会社の集合 $F = \{f_1, f_2, f_3\}$, マジョリティの労働者の集合

$W^M = \{w_1, w_2, w_4\}$, そして，マイノリティの労働者の集合 $W^m = \{w_3\}$ とする.

労働者の選好は次のように与えられている.

$$\begin{aligned} R_{w_1} &: \ f_1, f_3, f_2, \\ R_{w_2} &: \ f_1, f_2, f_3, \\ R_{w_3} &: \ f_2, f_3, f_1, \\ R_{w_4} &: \ f_1, f_2, f_3, \end{aligned}$$

ここで，表記の便宜上，そのリストの順が会社に対する選好順序であり，そのリストにない会社はアンアクセプタブルの会社である.

会社の選好と定員は次のように与えられている.

$$\begin{aligned} \succeq_{f_1} &: \ w_3, w_2, w_1, w_4 \qquad \mathbf{q}_{f_1} = (q_{f_1}, q^M_{f_1}) = (2, 2), \\ \succeq_{f_2} &: \ w_1, w_3, w_2, w_4 \qquad \mathbf{q}_{f_2} = (q_{f_2}, q^M_{f_2}) = (1, 1), \\ \succeq_{f_3} &: \ w_1, w_2, w_4, w_3 \qquad \mathbf{q}_{f_3} = (q_{f_3}, q^M_{f_3}) = (1, 1), \end{aligned}$$

ここで，表記の便宜上，そのリストの順が学生に対する選好順序であり，そのリストにない学生はアンアクセプタブルの労働者である.

例えば，会社 f_1 は労働者 w_3 を最も選好し，労働者 w_2 が二番目に選好され，労働者 w_1 が三番目に選好され，そして，労働者 w_4 が最も選好されないアクセプタブルな労働者である.

この市場 G における安定なマッチング $\phi^S(G)$ は，次のように与えられる.

$$\phi^S(G) = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ w_1, w_2 & w_3 & w_4 \end{pmatrix},$$

つまり，会社 f_1 は労働者 w_1 と w_2 とマッチし， 会社 f_2 は労働者 w_3 とマッチし，会社 f_3 は労働

者 w_4 とマッチすることが一意な安定なマッチングとなることを意味している.

いま，会社 f_1 が積極的差別是正政策を実施した状況を考える．つまり，$(\tilde{\mathbf{q}}_f)_{f\in F} = (\tilde{\mathbf{q}}_{f_1}, \mathbf{q}_{-f_1})$, ここで，$\tilde{\mathbf{q}}_{f_1} = (2,1)$, $\mathbf{q}_{f_2} = (1,1)$, かつ $\mathbf{q}_{f_3} = (1,1)$ である．つまり，新たな市場 $\tilde{G}$ は,

$$\tilde{G} = (W, F, (R_w)_{w\in W}, (\succeq_f)_{f\in F}, (\tilde{\mathbf{q}}_f)_{f\in F}),$$

となり，会社 f_1 が積極的差別是正政策を実施したことになる.

市場 $\tilde{G}$ において，一意な安定なマッチング $\phi^{\mathrm{S}}(\tilde{G})$ は次のように与えられる.

$$\phi^{\mathrm{f}}(\tilde{G}) = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ \\ w_2, w_3 & w_1 & w_4 \end{pmatrix}.$$

マイノリティの労働者 w_3 は，市場 $\tilde{G}$ のもとで市場 G よりも厳密に悪くなっており，その原因は積極的差別是正政策を実施した会社にマッチしているためである．さらに，積極的差別是正政策を実施した会社 f_1 は市場 $\tilde{G}$ のもとで， 市場 G よりも良くなっている．それゆえ，安定かつ積極的差別是正政策の濫用に対する耐性のあるメカニズムは存在しないことがわかる. □

この結果は，積極的差別是正政策を濫用の耐性と安定性が両立するようなメカニズムは存在しないことを示している．この定理より，会社は常に自分の私的な利益のために積極的差別是正政策を用いられるようにみえるが，その直観は誤りである．次の例が示すように，会社が積極的差別是正政策を採用することにより，マイノリティの労働者の構成が改善する場合もある．次の例は，ここでの文脈とは異なるが，Kojima, Fuhito (2012) で用いられた例である.

例 11 (Kojima, Fuhito (2012) の例)**.** 次のような市場 G を考える.

$$G = (W, F, (R_w)_{w\in W}, (\succeq_f)_{f\in F}, (\boldsymbol{q}_f)_{f\in F}).$$

市場 G は次のように構成されている.

労働者の集合 $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$, 会社の集合 $F = \{f_1, f_2\}$, マジョリティの労働者の集合 $W^M = \{w_1, w_2, w_3\}$, そして，マイノリティの労働者の集合 $W^m = \{w_4\}$ とする.

労働者の選好は次のように与えられている.

$$
\begin{aligned}
R_{w_1} &: f_1, \\
R_{w_2} &: f_1, \\
R_{w_3} &: f_1, f_2, \\
R_{w_4} &: f_2, f_1.
\end{aligned}
$$

会社の選好と定員は次のように与えられている.

$$
\begin{aligned}
\succeq_{f_1} &: w_1, w_4, w_2, w_3 \qquad \boldsymbol{q}_{f_1} = (q_{f_1}, q^M_{f_1}) = (2, 2), \\
\succeq_{f_2} &: w_3, w_4, w_2, w_1 \qquad \boldsymbol{q}_{f_2} = (q_{f_2}, q^M_{f_2}) = (1, 1).
\end{aligned}
$$

この市場 G における安定なマッチング $\phi^S(G)$ は，次のように与えられる.

$$
\phi^S(G) = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \varnothing \\ w_1, w_4 & w_3 & w_2 \end{pmatrix},
$$

いま，会社 f_1 が積極的差別是正政策を実施した状況を考える．つまり，$(\tilde{\boldsymbol{q}}_f)_{f \in F} = (\tilde{\boldsymbol{q}}_{f_1}, \boldsymbol{q}_{-f_1})$, ここで，$\tilde{\boldsymbol{q}}_{f_1} = (2, 1)$, $\boldsymbol{q}_{f_2} = (1, 1)$．つまり，新たな市場 $\tilde{G}$ は,

$$
\tilde{G} = (W, F, (R_w)_{w \in W}, (\succeq_f)_{f \in F}, (\tilde{\boldsymbol{q}}_f)_{f \in F}),
$$

となり，会社 f_1 が積極的差別是正政策を実施したことになる.

市場 $\tilde{G}$ において，一意な安定なマッチング $\phi^S(\tilde{G})$ は次のように与えられる．

$$\phi^f(\tilde{G}) = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \varnothing \\ \\ w_1, w_4 & w_3 & w_2 \end{pmatrix}.$$

マイノリティの労働者 w_4 は，市場 $\tilde{G}$ のもとで市場 G よりも悪化していないし，積極的差別是正政策を実施した会社 f_1 は，市場 $\tilde{G}$ のもとで市場 G よりもよくなっていない．それゆえ，安定かつ積極的差別是正政策の濫用に対する耐性があり安定な結果となる．

いままで，任意の安定なメカニズムに対して，会社が積極的差別是正政策の濫用に耐性があるかどうかをみてきた．Kojima, Fuhito (2012) により，別の積極的差別是正政策が提議されている．彼は，その積極的差別是正政策を**選好にもとづいた積極的差別是正政策**とよんだ．

市場 $\tilde{G} = (W, F, (R_w)_{w\in W}, (\tilde{\succeq}_f)_{f\in F}, (\mathbf{q}_f)_{f\in F})$ が，市場 $G = (W, F, (R_w)_{w\in W}, (\succeq)_{f\in F}, (\mathbf{q}_f)_{f\in F})$ よりも強く選好に基づいた積極的差別是正政策であるとは，すべての会社 $f \in F$ かつ労働者 $w, w' \in W$ に対して，$w \succeq_f w'$ かつ $w \in W^m$ であるとき，$w \tilde{\succeq}_f w'$ となることをいう．

以前と同様に，ここでもこのような積極的差別是正政策を各会社の裁量により選択できる状況を考察する．市場 $\tilde{G}$ を $(W, F, (R_w)_{w\in W}, (\tilde{\succeq}_f, \succeq_{-f}), (\mathbf{q}_f)_{f\in F})$ とする．ここで，$\tilde{\succeq}_f$ は，会社 f による，グループの中の順番はそのままで，マジョリティの労働者より低い順番にいるマイノリティの労働者を改善した選好とする．[12)]

以前と同様に，選好に基づいた積極的差別政策の濫用を次のように定義する．

定義 11. メカニズム ϕ のもとで，市場 G において会社 f が**選好にもとづいた積極的差別是正政策を濫用する**とは，次のような条件を満たすことである．

1. 会社 f によって選好にもとづかれた積極的差別是正政策が実施された市場 $\tilde{G}$ が存在し，かつ

2. $w \succ_f w'$ となるような $w \in \phi_f(\tilde{G})$ と $w' \in \phi_f(G)$ が存在し，かつ $\phi_{w''}(G) P_{w''} \phi_{w''}(\tilde{G})$ となる

12) $\succeq_{-f} = (\succeq_{f'})_{f' \in F\setminus\{f\}}$.

ような $w'' \in W$ が存在する.

あるメカニズムのもとで，任意の市場に対し選好に基づいた積極的差別是正政策を濫用する会社がないならば，そのメカニズムは**（選好に基づいた積極的差別優遇政の）濫用に耐性がある**という．そこで，選好にもとづいた積極的差別是正政策の濫用に対する耐性を満たす安定なメカニズムが存在するかどうかを分析する．次の定理が示すように，残念ながら，そのような，安定かつ選好にもとづいた積極的差別是正政策の濫用に耐性があるメカニズムは存在しない.

この定義は，会社に対する選好の耐戦略性と非常に似ているが，労働者の選好も含んでいるので，一般的な耐戦略性よりも弱い条件となる．つまり，会社に対する耐戦略性を満たすならば，この選好にもとづいた積極的差別是正政策の濫用に対する耐性は満たされるが，この逆は一般に成り立たない.

定理 50. 任意の市場に対し，選好にもとづいた積極的差別是正政策の濫用に耐性がある，安定なメカニズムは存在しない.

【証明】

以前の証明と同様に，反例を用いて証明を行う.

$$G = (W, F, (R_w)_{w \in W}, (\succeq_f)_{f \in F}, (\mathbf{q}_f)_{f \in F}).$$

市場 G は次のように構成されている.

労働者の集合 $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$, 会社の集合 $F = \{f_1, f_2, f_3\}$, マジョリティの労働者の集合 $W^M = \{w_1, w_3\}$, そして，マイノリティの労働者の集合 $W^m = \{w_2, w_4, w_5\}$ とする.

労働者の選好は次のように与えられている.

$$
\begin{aligned}
R_{w_1} &: \; f_3, f_2, f_1, \\
R_{w_2} &: \; f_2, f_1, f_3, \\
R_{w_3} &: \; f_1, f_3, f_2, \\
R_{w_4} &: \; f_1, f_2, f_3, \\
R_{w_5} &: \; f_1.
\end{aligned}
$$

会社の選好と定員は次のように与えられている.

$$
\begin{aligned}
\succsim_{f_1} &: \; w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, \qquad \mathbf{q}_{f_1} = (q_{f_1}, q^M_{f_1}) = (2,2), \\
\succsim_{f_2} &: \; w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, \qquad \mathbf{q}_{f_2} = (q_{f_2}, q^M_{f_2}) = (1,1), \\
\succsim_{f_3} &: \; w_3, w_1, w_2, w_4, w_5, \qquad \mathbf{q}_{f_3} = (q_{f_3}, q^M_{f_3}) = (1,1).
\end{aligned}
$$

この市場 G における安定なマッチング $\phi^S(G)$ は，次のように与えられる.

$$
\phi^S(G) = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & \varnothing \\ w_3, w_4 & w_2 & w_1 & w_5 \end{pmatrix},
$$

ここで，会社 f_1 は選好に基づいた，積極的差別是正政策を次のように実施したとする.

$$
\succsim'_{f_1} \; : \; w_1, w_2, w_4, w_5, w_3 \qquad \mathbf{q}_{f_1} = (q_{f_1}, q^M_{f_1}) = (2,2).
$$

市場 $\tilde{G} = (W, F, (R_w)_{w \in W}, (\tilde{\succsim}_{f_1}, \succsim_{-f_1}), (\mathbf{q}_f)_{f \in F})$ とする．その市場 $\tilde{G}$ における一意な安定な

マッチング $\phi^S(\tilde{G})$ は次のように与えられる．

$$\phi^S(\tilde{G}) = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & \varnothing \\ w_2, w_4 & w_1 & w_3 & w_5 \end{pmatrix},$$

選好に基づいた積極的差別是正政策を実行した会社 f_1 は，$\tilde{G}$ のもとで G よりよい労働者を獲得しているが，　マイノリティの労働者 w_2 は $\tilde{G}$ のもとで，G よりも望まない会社とマッチしていることになる．すなわち，選好にもとづいた積極的差別是正政策の濫用に耐性がないということがわかる． □

この結果は，安定なメカニズムに対して選好にもとづいた積極的差別是正政策を，マイノリティのために用いるという本来の目的に反して使用する可能性を示唆している．しかしながら，以前と同様に，ある市場においては，安定なメカニズムと，この選好にもとづいた積極的差別是正政策の濫用に耐性をもつ可能性がある．次の例は，そのことを示唆している．

例 12.

$$G = (W, F, (R_w)_{w\in W}, (\succeq_f)_{f\in F}, (\boldsymbol{q}_f)_{f\in F}).$$

市場 G は次のように構成されている．

労働者の集合 $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$, 会社の集合 $F = \{f_1, f_2, f_3\}$, マジョリティの労働者の集合 $W^M = \{w_1, w_3\}$, そして，マイノリティの労働者の集合 $W^m = \{w_2\}$ とする．

労働者の選好は次のように与えられている．

$$\begin{aligned} R_{w_1} &: f_2, f_1, \\ R_{w_2} &: f_1, f_2, \\ R_{w_3} &: f_2, f_1. \end{aligned}$$

会社の選好と定員は次のように与えられている.

$$\succeq_{f_1} \; : \; w_1, w_2, w_3 \qquad \boldsymbol{q}_{f_1} = (q_{f_1}, q_{f_1}^M) = (1,1),$$
$$\succeq_{f_2} \; : \; w_1, w_3, w_2 \qquad \boldsymbol{q}_{f_2} = (q_{f_2}, q_{f_2}^M) = (1,1).$$

この市場 G における安定なマッチング $\phi^S(G)$ は，次のように与えられる.

$$\phi^S(G) = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \varnothing \\ \\ w_2, & w_1 & w_3 \end{pmatrix}.$$

会社 f_1 が次のように選好に基づいた積極的差別是正政策を実行したとする.

$$\succeq_{f_1}' \; : \; w_2, w_1, w_3 \qquad \boldsymbol{q}_{f_1} = (q_{f_1}, q_{f_1}^M) = (1,1).$$

特に，この選好の操作は，会社 f_1 にとって唯一の選好にもとづいた積極的差別是正政策である.

それにもとづいた市場 $\tilde{G}$ において, 唯一の安定なマッチング $\phi^S(\tilde{G})$ は次のように与えられる.

$$\phi^S(\tilde{G}) = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \varnothing \\ \\ w_2, & w_1 & w_3 \end{pmatrix}.$$

どちらの市場においても，マッチングは変化してないので，マイノリティの労働者も悪くなってないし，選好に基づいた積極的差別是正政策を実行した会社も改善していない.

次に，会社 f_2 が次のように選好にもとづいた積極的差別是正政策を実行したとする.

$$\succeq_{f_2}' : w_3, w_1, w_2 \qquad \boldsymbol{q}_{f_2} = (q_{f_2}, q_{f_2}^M) = (1,1).$$

特に，この選好の操作は，会社 f_2 にとって唯一の選好にもとづいた積極的差別是正政策である.

唯一の安定なマッチング $\phi^S(\tilde{G})$ は次のように与えられる.

$$\phi^S(\tilde{G}) = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \varnothing \\ \\ w_2, & w_3 & w_1 \end{pmatrix}.$$

市場 $\tilde{G}'$ に対し一意な安定マッチング $\phi^{stable}(\tilde{G}')$ は次のように与えられる.

$$\phi^{stable}(\tilde{G}') = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \varnothing \\ \\ s_2 & s_3 & s_1 \end{pmatrix}$$

ここで，マイノリティの労働者 w_3 は，市場 G よりも市場 $\tilde{G}$ においてより選好される会社にマッチさている.

マイノリティの労働者は，任意の会社が選好にもとづいた積極的差別是正政策を行ったとしても，もとの市場において，より悪くなる会社にマッチすることはない．つまり，この例は，安定かつ選好にもとづいた積極的差別是正政策の濫用に耐性をもつ市場が，存在することを示している.

4.4 おわりに

本章において，積極的差別是正政策を各会社が裁量的に選択できる場合，職探し市場において，本来，意図しているマイノリティの労働者に，メリットがある政策かどうかを研究した．少なくとも，積極的差別是正政策を意図的に実施することにより，その企業にメリットがあり，マイノリティの労働者にはデメリットになるような状況は望ましいとはいえない．本章において，積極的差別是正政策の濫用に耐性と通常のマッチング問題において重要とされている性質である安定性が両立するかどうかを検討した．しかしながら，残念なことにそのようなメカニズムは存在しないことを示した．一方，その否定的な結果をえたが，全ての市場においてそのような結果となるわけではないことも例示した.

Kojima, Fuhito (2012) は，積極的差別是正政策がマイノリティの厚生を傷つける可能性があるという結果を示した．本章のように会社が積極的差別是正政策を実施するかどうかの選択が裁量的に行える場合，意図的にマイノリティを傷つける可能性がある．このことは，積極的差別是正政策をどのように実施するのかも慎重に考えるべきであるという新たな問題を提示した．

さらに，本稿で示したように，積極的差別政策各会社が裁量的に選択できる場合，それを会社が実施することにより望ましい労働者を採用でき，マイノリティの労働者にとってはそれを実施したことにより望まない会社に採用されることになってしまう．

さらなる研究方向として．マッチング問題において，安定性以外に効率性を重視した TTC のようなメカニズムが，ここでの積極的差別是正政策の濫用に耐性があるかどうかの検討は重要である．

参考文献

Abdulkadiroğlu, A. (2005) "College Admissions with Affirmative Action," *International Journal of Game Theory*, Vol. 33, No. 4, pp. 535-549.

Ehlers, Lars (2010) "Manipulation via Capacities Revisited," *Games and Economic Behavior*, Vol. 69, pp. 302-311.

Gale, David and Lloyd Shapley (1962) "College Admissions and the Stability of Marriage," *American Mathematical Monthly*, Vol. 69, pp. 9-15.

Hafalir, Isa E., M. Bumin Yenmez, and Muhammed A. Yildirim (2013) "Effective Affirmative Action in School Choice," *Theoretical Economics*, Vol. 8, No. 2, pp. 325–363.

Kojima, Fuhito (2012) "School Choice: Impossibility for Affirmative Action," *Games and Economic Behavior*, Vol. 75, pp. 685-693.

Matsubae, Taisuke (2010) "Impossibility of Stable and Non-Damaging Bossy," *Economics Bulletin*, Vol. 30, pp. 2092-2096.

——— (2011) "An Affirmative Action Policy as a Strategy on Two Sided Matching Market," *memeo*.

Roth, Alvin E. (1982) "The Economics of Matching: Stability and Incentives," *Mathematics of Operations Research*, Vol. 7, pp. 617-628.

Roth, Alvin E. and Marild Sotomayor (1990) *Two-Sided Matching:A Study in Game-Theoretic Modeling and Analysis*: Econometric Society monographs, Cambridge.

Sönmez, Tyfun. (1997) "Manipulation via Capacities in Two-Sided Matching Markets," *Journal of Economic Theory*, Vol. 77, pp. 197-204.

——— (1999) "Can Pre-arranged Matches be Avoided in Two-Sided Matching Markets?" *Journal of Economic Theory*, Vol. 86, pp. 148-156.

