

### 3-3-1 総合確率法の概要

総合確率法とは、計画規模の洪水ピーク流量を求める手法のひとつで、従来の手法と比較して、降雨の時間・空間分布をより考慮した手法である。

従来の手法は、ある定めた降雨期間の年最大降雨量の確率分布を求めて、対象とする流域規模にあった再現期間の年最大降雨量をひとつ定める。そして過去の洪水データや擬似降雨モデル等を用いて降雨パターンを定め、その降雨パターンを決定した再現期間に対応する年最大降雨量まで引き伸ばして、流出モデルを介して洪水ピーク流量を求め、カバー率という概念を用いることで、基本高水流量を決定するという方法を取る。

一方で、総合確率法は降雨パターンを洪水ピーク流量を独立変数、年最大降雨量を従属変数（通常求めることができるのは、その逆関数である）とする関数系として捉え、年最大降雨量の確率分布から洪水ピーク流量の確率分布へと変数変換するというイメージで、基本高水流量を決定する手法である。

以下では、まず、年最大降雨量の確率分布と洪水ピーク流量の確率分布を関係づける式の数学的解釈を椎葉・立川（2013）のやり方に沿って解説する。

### 3-3-2 総合確率法の数学的根拠について（椎葉・立川 2013）

総合確率法は、まず生起した洪水事象が非毎年資料として考える事が、理論的な背景となる。その大前提を踏まえつつ、以下に示す仮定をすることで、超過確率の洪水ピーク流量を年最大降雨量の確率分布から求める関係式を示すことが出来る。

- 1) 総合確率法において、ある降雨期間内の総降雨量と降雨の時間的・空間的分布パターンは独立である
- 2) 降雨パターンを固定し、総降雨量だけを変化させた場合、総降雨量とともに洪水ピーク流量は単調に増加する。
- 3) 降雨の時間的・空間的分布パターン（以下、降雨パターンという）を  $\zeta(x, y, t)$  とする。また、降雨パターン  $\zeta(x, y, t)$  は、 $N$  個のパターンのみであるとして、 $i$  番目の降雨パターンを  $\zeta_i(x, y, t)$  と表し、降雨パターン  $\zeta_i(x, y, t)$  の生起確率  $p_i$  は与えられているとする。
- 4) ある定められた閾値を超えるような洪水を生じさせる降雨イベントの発生は、単位時間あたりの発生確率が  $\mu$  であるポアソン過程に従うとする。また、そのような降雨イベントの総降雨量  $R$  の確率分布は発生時点とは独立に同一の確率分布関数  $G_R(R)$  に従う。ここに、降雨イベントとは実際に生起したイベントの事を指

し、先の降雨パターンとは異なるので注意されたい。

仮定 1)において、ある降雨パターン  $\xi_i(x, y, t)$ における位置  $x, y$  で時間  $t$  の降雨強度  $r(x, y, t)$ は以下のように表せるとする。

$$r_i(x, y, t) = R\xi_i(x, y, t) \quad (3-4)$$

仮定 1)から 3)が成立する場合、洪水を生じさせるような降雨イベントが発生したときに洪水ピーク流量  $Q_p$  が、ある閾値  $Q_{pth.}$  を超過する確率  $\text{Prob}[Q_p > Q_{pth.}]$  は、 $i$  番目の降雨パターン  $\xi_i(x, y, t)$  が生起する確率  $p_i$  とその降雨パターン  $\xi$  によって生起する洪水ピーク流量  $Q_p$  が  $Q_{pth.}$  を超える確率との積の和によって求めることができ、

$$\begin{aligned} \text{Prob}[Q_p > Q_{pth.}] &= \sum_{i=1}^N p_i \cdot \text{Prob}[Q_p > Q_{pth.} | \xi(x, y, t) = \xi_i(x, y, t)] \\ &= \sum_{i=1}^N p_i \cdot \text{Prob}[R > R_i(Q_{pth.})] \end{aligned} \quad (3-5)$$

ここで、 $R_i(Q_{pth.})$ とは、降雨パターン  $\xi_i(x, y, t)$ において、総降雨量  $R$  を変化させたときに  $Q_p$  がちょうど  $Q_{pth.}$  となる総降雨量を表している。また、右辺の  $\text{Prob}[R > R_i(Q_{pth.})]$  は、降雨パターン  $\xi_i(x, y, t)$ ごとに定まる  $R_i(Q_{pth.})$ の超過確率を表している。

