

## 第4章 確率過程論を導入した流出解析と不確実性の評価

### 4-1 はじめに

前章では、決定論的な流出システムを介した場合における降雨の多様性による洪水ピーク流量の不確実さを、利根川八斗島上流域の流出計算を行うことで明らかにした。本章では、確率過程の概念、一般的な確率微分方程式の概念、Fokker-Planck 方程式の概念を説明し、降雨時系列データを確率過程と捉えることで導かれる流出高についての確率微分方程式および Fokker-Planck 方程式を示し、確率過程論的な流出解析を行うための基礎理論を示す。また、流出高の Fokker-Planck 方程式の定常時の解析解を示すとともに、解の特徴を降雨流出システムの非線形性との関連性という視点から考察する。

加えて、第3章で示した決定論的な流出計算から得られた結果および、本章で得られた結果を従来の超過洪水流量の決定手法や総合確率法と照会することで、本章の結果の水工計画学における位置づけを明確にする。

#### 4-1-1 確率過程の概要とその歴史及び水文学への応用可能性について

イギリスの植物学者 Brown は、1828年に *Philosophical Magazine* という雑誌に、花粉からでた微粒子の運動についての観察（1826～1827年に行った観察）を論文としてまとめている。正確に言うと、最初に花粉の微粒子の運動を観察し、その原因を探るために様々な溶媒や溶質を用いて観察して、論文としてまとめている（江沢 2013）。その後、この運動に関連して、分子の熱運動に関する研究が Boltzmann（1872）によって行われているが、Brown 運動に関係する研究はそれ程盛んに行われてはいなかった。

た。しかし、1905年に Einstein (1905) がブラウン運動 (Brown, 1827) する微粒子は熱運動する分子の不規則な衝突に起因することを理論的に示してから目覚ましい発展を見せる。この理論は、Einstein の関係式として知られ、拡散係数  $D$  は半径  $a$  のブラウン粒子の場合、媒質の粘性係数を  $\eta$ 、温度を  $T$  として式で表現できることを示したものである。また、これは揺動散逸定理の一つの記述方式として広く認識されている。

$$D = \frac{k_B T}{6\pi a \eta} \quad (4-1)$$

ここに、 $k_B$  はボルツマン定数  $= 1.381 \times 10^{-16} \text{erg} \cdot \text{K}^{-1}$ 。その後、1921年から1923年にかけて、Wiener によってその現象が数理的モデルとして発表されている (Wiener 1921a, 1921b, 1923)。また、1910年代には、Fokker (例えば 1914)、Planck (例えば 1917) によって、Langevin 方程式 (Langevin 1908) から確率密度関数の時間発展に関する偏微分方程式 (Fokker-Planck 方程式) が導かれており、1930年代になると、Fokker-Planck 方程式は Kolmogorov (1931) によって一般化され、Markov 過程の場合に Fokker-Planck 方程式が成立する事が示された。これは、Kolmogorov の前向き方程式として知られ、Fokker-Planck-Kolmogorov 方程式と呼ばれることもある。分野や対象とする現象によって呼び名は様々であるが、いずれにしても確率過程論的に密度関数の時間発展を記述した偏微分方程式に他ならない。本論文では先駆者である Fokker と Planck の名に因んだ Fokker-Planck 方程式という用語を用いて、この偏微分方程式を呼称する。

このような Brown 運動に端を発する不確実な物理現象を、数学を用いて解釈することは、確率分布の時間発展を記述した Liouville 方程式 (Liouville の定理) (Liouville 1838) に始まったとされる。気体分子運動論でいう分子の速度分布関数の時間発展を記述する方程式は、Boltzmann 方程式 (物理学史研究刊行会編 1970) や Vlasov 方程式 (Vlasov 1945) として広く知られており、成立条件は異なるが、これらも Liouville 方程式と同型のものである。前者は速度位相空間における速度分布関数の時間発展を記述したものであり、後者は同方程式の衝突項を無視した形で、かつ外力が全く電磁的作用であるとした場合の粒子の速度分布関数を記述したものである。

一方で、1940年代から1950年代にかけて、伊藤清 (1941) は、Brown 運動に代表されるランダム過程の時系列が、決定論的な成分と確率論的な成分で表現できるとして、確率微分方程式の概念を提起し、それを数理的に解く事ができる理論を提唱した。伊藤は確率過程を分布関数の時間発展で記述する偏微分方程式を発表した Kolmogorov の論文を読んだことがきっかけで、確率微分方程式のアイデアを考え付