第5章　積極的差別是正政策に関する不可能性定理

この章は, Matsubae, Taisuke (2011)“Do the Minority Students Benefit from Affirmative Action Policy in School Choice Market ?: Reconsidered” をもとに書かれている.

5.1　はじめに

世界中のいたるところで，人種や性別などの差別の問題は広範に議論されている．それらの差別を是正する一つの方法として積極的差別是正政策がとられることがある．積極的差別是正政策とは，差別を解消するために上記のような差別を受けた人々に対して優遇措置を制度上採用する方策である．このような制度を積極的に採用する米国，インド，マレーシアや南アフリカなどの国々においては，政府機関の就職採用や公立教育機関（特に大学）への入学において，被差別人種とされる黒人やヒスパニック系の人種，あるいは被差別カーストのために採用基準を下げたり，全採用人員のなかで最低の人数枠を制度上, 固定したりするなどの措置がとられている．積極的差別是正政策は，一般には「差別撤廃」や「積極的差別是正」の方策として，理念的には問題とされることはない．しかしながら，その実際的運用や効果測定の場面においては賛否両論がある．特に，その制度の恩恵を受けていない側（マジョリティの人たち）に対する「逆差別」ではないかとの批判が強い．例えば，マイノリティの人たちを優先的に入学や入社させることで，学校や雇用の全体の定員枠は減少するので，その優遇措置を受けていない人たちは，学校への入学や会社への就職が困難になる恐れがあるからである．

積極的差別是正政策に対し，米国のミシガン大学の入学試験における人種割り当てに関して，当時の大統領であるジョージ・W・ブッシュ大統領はこれを違憲とみなした．米国において基本的

に人員割り当ては違憲であると最高裁で決定されたが，優遇措置（成績の引き上げ）は違憲ではないとされている.[1)]

しかしながら，多くの国において，構造的に内在する差別を解消するために，機会不平等の是正政策として，特定の民族あるいは階級に対して優遇措置を制度上採用し，例えば貧困層の階級出身の学生に対する生活援助や奨学金などの制度が各国で広く採用されている.

我が国においては，特に女性に対し優遇措置がとられている．第二次安倍政権は政策目標として，2020 年までに指導的地位に女性が占める割合が少なくとも 30%となることを努力目標として提言している．このように世界中でマイノリティに対する優遇制度や政策は一つの重要な課題である.

本章は，積極的差別是正政策の議論の一つである「積極的差別是正政策の効果」をマイノリティの学生の厚生が改善するかどうかで評価する.

本章の研究方向は， Abdulkadiroğlu, A. (2005), Kojima, Fuhito (2012), や Hafalir, Isa E., M. Bumin Yenmez, and Muhammed A. Yildirim (2013) のように以前の章で解説をした学校選択または大学入学問題というマッチング理論を用いて積極的差別是正政策を考察する.[2)]

本章と非常に関連する研究は Kojima, Fuhito (2012) の研究であり，彼は学校選択制の文脈において，マイノリティの学生の厚生を用いて積極的差別是正政策の効果を評価している．そして，そのような基準で評価すると，積極的差別是正政策により恩恵を受けると考えられているマイノリティの学生の厚生を悪化させる可能性があることを示している．特に，彼は学校選択制をマッチング理論で分析するにあたって，ニューヨークやボストンの公立学校の学校選択制でも重要とされている性質の安定性を満たす場合には，積極的差別是正政策を実行することにより，全てのマイノリティの学生の厚生を悪化させてしまう環境があることを示した．さらに，彼は他の積極的差

[1)] Parents Involved in Community Schools v. Seattle School District No. 1 and Meridith v. Jefferson Country Board of Education を参照.

[2)] Roth, Alvin E. (1991) は医者に対する英国の労働市場に対しマッチング理論を用いて分析している，また, Ergin, Haluk and Tayfun Sönmez (2006) はボストンの学校選択制をマッチング理論で分析している．本稿の最初でもマッチング理論を解説しているが，Roth, Alvin E. and Marild Sotomayor (1990), Roth, Alvin E. (2008), や Sönmez, T. and M. Utku Ünver (2009) において，そこでは扱っていない現実的な応用事例が紹介されている.

別是正政策を用いても, この残念な結果は避けることはできないことも示した. つまり, 彼はマイノリティの学生だけの優先枠を設けるような積極的差別是正政策と上記でもあげたマイノリティの学生の評価をマジョリティの学生よりも優遇するような積極的差別是正政策のどちらを行ったとしても, その不可能性を解消することはできないことを示した.

さらに, 安定性は満たされないが, 学校選択制において使われている TTC メカニズムにおいても, 安定性を満たすメカニズムと同様に, 積極的差別是正政策を実行すると, すべてのマイノリティの学生の厚生を悪化させてしまうという結果を示している. これらの結果は, 積極的差別是正政策を行って, マイノリティの学生を保護することは社会的に望ましいことであっても, その使用方法には注意が必要であることに警鐘をならす研究である.

本章は, Kojima, Fuhito (2012) と同じ視点で分析を行う. つまり, 積極的差別是正政策をマイノリティの学生の厚生を用いて評価する. 本章の目的は, 彼とは異なる自然な形で積極的差別是正政策を定義し, その積極的差別是正政策によって, マイノリティの学生の厚生に損失を与えないことができるかどうかを検討することである. 具体的にいうと, 彼の定義においては, 積極的差別是正政策にすべての学校が参加しなくてもよい状況も含まれているので, ここでは, すべての学校が必ずマイノリティの学生のための優先席を一つ以上設けることを義務づける積極的差別是正政策を考える. この設定には 2 つの利点がある. 1 つ目は, 彼の積極的差別是正政策より条件を強くしているので, マイノリティの学生の厚生をよくする可能性が高まる. 2 つ目は, 他の章でも論じたように, どの学校がその制度を採用するか裁量的に決める場合は慎重に検討しなければ違う問題を発生させてしまう, ここではそのような問題は起こらないような状況を考える.

しかしながら, 彼の定義した積極的差別是正政策よりも (数学的に) 強い積極的差別是正政策を実行したとしても, 安定なメカニズムを考える限り, すべてのマイノリティの学生の厚生を傷つけてしまう. さらに, 彼のもう一つの積極的差別是正政策の自然の拡張として, 全ての学校が必ずマイノリティの学生の一人以上に対し, マジョリティの学生と比較して優遇措置をとるような積極的差別是正政策を定義し, その積極的差別是正政策でさえ, 彼と同様に全てのマイノリティの

学生の厚生を悪化させてしまう可能性があることを示す．

ここで定義した両方の積極的差別是正政策を，TTC メカニズムに適用したとしても，やはり彼と同様にマイノリティの学生の厚生を悪化させてしまう可能性があることも示す．

これらの結果は，積極的差別是正政策に対する否定的な結論とも考えられるが，ある市場環境においては，上記の結論が成り立たない場合がある．つまり，ある市場環境においては，積極的差別是正政策を実行することでマイノリティの学生の厚生が改善する可能性もある．実際，Kojima, Fuhito (2012) において不可能性が示された市場環境であっても，ここで定義する積極的差別是正政策を実行することで，マイノリティの学生の厚生が改善される.[3)]

ここでの分析方法は，マッチング理論における伝統的な不可能性定理の研究と同様の手法を用いる.[4)]

5.2 学校選択市場のマッチング・モデル

ここでは，Kojima, Fuhito (2012) と同様にタイプ別の定員をもつ次のような学校選択制を考える．ここでは，単純化のため，マジョリティとマイノリティの 2 つのタイプのみが市場にいる状況を考える.[5)]

学校選択市場，または**市場**は次のように構成されている．

1. $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ を有限な学生の集合とし，
2. $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_m\}$ を有限な学校の集合とする．
3. 学生の選好プロファイルを $R_S = (R_{s_1}, R_{s_2}, \ldots, R_{s_n})$ とする． ここで R_{s_i} は学生 s_i の学校の集合 C とアンマッチ (アンマッチは $\varnothing$ と表記する) 上の選好関係である．その選好関係は，

[3)] この事実は，ここでの積極的差別是正政策の定義が，Kojima, Fuhito (2012) が定義した積極的差別是正政策よりも数学的に強い概念であるので自然の結果である．

[4)] Roth, Alvin E. (1982) は，安定性と耐戦略性の両立不可能性を示している． Sönmez, Tyfun. (1997), Sönmez, T. and M. Utku Ünver (2009) は，学校の定員を通じた戦略操作と安定性の両立不可能性を示している．

[5)] ここでの結果はマジョリティの人数がマイノリティ人数よりも多いかどうかに依存しない．

厳密な選好関係であると仮定する．P_{s_i} は，次のように定義される．任意の学校 c, c' に対して，$c' P_{s_i} c$ であるならば，$c' R_{s_i} c$ か，または $c R_{s_i} c'$ のどちらかしか成り立たない．もし $c P_{s_i} \varnothing$ ならば, そのとき c は学生 s_i にとって**アクセプタブル**であるといわれる．学生の集合は，二つの学生のタイプ，S^M と S^m に分割される．具体的にいうと，集合 S^M を**マジョリティの学生の集合**，そして S^m を**マイノリティの学生の集合**とする．

4. 学校の優先順位を $\succeq_C = (\succeq_{c_1}, \succeq_{c_2}, \ldots, \succeq_{c_m})$ とする．　ここで，$\succeq_c$ を学校 $c \in C$ の学生の集合 S とアンマッチ (アンマッチは $\varnothing$ と表記する) 上の優先順位である．その優先順位は厳密である．任意の学生 $s, s' \in S$ に対して，$s' \succeq_c s$ または $s \succeq_c s'$ のどちらかしか成り立たないならば，$s' \succ_c s$ と表記する．　もし任意の $s \in S'$ に対して $s \succ_c \varnothing$ であるならば, そのとき, 学生の集合 $S' \subset S$ は，学校 c にとって**アクセプタブル**であるといわれる.

5. 各学校 $c \in C$ に対して, $\mathbf{q}_c = (q_c, q_c^M)$ を学校 c の**定員ベクトル**とよぶ．　ここで，このベクトルの第一要素 q_c は，その学校 c 全体の定員を表現し，第二要素 q_c^M をマジョリティの学生に対する定員を表現している.

学校選択市場を $G = (S, C, (R_s)_{s \in S}, (\succeq)_{c \in C}, (\mathbf{q}_c)_{c \in C})$ と表記する.

Kojima, Fuhito (2012) によって定義された**マッチング**の概念は，次のよう定義される.

マッチング μ は，　集合 $S \cup C$ から $S \cup C$ のあらゆる部分集合への写像で，次のような性質をもつ.

(1) すべての学生 s に対して，$|\mu(s)| = 1$, かつ $\mu(s) = \varnothing$ ならば，すべての学校 $c \in C$ に対して，$s \notin \mu(c)$; [6] [7]

(2) すべての $s \in S$，$c \in C$ に対して, $\mu(s) = c$ であるならば，その場合に限り $s \in \mu(c)$;

(3) 任意の学校 $c \in C$ に対して，$|\mu(c)| \leq q_c$ かつ $\mu(c) \subseteq S$ である.

[6] $\mu(c) = \{s \in S \mid \mu(s) = c\}$

[7] 各学生は，一つの学校かまたは何処にもマッチされないかであるので，中括弧を外して表記する：$\mu(s) = \{c\}$ の代わりに $\mu(s) = c$ とかき，かつ $\mu(s) = \{\varnothing\}$ の代わりに $\mu(s) = \varnothing$ とかく.

(4) 任意の学校 $c \in C$ に対して，$|\mu(c) \cap S^M| \leq q_c^M$ である．

このマッチングの定義は，(1)-(3) の標準的な定義に加えて，(4) が加わっている．(4) の意味することは，各学校 c にマッチしたマジョリティの学生は，マジョリティの学生の定員 q_c^M 以下でなければならないことを要求している．$\mathcal{M}$ をマッチングの集合とする．

次に安定性の概念を定義する.[8)]

マッチング μ が**安定**であるとは，次の条件を満たすことである．

1. 任意の $s \in S$ に対して，$\mu(s)R_s\varnothing$ でかつ，任意の $c \in C$ と任意の $s \in \mu(c)$ に対して，$\{s\} \succeq_c \varnothing$ であり，かつ

2. もし $cP_s\mu(s)$ となる学生 $s \in S$ が存在するならば，

   (2a) $|\mu(c)| = q_c$ かつ，任意の $s' \in \mu(c)$ に対して，$s' \succ_c s$, または

   (2b) $s \in S^M$, $|\mu(c) \cap S^M| = q_c^M$，かつ，すべての $s' \in \mu(c) \cap S^M$ に対して，$s' \succ_c s$

   のどちらかが成り立つ．

この定義の条件 (2b) は，マッチしている学校 $\mu(s)$ よりもより選好する学校 c がある学生 s がマジョリティの学生である場合，たとえ学校 c の全体の定員に空きがあり，かつアクセプタブルであったとしても，マジョリティの学生の定員が埋まってしまっていて，その学校にマッチされているマジョリティの学生よりも優先順位が低い状況であることを意味している．

メカニズムは，次のような各市場 G に対する写像 ϕ で表現される．つまり，$\phi(G) \in \mathcal{M}$ となり，各市場に対してあるマッチングを決定する．

メカニズム ϕ が安定であるとは，任意の市場 G において決定されたマッチング $\phi(G)$ が安定なマッチングとなることをいう．市場 G において，学生 s がマッチした学校を $\phi_s(G)$ と表記する．また，$\phi_c(G)$ を市場 G において，そのメカニズムによって学校 c にマッチされた学生の集合とする．

[8)] この安定性は，Kojima, Fuhito (2012) によって定義されたものである．

任意の市場に対する，安定メカニズムを $\phi^S(\cdot)$ と表記する．

ここで，マジョリティの学生に上限のある DA アルゴリズムを紹介する．このアルゴリズムは，積極的差別是正政策のある大学入学問題において，Abdulkadiroğlu, A. (2005) によって示されたアルゴリズムの変形である.[9)]

マジョリティの学生の定員に上限がある DA アルゴリズム

ステップ 1 各学生は, 最も選好する学校に応募する．各学校は，応募してきた学生の中で，その学生がマイノリティの学生であるならば，その学校の優先順位にしたがってその学校の定員まで仮入学させる．一方，その応募した学生がマジョリティの学生であるならば，各学校に定められたマジョリティの学生の定員まで仮入学させる．それ以外の学生は拒否する．

ステップ $k \geq \mathbf{2}$ $k-1$ のステップで拒否された学生は, 次に選好する学校に応募する．応募のあった学校は，仮入学の学生も含めて，マイノリティの学生は優先順位にしたがって，その学校の定員まで仮入学させる．一方，マジョリティの学生の場合，以前に仮入学させていたマジョリティの学生も含めて，優先順位にしたがって，その学校のマジョリティの学生の定員まで仮入学させる．

そのアルゴリズムは，アクセプタブルな学校に応募する学生がいなくなったら終了する．彼女を拒否した学校に再び応募することはなく，そのアルゴリズムが続く限り，必ず一つの拒否は生じるので，そのアルゴリズムは有限回のステップで終了する．

マジョリティの学生の定員に上限のある DA アルゴリズムによって導かれる安定なマッチングは，以前の章とは制約がある分，少し異なるが**学生最適安定マッチング**とよぶ．すべての G に対して学生最適安定マッチングを導くメカニズムを学生最適安定メカニズム (SOSM) とよび，ϕ^A と表記する．$\phi^A(G)$ はある市場 G における学生最適安定マッチングと等しくなる．

[9)] そのアルゴリズムは，Gale, David and Lloyd Shapley (1962) によって提案された DA とほとんど同じ性質を有する．

5.3　積極的差別是正政策

この節で，本章において中心的な概念である積極的差別是正政策を定義する．最初に，この分野の既存研究である，Kojima, Fuhito (2012) において定義された積極的差別是正政策を紹介する．

彼はある市場

$$G = (S, C, (R_s)_{s\in S}, (\succeq)_{c\in C}, (\mathbf{q}_c)_{c\in C})$$

を基準としてその市場 G より，市場

$$\tilde{G} = (S, C, (R_s)_{s\in S}, (\succeq)_{c\in C}, (\tilde{\mathbf{q}}_c)_{c\in C})$$

は**より強い積極的差別是正政策を実施している市場**とした．

ここで，$(\tilde{\mathbf{q}}_c)_{c\in C}$ は，すべての学校 $c \in C$ に対して，$q_c = \tilde{q}_c$ かつ $q_c^M \geq \tilde{q}_c^M$ となるように定義されていたものである．

つまり，市場 G に比べて，市場 $\tilde{G}$ は，マジョリティの学生の定員枠を狭めていることになる．このことが意味することは，学校全体の定員枠が一定で，マジョリティの学生の定員枠を減らすということは，マイノリティの学生のみが入学できる定員枠を確保することを意味している．したがって，彼の積極的差別是正政策は，マイノリティの学生しか入学できない定員枠を創出する政策である．

彼は，この政策を評価するために次のような評価基準を考えた．

まず，その評価基準を定義するために必要な概念を定義する．

マッチング μ' がマイノリティの学生にとってマッチング μ より**パレート劣位**であるとは，

(a). 全てのマイノリティの学生 $s \in S^m$ に対し $\mu(s) R_s \mu'(s)$, かつ

(b). あるマイノリティの学生 $s \in S^m$ に対し $\mu(s) P_s \mu'(s)$

となることである．

定義 12 (Kojima, Fuhito (2012))**.** メカニズム ϕ が**積極的差別是正政策の精神を尊重する**とは，任意の市場 G に対して，次のような条件を満たすことである.

1. 市場 $\tilde{G}$ は市場 G より強い積極的差別是正政策を実施していて, かつ
2. マイノリティの学生にとって，$\phi(\tilde{G})$ が $\phi(G)$ よりパレート劣位

とならない.

そこで，彼は積極的差別是正政策の精神を尊重するような安定なメカニズムが存在するのかを考察し，次のような不可能性定理を示した.

注意 51 (Kojima, Fuhito (2012) の定理 1)**.** 任意の市場に対して，積極的差別是正政策の精神を尊重するような安定なメカニズムは存在しない.

その否定的な結果を受けて，本稿では彼の積極的差別是正政策を強めて可能性定理が導けるのかについて考察を行う.

そのために，次のように積極的差別是正政策を変更する.

市場

$$G = (S, C, (R_s)_{s \in S}, (\succeq)_{c \in C}, (\mathbf{q}_c)_{c \in C})$$

を基準として市場

$$G' = (S, C, (R_s)_{s \in S}, (\succeq)_{c \in C}, (\mathbf{q}'_c)_{c \in C})$$

は**より強い厳密な積極的差別是正政策を実施している市場**とする.

ここで，$(\mathbf{q}'_c)_{c \in C}$ は，すべての学校 $c \in C$ に対して，$q_c = q'_c$ かつ $q_c^M > q_c'^M$ となるように定義する.

つまり，市場 G に比べて，市場 G' は，マジョリティの学生の定員枠を厳密に狭めていることになる. 学校全体の定員枠が一定で，マジョリティの学生の定員枠を厳密に減らすということは,

マイノリティの学生のみが入学できる定員枠を確実に全ての学校が確保することを意味する．したがって，ここで「厳密な積極的差別是正政策」とつけたのは，全ての学校が必ずマイノリティの学生の定員枠を設けなければならないという理由と，以前の定義と違いを明確にするためである．

そこで，われわれの積極的差別是正政策に対する評価基準を次のように定義する．

定義 13. メカニズム ϕ が**厳密な積極的差別是正政策の精神を尊重する**とは，任意の市場 G に対して，次のような条件を満たすことである．

$(1')$ 市場 G' は市場 G より強い厳密な積極的差別是正政策を実施している市場で， かつ

$(2')$ マイノリティの学生にとって，$\phi(G')$ が $\phi(G)$ よりパレート劣位

とならない．

この定義は，Kojima, Fuhito (2012) の定義とは異なる．つまり, $(1')$ は彼の (1) よりもマイノリティの学生にとって有利な積極的差別是正政策を採用している．

この事実を確認するために，彼の定理 1 の証明で用いられた例を使って，この定義のもとでマイノリティの学生の厚生が悪化しない．彼はこの例を用いて，マイノリティの厚生が悪化することを示している．

市場 $G = (S, C, R_S, \succeq_C, (\mathbf{q}_c)_{c\in C})$ を考える．その市場 G は次のように構成されている．学生の集合 $S = \{s_1, s_2, s_3\}$ と学校の集合 $C = \{c_1, c_2\}$ とし， マジョリティの学生の集合 $S^M = \{s_1, s_2\}$, マイノリティの学生の集合 $S^m = \{s_3\}$ とする．

各学生の選好関係は次のように与えられている．

$$
\begin{aligned}
R_{s_1} &: c_1, \\
R_{s_2} &: c_1, c_2, \\
R_{s_3} &: c_2, c_1,
\end{aligned}
$$

各学校の優先順位は次のように与えられている.

$$\succeq_{c_1} \quad : \quad s_1, s_2, s_3 \qquad \mathbf{q}_{c_1} = (q_{c_1}, q_{c_1}^M) = (2,2),$$

$$\succeq_{c_2} \quad : \quad s_2, s_3, s_1 \qquad \mathbf{q}_{c_2} = (q_{c_2}, q_{c_2}^M) = (1,1).$$

この市場 G において, 次のような一意な安定なマッチングが与えられる.

$$\mu(G) = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ s_1, s_2 & s_3 \end{pmatrix},$$

この市場に対して，厳密な積極的差別是正政策を考える．つまり，$\mathbf{q}' = (q'_{c_1}, q'_{c_2})$ である.