また、(3-5)式の左辺  $\text{Prob}[Q_p > Q_{pth.}]$ を  $Q_p$  の確率分布関数  $G_{Q_p}(Q_p)$ を使って表すと、(3-5)式は、

$$1 - G_{Q_p}(Q_p) = \sum_{i=1}^N p_i \cdot \text{Prob}[R > R_i(Q_p)] = \sum_{i=1}^N p_i \cdot (1 - G_R(R_i(Q_p))) \quad (3-6)$$

となる。図 3-10 に、総降雨量の確率分布関数（確率密度関数）と洪水ピーク流量の確率分布関数（確率密度関数）の関係を示している。横軸に総降雨量  $R$ 、縦軸に洪水ピーク流量  $Q_p$  をとっており、各実線は仮定 2)に示したように各降雨パターン  $\xi_i(x, y, t)$  において総降雨量  $R$  の増加とともに洪水ピーク流量  $Q_p$  が単調に増加していることを表している。それぞれの実線を各降雨パターンで表現しているが、その実践上の×印が降雨イベントを表している。対象とする流域の流出モデルが既知であるのであれば、降雨パターン  $R\xi_i(x, y, t)$ を入力としてそれぞれの洪水ピーク流量を求める事ができ、各実線が描ける。また、 $Q_p$  が  $Q_{pth.}$  となる総降雨量  $R_i(Q_{pth.})$ は降雨パターン  $\xi_i(x, y, t)$ 毎に異なり、 $\text{Prob}[R > R_i(Q_{pth.})]$ は降雨パターン毎に求まる総降雨量  $R_i(Q_{pth.})$ の超過確率を表していることになる。

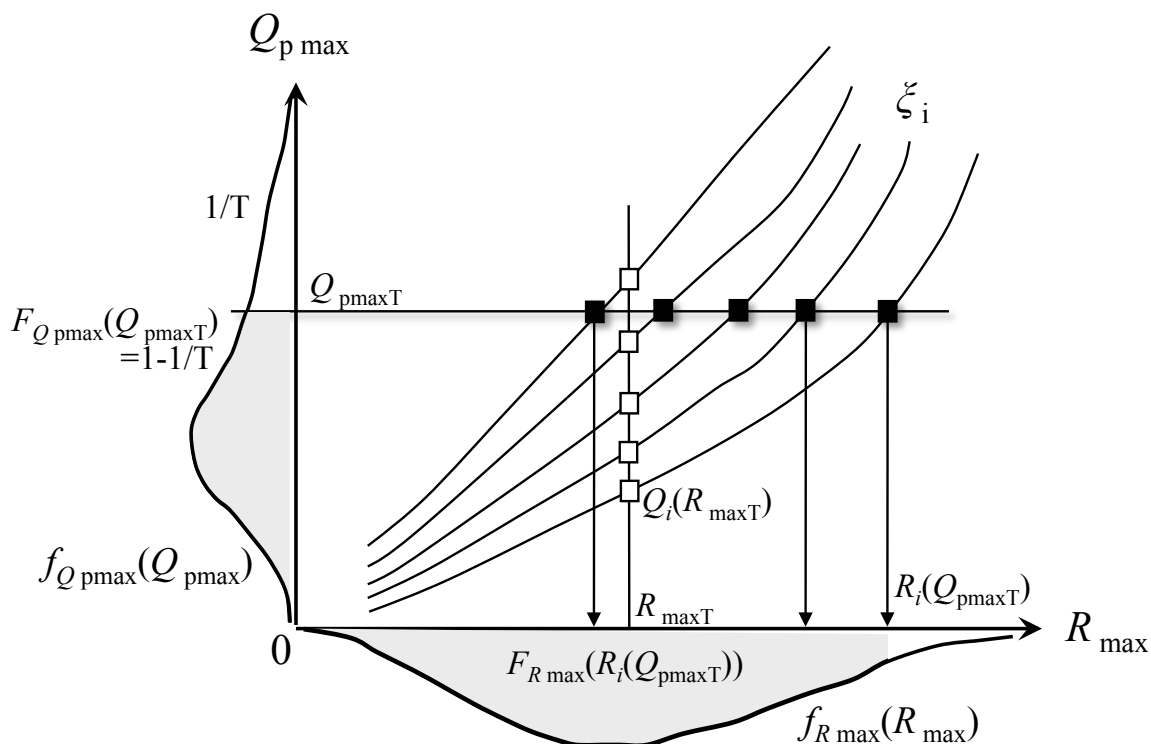


図 3-10 総合確率法の概念図. (椎葉ら 2013, 水文学・水工計画学をもとに著者加筆)