き、確率解析学の礎が築かれた。ランダムな現象を表現し得る Langevin 方程式を確率微分方程式の形式で記述し、伊藤の微分・積分規則を用いることで、数学的に厳密な意味付けが可能となった。また、Storatonovich は、伊藤解析の  $dw(t)$  は現在の値のみに依存する一方で、 $dw(t)$  は現在と未来の値に依存するとした積分規則を提起した。金融や数理ファイナンスの分野では伊藤解析を用いる事が一般的であり、物理や工学分野では Storatonovich の解釈が一般的であると言われている。Storatonovich 解析は、確率解析の解法を使用せずとも、通常微積分の規則が使用できることが大きな理由である。以上は、Liouville の方程式が発表されてから伊藤の確率微分方程式が発表されるまでの確率過程論の歴史的な流れの概略であり、これらの数学的研究は、物理・工学等の分野で広く応用されている。

例えば、有名な例は、数理ファイナンスの分野への応用である。証券市場に関する数理ファイナンスの分野では、不確実な現象である株価過程  $S(t)$  がランダムウォークで表現できるとして、決定論的な項とランダムに決まる確率論的項とにより数式化 ((4-2)式) し、不確実性を伴う株価の変動過程が表現されている。

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sigma dW(t) \quad (4-2)$$

$S(t)$ :株式の株価,  $\mu$ :単位時間あたりの期待収益率,  $\sigma$ :株価のボラティリティ(標準偏差)である。(4-2)式に無裁定価格理論を適用することで、一般によく知られる Black-Scholes 方程式が導出される (Black and Scholes 1973)。このように、数理ファイナンスの分野においては、不確実性を伴う現象を、Wiener 過程(ランダムウォーク)を巧みに用いた確率微分方程式を用いることで表現している。この確率微分方程式の応用は、数理ファイナンスの分野では常識的に行われているものの、水文・水工学分野においてはこれらに比べて少ないようである。また、水文・水工学分野で扱う物理現象、特に時系列過程に不確実さが内在する現象に関して、確率微分方程式と Fokker-Planck 方程式との対応関係を示した上で、確率密度関数の時間発展を記述し、不確実性を評価している例は著者の知るかぎりではない。

本論文の主題である降雨流出現象も不確実性を含む現象として広く認識されており、観測誤差や精度に関する不確実性の研究や流出解析手法に内在する不確実性に関連する研究が行われている。観測誤差や精度の不確実性は、降雨が時空間的に分布している事等に起因する。降雨の時空間的な分布に関して、近年ではこれらを補足するべく、レーダ雨量計による観測技術、観測網が発展している。例えば、強降雨強度を示す線状降水帯やゲリラ豪雨等の局所的な降雨の観測には国土交通省が近年配置を推進してきた X バンド MP レーダ網 (現在 XRAIN と呼ばれる) による観測が適して

おり、空間分解能は  $250\text{m} \times 250\text{m}$ 、時間分解能は1分と高分解能である。このように、降雨観測に関しては近年のレーダ観測網の発達により、時空間的により精緻なデータが得られるようになっている。

一方で、観測精度が向上しているとは言え、観測手法の違いや我々の認識の限界に起因する降雨の不確実性、不確実性が存在するのも事実である。我々が認識可能な降雨とは、レーダ雨量計で観測されたもの、もしくは地上雨量計で観測されたもの等であり、いずれも流域に降った雨滴を連続的に一粒ずつ認識しているわけではない。また、観測という過程を経て数値的に認識する以上、観測誤差が付きものである。加えて、我々が認識できる現象には限界がある事を知る必要がある。しかし、土木工学において、これら観測限界や認識限界までを不確実性として扱い、その理論的枠組みを提示するような研究は今まで行われてこなかった。

現状の河川計画では計画高水位は一意に決定されるが、実際はその算出に用いる降雨が不確実性を有しているために、計画高水位も分布することが予想できる。一方で、河川堤防に関してもまた、その耐力が分布している事が考えられる。つまり、本来であれば、河川計画において堤防の耐力と外力（水位）がそれぞれ分布している事を想定した上で計画が立案されるべきであるが、現状は決定論的に決められている。本論で示す内容は、河川計画の立案段階と日々の洪水災害に対する危機管理において有用である。降雨の不確実性が及ぼす河川水位の確率分布を知ることができれば、河川計画への信頼性理論の導入可能性が考えられる。つまり、洪水時の避難判断に対する自治体首長や関係者の意思決定に大いに役立つ。このような考え方を論拠として、貯留型の流出解析手法が確率微分方程式の形式で表現できる事を示した上で、降雨の不確実性が及ぼす流出高の不確実性を数学的に厳密に示す。