ここで $q'_{c_1} = (2,1)$ と $q'_{c_2} = (1,0)$ である.

市場 $G' = (S, C, (R_s)_{s\in S}, (\succeq_c)_{c\in C}, \mathbf{q}'_{cc\in C})$ は，市場 $G = (S, C, (R_s)_{s\in S}, (\succeq_c)_{c\in C}, (\mathbf{q}_c)_{c\in C})$ よりも強く厳密な積極的差別是正政策を実行している市場となる.

市場 G' における，一意な安定マッチング $\mu(G')$ は次のようになる.

$$\mu(G') = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \varnothing \\ s_1 & s_3 & s_2 \end{pmatrix},$$

学生 s_3 は，厳密な積極的差別是正政策を実行したとしても悪化していない，正確には同じ学校とマッチングすることになる．つまり，厳密な積極的差別是正政策の精神は尊重されていることになる.

このことは，厳密な積極的差別是正政策の精神を尊重する安定なメカニズムが存在することを期待できるが，残念ながら，下記の定理が示すように任意の市場において，厳密な積極的差別是正政策の精神を尊重するような安定なメカニズムは存在しない.

定理 52. 任意の市場に対して，厳密な積極的差別是正政策の精神を尊重する安定なメカニズムは

存在しない.

【証明】

ある市場 $G = (S, C, R_S, \succeq_C, (\mathbf{q}_c)_{c \in C})$ を考える．その市場 G は次のように構成されている．学生の集合 $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$ と学校の集合 $C = \{c_1, c_2, c_3\}$ とし， マジョリティの学生の集合 $S^M = \{s_1, s_2, s_5\}$, マイノリティの学生の集合 $S^m = \{s_3, s_4\}$ とする.

各学生の選好関係は次のように与えられている.

$$
\begin{aligned}
R_{s_1} &: \; c_1, c_2, c_3, \\
R_{s_2} &: \; c_1, c_2, c_3, \\
R_{s_3} &: \; c_2, c_1, c_3, \\
R_{s_4} &: \; c_2, c_3, c_1, \\
R_{s_5} &: \; c_1, c_3, c_2,
\end{aligned}
$$

各学校の優先順位は次のように与えられている.

$$
\begin{aligned}
\succeq_{c_1} &: \; s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 \qquad \mathbf{q}_{c_1} = (q_{c_1}, q_{c_1}^M) = (2, 2), \\
\succeq_{c_2} &: \; s_2, s_3, s_4, s_5, s_1 \qquad \mathbf{q}_{c_2} = (q_{c_2}, q_{c_2}^M) = (2, 2), \\
\succeq_{c_3} &: \; s_4, s_5, s_2, s_1, s_3 \qquad \mathbf{q}_{c_3} = (q_{c_3}, q_{c_3}^M) = (2, 2),
\end{aligned}
$$

ここで，記号の便宜上，学生も学校も順番に選好される学校，優先順位の高い学校を表現している．例えば，学校 c_1 において, 学生 s_1 が最も優先順位が高く， 学生 s_2 が二番目に優先順位が高く， 学生 s_3 が三番目に優先順位が高く，学生 s_4 が四番目に優先順位が高く，そして学生 s_5 が最も優先順位が低いということである.

この市場 G において, 次のような一意な安定なマッチングが与えられる.

$$\mu(G) = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ \\ s_1, s_2 & s_3, s_4 & s_5 \end{pmatrix},$$

これは, 学校 c_1 と学生 s_1 と s_2 がマッチされ, 学校 c_2 は学生 s_3, s_4 とマッチされ, 学校 c_3 は学生 s_5 がマッチされていることを意味している.

この市場に対して, 厳密な積極的差別是正政策を考える. つまり, $\mathbf{q}' = (q'_{c_1}, q'_{c_2}, q'_{c_3})$ である.

ここで $q'_{c_1} = (2,1)$, $q'_{c_2} = (2,1)$, かつ $q'_{c_3} = (2,1)$ である.

市場 $G' = (S, C, (R_s)_{s\in S}, (\succeq_c)_{c\in C}, (\mathbf{q}'_c)_{c\in C})$ は, 市場 $G = (S, C, (R_s)_{s\in S}, (\succeq_c)_{c\in C}, (\mathbf{q}_c)_{c\in C})$ よりも強く厳密な積極的差別是正政策を実行している市場となる.

市場 G' における, 一意な安定マッチング $\mu(G')$ は次のようになる.

$$\mu(G') = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ \\ s_1 & s_2, s_3 & s_4, s_5 \end{pmatrix}.$$

両市場における, マイノリティの学生の厚生を比較すると, 学生 s_4 は厳密に悪化しているし, 学生 s_3 は, 両市場において同一の学校にマッチングされている. したがって市場 G' のもとでのマッチングは, 市場 G におけるマッチングにおいてパレート劣位である. 一方, 安定なマッチングは両市場において一意であるので, これを証明したことになる. □

しかしながら, 証明で用いた例は, マイノリティの学生の厚生ばかりか, マジョリティの学生の厚生まで悪化させていることを示している. 言い換えると, この例は, 厳密な積極的差別是正政策を実行することですべての学生の厚生を悪化させてしまう場合もあるということである. つまり, この例は, 全ての学生にとって, 厳密な積極的差別是正政策を実施した市場は, それを行わない市場と比較してパレート劣位ということなる.

このことが, 任意の市場に対して成り立つかというと, その答えは「ある市場ではマイノリティ

の厚生は改善する」である．そのことを示すために，Kojima, Fuhito (2012) において例 1 として用いられている例を使う, その例に対して，厳密な積極的差別是正政策を実行すると，マジョリティの学生も含んだ全ての学生の厚生が改善することがわかる.

例 13 (Kojima, Fuhito (2012) の例 1)**.** ある市場 $G=(S,C,R_S,\succeq_C,(\boldsymbol{q}_c)_{c\in C})$ を考える．その市場 G は次のように構成されている．学生の集合 $S=\{s_1,s_2,s_3,s_4\}$ と学校の集合 $C=\{c_1,c_2\}$ とし， マジョリティの学生の集合 $S^M=\{s_1,s_2\}$, マイノリティの学生の集合 $S^m=\{s_3,s_4\}$ とする.

各学生の選好関係は次のように与えられている.

$$\begin{aligned}
R_{s_1} &: c_1,\\
R_{s_2} &: c_1,\\
R_{s_3} &: c_1,c_2,\\
R_{s_4} &: c_2,c_1,
\end{aligned}$$

各学校の優先順位は次のように与えられている.

$$\begin{aligned}
\succeq_{c_1} &: s_1,s_4,s_2,s_3 \qquad \boldsymbol{q}_{c_1}=(q_{c_1},q^M_{c_1})=(2,2),\\
\succeq_{c_2} &: s_3,s_4,s_2,s_1 \qquad \boldsymbol{q}_{c_2}=(q_{c_2},q^M_{c_2})=(1,1).
\end{aligned}$$

この市場 G において, 次のような一意な安定なマッチングが与えられる.

$$\mu(G)=\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \varnothing \\ s_1,s_4 & s_3 & s_2 \end{pmatrix}.$$

この市場に対して，厳密な積極的差別是正政策を考える．つまり，$\boldsymbol{q}'=(q'_{c_1},q'_{c_2})$ である.

ここで $q'_{c_1}=(2,1)$, $q'_{c_2}=(1,0)$ である.

市場 $G'=(S,C,(R_s)_{s\in S},(\succeq_c)_{c\in C},(\boldsymbol{q}'_c)_{c\in C})$ は, 市場 $G=(S,C,(R_s)_{s\in S},(\succeq_c)_{c\in C},(\boldsymbol{q}_c)_{c\in C})$ より

も強く厳密な積極的差別是正政策を実行している市場となる．

市場 G' における，一意な安定マッチング $\mu(G')$ は次のようになる．

$$\mu(G') = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \varnothing \\ \\ s_1, s_3 & s_4 & s_2 \end{pmatrix}.$$

この例において，すべてのマイノリティの学生の厚生が厳密に改善している．さらにマイノリティの学生の s_3, s_4 の厚生は厳密に改善していることがわかる．

次に，マイノリティの学生の学生のみが厳密な積極的差別是正政策を実施することで改善する例を示す．

例 14. ある市場 $G = (S, C, R_S, \succeq_C, (\boldsymbol{q}_c)_{c \in C})$ を考える．その市場 G は次のように構成されている．学生の集合 $S = \{s_1, s_2, s_3\}$ と学校の集合 $C = \{c_1, c_2\}$ とし，　マジョリティの学生の集合 $S^M = \{s_1, s_2\}$, マイノリティの学生の集合 $S^m = \{s_3\}$ とする．

各学生の選好関係は次のように与えられている．

$$\begin{aligned} R_{s_1} &: c_1, c_2, \\ R_{s_2} &: c_1, c_2, \\ R_{s_3} &: c_1, c_2, \end{aligned}$$

各学校の優先順位は次のように与えられている．

$$\begin{aligned} \succeq_{c_1} &: s_1, s_2, s_3 \qquad \boldsymbol{q}_{c_1} = (q_{c_1}, q_{c_1}^M) = (2, 2), \\ \succeq_{c_2} &: s_2, s_3, s_1 \qquad \boldsymbol{q}_{c_2} = (q_{c_2}, q_{c_2}^M) = (2, 2). \end{aligned}$$

この市場 G において, 次のような一意な安定なマッチングが与えられる.

$$\mu(G) = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ \\ s_1, s_2 & s_3 \end{pmatrix}$$

この市場に対して，厳密な積極的差別是正政策を考える．つまり，$\boldsymbol{q}' = (q'_{c_1}, q'_{c_2})$ である.

ここで $q'_{c_1} = (2, 1)$, $q'_{c_2} = (2, 1)$ である.

市場 $G' = (S, C, (R_s)_{s \in S}, (\succeq_c)_{c \in C}, (\boldsymbol{q}'_c)_{c \in C})$ は, 市場 $G = (S, C, (R_s)_{s \in S}, (\succeq_c)_{c \in C}, (\boldsymbol{q}_c)_{c \in C})$ よりも強く厳密な積極的差別是正政策を実行している市場となる.

市場 G' における，一意な安定マッチング $\mu(G')$ は次のようになる.

$$\mu(G') = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ \\ s_1, s_3 & s_2 \end{pmatrix}$$

この例において，マイノリティの学生 s_3 の厚生のみが厳密に改善している.

いままでの考察により，マイノリティの学生のためだけの席を設けるような積極的差別是正政策は，安定性を満たすメカニズムのもとでは，必ずしもマイノリティの学生の厚生を改善できないことが確認された.

以前にも述べたが積極的差別是正政策には，優先席の設定だけではなく，マジョリティの学生とは違う基準を設けてマイノリティの学生の優先順位をあげる積極的差別是正政策もとられている.

自然な別の積極的差別是正政策として，Kojima, Fuhito (2012) も考えた優先順位をマイノリティの学生に有利にするような積極的差別是正政策を考える.

そこで，彼は，**より強い優先順位に基づいた積極的差別是正政策**を定義した.

市場

$$G = (S, C, (R_s)_{s \in S}, (\succeq)_{c \in C}, (\mathbf{q}_c)_{c \in C})$$

を基準として市場

$$\tilde{G} = (S, C, (R_s)_{s\in S}, (\tilde{\succeq})_{c\in C}, (\mathbf{q}_c)_{c\in C})$$

は次の条件を満たすならば，より強い優先順位に基づいた積極的差別是正政策を実施した市場とした．

もし全ての学校 $c \in C$ と任意の学生 $s, s' \in S$ に対して，$s \succeq_c s'$ かつ $s \in S^m$ ならば，$s \tilde{\succeq}_c s'$ となる優先順位を**優先順位に基づいた積極的差別是正政策**という．

彼は，以前と同様に次のような形で評価基準を構成した．

定義 14 (Kojima, Fuhito (2012))**.** メカニズム ϕ が**優先順位にもとづいた積極的差別是正政策の精神を尊重する**とは， 任意の市場 G に対して，次のような条件を満たすことである．

1. 市場 $\tilde{G}$ は市場 G より強い優先順位にもとづいた積極的差別是正政策を実施していて, かつ
2. マイノリティの学生にとって，$\phi(\tilde{G})$ が $\phi(G)$ よりパレート劣位

とならない．

しかしながら，この積極的差別是正政策においても，安定なメカニズムは，優先順位にもとづいた積極的差別是正政策の精神を尊重しないという否定的な回答を彼は示した．

注意 53 (Kojima, Fuhito (2012) の定理 2)**.** 任意の市場に対して，優先順位にもとづいた積極的差別是正政策の精神を尊重する安定なメカニズムは存在しない．

この否定的な定理に対して，以前と同様に積極的差別是正政策を強めることで可能性を考察する．つまり，全ての学校が必ず，少なくとも一人は，マイノリティの学生の優先順位を上位にもっていかなければならないという形で積極的差別是正政策を強める．しかしながら，各グループ間の優先順位は変えないことにする．このような，ある市場 G に対してこのような要請を加えた市場を**より強い優先順位にもとづいた厳密な積極的差別是正政策**という．

この積極的差別是正政策に対する，評価基準を以前と同様の形で定義する．

定義 15. メカニズム ϕ が**優先順位に基づいた厳密な積極的差別是正政策の精神を尊重する**とは，任意の市場 G に対して，次のような条件を満たすことである．

(1′) 市場 G' は市場 G より強い優先順位に基づいた厳密な積極的差別是正政策を実施している市場で，　かつ

(2′) マイノリティの学生にとって，$\phi(G')$ が $\phi(G)$ よりパレート劣位

とならない．

この定義が，Kojima, Fuhito (2012) の定義より強い概念を確認するために，彼の不可能性定理を示すために使った例に対して，優先順位に基づいた積極的差別是正政策を導入する．

例 15 (Kojima, Fuhito (2012) の定理 2 の証明)**.** 市場 $G=(S,C,R_S,\succeq_C,(\boldsymbol{q}_c)_{c\in C})$ を考える．その市場 G は次のように構成されている．学生の集合 $S=\{s_1,s_2,s_3\}$ と学校の集合 $C=\{c_1,c_2\}$ とし，　マジョリティの学生の集合 $S^M=\{s_1\}$, マイノリティの学生の集合 $S^m=\{s_2,s_3\}$ とする．

各学生の選好関係は次のように与えられている．

$$\begin{aligned} R_{s_1} &: c_2, c_1, \\ R_{s_2} &: c_1, c_2, \\ R_{s_3} &: c_2, c_1, \end{aligned}$$

各学校の優先順位は次のように与えられている．

$$\begin{aligned} \succeq_{c_1} &: s_1, s_2, s_3, \qquad \boldsymbol{q}_{c_1}=(q_{c_1},q_{c_1}^M)=(1,1), \\ \succeq_{c_2} &: s_2, s_1, s_3, \qquad \boldsymbol{q}_{c_2}=(q_{c_2},q_{c_2}^M)=(1,1). \end{aligned}$$

この市場 G において, 次のような学生最適安定マッチング $\mu^S(G)$ を考える.

$$\mu^S(G) = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \varnothing \\ \\ s_2 & s_1 & s_3 \end{pmatrix}.$$

この市場に対して, 優先順位に基づいた厳密な積極的差別是正政策を考える. つまり,

$$\begin{aligned} \succeq'_{c_1} \quad &: \quad s_2, s_1, s_3 \qquad \boldsymbol{q}_{c_1} = (q_{c_1}, q^M_{c_1}) = (1,1), \\ \succeq'_{c_2} \quad &: \quad s_2, s_3, s_1 \qquad \boldsymbol{q}_{c_2} = (q_{c_2}, q^M_{c_2}) = (1,1). \end{aligned}$$

市場 $G' = (S, C, (R_s)_{s\in S}, (\succeq_c)_{c\in C}, \boldsymbol{q}'_{c c\in C})$ は, 市場 $G = (S, C, (R_s)_{s\in S}, (\succeq_c)_{c\in C}, (\boldsymbol{q}_c)_{c\in C})$ よりも強くい優先順位に基づいた厳密な積極的差別是正政策を実行している市場となる.

市場 G' における, 学生最適安定マッチング $\mu^S(G')$ は次のようになる.

$$\mu^S(G') = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \varnothing \\ \\ s_2 & s_3 & s_1 \end{pmatrix}.$$

この例において, マイノリティの学生 s_2, s_3 の厚生は弱い意味で改善している.

つまり, この定義は, 彼の定義よりもマイノリティの学生に有利に働くことがわかる. そのことは, 彼の不可能性定理を可能性に変えることを期待するが, 残念ながら, この積極的差別是正政策のもとでも, マイノリティの学生の厚生を悪化させる可能性があることを次の定理は示している.

定理 54. 任意の市場に対して, 優先順位に基づいた厳密な積極的差別是正政策の精神を尊重する安定なメカニズムは存在しない.

【証明】

市場 $G = (S, C, R_S, \succeq_C, (\mathbf{q}_c)_{c\in C})$ を考える. その市場 G は次のように構成されている. 学生の集合 $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ と学校の集合 $C = \{c_1, c_2\}$ とし, マジョリティの学生の集合 $S^M = \{s_1, s_3\}$,

マイノリティの学生の集合 $S^m = \{s_2, s_4\}$ とする.

各学生の選好関係は次のように与えられている.

$$
\begin{aligned}
R_{s_1} &: c_2, c_1, \\
R_{s_2} &: c_1, c_2, \\
R_{s_3} &: c_2, \\
R_{s_4} &: c_2,
\end{aligned}
$$

各学校の優先順位は次のように与えられている.

$$
\begin{aligned}
\succeq_{c_1} &: s_1, s_4, s_3, s_2, \qquad \mathbf{q}_{c_1} = (q_{c_1}, q_{c_1}^M) = (1, 1), \\
\succeq_{c_2} &: s_2, s_1, s_3, s_4, \qquad \mathbf{q}_{c_2} = (q_{c_2}, q_{c_2}^M) = (1, 1),
\end{aligned}
$$

この市場 G において, 2 つの安定マッチング $\mu(G)$ と $\mu'(G)$ が存在する.

$$
\mu(G) = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \varnothing & \varnothing \\ s_2 & s_1 & s_3 & s_4 \end{pmatrix},
$$

$$
\mu'(G) = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \varnothing & \varnothing \\ s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \end{pmatrix},
$$

2 つの場合を考える.

(i) 安定なメカニズムが $\phi(G) = \mu$ となる場合.

この市場に対して，優先順位にもとづいた厳密な積極的差別是正政策を考える.

$$\begin{aligned}
\succeq'_{c_1} \quad &: \quad s_1, s_4, s_2, s_3, \qquad \mathbf{q}_{c_1} = (q_{c_1}, q^M_{c_1}) = (1,1),\\
\succeq'_{c_2} \quad &: \quad s_2, s_4, s_1, s_3, \qquad \mathbf{q}_{c_2} = (q_{c_2}, q^M_{c_2}) = (1,1),
\end{aligned}$$

市場 $G' = (S, C, (R_s)_{s\in S}, (\succeq_c)'_{c\in C}, \mathbf{q}_{cc\in C})$ は，市場 $G = (S, C, (R_s)_{s\in S}, (\succeq_c)_{c\in C}, (\mathbf{q}_c)_{c\in C})$ よりも強くい優先順位に基づいた厳密な積極的差別是正政策を実施している.