次に、仮定 4)について考えるが、その前に洪水を生じさせるような降雨イベントの発生がポアソン過程に従う事に立ち返り、洪水イベントの発生も単位時間あたりの発生確率  $\mu$  であると考えられると明記しておく。この議論を円滑に進めるために、以下ではまず、年最大系列という時間の概念を持つ水文量の確率分布関数と、事象の大きさの確率分布関数(上記までの流れで言うと、 $G_{Qp}(Q_p)$ がそれに対応する)および、その発生頻度の関係式を示す。

複合ポアソン過程モデルに従う時系列から年最大値の系列を取り出す場合に、その系列が持つ特性を抽出する。すなわち、ある水文量の年最大値の確率分布関数  $F_{x_{max}}(x_u)$  を求める。時間軸上である現象が生起する時点の分布を考える。まずポアソン過程の過程の仮定を考える。

- a) 微小な区間( $t, t + \Delta t$ )で事象が一度生起する確率は  $\mu \Delta t$  で与えられる。ここに、 $\mu$  は単位時間あたりの事象の発生頻度であり、 $t$ によらず一定値をとる。
- b) 微小な区間( $t, t + \Delta t$ )で事象が二回以上発生する確率は  $\mu \Delta t$  より小さいので無視できる。
- c) 互いに重ならない時間区間での事象の生起は互いに独立である。

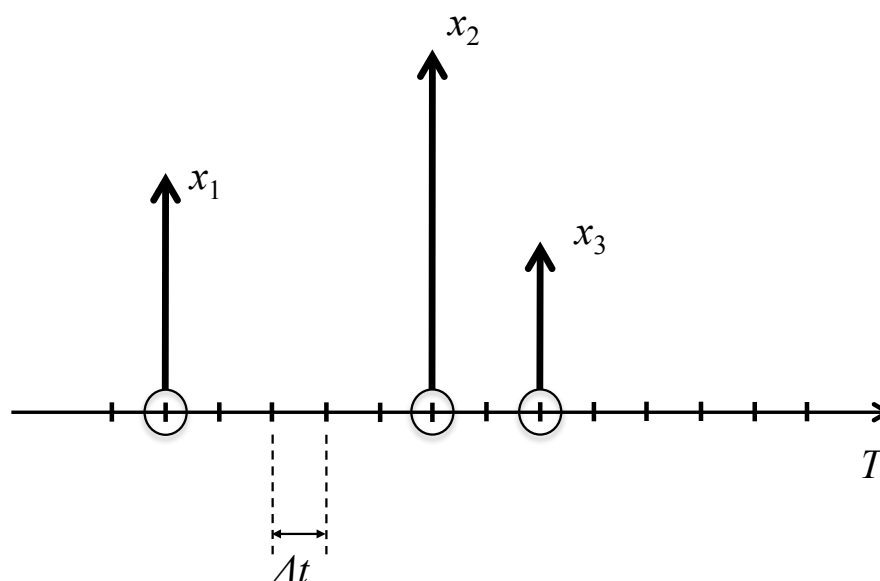


図 3-11 複合ポアソン過程の概念図. ポアソン過程に従って微小区間内でイベントが生起し, かつそのイベントの大きさが区間に依らず同一の分布に従って決まる概念的に示されている.

a)から c)までの仮定を満たす過程を複合ポアソン過程と呼ぶ.

ある時点で現象が生起する時に, その時点で確率変数  $X$  を対応させる. また, この  $X$  の確率分布は, それが発生する時点に独立で, それぞれが同一の分布  $G_X(x)$  に従う. このように考えると確率変数  $X$  がある閾値  $x_u$  を超える確率は  $G_X(x)$  を用いて,  $1 - G_X(x)$  で与えられる (図 3-11).