### 4-1-2 Brown 運動と Wiener 過程

以下では、江沢の解説（江沢，2013）に従って Brown 運動について簡単に述べる。イギリス（スコットランド）の植物学者 Robert Brown は、1826年にクラーク・プルケラというアカバナ科の植物の花粉を水に浮かべ、水を吸って破裂して出てきた無数の微粒子を顕微鏡で観察した。Brown は植物の花粉も動物の精子と同様にして、受粉の後、それが胚珠の核まで到達し、種子へと成長するのだと考えていた。それを証明するために、上記のような観察を行ったのである。顕微鏡で観察した Brown は、動きまわる微粒子を見て、やはり、植物も動物同様にして、この微粒子自身が活着しているのだと考えたとされている。Brown は、水が蒸発し対流が起こりその結果微粒子が動く可能性、観察装置が置かれている机が廊下を歩く人からくる振動で揺れている

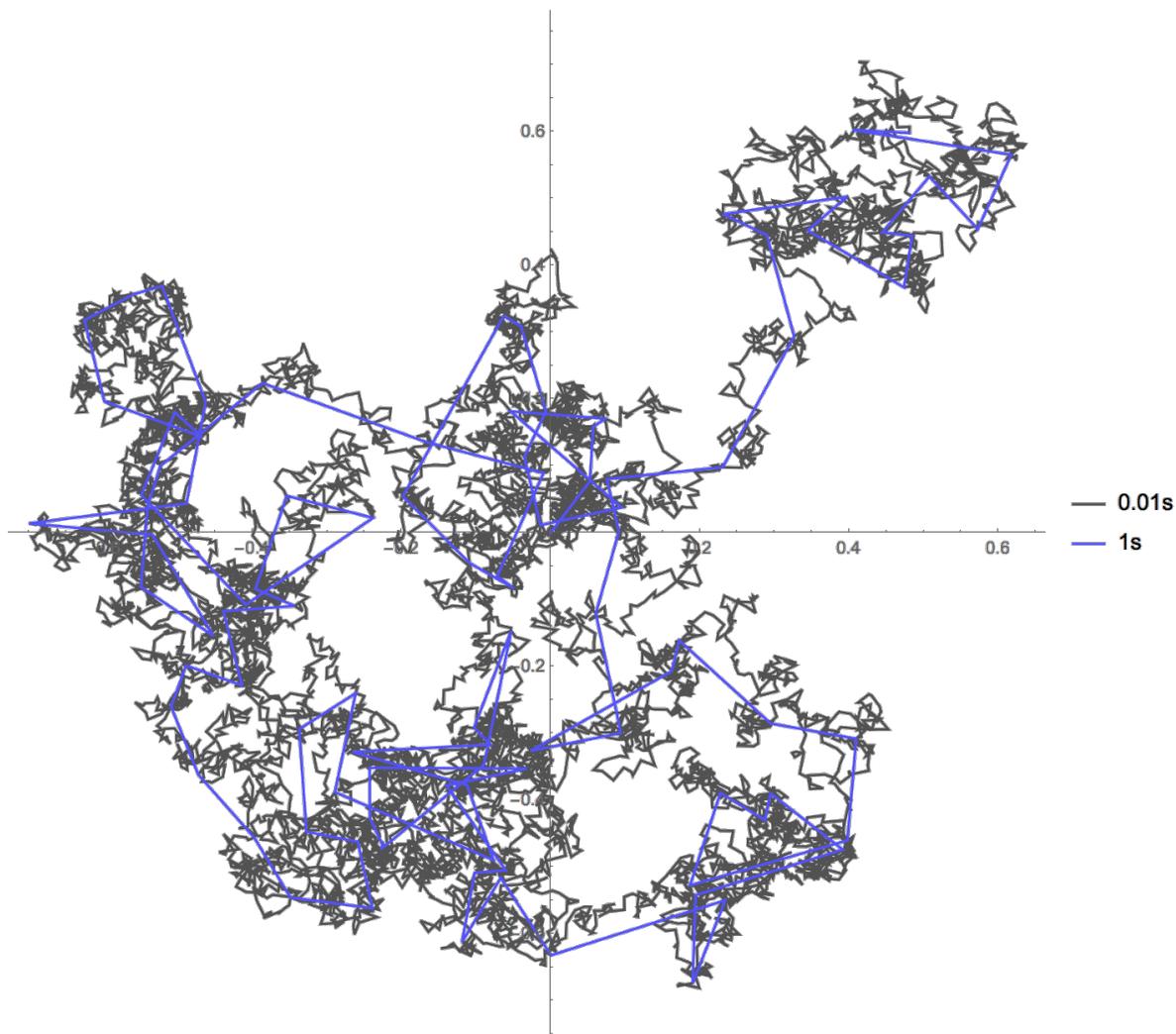


図 4-1 2次元の Brown 運動の軌跡。(図中の黒線は 0.01s 毎の Brown 粒子の動きを描いた軌跡である。一方で青線は 1s 毎の Brown 粒子の軌跡をプロットしたものである。拡散の時間スケールが異なっても Brown 運動の動きが見られる。)

可能性なども考えなかったわけではないが、いずれにしても、そのような大きな水の動きの影響では、隣り合った微粒子は水と同じ挙動を示すだろうと考えていたのでこの可能性を排除している。