市場 G' において, 一意な安定マッチング $\mu(G')$ は次のようになる.

$$\mu(G') = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \varnothing & \varnothing \\ s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \end{pmatrix},$$

学生 s_2 は $\mu(G')$ において，$\mu(G)$ より悪化する．他のマイノリティの学生の厚生は変化しない.

(ii) 安定なメカニズムが $\phi(G) = \mu'$ とする.

この市場に対して，優先順位に基づいた厳密な積極的差別是正政策を考える.

$$\begin{aligned}
\succeq''_{c_1} \quad &: \quad s_1, s_3, s_4, s_2, \qquad \mathbf{q}_{c_1} = (q_{c_1}, q^M_{c_1}) = (1,1),\\
\succeq''_{c_2} \quad &: \quad s_1, s_2, s_3, s_4, \qquad \mathbf{q}_{c_2} = (q_{c_2}, q^M_{c_2}) = (1,1),
\end{aligned}$$

市場 $G = (S, C, (R_s)_{s\in S}, (\succeq_c)_{c\in C}, \mathbf{q}_{cc\in C})$ は，市場 $G'' = (S, C, (R_s)_{s\in S}, (\succeq_c)''_{c\in C}, (\mathbf{q}_c)_{c\in C})$ よりも強くい優先順位に基づいた厳密な積極的差別是正政策を実行している市場である.

市場 G'' において, 一意な安定なマッチング $\mu(G'')$ が次のように与えられる.

$$\mu(G'') = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \varnothing & \varnothing \\ s_2 & s_1 & s_3 & s_4 \end{pmatrix},$$

マイノリティの学生 s_2 は厳密に悪化している．他のマイノリティの学生は変化しない. $\square$

5.4 TTC メカニズム

この節で，以前の章でも紹介した，近年，学校選択制において注目を集めている，**TTC メカニズム**における，積極的差別是正政策の効果を考察する．このメカニズムは直接メカニズムで，任意の優先順位と選好プロファイルに対して，以下のような**トップ・トレーディング・サイクルアルゴリズム (TTC アルゴリズム)** にしたがってマッチング結果を導く．

TTC アルゴリズム

ステップ 1 各学校 c に対して, 総定員数 $\mathbf{q}_c$ に等しいカウンターをおき，マジョリティの学生の定員の上限 q_c^M に等しいカウンターを設ける．各学校 c はその学校において最も優先順位の高い学生を指さす．各学生 s は彼女の最も選好する学校を指さす． そのとき，少なくとも必ず一つのサイクルができるはずである．そのサイクルのメンバーは，自分の指さした学校に入学できる．もし，どの学校も希望しないならば，自分自身を指せばよい．そのサイクルの中の学校は，総定員数のカウンターを一つ減らし，もし入学した学生がマジョリティの学生であるならば，マジョリティの学生の定員の上限に対するカウンターも減らす．もし，サイクルにはいっていなく，カウンターがゼロになっていないならば，次のステップにすすむ．

ステップ $k \geq 2$ 残っている各学生は残っている学校の中で最も選好する学校を指さす．また，学校も残っている学生の中で最も優先順位の高い学生を指さす．そのときサイクルができたならば，そのサイクルの中にいる学生は指さした学校に入学できる．サイクルに入れなかった学生と各カウンターの数がゼロではない学校は次のステップにすすむ．もし，マジョリティの学生の上限のカウンターがゼロであるが，総定員数のカウンターはまだゼロでないならば，次のステップでその学校が指すことができるのは，残っている学生の中でマイノリティの学生から，最も高い優先順位をもっている学生をさすことができる．

このアルゴリズムは，必ず有限回のステップで終了する．なぜならば，そのアルゴリズムが終わらない限り必ず各ステップで一つのサイクルができ，学生の数は有限であるからである．このアルゴリズムが終わったときに実現しているマッチングを TTC マッチングという．

TTC にはいくつかの，前の章でも紹介したようにバリエーションがある.[10)]

この現在のバージョンは Abdulkadiroğlu, Atila and Tyfun Sönmez (2003) によって，学校選択制を分析するために導入されたものである．

TTC アルゴリズムは，必ずしも安定なマッチングとはならないが，そのメカニズム，特有の良い性質を持っていることが知られている．例えば，TTC マッチングは，パレート効率的であるとか，グループ耐戦略性があるとか，以前の章で詳細に解説を行った通りである．

このような利点から, TTC メカニズムは，米国のボストンやサンフランシスコの学区において，利用することが検討されている．

しかしながら，ここで検討している積極的差別是正政策に対しては，安定なメカニズムと同様に否定的な回答がなされている．最初に，そのことを示したのが Kojima, Fuhito (2012) による研究である．

注意 55 (Kojima, Fuhito (2012) の定理 3)**.** 任意の市場に対して TTC メカニズムは，積極的差別是正政策の精神を尊重しない．

本章において検討してきた，われわれの積極的差別是正政策に対して TTC メカニズムを適用してみる．しかしながら，このメカニズムにおいても，否定的な回答が得られることになる．

定理 56. TTC メカニズムは，任意の市場に対し厳密な積極的差別是正政策の精神を尊重しない．

【証明】

市場 $G = (S, C, R_S, \succeq_C, (\mathbf{q}_c)_{c\in C})$ を考える．その市場 G は次のように構成されている．学生の集合 $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$ と学校の集合 $C = \{c_1, c_2, c_3\}$ とし， マジョリティの学生の集合 $S^M = \{s_1, s_2, s_3\}$, マイノリティの学生の集合 $S^m = \{s_4, s_5\}$ とする．

10) このアルゴリズムは最初，Shapley, Lloyd and Herbert Scarf (1974) によって紹介された．

各学生の選好関係は次のように与えられている．

$$
\begin{aligned}
R_{s_1} &: c_1, \\
R_{s_2} &: c_1, c_2, \\
R_{s_3} &: c_3, \\
R_{s_4} &: c_2, \\
R_{s_5} &: c_2,
\end{aligned}
$$

各学校の優先順位は次のように与えられている．

$$
\begin{aligned}
\succeq_{c_1} &: s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 \qquad \mathbf{q}_{c_1} = (q_{c_1}, q^M_{c_1}) = (2, 2), \\
\succeq_{c_2} &: s_2, s_3, s_4, s_5, s_1 \qquad \mathbf{q}_{c_2} = (q_{c_2}, q^M_{c_2}) = (2, 2), \\
\succeq_{c_3} &: s_4, s_3, s_2, s_1, s_5 \qquad \mathbf{q}_{c_3} = (q_{c_3}, q^M_{c_3}) = (2, 2).
\end{aligned}
$$

このマーケットにおける，TTC メカニズムによるマッチング $\mu^T(G)$ はつぎのように与えられる．

$$
\mu^T(G) = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ \\ s_1, s_2 & s_4, s_5 & s_3 \end{pmatrix}.
$$

この市場に対して，厳密な積極的差別是正政策を考える．つまり，$\mathbf{q}' = (\mathbf{q}'_{c_1}, \mathbf{q}'_{c_2}, \mathbf{q}'_{c_3})$ である．

ここで $\mathbf{q}'_{c_1} = (2, 1)$, $\mathbf{q}'_{c_2} = (2, 1)$, そして $\mathbf{q}'_{c_3} = (2, 1)$ である．

市場 $G' = (S, C, (R_s)_{s \in S}, (\succeq_c)_{c \in C}, \mathbf{q}'_{c c \in C})$ は，市場 $G = (S, C, (R_s)_{s \in S}, (\succeq_c)_{c \in C}, (\mathbf{q}_c)_{c \in C})$ よりも強く厳密な積極的差別是正政策を実行している市場となる．

市場 G' における，TTC メカニズムによるマッチング $\mu'^T(G)$ は

$$\mu^T(G') = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \varnothing \\ \\ s_1 & s_4, s_2 & s_3 & s_5 \end{pmatrix}.$$

マイノリティの学生 s_5 は厳密に悪化し，マイノリティの学生 s_4 は同じである． □

この結果は，たとえ全ての学校が少なくも一つマイノリティの学生に対する優先席を設けたとしても，TTC メカニズムはマイノリティの学生にとって有用とないこと示している．さらに，ここで用いられている例において，全ての学生がその積極的差別是正政策を用いることで弱い意味で悪化していることがわかる．つまり，その政策は全ての学生にとって悪い制度であるということが可能かというと，その答えは「違う」となる．

次の例が示すように，マイノリティの学生の厚生を改善する可能性もある．

例 16. 市場 $G = (S, C, R_S, \succeq_C, (\mathbf{q}_c)_{c \in C})$ を考える．その市場 G は次のように構成されている．学生の集合 $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ と学校の集合 $C = \{c_1, c_2\}$ とし， マジョリティの学生の集合 $S^M = \{s_1, s_2\}$, マイノリティの学生の集合 $S^m = \{s_3, s_4\}$ とする．

各学生の選好関係は次のように与えられている．

$$\begin{aligned} R_{s_1} &: c_1, c_2, \\ R_{s_2} &: c_1, c_2, \\ R_{s_3} &: c_1, c_2, \\ R_{s_4} &: c_2, c_1, \end{aligned}$$

各学校の優先順位は次のように与えられている.

$$
\begin{aligned}
\succeq_{c_1} \quad &: \quad s_1, s_2, s_3, s_4 \qquad \mathbf{q}_{c_1} = (q_{c_1}, q^M_{c_1}) = (2, 2), \\
\succeq_{c_2} \quad &: \quad s_3, s_4, s_2, s_1 \qquad \mathbf{q}_{c_2} = (q_{c_2}, q^M_{c_2}) = (2, 2).
\end{aligned}
$$

この市場における，TTC メカニズムによるマッチング $\mu^T(G)$ は次のように与えられる.

$$
\mu^T(G) = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ \\ s_1, s_2 & s_3, s_4 \end{pmatrix}.
$$

この市場に対して，厳密な積極的差別是正政策を考える．つまり，$\mathbf{q}' = (\mathbf{q}'_{c_1}, \mathbf{q}'_{c_2})$ である.

ここで $\mathbf{q}'_{c_1} = (2, 1)$, $\mathbf{q}'_{c_2} = (2, 1)$ である.

市場 $G' = (S, C, (R_s)_{s \in S}, (\succeq_c)_{c \in C}, \mathbf{q}'_{c c \in C})$ は，市場 $G = (S, C, (R_s)_{s \in S}, (\succeq_c)_{c \in C}, (\mathbf{q}_c)_{c \in C})$ よりも強く厳密な積極的差別是正政策を実行している市場となる.

市場 G' における，TTC メカニズムによるマッチング $\mu'^T(G)$ は

$$
\mu^T(G') = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ \\ s_1, s_3 & s_2, s_4 \end{pmatrix}.
$$

マイノリティの学生 s_3 は厳密に改善し，マイノリティの学生 s_4 は同じである.

Kojima, Fuhito (2012) は，優先順位に基づいた積極的差別是正政策を実施したとしても，TTC メカニズムはマイノリティの学生を改善させないことを示した.

注意 57 (Kojima, Fuhito (2012) の定理 4)**.** TTC メカニズムは，優先順位にもとづいた積極的差別是正政策の精神を尊重しない.

ここで定義した優先順位にもとづいた積極的差別是正政策のもとで，TTC メカニズムはマイノリティの学生の厚生を改善することを期待したいが，やはり下記のような不可能性定理を示すことになる.

定理 58. TTC メカニズムは，優先順位にもとづいた厳密な積極的差別是正政策の精神を尊重しない.

【証明】

Kojima, Fuhito (2012) の定理 4 の証明の例を用いることにより，示すことができる.

市場 $G = (S, C, R_S, \succeq_C, (\mathbf{q}_c)_{c \in C})$ を考える．その市場 G は次のように構成されている．学生の集合 $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ と学校の集合 $C = \{c_1, c_2, c_3\}$ とし， マジョリティの学生の集合 $S^M = \{s_1, s_2, \}$, マイノリティの学生の集合 $S^m = \{s_3, s_4\}$ とする.

各学生の選好関係は次のように与えられている.

$$
\begin{aligned}
R_{s_1} &: c_1, \\
R_{s_2} &: c_2, \\
R_{s_3} &: c_2, \\
R_{s_4} &: c_3.
\end{aligned}
$$

各学校の優先順位は次のように与えられている.

$$
\begin{array}{lll}
\succeq_{c_1} : & s_4, s_2, s_1, s_3 & \mathbf{q}_{c_1} = (q_{c_1}, q_{c_1}^M) = (1,1), \\
\succeq_{c_2} : & s_1, s_3, s_2, s_4 & \mathbf{q}_{c_2} = (q_{c_2}, q_{c_2}^M) = (1,1), \\
\succeq_{c_3} : & s_1, s_4, s_2, s_3 & \mathbf{q}_{c_3} = (q_{c_3}, q_{c_3}^M) = (1,1).
\end{array}
$$

このマーケットにおける，TTC メカニズムによるマッチング $\mu^T(G)$ は次のように与えられる．

$$\mu^T(G) = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \varnothing \\ s_1 & s_3 & s_4 & s_2 \end{pmatrix}.$$

この市場に対して，優先順位にもとづいた厳密な積極的差別是正政策を考える．

$$\begin{aligned}
\succeq'_{c_1} \quad &: \quad s_4, s_2, s_3, s_1 \qquad \mathbf{q}_{c_1} = (q_{c_1}, q^M_{c_1}) = (1,1), \\
\succeq'_{c_2} \quad &: \quad s_1, s_3, s_4, s_2 \qquad \mathbf{q}_{c_2} = (q_{c_2}, q^M_{c_2}) = (1,1), \\
\succeq'_{c_3} \quad &: \quad s_4, s_1, s_2, s_3 \qquad \mathbf{q}_{c_3} = (q_{c_3}, q^M_{c_3}) = (1,1).
\end{aligned}$$

市場 $G' = (S, C, (R_s)_{s\in S}, (\succeq_c)_{c\in C}, \mathbf{q}'_{cc\in C})$ は，市場 $G = (S, C, (R_s)_{s\in S}, (\succeq_c)_{c\in C}, (\mathbf{q}_c)_{c\in C})$ よりも強く厳密な積極的差別是正政策を実行している市場となる．

市場 G' における，TTC メカニズムによるマッチング $\mu'^T(G)$ は

$$\mu^T(G') = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \varnothing \\ s_1 & s_2 & s_4 & s_3 \end{pmatrix}.$$

マイノリティの学生 s_3 は厳密に悪化し，マイノリティの学生 s_4 は同じである． □

5.5　おわりに

本章は，学校選択制の文脈において積極的差別是正政策が，マイノリティの学生の厚生にどのような効果を持つかを，既存研究と同様の流れに沿って再検討した．本章で考察された積極的差別是正政策は代表的な既存研究であり，ここでの再考のもとである，Kojima, Fuhito (2012) の定義した積極的差別是正政策とは異なる．ここでの要求は，すべての学校が必ず積極的差別是正政策を実行しなければならないということを要求している．ここでの最初に定義した積極的差別是

正政策は，具体的にいうと，必ず，すべての学校は一つ以上，マイノリティの学生のために優先席を設けなければならないということであり，このことはマイノリティの学生にとって，Kojima, Fuhito (2012) で定義された積極的差別是正政策よりも有利な概念である．もう一つの積極的差別是正政策である優先順位にもとづいた積極的差別是正政策に対して，本章で与えた定義は，彼の定義よりも有利な概念である．なぜならば，全ての学校が必ず一人以上のマイノリティの学生の優先順位を，マジョリティの学生よりも上位におかなければならないことを要求しているからである．つまり，積極的差別是正政策の概念を, よりマイノリティの学生に対して有利にすることで彼が出した不可能性を解消できるかどうかを検討した.

本章での主な結果は，**?**よりもマイノリティの学生にとって有利となる積極的差別是正政策を導入したとしても，マイノリティの学生の厚生を悪化させてしまう可能性が，安定なマッチング・メカニズムには存在するということを示した．この結果だけをみると Kojima, Fuhito (2012) で得られた知見を超えてないように見えるが，積極的差別是正政策を単純に拡張するだけでは，マイノリティの学生の厚生を改善することはできないという，積極的差別是正政策の質の問題を新たに提供したことになる．つまり，積極的差別是正政策という名目が重要ではなく，どのようにそれを実行するのか, またはどのような枠を設置するのかなどを詳細に検討しなければならない, という知見を与えたことが, ここでの貢献である.

さらに，学校選択制において, 安定メカニズム以外によく用いられる TTC メカニズムにおいても，積極的差別是正政策が，ここで設定した評価基準の意味では，うまく機能しないことを示した．つまり，TTC メカニズムにおいても，積極的差別是正政策を実行したとしても，マイノリティの学生の厚生を傷つけてしまう可能性があることを指摘した.

本研究は，Kojima, Fuhito (2012) の研究を端緒として，マイノリティの学生の厚生を改善するように，単純な形で積極的差別是正政策を強めたが，それでもマイノリティの学生の厚生を改善するには至らなかった．この結論をもって，安易に積極的差別是正政策は良くない制度であると考えるのではなく，上記でも言及したように，積極的差別是正政策の, ここで指摘したような欠点

を解消するような積極的差別是正政策を考えるための材料を Kojima, Fuhito (2012) と並んで提供したことになればよいと考えている.

そのためには，さらなる積極的差別是正政策の理論研究と実証的調査が必要と考えられる．これに対する研究の進展を後の章でさらに述べる.

参考文献

Abdulkadiroğlu, A. (2005) "College Admissions with Affirmative Action," *International Journal of Game Theory*, Vol. 33, No. 4, pp. 535-549.

Abdulkadiroğlu, Atila and Tyfun Sönmez (2003) "School Choice: A Mechanism Design Approach," *American Economic Review*, Vol. 98, No. 3, pp. 729-747.

Ergin, Haluk and Tayfun Sönmez (2006) "Games of School Choice under the Boston Mechanism," *Journal of Public Economics*, Vol. 90, pp. 215-237.

Gale, David and Lloyd Shapley (1962) "College Admissions and the Stability of Marriage," *American Mathematical Monthly*, Vol. 69, pp. 9-15.

Hafalir, Isa E., M. Bumin Yenmez, and Muhammed A. Yildirim (2013) "Effective Affirmative Action in School Choice," *Theoretical Economics*, Vol. 8, No. 2, pp. 325–363.

Kojima, Fuhito (2012) "School Choice: Impossibility for Affirmative Action," *Games and Economic Behavior*, Vol. 75, pp. 685-693.

Matsubae, Taisuke (2011) "Do the Minority Students Benefit from Affirmative Action Policy in School Choice Market?: Reconsidered," *memeo.*

Roth, Alvin E. (1982) "The Economics of Matching: Stability and Incentives," *Mathematics of Operations Research*, Vol. 7, pp. 617-628.

——— (1991) "A Natural Experiment in the Organization of Entry-Level Labor Markets: Regional Markets for New Physicians and Surgeons in the United Kingdom," *American Economic Review*, Vol. 81, pp. 415-440.

——— (2008) "Deferred Acceptance Algorithms: History, Theory, Practice, and Open Questions," *International Journal of Game Theory*, Vol. 6, pp. 537-569.

Roth, Alvin E. and Marild Sotomayor (1990) *Two-Sided Matching:A Study in Game-Theoretic Modeling and Analysis*: Econometric Society monographs, Cambridge.

Shapley, Lloyd and Herbert Scarf (1974) "On Cores and Indivisibility," *Journal of Mathematical Economics*, Vol. 1, pp. 23-37.

Sönmez, T. and M. Utku Ünver (2009) *Matching, Allocation, and Exchange of Discrete Resources in Handbook of Social Economics*: Elsevier.

Sönmez, Tyfun. (1997) "Manipulation via Capacities in Two-Sided Matching Markets," *Journal of Economic Theory*, Vol. 77, pp. 197-204.