よって, 時間軸  $T$  上のある微小な区間  $(t, t + \Delta t)$  で  $X > x_u$  であるような事象が発生する確率は,  $\Delta t$  間で事象が発生する確率  $\mu \Delta t$  に確率変数  $X$  がある閾値  $x_u$  を超える確率  $1 - G_X(x)$  を乗じて,  $\mu \Delta t (1 - G_X(x))$  で与えられる.

$$\mu(1 - G_X(x_u)) = \lambda \quad (3-7)$$

として, 以下では, 時刻 0 以降で初めて  $X > x_u$  であるような事象が生起する時間  $T_{first}$  の分布を考える. 区間  $(0, t)$  の間に  $X > x_u$  であるような事象が生起する回数を  $N_t$  と表し,  $N_t = 0$  である確率  $P_0$  を表すと,

$$P_0(t) = \text{Prob}[N_t = 0] \quad (3-8)$$

である. 時点  $t + \Delta t$  までに事象が一度も生起しない確率  $P_0(t + \Delta t)$  (つまり,  $N_{t+\Delta t} = 0$ ) は, 区間  $(0, t)$  で一度も  $X > x_u$  であるような事象が生起しない, かつ区間  $(t, t + \Delta t)$  でも一

度も  $X > x_u$  であるような事象が生起しない場合であるので、

$$P_0(t + \Delta t) = P_0(t) \cdot (1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t)) \quad (3-9)$$

と書ける。ここに、 $P_0(t)$ は、区間(0,  $t$ )での生起確率、 $1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t)$ は、区間( $t$ ,  $t + \Delta t$ )での生起確率である。また、 $1 - \lambda \Delta t$ は、 $X > x_u$  であるような事象が生起しない確率である。つまり、 $\lambda \Delta t$ が  $X > x_u$  であるような事象が生起する確率である。

仮定2)によって、 $\Delta t$ より高次の微小量である右辺の  $o(\Delta t)$ は無視できるので、

$$P_0(t + \Delta t) = P_0(t) \cdot (1 - \lambda \Delta t) \quad (3-10)$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_0(t + \Delta t) - P_0(t)}{\Delta t} = -\lambda P_0(t) \quad (3-11)$$

$$\therefore \frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) \quad (3-12)$$

である。 $P_0(0) = 1$ として、この微分方程式を解くと、

$$P_0(t) = e^{-\lambda t} \quad (3-13)$$

となる。これが区間(0,  $t$ )で  $X > x_u$  であるような事象が一度も生起しない確率である。ここで、ポイントとなるのは、初期生起時間  $T_{first}$ が  $t$ 以下であることと、区間(0,  $t$ )で事象  $X > x_u$ が少なくとも一回生起することは同等であるから、

$$\text{Prob}[T_{first} \leq t] = 1 - \text{Prob}[N_t = 0] = 1 - P_0(t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad (3-14)$$

が成立する。(図 3-12)

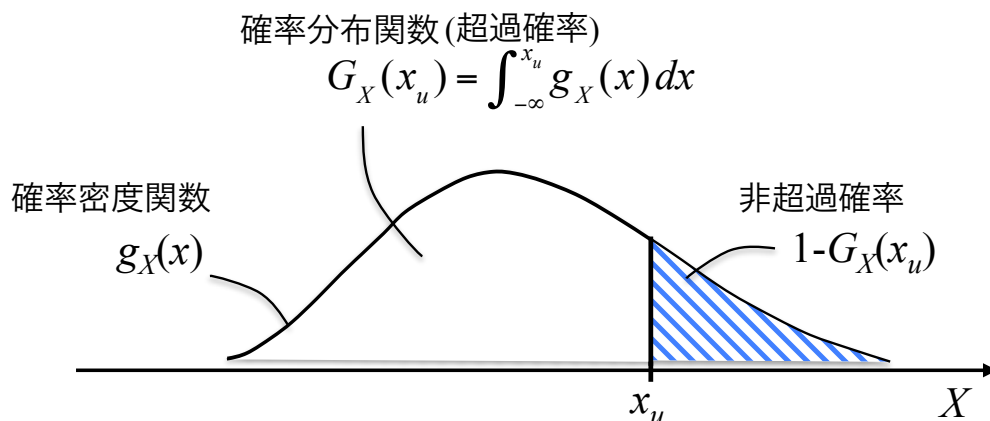


図 3-12 確率密度関数 (PDF) と確率分布関数 (CDF), 超過確率と非超過確率の解説  
 ここで、 $\Delta t$ を1年として  $P_0(\Delta t)$ を考える。 $P_0(\Delta t)$ は、 $N_{\Delta t} = 0$ であり、これは  $X > x_u$