一方で、Brown は石炭を粉粒状にしたものや木の化石をすり潰した粉末、更には無機質の鉱物、岩石と金属の粉末を調べ、いずれの粉末も似たような運動をしているという結論にたどり着いている。原因までは詳細に示されていないものの、どんな物質でも 1inch の  $1/20000 \sim 1/30000$  の直径である微粒子を水に浮かべると激しく震えて動くという普遍性を見出しているのが Brown であり、今日、彼の功績を讃える意味も込めて、「Brown 運動」と呼ばれている。そして、その数学的な抽象をしたのが数学者

である Nobert Wiener である. この「Brown 運動」は Wiener の名を取って, 「Wiener 過程」と呼ばれている.

ここで, Wiener 過程:  $w(t)$ の数学的な定義 (数学的な抽象) を示す. さまざまな表現の仕方があるが, 本論文では以下のように定義する.

$$\textcircled{1} w(0)=0$$

②どの期間 ( $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k \leq t_n$ ) においても,  $w(t)$ の差分  $w(t_1)-w(0)$ ,  $w(t_2)-w(t_1)$ ,  $\dots$ ,  $w(t_k)-w(t_{k-1})$ は正規分布  $N(0, t_k-t_{k-1})$ に従う. つまり,

$$t_k - t_{k-1} = \Delta t \tag{4-3}$$

$$w(t_k) - w(t_{k-1}) = \Delta w \tag{4-4}$$

とすれば,

$$f(w + \Delta w, t + \Delta t | w, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t}} e^{-\frac{(\Delta w)^2}{2\Delta t}} \tag{4-5}$$

の正規分布に従う.

①の意味は, Brown 運動する粒子が  $t=0$ , 原点  $x=0$  から出発することを表している. また, これはほとんどすべての見本路で成立する. Brown 運動の乱雑さは, 図 4-1 に示す通りである. 乱雑さのなかの更に細かい乱雑さを見ることが最果てなく可能かと言うと我々が認識できるスケールに依存するであろう. 例えば, 室温の水中に漂う半径  $0.5\mu\text{m}$  の球形微粒子の場合, Brown 運動の乱雑性の限界は, 時間間隔にして  $10^{-7}\text{s}$  のオーダーである (江沢 1978). これは, つまり, 厳密には Brown 運動や Wiener 過程の数学標記に所謂, “微分” 標記は通用しないということであり, 微小時間はある有限の値 (限界) を持つことを示唆するものであるが, 形式的に  $\Delta t$  を  $dt$ ,  $\Delta w$  を  $dw$  と書き表すことが多いため, 本論文でも以下では微小時間には  $dt$ ,  $w(t)$ の微小時間変化量には  $dw$  を用いる.

#### 4-1-3 確率微分方程式 (Stochastic Differential Equation:SDE)

一次元空間において, 時系列  $x(t)$ の微分  $dx$  が次式に従って動いている時, この時系列  $x(t)$ の動きを伊藤過程という.

$$dx(t) = g(x(t), t)dt + \sigma(x(t), t)dw(t) \tag{4-6}$$

ここに,  $g(x(t), t)$ ,  $\sigma(x(t), t)$ は時間  $t$  と時系列  $x(t)$ の任意の関数である. また,  $dw(t)$ は Wiener過程  $w(t)$ の微小時間変化量であり, 平均0, 分散  $dt$ の正規分布に従っている. 伊藤過程とは一般化した Wiener過程の定数部分を  $x$  と  $t$ の任意関数でより一般化したもの