第6章　マイノリティの厚生を改善する積極的差別是正政策の考察

本章は Matsubae, Taisuke (2013)“Group Affirmative Action Policy at School Choice” にもとづいて書かれている.

6.1　はじめに

米国で歴史的に差別されてきた黒人（米国の人口に占める黒人の割合は 12%），アジア系，ヒスパニックや女性に進学・雇用などで平等な機会を保障する制度が，積極的差別是正政策である．積極的差別是正政策は，マイノリティを積極的に雇ったり入学させたりすることが差別を解消し平等社会を作るという発想から，1960 年代の公民権法や大統領行政命令を根拠に広まったとされている.

例えばカリフォルニアでは，州政府の公共工事，物品購入などの契約（金額）のうち少数者の経営する企業が 15%, 女性の経営者の企業が 5%を占めることを目標として設定している．一般企業も下請けにマイノリティの人たちを増やす努力義務があり, 怠ると入札からはずされる．公立学校では，マイノリティ向けの特別指導や奨学金などの優遇措置があり，大学の合格許可でもマイノリティかどうかが判定の基準のひとつになっている.

1995 年 6 月カリフォルニア州のピート・ウィルソン知事（共和党）は，優遇措置にもとづく雇用枠を検討する諮問委員会などを廃止する行政命令を発令した．黒人，ヒスパニックや女性などのマイノリティに対する優先雇用枠の撤廃の方向にかじをとったのは，これが全米で初めてである．同年 8 月に同知事は同州のマイノリティに対する優遇措置は違憲であるとして, マイノリティ

の優先雇用枠やマイノリティなどが経営する企業を優遇する公共事業発注枠を定めた州法の差止めを求める訴えを現地の州最高裁に起こした.

民主党のクリントン大統領も同年 7 月にマイノリティへの優遇措置の見直し策を発表した. 優遇制度の継続の必要性を認める一方で, 雇用や就学の機会を一定の割合で確保する割当制は白人への逆差別を生みかねないとして廃止を提唱した. 大統領は連邦政府に対して, 割当制の撤廃を命じるとともに, 経済的な困窮度の高い人たちを優先するなど制度を公正に適用するように求める布告を出した. また連邦最高裁は同年に連邦政府の積極的差別是正政策が厳格な審査に服すると判示した. この審査の下では連邦政府が人種的平等を達成するために積極的差別是正政策を用いることが厳格に制限されることになる. その後, 連邦最高裁は, 1996 年 7 月 1 日に逆差別にもとづいて黒人や女性の優先入学を認めた公立学校の規定について, これを違法とした連邦高裁の判決を事実上支持する判断を示した. この裁判はテキサス州のロー・スクールの入学できなかった白人の青年が, 黒人の受験生より高い点をとっていたにもかかわらず, 積極的差別是正措置によって不合格になるのは違法として訴えていたもので, 高裁は優先入学規定を「逆差別かつ違法」と判断した. その判決に対し, 州当局や市民団体が最高裁での審理を求めていた. 最高裁は同日, 7 対 3 の大差でこれを退け, 高裁の判断を事実上支持した. この最高裁の判断は, 保守化のうねりを受けて全米に広がる積極的差別是正政策の縮小, 撤廃の動きに弾みを付けた. 同年カリフォルニアでは住民投票で逆差別の廃止をうたう市民立法「提案 209」が 54%の賛成を集め成立した. 「提案 209」は「公務員の採用, 公教育, 公共事業契約において, 人種, 性, 皮膚の色, 民族, 出身国を基準としたとした優先措置や差別を, 州政府や公共機関が行うことを禁止する」という州憲法修正案である.

このような議論が, 米国で起こっている事実からもわかるように積極的差別是正政策はさまざまな角度から検討が必要である. 本章は, 他の章と同様にそのような議論に一つの視点を与えるものである.

このような視点の研究として, Kojima, Fuhito (2012), Matsubae, Taisuke (2011), や Hafalir, Isa E., M. Bumin Yenmez, and Muhammed A. Yildirim (2013) がある.

これらの研究は，マッチング理論を用いて，学校の定員に基づいた積極的差別是正政策を学校選択制に導入した場合，その制度の本来の目的の一つである，マイノリティの学生の厚生が改善するかどうかを考察している.[1] この問いに対しては，Kojima, Fuhito (2012) や Matsubae, Taisuke (2011)（5 章）によって，否定的な回答が得られている．つまり，マッチング理論を用いた学校選択制の研究において，中心となる安定性という性質を満たしながら，任意の市場に対してマイノリティの学生の厚生の改善を導くメカニズムを構築することは不可能であるという結論である.

一方，Hafalir, Isa E., M. Bumin Yenmez, and Muhammed A. Yildirim (2013) は選好順序に基づいた積極的差別是正政策を考えることにより，Kojima, Fuhito (2012) や Matsubae, Taisuke (2011) よりも肯定的な回答を示している．つまり，安定なメカニズムにおいて，彼らの積極的差別是正政策を用いることで，あるマイノリティの学生の厚生が悪化しないということを示した.

本章では，選好順序に基づいた積極的差別是正政策が学校選択制においてどのような効果を持つかを考察する.[2] 特に，本章において，マイノリティのグループ全体に対して選好に基づいた積極的差別是正政策を実施することで，すべてのマイノリティの学生の厚生が弱い意味で改善されることを示す.

6.2　積極的差別是正政策を用いた学校選択制のモデル

既存研究や以前の章と同様に，マイノリティの学生とマジョリティの学生の二つのタイプのみがいる，最も単純な状況を考える.[3]

学校選択市場，または単純に**市場** G は次のような要素から構成されている.

1. $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$：学生の有限集合.

[1] この方向の研究より一般的な方向は，いわゆる制約下の学校選択問題といわれている． 詳細は Ehlers, Lars (2010) を参照.

[2] Kojima, Fuhito (2012) や Matsubae, Taisuke (2011) も選好に基づいた積極的差別是正政策も考察している.

[3] Kojima, Fuhito (2012), Matsubae, Taisuke (2011), や Hafalir, Isa E., M. Bumin Yenmez, and Muhammed A. Yildirim (2013) と同様の設定である.

(a) 学生の集合 S は二つの集合に分割されている．つまり，**マジョリティの学生の集合** S^M と**マイノリティの学生の集合** S^m の分割である．

2. $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_m\}$：学校の有限集合．

3. 学生の選好プロファイルを $R_S = (R_{s_1}, R_{s_2}, \ldots, R_{s_n})$ とする, ここで R_{s_i} は， 学生 s_i に対する学校 C と自分自身 $\{s_i\}$ 上の選好関係である．

   (a) 学生 s_i が自分自身に割当てられるならば，そのとき $\varnothing$ で表記する．

   (b) 選好関係は厳密であると仮定する，すなわち，異なる学校と自分自身に対しどちらかを必ずより選好する．

   (c) $c_i P_{s_i} c_j$ と表記する場合， $c_i R_{s_i} c_j$ であり，$c_j R_{s_i} c_i$ は成り立たない場合である．

   (d) $c_i R_{s_i} \varnothing$ であるならば，そのとき学校 c_i は，学生 s_i にとって学校 c_i は**アクセプタブル**であるといわれる．

4. 学校の優先順位プロファイルを $\succeq_C = (\succeq_{c_1}, \succeq_{c_2}, \ldots, \succeq_{c_m})$, と記す．ここで，$\succeq_{c_i}$ は，学校 $c_i \in C$ にとっての学生 S と自分自身上の優先順位である．

   (a) この優先順位は厳密であると仮定する．すなわち，異なる学生と自分自身に対して，必ず優先順位の高い低いが存在する．

   (b) $s_i \succ_{c_i} s_j$ と表記する場合，$s_i \succeq_{c_i} s_j$ が成り立ち，$s_j \succeq_{c_i} s_i$ は成り立たない場合である．

5. 各学校 $c_i \in C$ に対して, q_{c_i} は，学校 c_i の**定員**とよばれる．ここで，q_{c_i} は正の自然数である．

上記の要素をまとめると，市場 G は次のように与えられる．

$$G = (S, C, R_S, \succeq_C, (q_{c_i})_{c_i \in C}).$$

マッチングまたは**割当て**の概念を定義する．

マッチング μ は，次のような性質を満たす．$\mu : C \cup S \to 2^{C \cup S}$ の写像となる.

1. すべての学生 s に対して，$|\mu(s)| = 1$, かつ $s \notin \mu(c) \forall c \in C$ であるならば，$\mu(s) = \varnothing$;

2. すべての学生 $s \in S$ とすべての学校 $c \in C$ に対して, $\mu(s) = c \iff s \in \mu(c)$;

3. すべての学校 $c \in C$ に対して，$|\mu(c)| \leq q_c$ かつ $\mu(c) \subseteq S$.

このマッチングの概念は，マッチング理論で標準的に用いられるものである.

マッチング全体の集合を $\mathcal{M}$ とする.

マッチング μ が**安定**であるとは， 次の条件を満たすマッチングである.

(1). 全ての学生 $s_i \in S$ に対して，$\mu(s_i) R_{s_i} \varnothing$, かつ

(2). もし $c_i P_{s_i} \mu(s_i)$ であるならば, そのとき $|\mu(c_i)| = q_{c_i}$ かつ，ある学生 $s_j \in \mu(c_i)$ に対して，$s_j \succ_{c_i} s_i$ となる.

この定義は，学校選択制の文脈において標準的な定義である．(1) は**個人合理性条件**とよばれる. (2) は**正当化された妬みがない条件**とよばれる.[4] マッチング μ が安定であるとは，マッチング μ が個人合理的で，かつ正当化された妬みがない状況である.

(直接) **メカニズム**は，次のような写像 ϕ である．各市場 G に対して，マッチングを決める写像である． メカニズム ϕ と市場 G が与えられるとき，学生 s に対するマッチングを $\phi_s(G)$ とし，学校 c に対するマッチングを $\phi_c(G)$ と表記する.

メカニズム ϕ が安定であるとは， 任意の市場 G に対して，$\phi(G)$ が，必ず安定なマッチングを選択することをいう．任意の市場に対する，安定なメカニズムを $\phi^*(\cdot)$ と表記する.

ある安定マッチングを見つけるアルゴリズムは，次のようなアルゴリズムである.[5]

[4] (2) は，two sided マッチング理論のブロッキングペアがないという概念と類似の概念である.
[5] このアルゴリズムは，大学入学問題の文脈で，Gale, David and Lloyd Shapley (1962) によって考案された.

学生プロポーズ DA アルゴリズム

ステップ 1 学生からプロポーズする状況を考える．(もし彼女たちにアクセプタブルな学校があるならば) 各学生は第一希望の学校に応募する．各学校はその学校に応募した学生の中で，その学校にとってアクセプタブルな学生を学校の定員まで仮入学させる．それ以外の学生は拒否する．

ステップ $k \geq 2$ 任意のステップ k で，ステップ $k-1$ で拒否された任意の学生は，今までのステップで応募していない学校の中で最も選好する学校に応募する．各学校は，ステップ $k-1$ までに仮入学している学生と k 期に応募してきたアクセプタブルな学生の中から，より選好する学生を定員まで仮入学させる．それ以外の学生は拒否する．

学生プロポーズ DA アルゴリズムによって導かれる安定なマッチングは，**学生最適安定マッチング**とよばれる．学生最適安定マッチングを導くメカニズムを学生最適安定メカニズム (SOSM) とよび，ϕ^A と表記する．$\phi^A(G)$ は市場 G において，学生最適安定マッチングと等しくなる．

6.3 グループ積極的差別是正政策

この章において中心的な概念である，グループ積極的差別是正政策を定義する．

学校 c が**グループ積極的差別是正政策** $\succeq_c^{g.a.a.}$ を実施するとは，任意の学生 $s, s' \in S^m$ かつ学生 $t, t' \notin S^m$ に対して，

- $s \succeq_c s' \iff s \succeq_c^{g.a.a.} s'$,
- $t \succeq_c t' \iff t \succeq_c^{g.a.a.} t'$，かつ
- $s \succeq_c t \Longrightarrow s \succeq_c^{g.a.a.} t$

となりことである．Kojima, Fuhito (2012) で導入された選好にもとづく積極的差別是正政策とは異なり，このように積極的差別是正政策をマイノリティの学生全体に課す理由の一つは，どのマ

イノリティの学生を優遇するかを決めることは，現実的に難しいので，マイノリティの学生全体にその政策を実施することが，現実的である．さらに，マイノリティのある学生にそのような政策を実施すると，他のマイノリティの学生に対して不平等となるので，このように定義することが自然と考えられる．

ある市場が他の市場より**強いグループ積極的差別是正政策**をもつとはつぎのような状況である．

ある学校がグループ積極的差別是正政策を実施した市場を

$$G^{g.a.a.} = (S, C, R_S, \succeq_C^{g.a.a.}, (q_c)_{c\in C})$$

とし，どの学校もグループ積極的差別是正政策をしていない市場

$$G = (S, C, R_S, \succeq_C, (q_c)_{c\in C})$$

とする．

そのとき $G^{g.a.a.}$ は G より強いグループ積極的差別是正政策の市場となる．

その政策効果を測るために，マイノリティの学生の厚生を評価基準とする．

マッチング μ' がマイノリティの学生にとってマッチング μ より**パレート劣位**であるとは，(a) 全ての学生 $s \in S^m$ に対し $\mu(s) R_s \mu'(s)$ かつ (b) 少なくともある学生 $s \in S^m$ に対し $\mu(s) P_s \mu'(s)$ となることである.[6)]

定義 16. メカニズム ϕ が**グループ積極的差別是正政策の精神を尊重する**とは，任意の市場 G に対して，次のような条件を満たすことである．

1. 市場 $G^{g.a.a.}$ は市場 G より強いグループ積極的差別是正政策をもち, かつ

2. マイノリティの学生にとって，$\phi(G^{g.a.a.})$ が $\phi(G)$ よりパレート劣位

[6)]Kojima, Fuhito (2012) や Matsubae, Taisuke (2010) もこの基準で評価している．

とならない.

この定義は，任意の市場をとってきて，その市場に対してグループ積極的差別是正政策をとっている市場を考える．この定義は，グループ積極的差別是正政策を実施している市場で, すべてのマイノリティの学生の厚生が悪化してはいけないということを述べている．つまり，グループ積極的差別是正政策を尊重するとは，そのグループ積極的差別是正政策を導入することで，すべてのマイノリティの学生の厚生が，それを導入する前と比較して悪化してはいけないということを要求していることになる.

この要求は，その積極的差別是正政策を導入することで，導入する前よりもマイノリティの学生すべてが弱い意味で悪くならなければいいという，かなり弱い条件であることがわかる．つまり，グループ積極的差別是正政策の精神を尊重するような状況として，あるマイノリティの学生は悪くなるが，別のあるマイノリティの学生が良くなる場合も含まれている．したがって，このグループ積極的差別是正政策を尊重するという基準は，積極的差別是正政策を評価する最低基準と見なすことができる.

次の定理で示すように，ここで導入したグループ積極的差別是正政策は他の政策と同様に, この最低基準ですら満たさない．いわゆる，不可能性定理を示すことになる.

定理 59. 任意の市場に対して，グループ積極的差別是正政策の精神を尊重するような安定なメカニズムは存在しない.

【証明】

ある市場 $G = (S, C, R_S, \succeq_C, (q_c)_{c\in C})$ を考える．その市場 G は次のように構成されている．学生の集合 $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$ と学校の集合 $C = \{c_1, c_2, c_3\}$ とし， マジョリティの学生の集合 $S^M = \{s_1, s_2, s_3\}$, マイノリティの学生の集合 $S^m = \{s_4, s_5\}$ とする.

各学生の選好関係は次のように与えられている.

$$
\begin{aligned}
R_{s_1} &: c_1, c_2, c_3, \\
R_{s_2} &: c_1, c_2, c_3, \\
R_{s_3} &: c_2, c_1, c_3, \\
R_{s_4} &: c_2, c_3, c_1, \\
R_{s_5} &: c_1, c_2, c_3.
\end{aligned}
$$

各学校の優先順位は次のように与えられている.

$$
\begin{aligned}
\succeq_{c_1} &: s_1, s_4, s_2, s_3, s_5 \quad q_{c_1} = 1, \\
\succeq_{c_2} &: s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 \quad q_{c_2} = 1, \\
\succeq_{c_3} &: s_2, s_3, s_4, s_1, s_5 \quad q_{c_2} = 2.
\end{aligned}
$$

ここで，記号の便宜上，学生の選好も学校の優先順位も順番に選好される学校，優先順位の高い学校を表現している．例えば，学校 c_1 において, 学生 s_1 が最も優先順位が高く， 学生 s_4 が二番目に優先順位が高く， 学生 s_2 が三番目に優先順位が高く，学生 s_3 が四番目に優先順が高く，そして学生 s_5 が最も優先順位が低いということである.

この市場 G において, 次のような一意の安定なマッチングが与えられる.

$$
\phi^*(G) = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \varnothing \\ s_1 & s_2 & s_3, s_4 & s_5 \end{pmatrix},
$$

これは，学校 c_1 と学生 s_1 がマッチし, 学校 c_2 は学生 s_2 とマッチし, 学校 c_3 は学生 s_3 と学生 s_4 がマッチし, 学生 s_5 はどの学校ともマッチされないままであることを意味している.

学校 c_1 がグループ積極的差別是正政策を実施した状況を考える.

そのとき，学校 c_1 の優先順位は次のように与えられる.

$$\succeq_{c_1}^{g.a.a.} \quad : \quad s_4, s_5, s_1, s_2, s_3 \quad q_{c_1} = 1.$$

G より強くグループ積極的差別是正政策を実施している市場 $G^{g.a.a.} = (S, C, R_S, (\succeq_{c_1}^{g.a.a.}, \succeq_{-c_1}), (q_c)_{c\in C})$ を考える.

そのとき，次のような一意の安定なマッチングが存在する.

$$\phi^*(G^{g.a.a.}) = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \varnothing \\ s_4 & s_1 & s_2, s_3 & s_5. \end{pmatrix},$$

市場は $G^{g.a.a.}$ は G より強いグループ積極的差別是正政策をもっている.

各市場におけるマッチング結果を比較し，より強い積極的差別是正政策をもっている市場のマッチングの結果が，すべてのマイノリティの学生にとって，市場 G によるマッチングよりもパレート劣位であることを確認する.

マイノリティの学生 s_4 は，$\phi^*(G^{g.a.a.})$ のもとで $\phi^*(G)$ より厳密に悪化している．一方，マイノリティの学生 s_5 はどちらにおいても同じである． したがって，$\phi^*(G^{g.a.a.})$ は，すべてのマイノリティの学生にとって，$\phi^*(G)$ よりパレート劣位である. □

この否定的な結果は，他の既存研究 Kojima, Fuhito (2012) や Matsubae, Taisuke (2011) などで示された結果と同じである．そこで，次に， Matsubae, Taisuke (2011) によって導入された考え方を利用する． 彼は，すべての学校が彼の定義した積極的差別是正政策を実施している状況を考えた．他の既存研究においては，他の全ての学校は積極的差別是正政策を実施しないが，一つの学校のみが積極的差別是正政策を実施しているような状況も認める環境を分析している.

そこで，Matsubae, Taisuke (2011) と同様に，すべての学校がグループ積極的差別是正政策を

実施する環境を考える．つまり，すべての学校がグループ積極的差別是正政策を実施しているとき，すべてのマイノリティの学生は, すべての学校において任意のマジョリティの学生よりも優先順位が高くなる.

この要求が満たされる市場 $G^{s.g.a.a.}$ を市場 G **より強い厳密なグループ積極的差別是正政策をもつ**という.

そこで，定義 16 の (1) を以下のように変更する.

定義 17. メカニズム ϕ が**厳密なグループ積極的差別是正政策の精神を尊重する**とは，任意の市場 G に対して，次のような条件を満たすことである.

$(1')$ 市場 $G^{s.g.a.a.}$ は市場 G より強い厳密なグループ積極的差別是正政策をもち, かつ

(2) マイノリティの学生にとって，$\phi(G^{s.g.a.a.})$ が $\phi(G)$ よりパレート劣位

とならない.