であるような事象が1年間に一度も生起しない確率を表している。つまり、年最大値  $X_{max}$  が  $x_u$  より事象の確率である。

よって、年最大値の確率分布関数は、

$$F_{X_{max}}(x_u) = \text{Prob}[X_{max} > x_u] = e^{-\lambda \Delta t} \quad (3-15)$$

である。(3-7)式より上式は、

$$F_{X_{max}}(x_u) = e^{-\mu \Delta t (1 - G_X(x_u))} \quad (3-16)$$

となる。

つまり、

- ・ 洪水事象の発生が単位時間あたりの発生確率  $\mu$  で、
- ・ 事象の洪水ピーク流量値の確率分布関数が複合ポアソン過程に従うなら、

年最大洪水のピーク流量  $Q_{pmax}$  の確率分布関数  $F_{Q_{pmax}}(Q_p)$  は、

$$F_{Q_{pmax}}(Q_p) = e^{-\mu \Delta t (1 - G_{Q_{pmax}}(Q_p))} \quad (3-17)$$

で計算できる。 $\Delta t$  は時間間隔であり、 $\Delta t = 1$  年として考える。

$$\begin{aligned} F_{Q_{pmax}}(Q_p) &= \exp \left[ -\mu \Delta t \sum_{i=1}^N p_i \cdot (1 - G_R(R_i(Q_p))) \right] \\ &= \prod_{i=1}^N \exp \left[ -\mu \Delta t \sum_{i=1}^N p_i \cdot (1 - G_R(R_i(Q_p))) \right]^{p_i} \end{aligned} \quad (3-18)$$

(3-6)式を用いると上式が得られる。また、 $F_{Q_{pmax}}(Q_p)$  を求めるのと同様に、 $F_{R_{max}}(R)$  も、

$$F_{R_{max}}(R_{max}) = e^{-\mu \Delta t (1 - G_{R_{max}}(R_{max}))} \quad (3-19)$$

となるので、(3-18)式は、

$$F_{Q_{pmax}}(Q_p) = \prod_{i=1}^N F_{R_{max}}(R_i(Q_p))^{p_i} \quad (3-20)$$

となる。上式の右辺は  $Q_p$  が十分大きいと、

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^N F_{R_{max}}(R_i(Q_p))^{p_i} &\cong \prod_{i=1}^N (1 - p_i \cdot (1 - F_{R_{max}}(R_i(Q_p)))) \\ &\cong 1 - \sum_{i=1}^N p_i \cdot (1 - F_{R_{max}}(R_i(Q_p))) \end{aligned} \quad (3-21)$$

よって、以下に示す近似式、

$$1 - F_{Q_{pmax}}(Q_{pth.}) \cong \sum_{i=1}^N p_i \cdot (1 - F_{R_{max}}(R_i(Q_{pth.}))) \quad (3-22)$$

が得られる。ここで、

「降雨の時空間分布パターンの生起に関する一般的な確率モデルを構成するのは困難であり、実際に生起した降雨パターンの経験分布がそのまま用いられることが多い。」

ことを考えて、 $p_i=1/N$ と考えれば、

$$F_{Q_{pmax}}(Q_{pth.}) \cong \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F_{R_{max}}(R_i(Q_{pth.})) \quad (3-23)$$

が得られる。これが総合確率法における年最大総降雨量の確率分布関数と洪水ピーク流量の確率分布関数の関係式である。また、再現期間  $T$  年と  $F_{Q_{pmax}}(Q_{pth.})$  との関係が以下の式で与えられるので、

$$F_{Q_{pmax}}(Q_{pth.}) = 1 - \frac{1}{T} \quad (3-24)$$

再現期間が  $T$  年の年最大洪水ピーク流量  $Q_{pth.}$  は、 $Q_{pmax}$  の確率分布関数  $F_{Q_{pmax}}(Q_p)$  を用いて(つまり、(3-24)式を用いて)、(3-23)式を満たすように  $Q_{pth.}$  を決めることが出来る。