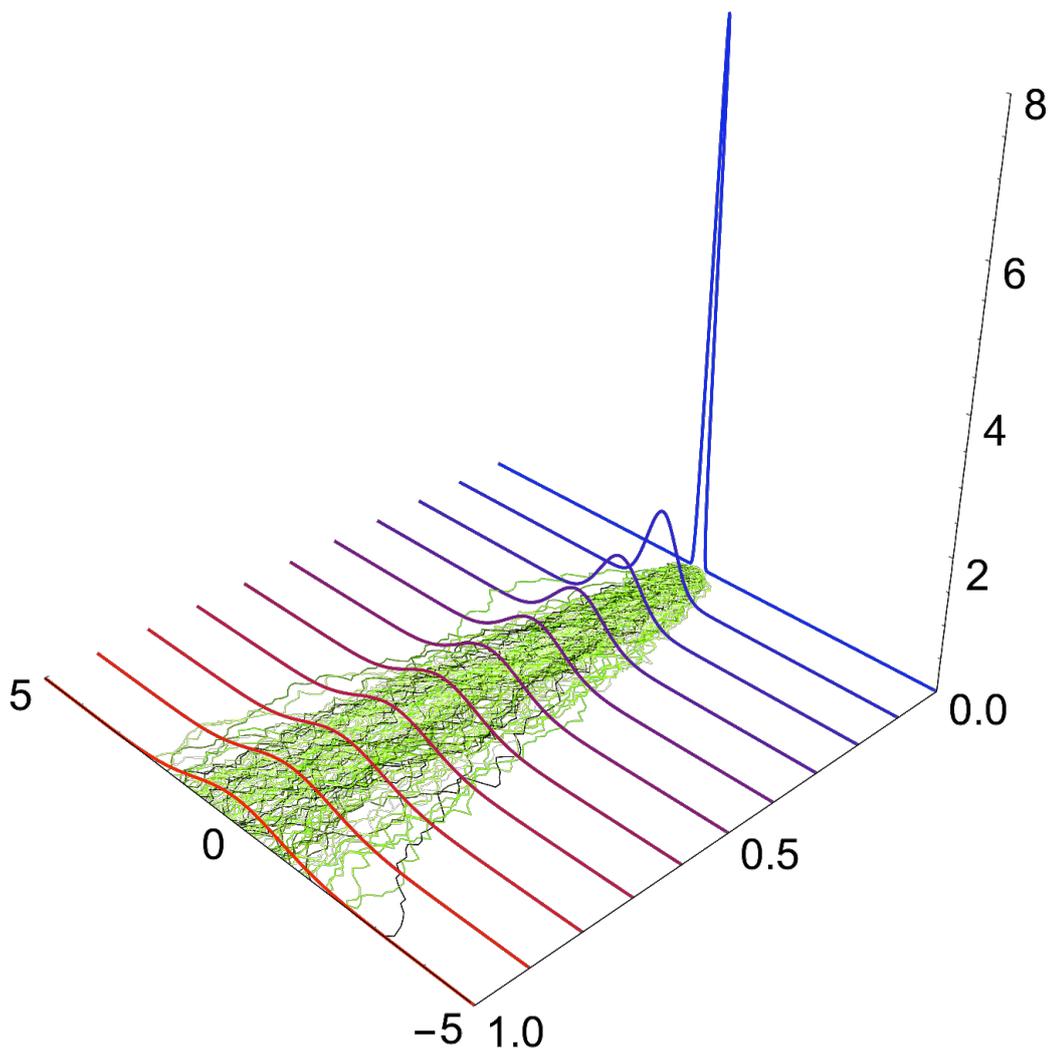


図 4-2 確率微分方程式と Fokker-Planck 方程式の関係。(簡単な例として、確率微分方程式  $dx(t) = \gamma dw(t)$  (Wiener 過程) とそれに対応する Fokker-Planck 方程式の計算例を示す。一本一本の確率経路に対して、それぞれの時間に対応する確率密度関数が描かれており、両者は同一の現象を異なる視点から記述した方程式であることがわかる。)

である。このように、空間座標  $x(t)$  の増分が上式の様子に右辺のドリフト項と確率増分項で表されるとき、上式を伊藤の確率微分方程式という (伊藤1942)。

#### 4-1-4 Fokker-Planck 方程式 (Fokker-Planck Equation: FPE)

伊藤の確率微分方程式から以下に示す Fokker-Planck 方程式が導出される。詳細は付録を参照のこと。

$$\frac{\partial p(r(t),t)}{\partial t} = -\frac{\partial g(x(t))p(r(t),t)}{\partial r} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \sigma(x(t))^2 p(r(t),t)}{\partial r^2} \quad (4-7)$$

これが任意の  $r=r(t)$  について成立するため、 $p(r(t),t)$  は Fokker-Planck 方程式を満たす (保江邦夫 2000)。この Fokker-Planck 方程式と伊藤の確率微分方程式は数学的に厳密に等価であることが証明されている。つまり、ある確率過程  $x(t)$  のひとつひとつの過程を表現しているのが伊藤の確率微分方程式であり、それは決定論的な項とランダム項とで表現されるものである。そして、ある時点（もしくは、空間的なある点）における確率経路の確率密度関数  $p(x(t),t)$  を満たす偏微分方程式が Fokker-Planck 方程式と呼ばれる。

$$dx(t) = \gamma dw(t) \quad (4-8)$$

$$\frac{\partial p(x(t),t)}{\partial t} = \frac{\gamma^2}{2} \frac{\partial^2 p(x(t),t)}{\partial x^2} \quad (4-9)$$

例として、図 4-2 に最も簡単な Wiener 過程 ((4-8)式) が記述する確率経路とそれに対応する Fokker-Planck 方程式 ((4-9)式) の時間発展を計算した結果を示す。この図からも見て取れるように、両者は同一の現象を異なる 2 つの視点から捉えた式であることがわかる。