この積極的差別是正政策のもとで，次のような可能性定理を示すことができる．SOSM は，すべてのマイノリティの学生の厚生を悪化させない安定なメカニズムとなる．全ての学校が，この厳密なグループ積極的差別是正政策を実施することでどの学校が実施するかどうかの問題や，以前の章で論じた問題である，その政策の実施を裁量に任すことで生じる戦略的な問題も排除できる.

定理 60. 任意の市場に対して，SOSM は，厳密なグループ積極的差別是正政策の精神を尊重する.

【証明】

背理法の仮定より，市場 G とその市場 G より強い厳密なグループ積極的差別是正政策をもつ市場 $G^{s.g.a.a.}$ に対して次のようなマイノリティの学生 s が存在し,

$$\phi_s^{\mathrm{A}}(G) P_s \phi_s^{\mathrm{A}}(G^{s.g.a.a.})$$

と他のマイノリティの学生は，市場 G と $G^{s.g.a.a.}$ で同じマッチングである状況を仮定する．

そこで，$\phi_s^{\mathrm{A}}(G)=c$ とする．学校 c は $G^{s.g.a.a.}$ において s とマッチされていない．つまり，すべての $s'' \in \phi_c^{\mathrm{A}}(G^{s.g.a.a.})$ に対して，$s'' \succ_c^{g.a.a.} s$ である， なぜならば $\phi^A(G^{s.g.a.a.})$ は，$G^{s.g.a.a.}$ で安定であるからである．$\phi_c^{\mathrm{A}}(G^{s.g.a.a.}) \neq \phi_c^{\mathrm{A}}(G)$ ではない．この事実と厳密なグループ積極的差別是正政策により，$\phi_c^{\mathrm{A}}(G^{s.g.a.a.})$ において $\phi_c^{\mathrm{A}}(G)$ にいない学生 s''' は，マイノリティの学生である．そうでないならば，s は，s''' に対して，正当化された妬みをもつことが可能であるからである．しかしながら，s 以外の他のマイノリティの学生は，どちらの市場においても同じ学校とマッチングしているとの仮定に矛盾する． □

以前の定理の証明で用いた例を使って，グループ積極的差別是正政策と厳密なグループ積極的差別是正政策の違いを確認する．

例 17. ある市場 $G=(S,C,R_S,\succeq_C,(q_c)_{c\in C})$ を考える．その市場 G は次のように構成されている．学生の集合 $S=\{s_1,s_2,s_3,s_4,s_5\}$ と学校の集合 $C=\{c_1,c_2,c_3\}$ とし， マジョリティの学生の集合 $S^M=\{s_1,s_2,s_3\}$，マイノリティの学生の集合 $S^m=\{s_4,s_5\}$ とする．

各学生の選好関係は次のように与えられている．

$$
\begin{aligned}
R_{s_1} &: c_1,c_2,c_3,\\
R_{s_2} &: c_1,c_2,c_3,\\
R_{s_3} &: c_2,c_1,c_3,\\
R_{s_4} &: c_2,c_3,c_1,\\
R_{s_5} &: c_1,c_2,c_3.
\end{aligned}
$$

各学校の優先順位は次のように与えられている.

$$\succeq_{c_1} \quad : \quad s_1, s_4, s_2, s_3, s_5 \quad q_{c_1} = 1,$$

$$\succeq_{c_2} \quad : \quad s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 \quad q_{c_2} = 1,$$

$$\succeq_{c_3} \quad : \quad s_2, s_3, s_4, s_1, s_5 \quad q_{c_2} = 2.$$

ここで，記号の便宜上，学生も学校も順番に選好される学校，優先順位の高い学校を表現している．例えば，学校 c_1 において, 学生 s_1 が最も優先順位が高く，　学生 s_4 が二番目に優先順位が高く，　学生 s_2 が三番目に優先順位が高く，学生 s_3 が四番目に優先順が高く，そして学生 s_5 が最も優先順位が低いということである.

この市場 G において, 次のような学生最適安定マッチングが与えられる.

$$\phi^A(G) = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \varnothing \\ \\ s_1 & s_2 & s_3, s_4 & s_5 \end{pmatrix},$$

これは，学校 c_1 と学生 s_1 がマッチし, 学校 c_2 は学生 s_2 とマッチし, 学校 c_3 は学生 s_3 と学生 s_4 がマッチし, 学生 s_5 はどの学校ともマッチしないままであるということを意味している.

学校 c_1 がグループ積極的差別是正政策を実施した状況を考える.

そのとき，学校 c_1 の優先順位は次のように与えられる.

$$\succeq_{c_1}^{g.a.a.} \quad : \quad s_4, s_5, s_1, s_2, s_3 \quad q_{c_1} = 1.$$

G より強くグループ積極的差別是正政策を実施している市場 $G^{g.a.a.} = (S, C, R_S, (\succeq_{c_1}^{g.a.a.}, \succeq_{-c_1}), (q_c)_{c \in C})$ を考える.

そのとき，次のような学生最適安定マッチングが存在する.

$$\phi^A(G^{g.a.a.}) = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \varnothing \\ \\ s_4 & s_1 & s_2, s_3 & s_5. \end{pmatrix},$$

次に，すべての学校がグループ積極的差別是正政策を実施した場合を考える．そのとき，学校の優先順位は次のようになる.

$$\begin{aligned} \succeq_{c_1}^{g.a.a.} \quad &: \quad s_4, s_5, s_1, s_2, s_3 \quad q_{c_1} = 1, \\ \succeq_{c_2}^{g.a.a.} \quad &: \quad s_4, s_5, s_1, s_2, s_3 \quad q_{c_2} = 1, \\ \succeq_{c_3}^{g.a.a.} \quad &: \quad s_4, s_5, s_2, s_3, s_1 \quad q_{c_2} = 2. \end{aligned}$$

$G^{s.g.a.a.} = (S, C, R_S, \succeq_C^{g.a.a.}, (q_c)_{c \in C})$ を考える.

そのとき，学生最適安定マッチングは次のように与えられる.

$$\phi^A(G^{s.g.a.a.}) = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \varnothing \\ \\ s_5 & s_4 & s_2, s_3 & s_1. \end{pmatrix},$$

市場は $G^{s.g.a.a.}$ は G より強い厳密なグループ積極的差別是正政策をもっている.

各市場におけるマッチング結果を比較し，より強い厳密な積極的差別是正政策をもっている市場のマッチングの結果が，すべてのマイノリティの学生にとって，市場 G によるマッチングよりも改善していることを確認する.

マイノリティの学生 s_4 は，$\phi^*(G^{s.g.a.a.})$ のもとで $\phi^*(G)$ より厳密に改善している．一方，マイノリティの学生 s_5 も同様に改善している． したがって，$\phi^*(G^{s.g.a.a.})$ は，すべてのマイノリティの学生にとって，$\phi^*(G)$ を強い意味でパレート支配している.

上記の定理は，いわゆる可能性定理である．しかしながら，この政策効果を判断するにはあまりにも弱い基準である．そこで，政策効果を判断するために，より強い基準を考える．つまり，すべてのマイノリティの学生はその積極的差別是正政策を行うことで，弱い意味で改善するという基準を用いる．ここでは，厳密なグループ積極的差別是正政策がすべてのマイノリティの厚生を弱い意味で改善することを示す．その前に，その結果の直観を例を用いて紹介する．

例 18. ある市場 $G = (S, C, R_S, \succeq_C, (q_c)_{c \in C})$ を考える．その市場 G は次のように構成されている．学生の集合 $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$ と学校の集合 $C = \{c_1, c_2, c_3\}$ とし， マジョリティの学生の集合 $S^M = \{s_1, s_2, s_3\}$, マイノリティの学生の集合 $S^m = \{s_4, s_5\}$ とする．

各学生の選好関係は次のように与えられている．

$$
\begin{aligned}
R_{s_1} &: c_1, c_2, c_3, \\
R_{s_2} &: c_1, c_2, c_3, \\
R_{s_3} &: c_2, c_1, c_3, \\
R_{s_4} &: c_1, c_3, c_2, \\
R_{s_5} &: c_1, c_2, c_3.
\end{aligned}
$$

各学校の優先順位は次のように与えられている．

$$
\begin{aligned}
\succeq_{c_1} &: s_1, s_4, s_2, s_3, s_5 \quad q_{c_1} = 1, \\
\succeq_{c_2} &: s_1, s_2, s_5, s_4, s_3 \quad q_{c_2} = 1, \\
\succeq_{c_3} &: s_2, s_3, s_4, s_1, s_5 \quad q_{c_2} = 2,
\end{aligned}
$$

ここで，記号の便宜上，学生も学校も順番に選好される学校，優先順位の高い学校を表現している．例えば，学校 c_1 において，学生 s_1 が最も優先順位が高く， 学生 s_4 が二番目に優先順位が

高く， 学生 s_2 が三番目に優先順位が高く，学生 s_3 が四番目に優先順位が高く，そして学生 s_5 が最も優先順位が低いということである.

この市場 G において, 次のような学生最適安定マッチングが与えられる.

$$\phi^A(G) = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \varnothing \\ \\ s_1 & s_2 & s_3, s_4 & s_5 \end{pmatrix},$$

これは，学校 c_1 と学生 s_1 がマッチし, 学校 c_2 は学生 s_2 とマッチし, 学校 c_3 は学生 s_3 と学生 s_4 がマッチし, 学生 s_5 はどの学校ともマッチしないままであるということを意味している.

すべての学校がグループ積極的差別是正政策を実施した場合を考える．そのとき，学校の優先順位は次のようになる.

$$\begin{aligned} \succeq_{c_1}^{g.a.a.} \quad &: \quad s_4, s_5, s_1, s_2, s_3 \quad q_{c_1} = 1, \\ \succeq_{c_2}^{g.a.a.} \quad &: \quad s_5, s_4, s_1, s_2, s_3 \quad q_{c_1} = 1, \\ \succeq_{c_1}^{g.a.a.} \quad &: \quad s_4, s_5, s_2, s_3, s_1 \quad q_{c_1} = 2. \end{aligned}$$

$G^{s.g.a.a.} = (S, C, R_S, \succeq_C^{g.a.a.}, (q_c)_{c \in C})$ を考える.

そのとき，学生最適安定マッチングは次のように与えられる.

$$\phi^A(G^{s.g.a.a.}) = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \varnothing \\ \\ s_4 & s_5 & s_2, s_3 & s_1. \end{pmatrix},$$

市場は $G^{s.g.a.a.}$ は G より強い厳密なグループ積極的差別是正政策をもっている.

各市場におけるマッチング結果を比較し，より強い厳密な積極的差別是正政策をもっている市

場のマッチングの結果が，すべてのマイノリティの学生にとって，市場 G によるマッチングよりも改善していることを確認する．

マイノリティの学生 s_4 は，$\phi^*(G^{s.g.a.a.})$ のもとで $\phi^*(G)$ より厳密に改善している．一方，マイノリティの学生 s_5 も同様に改善している． したがって，$\phi^*(G^{s.g.a.a.})$ は，すべてのマイノリティの学生にとって，$\phi^*(G)$ を強い意味でパレート支配している．

定理 61. 厳密なグループ積極的差別是正政策のもとでの SOSM によるマッチングは，厳密なグループ積極的差別是正政策を実施しない SOSM によるマッチングよりも，すべてのマイノリティの学生にとって弱い意味で厚生が改善される．

【証明】

示すべきことは，任意のマイノリティの学生 $s \in S^m$ に対し $\phi^{\mathrm{A}}_s(G^{s.g.a.a.})R_s\phi^{\mathrm{A}}_s(G)$ である．ここで，市場 $G^{s.g.a.a.}$ は G より強い厳密なグループ積極的差別是正政策をもっている市場とする．

これを示すために背理法で証明を行う．そのために，2 つの場合に分けて考える．

場合 1: $\phi^{\mathrm{A}}_{s'}(G)P_{s'}\phi^{\mathrm{A}}_{s'}(G^{s.g.a.a.})$ となるようなマイノリティの学生 s' が存在し，かつそれ以外のマイノリティの学生は両方の市場で変化しない場合を考える．

この場合は，以前の定理 2 と同様のケースである．

場合 2: 市場 $G^{s.g.a.a.}$ において，より選好するマッチングを得るマイノリティの学生と，より選好されないマッチングを得るマイノリティの学生が存在するケースを考える．

さらにこの場合を 2 つのケースに分けて証明を行う．

2-1: $G^{s.g.a.a.}$ においてより選好される学校とマッチングしている学生は，選好の厳密性より，G でマッチしている以外の学校 c とマッチしていることになる．その学校 c は市場 $G^{s.g.a.a.}$ において悪化したマイノリティの学生が G においてマッチされていた学校とする．もし，誰ともマッチしていない学校であるならば，G における安定性に反するので，必ず誰かとマッチしているはずである．

しかしながら，そのようなケースにおいて，$\phi^{\mathrm{A}}(G)$ は安定なマッチングとはならない．なぜならば，マイノリティの学生の間の優先順位は，たとえ全ての学校がグループ積極的差別是正政策を実行したとしても変化しないからである．つまり，(s', c) は $\phi^{\mathrm{A}}(G)$ をブロックすることになる．これは，$\phi^{\mathrm{A}}(G)$ が学生最適安定マッチングに矛盾する．

2-2: $G^{s.g.a.a.}$ においてより選好されるマイノリティの学生がマッチしている学校を c とする．その学校は，G においてマジョリティの学生とマッチングしていたとする．そのマジョリティの学生は，市場 $G^{s.g.a.a.}$ においてそれとは異なる学校 c' とマッチしているか，またはアンマッチな状態のどちらかである． 他方， $G^{s.g.a.a.}$ において，悪化するマイノリティの学生が存在する．つまり，良くなったマイノリティの学生によって悪くなったマジョリティの学生が存在し，あるマジョリティの学生よって悪化したマイノリティの学生が存在するはずである．そうでないならば，2-1 となる．いま，c' を G でマイノリティの学生に割当てられていた学校で，その学校は $G^{s.g.a.a.}$ でマジョリティの学生に割当てられているとする．

しかしながら，厳密なグループ積極的差別是正政策を実施しているので，マイノリティの学生に対するすべての学校の優先順位は，任意のマジョリティの学生よりも上位にあるはずである．学校 c' とその学校に $G^{s.g.a.a.}$ においてマッチされずに悪化してしまったマイノリティの学生ペアは，$\phi^{\mathrm{A}}(G^{s.g.a.a.})$ をブロックすることができる．しかしながら，これは $\phi^{\mathrm{A}}(G^{s.g.a.a.})$ が学生最適安定マッチングである事実に矛盾する． □

6.4 他の積極的差別是正政策との比較

ここで，既存研究とここで定義した積極的差別是正政策を比較してみる．

Hafalir, Isa E., M. Bumin Yenmez, and Muhammed A. Yildirim (2013) で定義されたマイノリティ・リザーブをもつ積極的差別是正政策を考える．

各学校 c はつぎのようなマイノリティ・リザーブ r_c^m をもっている． ある学校 c に入学を希望するマイノリティの学生の数が r_c^m より少ないならば，そのとき任意のマイノリティの学生は任意の

マジョリティの学生よりも c の優先順位の上位におかれる.

マイノリティ・リザーブをもつ場合, マッチング μ がブロックできるのは, 標準的なブロッキングの条件に加えて, 次のような場合である. もしそのブロッキングペア (s, c) の学生がマイノリティの学生 $s \in S^m$ でかつ $|\mu(c) \cap S^m| < r_c^m$ かつ $s' \in (\mu(c) \cap S^M)$ に対して, $s' \succ_c s$ の場合である.

彼らが提案した積極的差別是正政策は, ここで定義した積極的差別是正政策の特殊ケースと見なすことができる. そのことを示すために, マイノリティの学生の部分集合に対し本研究の積極的差別是正政策を修正する.

ここで, マイノリティの学生の集合のサブグループに対する積極的差別是正政策を定義する.

学校 c が**マイノリティの学生の集合のサブグループに対する積極的差別是正政策**とは, 任意の学生 $s, s' \in T^m \subseteq S^m$ かつ $s^*, \hat{s} \notin T^m$ に対して,

- $s \succeq_c s' \iff s \tilde{\succeq}_c s'$,
- $s^* \succeq_c \hat{s} \iff s^* \tilde{\succeq}_c \hat{s}$, かつ
- $s \succeq_c s^* \Longrightarrow s \tilde{\succeq}_c s^*$

となる.

定理 62. マイノリティ・リザーブをもつ安定なマッチングは, サブグループに対する積極的差別是正政策における安定なマッチングと一致する. ここで, そのサブグループは, マイノリティの学生の集合の中でトップ r_c^m にいるグループである.

【証明】

最初に示すべきことは, マッチング μ をマイノリティ・リザーブをもつ安定なマッチングであるならば, そのときここで定義した積極的差別是正政策のもとでも安定なマッチングとなることである.

背理法によって証明を行う．つまり，μ をマイノリティ・リザーブをもつ安定なマッチングであるが，積極的差別是正政策をもつ安定なマッチングでないとする．

つまり，積極的差別是正政策のある市場において，ブロッキングペア (s, c) が存在するはずである．T_c^m を全ての学校 c に対する，　マイノリティの学生の集合の上位 r_c^m の学生である．

次のような 3 つのケースを考える．

(i) $s \in S^M$, (ii) $s \notin T_c^m$ かつ $s \in S^m$, または (iii) $s \in T_c^m$.

(i) は成り立たない，なぜならば，そのブロッキングペアは，マイノリティ・リザーブをもつマッチングにおいてもブロッキングペアとなる．これは，μ がマイノリティ・リザーブをもつ場合の安定マッチングであることに矛盾する．

(ii) も同様に矛盾する．

(iii) そのとき，ブロッキングペアであるので，ある $s' \in \mu(c)$ に対して，$cP_s\mu(s)$ かつ $s \tilde{\succ}_c s'$ である．もし $s' \in S^M$ であるならば, そのときは，マイノリティ・リザーブをもつ場合にも μ をブロックすることが可能である．なぜならば，マイノリティ・リザーブをもつ市場において，マイノリティの学生はマジョリティの学生よりも r_c^m まで学校 c に優先的に入学できるからである．

もし $s' \notin T_c^m$ かつ $s' \in S^m$ ならば, そのとき μ はマイノリティ・リザーブをもつ市場においても (s, c) によってブロックされる．もし $s' \in T_c^m$ いるならば, そのとき μ はマイノリティ・リザーブをもつ市場においても (s, c) によってもブロックされる．つまりこれも矛盾である．

次に，逆の関係を示す．つまり，ここで定義した積極的差別是正政策をもつ市場の安定なマッチングが，マイノリティ・リザーブをもつ市場の安定なマッチングになることを示す．

背理法で証明を行う．つまり，μ は積極的差別是正政策の市場における安定なマッチングであるとする．つまり，そのマッチングに対して，あるブロッキングペア (s, c) がマイノリティ・リザーブをもつ市場において存在する．つまり，ある $s' \in \mu(c)$ に対して，$cP_s\mu(s)$ かつ $s \succ_c s'$ である．もし s がマジョリティの学生であるならば，　μ は，積極的差別是正政策のある市場においてもブロッキングペアとなる．

もし $s' \in S^m$ かつ $|\mu(c) \cap S^m| < r_c^m$ であるならば，この場合も積極的差別是正政策のある市場においても，マッチング μ をブロックする． つまり，これは矛盾である．したがってどちらの市場においても安定なマッチングは一致する． □

定理 63. 厳密なグループ積極的差別是正政策を用いた学生最適安定マッチングは，マイノリティ・リザーブを用いた学生安定マッチングより（弱く）選好するマッチングである．

【証明】

マイノリティの学生の集合のサブグループに対する積極的差別是正政策をもつ市場の安定マッチングは，厳密なグループ積極的差別是正政策をもつ市場においても安定なマッチングとなる．この事実と以前の定理より，マイノリティ・リザーブをもつ市場における安定なマッチングは，厳密なグループ積極的差別是正政策をもつ市場の安定マッチングである．一般的にその逆は成り立たない．つまり前者の安定なマッチングの集合は，後者の安定なマッチングを含む集合となる．

また，学生最適安定マッチングは，全ての学生にとって安定なマッチングの中で弱い意味で選好するマッチングである．

したがって，厳密なグループ積極的差別是正政策を用いた学生最適安定マッチングは，マイノリティ・リザーブを用いた学生安定マッチングより（弱く）選好するマッチングとなる． □

既存研究のもう一つの積極的差別是正政策は，マジョリティの学生の定員に上限を設ける積極的差別是正政策である．つまり，ある学校の定員より少ない数をマジョリティの学生が入学可能な定員として定めることにより，マイノリティの学生のみが入学可能な席を設ける政策である．

この積極的差別是正政策を用いた市場において，ブロックできる状況は，標準的なブロックの定義より制約的である．なぜならば，ある学校 c の定員より少ない数の学生しかマッチングしていなかったとしても，マジョリティの学生に対する定員 q_c^M の数だけマジョリティの学生が入学している場合，かつそのブロックしようとしている学生がマジョリティの学生の場合，マッチングしているマジョリティの学生よりもその学校の優先順位が低いならば，ブロックできないとい

う条件が加えられるからである.