### 3-3-3 総合確率法の適用

本節では、手法1に従って計算した洪水ピーク流量郡の結果を総合確率法の枠組みに適用することを試みる。実際の総合確率法と異なる点は、降雨パターン  $\xi(x, y, t)$  の生成に用いる降雨イベントは1種類のみで、対象流域内のサブ流域(この研究の場合は奥利根川流域、吾妻川流域、烏川流域、神流川流域の4つのサブ流域である。)の流域平均降雨量時系列を以下の式に従って入れ替えることによって、降雨パターンを生成する。

$$r_{jnew}(t) = \frac{r_i(t)}{\sum_{i=1}^T r_i(t)} \cdot \sum_{i=1}^T r_j(t) \quad (3-3)$$

ここに、 $r_i(t) / \sum_{i=1}^T r_i(t)$  は各サブ流域の無次元降雨時系列、 $\sum_{i=1}^T r_j(t)$  はサブ流域の流域

平均総降雨量、 $r_{jnew}(t)$  は、入れ替え先の流域平均総降雨量に無次元降雨時系列を乗じたものである。

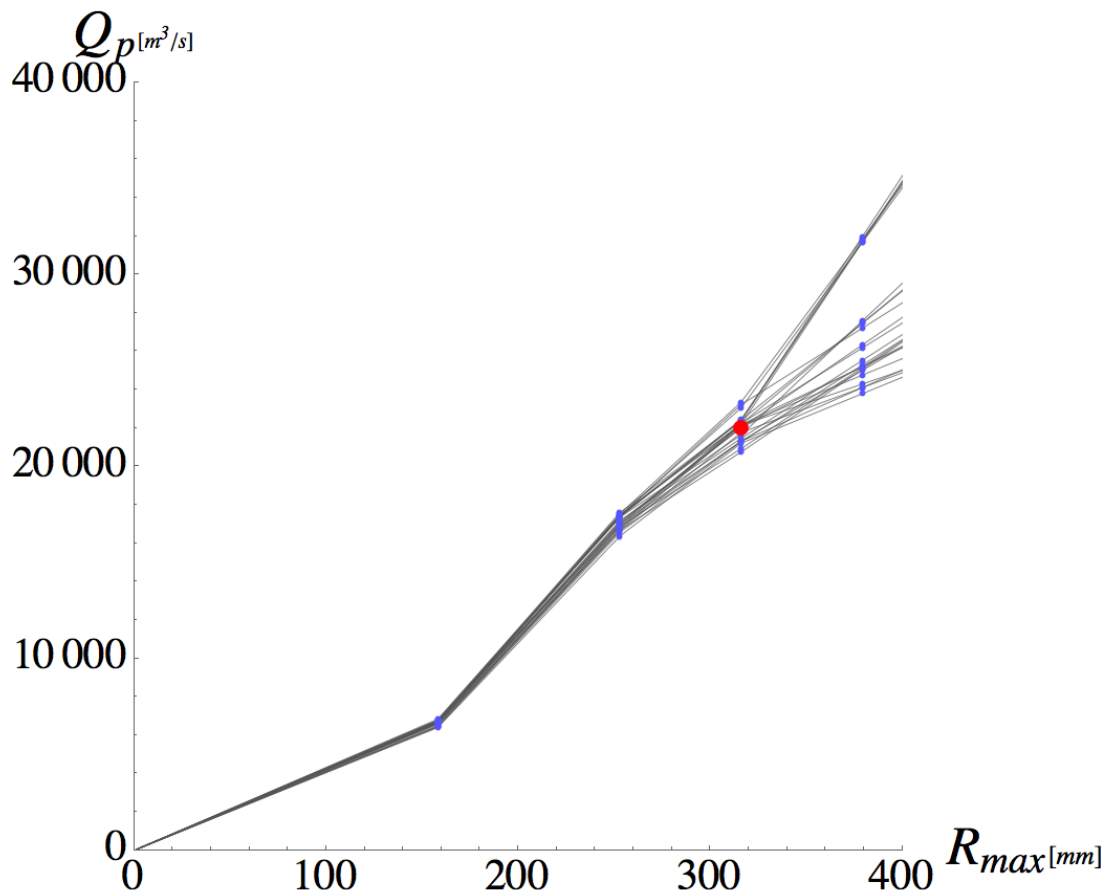


図 3-13 第 3 章の結果と総合確率法の関係（引き伸ばしに用いた降雨イベントは S22.9 洪水（Kathleen 台風）のもの．総降雨量 316mm を基準として 0.5 倍，0.8 倍，1.0 倍，1.2 倍の 4 ケースで計算した．それぞれの流域平均総降雨量は維持したまま，オリ根川・吾妻川・烏川・神流川流域の流域平均総降雨量を，手法 1 の方法で入れ替えて計算した（つまり総降雨量毎に 24 の降雨パターンがある）．図中の赤丸は実測の降雨データとそのデータを用いて計算した八斗島地点の洪水ピーク流量を表す．青丸は，総降雨量毎，降雨パターン毎に計算した洪水ピーク流量をプロットしている．）