#### 4-2 降雨流出過程への確率過程論の導入

本節では、まず第 2 章で示した流出解析手法に確率過程論を導入する。具体的には貯留型の流出モデルの入力である降雨時系列がランダム過程であるとして、貯留型の流出モデルを確率微分方程式で表現し、流出高についての Fokker-Planck 方程式を求める。この Fokker-Planck 方程式から流出高の確率密度関数 (不確実性) の時間発展を求める。第 2 章で示したとおり、山田 (1981, 1982, 1988, 1991, 2003) は単一斜面に対して幅広矩形断面を想定し、連続式と運動則を基礎式として、(4-10)式に示す貯留型の降雨流出計算手法を示している。本章でも、第 2 章同様にこの方程式を基礎式として、流出過程における不確実性を評価する基礎式を導出する。

$$\frac{dq_*}{dt} = a_0 q_*^\beta (r(t) - q_*) \quad (4-10)$$

ここに、 $q_*(t)$  は流出高 [mm/h] である。 $r(t)$  は有効降雨強度 [mm/h] であり、流出計算の入力値となる。(4-10)式は一般化された単一斜面からの降雨流出の基礎式であり、第 2 章で詳述した基礎式である。

#### 4-2-1 貯留型の流出計算手法と確率微分方程式 (SDE) の関係

本章では、流出計算の基礎式である(4-6)式と伊藤の確率微分方程式(4-6)式、それに対応する Fokker-Planck 方程式(4-7)式の関係を示す。

(4-10)式は、流出高  $q_*$ に関する一階の常微分方程式であり、差分形式で表現すると以下のようなになる。

$$dq_* = a_0 q_*^\beta (r(t) - q_*) dt \quad (4-11)$$

ここで、入力降雨強度  $r(t)$ が、各時刻において、ある平均値とその平均値周りにホワイトノイズとして微小な乱れ成分  $r'(t)$ が分布していると仮定して、

$$r(t) = \bar{r}(t) + r'(t) \quad (4-12)$$

で与えられるとすると、(4-11)式は以下のようなになる。

$$dq_* = a_0 q_*^\beta (\bar{r}(t) - q_*) dt + a_0 q_*^\beta r'(t) dt \quad (4-13)$$

ここで、(4-13)式を確率微分方程式の形に読み替えれば、以下に示す流出高に関する確率微分方程式を得る。

$$dq_* = a_0 q_*^\beta (\bar{r} - q_*) dt + a_0 q_*^\beta \sigma \sqrt{T_L} dw \quad (4-14)$$

ここに、右辺第一項が決定論的な項、右辺第二項が確率論的な項を表しており、 $dw$ は Wiener 過程に従う時系列  $w(t)$ の微小時間変化量であり正規分布  $N(0, dt)$ に従う。ここで、 $\sigma \sqrt{T_L} dw$ として表現できるのは、流出計算の基本式(4-10)式と Langevin 方程式の比較及び G.I.Taylor の拡散理論から説明することができる。以下にその概要を示す。

(4-15)式に示す一般的な Langevin 方程式と Fokker-Planck 方程式の関係を示す。

$$\frac{dv}{dt} = K(v) + \beta(v)R(t) \quad (4-15)$$

のランダムな揺動力  $R(t)$ はホワイトノイズであり、

$$\langle R(t) \rangle = 0 \quad (4-16)$$

$$\langle R(t) \cdot R(s) \rangle = D(v) \delta(t-s) \quad (4-17)$$

という性質を満たしている。ここに、 $\delta$ はディラックのデルタ関数である。伊藤解析で考えれば、(4-15)式に対応する Fokker-Planck 方程式は、

$$\frac{\partial p(v(t), t)}{\partial t} = -\frac{\partial K(v)p(v, t)}{\partial v} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \beta(v)^2 D(v)p(v, t)}{\partial v^2} \quad (4-18)$$

となる<sup>16)</sup>。また、確率微分方程式との関係は以下のようなになる。

$$dv = K(v)dt + \beta(v)\sqrt{D(v)}dw(t) \quad (4-19)$$

上記の関係性に従って、(4-10)式を改めて Langevin 型の方程式として考え、それに対応する Fokker-Planck 方程式を考えることで降雨流出の基礎式と確率微分方程式の関係を明らかにすることができる。

まず、(4-10)式は Langevin 方程式型で記述すると、

$$\frac{dq_*}{dt} = a_0 q_*^\beta (\bar{r}(t) - q_*) + a_0 q_*^\beta r'(t) \quad (4-20)$$