事実 1 (Hafalir, Isa E., M. Bumin Yenmez, and Muhammed A. Yildirim (2013)). $r^m = q - q^M$ となるように，マジョリティの学生の定員枠 q_r^M とマイノリティリ・ザーブ r^m を考える．マジョリティの学生の定員枠のもとでの安定なマッチングを μ^M とすると，そのマッチングはマイノリティ・リザーブのもとでの安定なマッチングになるか，または，そのマッチングを支配するマイノリティ・リザーブのもとでの安定なマッチングが存在するかのどちらかである.

定理 64. 任意のマイノリティの学生 s に対して, $\phi_g^A(s) R_s \phi_r^A(s) R_s \phi_q^A(s)$ となる.

ここで，それぞれマイノリティの学生 s に対し $\phi_g^A(s)$ は，厳密なグループ積極的差別是正政策における学生最適安定マッチング， $\phi_r^A(s)$ は，マイノリティ・リザーブのもとでの学生最適安定マッチング，$\phi_q^A(s)$ はマジョリティの学生の定員枠のある学生最適安定マッチングである.

【証明】

この定理は以前の定理と事実 1 からすぐに導かれる. □

Hafalir, Isa E., M. Bumin Yenmez, and Muhammed A. Yildirim (2013) は，彼らの積極的差別是正政策のもとでの学生最適安定マッチングが，それを実施しない場合の学生最適安定マッチングをマイノリティの学生にとってパレート支配するような条件も考察している.

注意 65. (Hafalir, Isa E., M. Bumin Yenmez, and Muhammed A. Yildirim (2013) による命題 4)

μ^{r^m} と μ^{A} をそれぞれマイノリティ・リザーブ r^m がない場合とある場合の学生最適安定マッチングであるとする．ここで，全ての学校 c に対して， $r_c^m \geq |\mu(c) \cap S^m|$ であるならば，そのとき μ_r は, マイノリティの学生にとって，μ をパレート支配する.

ここで定義した厳密なグループ積極的差別是正政策のもとでの学生最適安定マッチングは，この条件を満たすマイノリティ・リザーブのもとでの学生最適安定マッチングよりも, マイノリティの学生は, より選好する学校とマッチする可能性がある.

次の例はそのことを示している.

例 19. ある市場 $G = (S, C, R_S, \succeq_C, (q_c)_{c \in C})$ を考える．その市場 G は次のように構成されている．学生の集合 $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$ と学校の集合 $C = \{c_1, c_2, c_3\}$ とし，　マジョリティの学生の集合 $S^M = \{s_1, s_2, s_3\}$, マイノリティの学生の集合 $S^m = \{s_4, s_5\}$ とする.

各学生の選好関係は次のように与えられている.

$$\begin{aligned} R_{s_1} &: c_1, c_2, c_3, \\ R_{s_2} &: c_1, c_2, c_3, \\ R_{s_3} &: c_2, c_1, c_3, \\ R_{s_4} &: c_2, c_3, c_1, \\ R_{s_5} &: c_1, c_2, c_3. \end{aligned}$$

各学校の優先順位は次のように与えられている.

$$\begin{aligned} \succeq_{c_1} &: s_1, s_4, s_2, s_3, s_5 \quad q_{c_1} = 1, \\ \succeq_{c_2} &: s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 \quad q_{c_2} = 1, \\ \succeq_{c_3} &: s_2, s_3, s_4, s_1, s_5 \quad q_{c_2} = 2, \end{aligned}$$

この市場 G において, 次のような一意な安定なマッチングが与えられる.

$$\phi^A(G) = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \varnothing \\ s_1 & s_2 & s_3, s_4 & s_5 \end{pmatrix},$$

これは，学校 c_1 と学生 s_1 がマッチし, 学校 c_2 は学生 s_2 とマッチし, 学校 c_3 は学生 s_3 と学生 s_4 がマッチし, 学生 s_5 はどの学校ともマッチしないままであるということを意味している.

学校 c_1 がグループ積極的差別是正政策を実施した状況を考える.

そのとき，学校 c_1 の優先順位は次のように与えられる．

$$\succeq_{c_1}^{g.a.a.} \quad : \quad s_4, s_5, s_1, s_2, s_3 \quad q_{c_1} = 1.$$

すべての学校がグループ積極的差別是正政策を実施した場合を考える．そのとき，学校の優先順位は次のようになる．

$$\begin{aligned}
\succeq_{c_1}^{g.a.a.} \quad &: \quad s_4, s_5, s_1, s_2, s_3 \quad q_{c_1} = 1, \\
\succeq_{c_2}^{g.a.a.} \quad &: \quad s_5, s_4, s_1, s_2, s_3 \quad q_{c_1} = 1, \\
\succeq_{c_1}^{g.a.a.} \quad &: \quad s_4, s_5, s_2, s_3, s_1 \quad q_{c_1} = 2.
\end{aligned}$$

$G^{s.g.a.a.} = (S, C, R_S, \succeq_C^{g.a.a.}, (q_c)_{c \in C})$ を考える．

そのとき，学生最適安定マッチングは次のように与えられる．

$$\phi^A(G^{s.g.a.a.}) = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \varnothing \\ s_4 & s_5 & s_2, s_3 & s_1 \end{pmatrix},$$

内生的にマイノリティ・リザーブを考えると，学校の優先順位とマイノリティ・リザーブは次のように与えられる．

$$\begin{aligned}
\succeq_{c_1} \quad &: \quad s_1, s_4, s_2, s_3, s_5 \quad q_{c_1} = 1, r_{c_1}'^m = 0 \\
\succeq_{c_2} \quad &: \quad s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 \quad q_{c_2} = 1, r_{c_2}'^m = 0 \\
\succeq_{c_3} \quad &: \quad s_2, s_3, s_4, s_1, s_5 \quad q_{c_2} = 2, r_{c_3}'^m = 1,
\end{aligned}$$

$G' = (S, C, R_S, \succeq_C, (q_c)_{c\in C}, (r_c'^m)_{c\in C})$.

そのとき，学生最適安定マッチングは次のように与えられる.

$$\phi^A(G') = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \varnothing \\ s_1 & s_2 & s_3, s_4 & s_5 \end{pmatrix}.$$

両方の学生最適安定マッチングを比較すると，マイノリティの学生は，厳密なグループ積極的差別是正政策のもとでより選好する学校に入学できていることになる.

以前の定理より，この逆は成り立たない.

6.5 おわりに

この章において，既存研究や以前の章で論じた，積極的差別是正政策を実施することにより，本来の目的の一つであるマイノリティの学生の厚生を改善する，少なくとも悪くしないという目的を達成することに対する不可能性を，可能性にできる積極的差別是正政策を考察した.

ここで提示した積極的差別是正政策は，あまりにもマイノリティの学生を優遇しすぎて，逆差別が強すぎるかもしれない．しかしながら，マイノリティの学生の厚生を改善することが，積極的差別是正政策の最も優先される政策目標ならば，この積極的差別是正政策が有効である.

別の視点でここでの結論を解釈するならば，積極的差別是正政策の最も優先される政策目標を「マイノリティの学生の厚生の改善」とすることは，マジョリティの学生に対する非常に大きな「逆差別」を生じさせることになるということである．他の積極的差別是正政策との比較で論じたように，マジョリティの学生に対しここで提示した積極的差別是正政策よりも小さい「逆差別」でマイノリティの学生の厚生を改善する方法も存在する．しかしながら，その方法を実施するならば，積極的差別是正政策を実施しないという選択肢と同じになってしまう.

ここで提示した政策は，必ずこのような積極的差別是正政策をやるべきということではなく，一

つの選択肢を提供したにすぎないことに注意が必要である．以前に述べたように，米国では逆差別が近年，問題になっていることからも，ここで提示した政策は，実効性は少ないかもしれない．

参考文献

Ehlers, Lars (2010) "School Choice with Control," *memeo.*

Gale, David and Lloyd Shapley (1962) "College Admissions and the Stability of Marriage," *American Mathematical Monthly*, Vol. 69, pp. 9-15.

Hafalir, Isa E., M. Bumin Yenmez, and Muhammed A. Yildirim (2013) "Effective Affirmative Action in School Choice," *Theoretical Economics*, Vol. 8, No. 2, pp. 325–363.

Kojima, Fuhito (2012) "School Choice: Impossibility for Affirmative Action," *Games and Economic Behavior*, Vol. 75, pp. 685-693.

Matsubae, Taisuke (2010) "Impossibility of Stable and Non-Damaging Bossy Matching Mechanism," *Economics Bulletin*, Vol. 30, pp. 2092-2096.

——— (2011) "Do the Minority Students Benefit from Affirmative Action Policy in School Choice Market?: Reconsidered," *memeo.*

——— (2013) "A Group Affirmative Action Policy at School Choice," *memeo.*

結論

本稿は，「マーケット・デザイン」の基礎理論であるマッチング理論に関する理論的な発展を試みた.

第 1 章は，Gale, David and Lloyd Shapley (1962) から始まったマッチング理論の現在までの進展を，Abdulkadiroğlu, Atila and Tyfun Sönmez (2013) と同じ視点で，有用な結果に関しては，できるかぎりわかりやすい証明，または別証明を与えながら，マッチング理論の基本的な概念といままでの研究成果を概観した.

その流れを簡単に要約すると，「マッチング理論」には 2 つの流れがある.

一つの流れは，Two sided マッチングといわれる分野である．これは Gale, David and Lloyd Shapley (1962) による結婚問題または大学入学問題を基本モデルとして，発展・研究がすすめられた．彼らの研究の最も重要な貢献は，その後のマーケット・デザインにおいても重要な位置をしめる解概念である「安定性」と，その安定性を満たすマッチングを発見する方法である「DA アルゴリズム」の詳細な考察であった．安定性とは，市場であるマッチングが形成されたときに，その結果を受け入れずに，その市場とは別のマッチングを形成しようとしないことを保証する解概念である．さらに，その概念を現実の問題に適用することを容易にしたのが，彼らの発見した，DA アルゴリズムである．その後の研究で，DA アルゴリズムによってもたらされるマッチングは，安定なマッチングの中で効率的であることが発見された．一方，そのアルゴリズムによる安定なマッチングを導出するメカニズムは，残念なことに，耐戦略性を満たさないことがわかった．このことは，Gale, David and Lloyd Shapley (1962) の論文から約 40 年間マッチング理論が経済理論の中心とならなかった一つの理由ともいわれている.

もう一つの流れは，One sided マッチングといわれる分野である．この分野は Shapley, Lloyd and Herbert Scarf (1974) によって始められた，住宅市場の問題に対する研究を基本モデルとして発展・研究が進められてきた．彼らの研究で用いられた解概念は，Two sided マッチングにおいて用いられた安定性ではなく，協力ゲーム理論で用いられているコアという概念であった．彼らは，住宅市場のコア配分を発見するアルゴリズムである，TTC アルゴリズムを提示した．TTC アルゴリズムによるコア・マッチングは，耐戦略性は満たされたが，住宅市場という特定の市場の問題として考えられ，この分野の研究も，その論文が発表された当時は，現在ほどめざましい進展は見られなかった．

この両者の研究成果をつなぎ，現在のような活気のある研究分野に発展させるのに最も貢献したのが，Roth 教授を中心としたグループである.[7] 彼らは，マッチング理論の研究で発見された成果を用いて，現実の市場の問題を解決した．特に，マッチング理論を用いた現実の市場の問題を解決したのが，米国やイングランドの研修医と病院のマッチング問題である．彼らはそのマッチング問題に対して，Gale, David and Lloyd Shapley (1962) による DA アルゴリズムを適用することを提案し，望ましい成果をあげた．さらに，米国やトルコの公立学校の学校選択制や大学における学生配置問題にマッチング理論の研究成果が適用された．現実に理論を適用することにより，逆に現実から理論に対して問題が提案され，その問題を解決するために理論研究が行われるというような相互作用が，この分野の現在の活気を生んでいる一因であると見なされている．

第 2 章は，*Economics Bulletin* に掲載された Matsubae, Taisuke (2010)“Impossibility of Stable and Non-Damaging Bossy Mechanism” にもとづいた研究である．この研究は，安定性というマッチング理論において重要となる解概念と，戦略性の問題を考える上で重要な性質である “Nonbossy” を弱めた新たな概念を提示し，その概念と安定性を両立させることは不可能であることを示した．Nonbossy とは，簡単に言うと，真の表明にもとづいてえられた結果を変えることがないような，真の選好以外の表明をしたとしても，他の人の結果を変えないという概念である．この概念と安定性

[7] マーケット・デザインという用語も，彼のハーバード大学での講義が初めてであるといわれている．

は両立しないことが既存研究で発見されている．その研究の延長にこの研究があり，Nonbossy の概念を弱めることにより，安定性との両立可能性を考察した．ここで提案された “Non-damaging bossy” という “Nonbossy” よりも弱い概念は，真の表明をした場合の結果を変えることがないような，真の選好以外の表明をしたとしても，他の人の結果をたとえ変更させたとしても，以前よりも悪化しないことを保証する概念である．このような形で，Nonbossy の概念を弱めたとしても，やはり安定性とは両立しない，という不可能性定理を示した．この事実は，安定メカニズムは戦略性にかなり脆弱性をもつことを明らかにさたことになる．しかしながら，学校選択制の文脈でこの概念を適用させると，ある学生が自分の結果を変化させずに真の選好以外の表明をしたとしても，他の人の結果を悪化させないということと安定性は，両立することを示した．一方，Nonbossy の概念は，学校選択制の文脈においても安定性とは両立しないので，この概念は学校選択制における安定メカニズムに新たな視点を与えたことになる．つまり，学校選択制に参加する人たちにとって，安定メカニズムは，他の学生が真の表明をしなかったとしても，その結果，自身の学校が以前よりも望まない学校に割り当てられることがないことを示したことになる．この事実は，安定メカニズムを学校選択制で用いることに対する正当性を与えるとともに，参加する学生のリスクを減らすことで，そのメカニズムに参加するインセンティブを与えたことが貢献となる．

第 3 章は，Matsubae, Taisuke (2012) の “A Note on Stable Matching Mechanisms” に基づいた研究である．この研究は，学校の選好が学生の提携の単位で単調に変化すると，安定なマッチング・メカニズムによって導出される結果が，学生の視点で，どのように変化するのかを明らかにした研究である．学校が学生個人の選好を単調に変化させた場合，安定なマッチング結果は学生にとって単調に変化するということは既存研究において明らかにされていた．そこで，本研究は，任意の学生の提携に対する選好を学校側が単調な変化させた場合に焦点を当てて，安定なマッチングが学生の提携においても単調性を満たすことを示した．このことの一つの貢献は，既存研究の数学的一般化である．また，学校選択市場の文脈において，学校側がある学生の提携を単調に変化させる場合には，その提携にいる学生はよりよい安定なマッチングをえられるこがここで示

したことである．このことは安定メカニズムに対する新たな性質を明らかにしたことにも貢献している．さらに，学生が学校の評価を単調に変化させたとしても学校はよりよい安定なマッチング結果を得られないので，安定なメカニズムは，片側だけが単調性を満たすという非対称な関係となっていることを明らかにした．

第 4 章は，Matsubae, Taisuke (2011a)“An Affirmative Action Policy as a Strategy on Two Sided Matching Market” に基づいた研究である．この研究は，マッチング理論に積極的差別是正政策を導入することが，どのような結果をもたらすのかの一連の研究においては形式的に議論されていなかった，その政策を各企業が採用するかどうかを戦略的に決められる状況をモデル化し，そのことがどのような結果を生じさせるのかを研究した．その定式化のもとで，新たな概念である，“積極的差別是正政策の濫用に対する耐性” という概念を定義した．この概念は，ある企業が積極的差別是正政策を実行したときに，その企業はその政策を実行しないときに生じるマッチングよりも，よりよい労働者を獲得でき労働者はその政策を実行されていないときのほうが，より選好される企業に就職できている場合，企業は積極的差別是正政策を本来の目的として使用していないと考えるのが自然である．そのような積極的差別是正政策の使用を積極的差別是正政策の濫用と考え，安定メカニズムがそのような濫用に耐性をもつ安定なメカニズムがあるかどうかを考察した．しかしながら，肯定的な結果を期待したが，それとは反対に安定なメカニズムは積極的差別是正政策の濫用に耐性がないことが示された．このことは，安定メカニズムは積極的差別是正政策の裁量的な使用とはあまり相性がよくないことを明らかにしたことが一つの貢献である．さらに，積極的差別是正政策を実行するかどうかを企業などによる裁量に任されている市場に注意が必要であるというこれまで指摘されていなかった問題点を明らかにしたことも貢献である．

第 5 章は，Matsubae, Taisuke (2011b)“Do the Minority Students Benefit from Affirmative Action Policy in School Choice Market ?: Reconsidered” に基づいた研究である．この研究は，積極的差別是正政策を学校選択制に応用した既存研究において示されている不可能性を解消するために，非常に単純な形で積極的差別是正政策を強めて考察を行った．既存研究においては，積

極的差別是正政策を実行しない学校の存在も含めて考察がおこなわれていたが，本研究においては，必ず全ての学校が積極的差別是正政策を実行しなければならないという定式化を行った．しかしながら，この定式化のもとでも，安定性を満たしながら積極的差別是正政策を実行することは，マイノリティの学生の厚生を実行しない場合よりも悪化させてしまう恐れがあることを示した．また，学校選択制において，よく用いられている TTC メカニズムにおいても同様に，積極的差別是正政策がマイノリティの学生の厚生を積極的差別是正政策を実行しない場合と比較して，悪化させてしまう可能性があることを示した．この研究の貢献は，積極的差別是正政策の概念を既存研究よりも単純な形で強めたとしても，安定なメカニズムはその政策を実行しない場合と比較してマイノリティの学生の厚生を必ずしも改善しないというという事実を明らかにしたことである．さらに，既存研究で指摘されている積極的差別是正政策の是非と含めて積極的差別是正政策を是とするならば，その政策の中身を慎重に検討する必要があるという新たな問題を提示したことも貢献である．

第 6 章は，Matsubae, Taisuke (2013)“Group Affirmative Action Policy at School Choice” に基づいた研究である．ここでは，前章や既存研究において積極的差別是正政策はマイノリティの学生の厚生に対し，あまりうまく機能していないという研究を受けて，積極的差別是正政策の中身を吟味し改善することで，マイノリティの学生の厚生を改善できるかをどうかを考察している．ここでの，積極的差別是正政策の中身とは，マイノリティの学生の中のどの学生を優遇するかどうかを議論するのは誰を優遇して誰を優遇しないのか，という新たな問題を発生させてしまうため，マイノリティの学生全体を任意のマジョリティの学生よりも優遇するという政策に変更させた．その積極的差別是正政策の効果を検討した結果，マイノリティの学生はその政策を実行しない場合よりも悪化しないばかりか，さらに弱い意味であるが良くなることがわかった．また，他の既存研究において提示された，すべてのマイノリティの学生の厚生がその政策を実行しない場合よりも悪化しないマイノリティリザーブを設けた積極的差別是正政策よりも，ここで提示された積極的差別是正政策はマイノリティの学生にとって有利に働くことも示した．つまり，本研究