以上の方法によって，S22.9 洪水時の降雨データを基に，流域平均総降雨量を 0.5 倍，0.8 倍，1.0 倍，1.2 倍のケースで各 24 降雨パターン計算し，それぞれの総降雨量に対して流出解析を介して洪水ピーク流量郡を求めた．

図 3-13 は，上記の方法に従って求めた結果を総合確率法に適用させた結果である．横軸に総降雨量，縦軸に洪水ピーク流量をとっている．赤丸は S22.9 洪水時の生起した降雨パターン・総降雨量で計算した場合の洪水ピーク流量を示している．また，青丸は，流域平均総降雨量を 0.5 倍，0.8 倍，1.0 倍，1.2 倍のケースで各 24 降雨パターンから求めた洪水ピーク流量を示している．これを見ると，総降雨量の増加にともな



って、洪水ピーク流量群の取り得る幅は広がっていくことがわかる。つまり、総降雨量が大きくなると、降雨の多様性に起因した洪水ピーク流量の不確実さは増大するということである。

#### 3-4 まとめ

降雨の空間分布の多様性が、対象とする流域の下流地点の洪水ピーク流量に及ぼす影響について検証した。また、利根川上流域の降雨パターンの違いが八斗島地点の洪水ピーク流量に及ぼす影響について検証した。この検証で用いた洪水ピーク流量郡の算出手順は、従来の超過洪水決定手法に準ずるものであった。加えて、もうひとつの超過洪水の決定手法である総合確率法の手順に従い、洪水ピーク流量を算出し、洪水ピーク流量の確率分布関数を求めた。

以下に得られた結論を詳述する。

- 1) 吾妻川流域の流域平均降雨量（カスリーン台風時の総降雨量）が3～6%増加した場合、集水域を利根川上流域とする八斗島基準点において、洪水ピーク流量が12～15%上昇する。
- 2) 利根川上流域に異なる降雨パターンを与えた流出計算の結果、下流域に比べ上流域の降雨量が多い場合では、S22年洪水時の再現計算と比較すると、ピーク流量に10～17%の上昇が見られる。
- 3) 降雨の多様性が洪水ピーク流量に及ぼす影響を調べるために、降雨の入れ替え計算の結果を総合確率法に適合させた。総降雨量の増加にともなって、洪水ピーク流量群の最大値と最小値の幅が広がる傾向にあることが分かった。

### 参考文献

- 気象庁ホームページ「災害をもたらした気象事例（平成元年～本年）」，  
[http://www.data.jma.go.jp/obd/stats/data/bosai/report/index\\_1989.html](http://www.data.jma.go.jp/obd/stats/data/bosai/report/index_1989.html)，2015年11月参照。
- 藤原洋一，大出真理子，小尻利治，友杉邦雄，入江洋樹：地球温暖化が利根川上流域の水資源に及ぼす影響評価，水工学論文集，第50巻，pp.367-372，2006。
- IPCC, 2007:Summary for Policymakers. In: Climate Change 2007: The Physical Science Basis.
- IPCC, 2013:Summary for Policymakers. In: Climate Change 2013: The Physical Science Basis.
- K Oda, S Kure, T Yamada, R Ebana, A Watanabe, N Watanabe: Effects of Special Distribution of Hydrological Characteristics to Runoff, World City Water Forum, CD-ROM, 2009.
- M. B. Abbott & F. Ionescu (1976): On The Numerical Computation Of Horizontal Flows, Journal of Hydraulic Research, 5:2, 97-117.
- S Kim, Y Tachikawa, K Takara, E Nakakita: Hydrologic Prediction under Global Warming at Tone and Yodo River Basins using the Output of Global 20-km Mesh GCM, Annuals of Disas. Prev. Res. Inst., Kyoto Univ., No.51 B, 2008.