となる。右辺第一項が決定論的項、第二項が確率論的項である。ここで注意しなければならない重要なポイントは、Langevin 方程式と違い、(4-20)式の第二項自身が揺動力なのではなく、 $r'(t)$ がホワイトノイズであるという点である。一般的な Langevin 方程式では揺動力そのものが速さの次元を時間微分した次元を持つが、(4-20)式中で、これと同意義の量、つまり速さを時間で微分した次元のものを考えるのであれば、(4-20)式の第二項は以下のように書き改められる。

$$a_0 q_*^\beta r'(t) = \underbrace{a_0 q_*^\beta T_L}_{\text{無次元}} \underbrace{\frac{r'(t)}{T_L}}_{\text{速さ/時間の次元}} \quad (4-21)$$

ここに、 $T_L$  は降雨の乱れ成分に関する時定数である。また、 $r'(t)$ はホワイトノイズと仮定しているため、

$$\langle r'(t) \rangle = 0 \quad (4-22)$$

$$\langle r'(t) \cdot r'(s) \rangle = D_r \delta(t-s) \quad (4-23)$$

である。

#### 4-2-2 降雨時系列の微小擾乱成分の拡散係数の決め方

ここで、G.I.Taylor (1921) の拡散理論における速度の乱れ成分を降雨の乱れ成分  $r'(t)$ の問題に置き換えて考える。エルゴード性を仮定すれば、アンサンブル平均と時間平均は等しいので、

$$\langle r'(t) \rangle = \overline{r'(t)} \quad (4-24)$$

が成立し、拡散係数  $D_r$  は、 $s=t-\tau$  として、

$$D_r = \int_0^t \overline{r'(t)r'(t-\tau)} d\tau = \overline{r'^2(t)} \int_0^t R_L(\tau) d\tau \quad (4-25)$$

となる。ここに、

$$R_L(\tau) = \overline{r'(t)r'(t-\tau)} / \overline{r'^2(t)} \quad (4-26)$$

は自己相関係数である。また、図 4-3 に示すような自己相関係数を  $\tau$  について  $\tau=0$  から  $\infty$  まで積分すると、以下のように、 $T_L$  を得る。

$$\int_0^\infty R_L(\tau) d\tau = T_L \quad (4-27)$$

ここに、 $T_L$  は先に述べた時定数である。よって、 $r'(t)$  に関する拡散係数  $D_r$  は時定数  $T_L$  を用いて、

$$D_r = \overline{r'^2(t)} \cdot T_L \quad (4-28)$$

と表せる。また、 $r'(t)$  がホワイトノイズであると仮定しているので、

$$\overline{r'^2(t)} = \sigma^2 \quad (4-29)$$

である。よって、 $r'(t)$  に関する拡散係数  $D_r$  は、

$$D_r = \sigma^2 \cdot T_L \quad (4-30)$$

と表せる。ここに、 $\sigma$  は  $r'(t)$  の標準偏差である。

#### 4-2-3 流出高に関する Fokker-Planck 方程式 (FPE)

以上から、(4-14)式に対応する Fokker-Planck 方程式は、

$$\frac{\partial p(q_*(t), t)}{\partial t} = - \frac{\partial a_0 q_*^\beta (\bar{r} - q_*) p(q_*(t), t)}{\partial q_*} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (a_0 q_*^\beta \sigma \sqrt{T_L})^2 p(q_*(t), t)}{\partial q_*^2} \quad (4-31)$$

となる。また、上記の過程から(4-31)式に対応する確率微分方程式は(4-14)式となることが明らかである。

この(4-31)式が流出高の確率密度関数の時間発展を記述する Fokker-Planck 方程式である。本論文では、システムに入力される雑音が最も不確実な場合を想定してホワイトノイズを仮定し理論展開しているが、雑音が有色雑音の場合でも、高次の