の貢献は，マイノリティの学生の厚生の視点にたつかぎり，既存研究を含めてここで提示した積極的差別是正政策が最善であることを明らかにしたことである．しかしながら，ここで提示した積極的差別是正政策を実施することで，マイノリティの学生の厚生はその政策を実行しない場合よりも良くなるが，多くの国々で問題となっている「逆差別」問題をさらに顕著にさせてしまう懸念は残る．

最後の付録に，本稿において考えた性質を有するマッチングを発見するアルゴリズムを，コンピュータ言語の一つである Python 2.7.8 を用いて記述したものを載せた．一般的な DA に加えて，制約下の DA と TTC について選好関係と優先順位があれば，このプログラムによって各メカニズムの性質を持ったマッチングが導出できる．

本研究において，いくつかの不可能性定理が証明された．この点に対する考察に関して，2 つのやり残した課題がある．不可能性定理の証明においては，任意の市場に対して，要求される性質が満たされないならば，不可能性の帰結を導く．この事実は極端な言い方をすると，数多くの市場においては，それらの性質を満たすにも関わらず，唯一の市場においてその性質が満たされない場合も含んだ結果となっている．したがって，その定理をもって，メカニズムの善し悪しを判断するのは早計であると考えられる．どのくらいの市場で，そのような性質がみたされないのかを確認する方法として，コンピュータ・シミュレーションがある．例えば，付録にも示したように，学生の選好関係と学校の優先順位が与えられれば一つのマッチングを導くことが可能である，その選好関係と優先順位を適当な確率でランダムに並ばせることにすることにより，多くの市場を考察できる．それらの各市場での結果がどれくらいその性質が満たされるのか，または満たされないのかを統計学の手法をとりいれて判断することにより，不可能性が発生する市場の頻度を明らかにできるので，今後，その方向の研究を取り組むべきである．もう一つの課題は，Large Market と呼ばれる手法を用いた考察である．これは，その市場にいる人を増やしていくことにより，不可能性の結果となる性質が非常に小さくなるかどうかを調べる研究である．例えば，Kojima, Fuhito and Parag Pathak (2009) は，Two sided マッチングにおいて，耐戦略性と安定性の両立の不可能

性に関する問題を，参加者の数を増やすことにより，真の選好以外の表明をすることの確率がゼロになり，その結果は，近似的に学生最適安定マッチングになることを示している．この結果は，Large Market にして初めて得られる結論である．このような結果を受けて，ここでの考察した不可能性定理の問題を Large Market に拡張して考えることは一つの方向である．ここで示した不可能性（既存研究においての不可能性定理）は，小さな市場を中心に考えている．しかしながら，それを適用する市場は多くの参加者がいる市場を想定している．あるメカニズムが，参加者が増えることによって不可能性の結果がなくなる，または弱められるならば，そのメカニズムはここで示した不可能性はそれほど問題とはならなくなる．それを確認するためにも，この方法の考察も，今後取り組むべき課題であろう．

最後に，マッチング理論の研究に関する発展方向を示す．本稿において，ほとんど扱わなかったが，多対多のマッチング問題も最近は研究されてきている.[8] 多対多の問題として重要な市場は，学校におけるカリキュラムと学生をどのようにマッチングさせるのかのカリキュラム市場である．この問題は多くの大学において重要な問題の一つである．これに関する理論的な性質は，結婚問題または大学入学問題の性質を単純には引き継がないことが知られている．また，カップルがいる多対一のマッチング問題（外部性のあるマッチング問題）は，現実において重要となる．なぜならば，夫婦が同一地域で仕事を選択するのはよくある話だが，そのような環境において安定なマッチングを得るメカニズムが一般には存在しないことがわかっているからである．その問題を解決する一つの方向性を示す研究として，最近, Kojima, Fuhito, Parag Pathak, and Alvin E. Roth (2013) などがある．

マーケット・デザインは，現実の結果と相互作用しながら，今後も発展してく可能性が大いにある分野である．

[8] Echenique, Federico and Jorge Oviedo (2006) を参照.

参考文献

Abdulkadiroğlu, Atila and Tyfun Sönmez (2013) *Matching markets: theory and practice*, Vol. I of Advances in Economics and Econometrics: Theory and Applications, Tenth World Congress: Cambridge University Press.

Echenique, Federico and Jorge Oviedo (2006) "A Theory of Stability in Many-to-Many Matching Markets," *Theoretical Economics*, Vol. 1, pp. 233-273.

Gale, David and Lloyd Shapley (1962) "College Admissions and the Stability of Marriage," *American Mathematical Monthly*, Vol. 69, No. 9, pp. 9-15.

Kojima, Fuhito and Parag Pathak (2009) "Incentives and Stability in Large Two-Sided Matching Markets," *American Economic Review*, Vol. 99, pp. 608-627.

Kojima, Fuhito, Parag Pathak, and Alvin E. Roth (2013) "Matching with Couples: Stability and Incentives in Large Markets," *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 128, pp. 1585-1632.

Matsubae, Taisuke (2010) "Impossibility of Stable and Non-Damaging Bossy Matching Mechanism," *Economics Bulletin*, Vol. 30, pp. 2092-2096.

——— (2011a) "An Affirmative Action Policy as a Strategy on Two Sided Matching Market," *memeo*.

——— (2011b) "Do the Minority Students Benefit from Affirmative Action Policy in School Choice Market?: Reconsidered," *memeo*.

——— (2012) "A Note on Stable Matching Mechanisms," *memeo*.

——— (2013) "A Group Affirmative Action Policy at School Choice," *memeo*.

Shapley, Lloyd and Herbert Scarf (1974) "On Cores and Indivisibility," *Journal of Mathematical Economics*, Vol. 1, pp. 23-28.

付録：Python プログラム

付録は，本稿で取り扱ったアルゴリズムの Python2.7.8 によるプログラムを載せておく．このプログラムを用いることにより，あらゆる市場の学生最低安定マッチング (SOSM) と TTC マッチングを求めることができる．

学生プロポーズ DA アルゴリズム

```
from sets import Set
from copy import deepcopy

VERBOSE = False

# N : R[i]: ordering of A represented as array.
# A : P[a]: ordering of N, represented as array of dictionaries,
where s:r represents the rank of student s.
# Q : Q[a]: quota of A. a can be matched to at most Q[a] elements in N.

R = [
     [2,3,1,0],
     [2,1,0,3],
     [0,1,2,3],
     [2,1,3,0],
     [3,1,2,0]
    ]
```

```
P = [
    {0:1, 1:2, 2:3, 3:4, 4:5},
    {0:5, 1:4, 2:3, 3:2, 4:1},
    {0:2, 1:1, 2:3, 3:4, 4:5},
    {0:1, 1:4, 2:5, 3:2, 4:3}
    ]

Q = [1, 1, 1, 2]



def gale_shapley(N = R, A = P, Q = Q):
    kickedouts = range(len(N))
    proposeoffset = [0] * len(N)
    allocation = []
    for school in A:
        allocation.append(Set([]))

    while(True):
        if len(kickedouts) <= 0:
            break
        if VERBOSE:
            print
            print 'allocation :', allocation
            print 'kickedouts :', kickedouts
            print 'pro_offset :', proposeoffset
        new_kickedouts = []
        more_to_go = False
        for student in kickedouts:
            if proposeoffset[student] >= len(N[student]):
                new_kickedouts.append(student)
                proposeoffset[student] = len(N[student])
```

```
                continue

            more_to_go = True
            school_to_apply = N[student][proposeoffset[student]]
            if VERBOSE:
                print student, 'applies', school_to_apply

            rank = A[school_to_apply].get(student, None)
            if rank is None:
                proposeoffset[student] += 1
                new_kickedouts.append(student)
                continue

            if len(allocation[school_to_apply]) < Q[school_to_apply] :
                allocation[school_to_apply].add(student)
                if VERBOSE:
                    print 'student', student, 'assigned to', school_to_apply
            else :
                std = list(allocation[school_to_apply])
                students_sorted_by_rank =
zip([A[school_to_apply][el] for el in std], std)
                students_sorted_by_rank.sort()
                students_sorted_by_rank.reverse()
                students_sorted_by_rank =
[el[1] for el in students_sorted_by_rank]

                assigned = False
##                for other_student in allocation[school_to_apply]:
                for other_student in students_sorted_by_rank:
                    if rank < A[school_to_apply][other_student]:
                        proposeoffset[other_student] += 1
```

```
                        new_kickedouts.append(other_student)
                        allocation[school_to_apply].add(student)
                        allocation[school_to_apply].remove(other_student)
                        assigned = True
                        if VERBOSE:
                            print 'student', student, 'assigned to', school_to_apply
                            print 'student', other_student,
    'kicked out from', school_to_apply
                        break
                if not assigned:
                    proposeoffset[student] += 1
                    new_kickedouts.append(student)
                    if VERBOSE:
                        print 'student', student, 'rejected from', school_to_apply

        kickedouts = new_kickedouts
        if not more_to_go :
            break
    return (allocation)
```

TTC アルゴリズム

```
#!/usr/bin/env python
# -*- coding: utf-8 -*-
from numpy import *
from scipy import *
from pylab import *
import time
```

```
import networkx as nx

import matplotlib.pylab as p

import matplotlib.pyplot as plt




A = {"1":['a', 'b', 'c', 'd'],

     "2":['a', 'b', 'c', 'd'],

     "3":['b', 'a', 'c', 'd'],

     "4":['b', 'c', 'a', 'd'],

     'a':["1", "2", "3", "4"],

     'b':["2", "4", "1", "3"],

     'c':["1", "2", "3", "4"],

     'd':["1", "2", "3", "4"]

     }

B = {"1":['a', 'b', 'c', 'd'],

     "2":['a', 'b', 'c', 'd'],

     "3":['b', 'a', 'c', 'd'],

     "4":['b', 'c', 'a', 'd'],

     'a':["1", "2", "3", "4"],

     'b':["2", "4", "1", "3"],

     'c':["1", "2", "3", "4"],
```

```
    'd':["1", "2", "3", "4"]
    }




def top_trading_cycle( N = B ):
    allocation = []
    point_to_set =  dict(zip(N.keys(), [N[i][0] for i in N.keys()]))
    point_to_direction = nx.DiGraph(point_to_set)
    allocation.append([i for i in nx.simple_cycles(point_to_direction)])
    while(True):
        if len(N) < 2:
            return allocation
        else:
            for i in flatten(allocation):
                if i in N.keys():
                   del N[i]
                else: continue
            for k in N.keys():
                for j in flatten(allocation):
                    if j in N[k]:
                        N[k].remove(j)
                    else: continue
```

```
        point_to_set =  dict(zip(N.keys(), [N[i][0] for i in N.keys()]))

        point_to_direction = nx.DiGraph(point_to_set)

        allocation.append([i for i in nx.simple_cycles(point_to_direction)])


    return allocation




print top_trading_cycle(N = A )


C = {"1":['a', 'f', 'b', 'c', 'd', 'e'],

     "2":['a', 'f', 'b', 'c', 'd', 'e'],

     "3":['b', 'a', 'f', 'c', 'd', 'e'],

     "4":['e', 'b', 'c', 'a', 'f', 'd'],

     "5":['a', 'c', 'e', 'b', 'f', 'd'],

     "6":["b", "c", "d", "a", "e", 'f'],

     'a':["4", "2", "5", "3", "1", "6"],

     'b':["2", "5", "4", "1", "3", "6"],

     'c':["1", "2", "3", "4", "5", "6"],

     'd':["1", "2", "5", "3", "4", "6"],

     'e':["4", "3", "5", "2", "1", "6"],

     'f':["3", "1", "4", "2", "6", "5"]

     }


print top_trading_cycle(N = C)
```

```
q = {"1": 1, "2": 1, "3":1}


def top_trading_cycle( N = B ):

    allocation = []

    point_to_set =  dict(zip(N.keys(), [N[i][0] for i in N.keys()]))

    point_to_direction = nx.DiGraph(point_to_set)

    allocation.append([i for i in nx.simple_cycles(point_to_direction)])

    while(True):

        if len(N) < 2:

            return allocation

        else:

            for i in flatten(allocation):

                if i in N.keys():

                   del N[i]

                else: continue

            for k in N.keys():

                for j in flatten(allocation):

                    if j in N[k]:

                        N[k].remove(j)

                    else: continue

        point_to_set =  dict(zip(N.keys(), [N[i][0] for i in N.keys()]))

        point_to_direction = nx.DiGraph(point_to_set)

        allocation.append([i for i in nx.simple_cycles(point_to_direction)])
```

```
    return allocation


T = {"1":['a', 'b', '1'],
     "2":['a', 'b', '2'],
     "3":['b', 'a', '3'],
     "4":['b', 'a', '4'],
     'a':["1", "2", "3", "4"],
     'b':["2", "4", "1", "3"]
     }


Q = {"1": 1, "2": 1, "3":1, "4":1, 'a':2, 'b':1}



T_1 = {
     "1":['a', 'b', '1'],
     "2":['a', 'b', '2'],
     "3":['b', 'a', '3'],
     "4":['b', 'a', '4'],
     'a':["1", "2", "3", "4"],
     'b':["2", "4", "1", "3"]
     }
```

```
Q_1 = {"1": 1, "2": 1, "3":1, "4":1, 'a':2, 'b':2}

def top_trading_cycle_2( N = T_1, Q = Q_1 ):
    allocation = []
    point_to_set =  dict(zip(N.keys(), [N[i][0] for i in N.keys()]))
    point_to_direction = nx.DiGraph(point_to_set)
    allocation.append([i for i in nx.simple_cycles(point_to_direction)])
    while(True):
        if len(N) <= 2:
            return allocation
        else:
            for j in flatten(allocation):
                Q[j] -= 1
            for i in flatten(allocation):
                if i in N.keys() and Q[i] <= 0:
                   del N[i]
                else: continue
            for k in N.keys():
                for j in flatten(allocation):
                    if j in N[k] and Q[j] <= 0:
                        N[k].remove(j)
                    else: continue
            point_to_set =  dict(zip(N.keys(), [N[i][0] for i in N.keys()]))
```

```
            point_to_direction = nx.DiGraph(point_to_set)
            allocation.append([i for i in nx.simple_cycles(point_to_direction)])

    return allocation

print top_trading_cycle_2( N = T, Q = Q_1 )
```

制約下の学生プロポーズ DA アルゴリズム

```
#!/usr/bin/env python
# -*- coding: utf-8 -*-
from numpy import *
from scipy import *
from pylab import *
import time
from sets import Set
from copy import deepcopy

VERBOSE = False

# N : R[i]: ordering of A represented as array.
# A : P[a]: ordering of N, represented as array of dictionaries,
where s:r represents the rank of student s.
# Q : Q[a]: quota of A. a can be matched to at most Q[a] elements in N.
R = [
```

```
     [0,2,1],
     [0,1,2],
     [0,1,2],
     [2,1,0],
     [1,0,2]
    ]

P = [
    {0:1, 1:3, 2:5, 3:4, 4:2},
    {0:5, 1:1, 2:4, 3:3, 4:2},
    {0:4, 1:3, 2:2, 3:1, 4:5}
    ]
#each school total capacity
Q = [2, 2, 2]

#majprity capcity constrain
q = [1, 1, 1]

#minority caoacity constrain
r = [Q[i] - q[i] for i in range(len(Q))]

def gale_shapley(N = R, A = P, Q = Q, q = q, r = r):
    kickedouts = range(len(N))
    proposeoffset = [0] * len(N)
```

```
allocation = []
for school in A:
    allocation.append(set([]))


while(True):
    if len(kickedouts) <= 0:
        break
    if VERBOSE:
        print
        print 'allocation :', allocation
        print 'kickedouts :', kickedouts
        print 'pro_offset :', proposeoffset
    new_kickedouts = []
    more_to_go = False
    for student in kickedouts:
        if proposeoffset[student] >= len(N[student]):
            new_kickedouts.append(student)
            proposeoffset[student] = len(N[student])
            continue


        more_to_go = True
        school_to_apply = N[student][proposeoffset[student]]
        if VERBOSE:
            print student, 'applies', school_to_apply
```

```
            rank = A[school_to_apply].get(student, None)
            if rank is None:
                proposeoffset[student] += 1
                new_kickedouts.append(student)
                continue
            M = set([0, 1, 2])
            m = set([3, 4])
            if len(allocation[school_to_apply]) < Q[school_to_apply]
    and len(allocation[school_to_apply].intersection(M)) < q[school_to_apply]
    and student in M:
                allocation[school_to_apply].add(student)
                if VERBOSE:
                    print 'student', student, 'assigned to', school_to_apply
            elif len(allocation[school_to_apply]) < Q[school_to_apply]
    and student in m:
                allocation[school_to_apply].add(student)
                if VERBOSE:
                    print 'student', student, 'assigned to', school_to_apply


            else :
                std = list(allocation[school_to_apply])
                students_sorted_by_rank =
zip([A[school_to_apply][el] for el in std], std)
```

```
                students_sorted_by_rank.sort()
                students_sorted_by_rank.reverse()
                students_sorted_by_rank =
[el[1] for el in students_sorted_by_rank]

                assigned = False
##                for other_student in allocation[school_to_apply]:
                for other_student in students_sorted_by_rank:
                    if rank > A[school_to_apply][other_student] and
    student in m and other_student in M and
    len(allocation[school_to_apply].intersection(m)) < r[school_to_apply]
    and len(allocation[school_to_apply]) < Q[school_to_apply]
    and len(allocation[school_to_apply].intersection(M)) > q[school_to_apply]:
                        proposeoffset[other_student] += 1
                        new_kickedouts.append(other_student)
                        allocation[school_to_apply].add(student)
                        allocation[school_to_apply].remove(other_student)
                        assigned = True
                        if VERBOSE:
                            print 'student', student, 'assigned to',
    school_to_apply
                            print 'student', other_student, 'kicked out from',
    school_to_apply
                        break
```

```
                elif rank < A[school_to_apply][other_student] and
len(allocation[school_to_apply].intersection(m)) >= r[school_to_apply]
and student in m and other_student in M:
                    proposeoffset[other_student] += 1
                    new_kickedouts.append(other_student)
                    allocation[school_to_apply].add(student)
                    allocation[school_to_apply].remove(other_student)
                    assigned = True
                    if VERBOSE:
                        print 'student', student, 'assigned to',
school_to_apply
                        print 'student', other_student, 'kicked out from',
school_to_apply
                    break

                elif rank < A[school_to_apply][other_student] and
len(allocation[school_to_apply].intersection(m)) >= r[school_to_apply]
and student in m and other_student in m:
                    proposeoffset[other_student] += 1
                    new_kickedouts.append(other_student)
                    allocation[school_to_apply].add(student)
                    allocation[school_to_apply].remove(other_student)
                    assigned = True
                    if VERBOSE:
```

```
                        print 'student', student, 'assigned to',
school_to_apply
                        print 'student', other_student, 'kicked out from',
school_to_apply
                    break
                elif rank < A[school_to_apply][other_student] and
len(allocation[school_to_apply].intersection(m)) >= r[school_to_apply]
and student in M and other_student in m:
                    proposeoffset[other_student] += 1
                    new_kickedouts.append(other_student)
                    allocation[school_to_apply].add(student)
                    allocation[school_to_apply].remove(other_student)
                    assigned = True
                    if VERBOSE:
                        print 'student', student, 'assigned to',
school_to_apply
                        print 'student', other_student, 'kicked out from',
school_to_apply
                    break
                elif rank < A[school_to_apply][other_student] and
len(allocation[school_to_apply].intersection(M)) >= q[school_to_apply]
and student in M and other_student in M:
                    proposeoffset[other_student] += 1
                    new_kickedouts.append(other_student)
```

```
                    allocation[school_to_apply].add(student)
                    allocation[school_to_apply].remove(other_student)
                    assigned = True
                    if VERBOSE:
                        print 'student', student, 'assigned to',
school_to_apply
                        print 'student', other_student, 'kicked out from',
school_to_apply
                    break

            if not assigned:
                proposeoffset[student] += 1
                new_kickedouts.append(student)
                if VERBOSE:
                    print 'student', student, 'rejected from', school_to_apply

    kickedouts = new_kickedouts
    if not more_to_go :
        break
return (allocation)
```