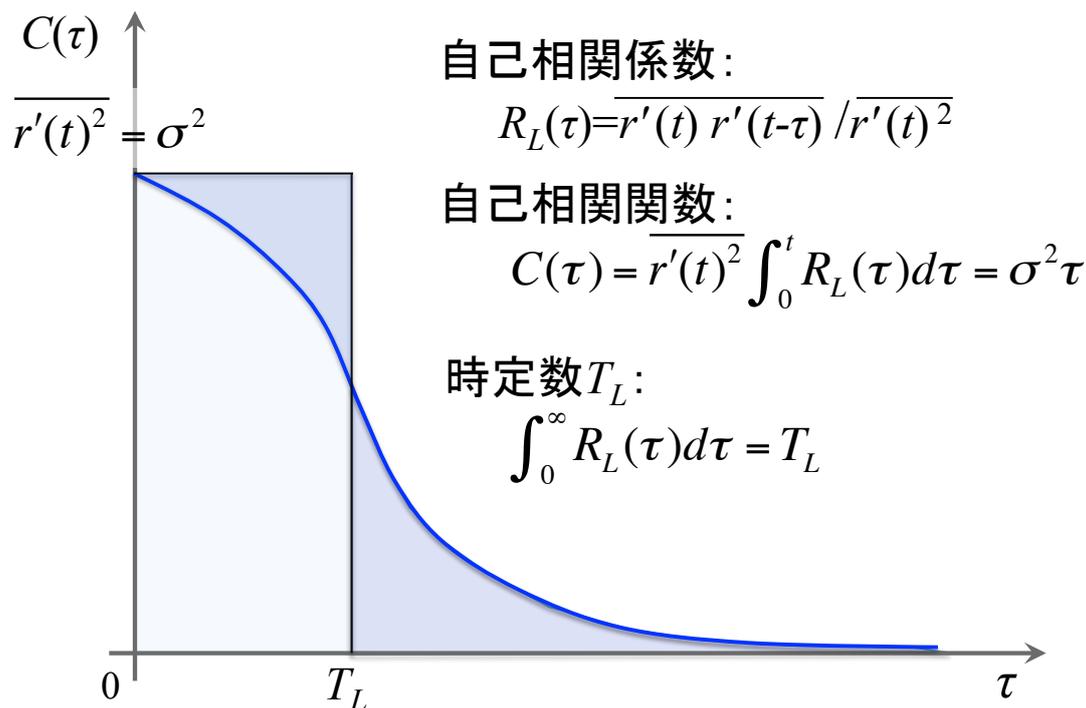


図 4-3 自己相関係数（自己相関関数）と時定数  $T_L$  との関係。（時定数  $T_L$  は降雨の乱れた時系列  $r'(t)$  が無相関になる時間スケールを表している。雑音がホワイトノイズに向かうと、時定数  $\tau = T_L$  も 0 に向かうが、ギザギザした時系列（ホワイトノイズ）は  $\Delta t (\ll \tau)$  毎に無相関で極限を考える。）

Fokker-Planck 方程式を導出することで、本理論の枠組み内でシステムの出力の不確実性を評価できる。

#### 4-2-4 流出高の FPE の解析解

次に、定常状態を考え、流出高  $q_*$  に関する Fokker-Planck 方程式の解析解を導く。(4-31)式において定常状態を考えると、

$$\frac{\partial a_0 q_*^\beta (\bar{r} - q_*) p(q_*)}{\partial q_*} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (a_0 q_*^\beta \sigma \sqrt{T_L})^2 p(q_*)}{\partial q_*^2} \quad (4-32)$$

となる。(4-32)式を積分して整理すると、以下に示す流出高  $q_*$  の確率密度関数  $p(q_*)$  を得る。

$$p(q_*) = P_0 \frac{1}{(a_0 q_*^\beta \sigma \sqrt{T_L})^2} \exp \left[ \frac{1}{a_0 \sigma^2 T_L} \left( \bar{r} \frac{q_*^{1-\beta}}{1-\beta} - \frac{q_*^{2-\beta}}{2-\beta} \right) \right] \quad (4-33)$$

ここに、 $P_0$  は積分定数である。これが、(4-10)式を流出計算の基礎式とした場合の定常状態の流出高  $q_*$  に関する確率密度関数である。(4-33)式はパラメータとして流出パラメータ  $a_0$ ,  $\beta$ , 及び降雨の平均値, 標準偏差で構成される。特に, 流出過程が線形応答の場合, つまり  $m=0$  ( $\beta=0$ ) の場合, (4-33)式は,

$$p(q_*) = P_0 \frac{1}{(a_0 q_*^\beta \sigma \sqrt{T_L})^2} \exp\left[-\frac{(q_* - \bar{r})^2}{a_0 \sigma^2 T_L}\right] \cdot \exp\left[\frac{\bar{r}^2}{a_0 \sigma^2 T_L}\right] \quad (4-34)$$

となり, 正規分布を表す確率密度関数となり, 平均降雨の自乗を指数部に持つ関数をかけ合わせた式で表現される。この付加された指数関数が非線形効果を表している。このことから, 定常状態の場合, 降雨の変動成分(以後, 真値との差, 観測誤差を想定して偏差と記述する)を正規分布で与えたときに, 流出高が正規分布する事が説明できる。

#### 4-3 降雨の不確実性に対する流出高の不確実性の評価

以上を踏まえて, 以下の節では(4-10)式を基礎式とした場合の流出高の確率微分方程式もしくは Fokker-Planck 方程式を用いた不確実性の評価を行う。まずは, 決定論的な流出計算結果(従来通りの流出解析), 確率微分方程式を解くことによって得られる確率密度関数(離散的), Fokker-Planck 方程式を解くことによって得られる確率密度関数を数値計算によって求める。また, 基礎式は非線形常微分方程式である点に着目して, 基礎式の非線形性が確率密度関数に及ぶ影響について検証したので, その結果を示す。

##### 4-3-1 降雨の不確実性に対する流出高の不確実性を求める方法

従来の決定論的な流出解析の結果と比較する形で, 入力の不確定性・不確実性が及ぼす出力の不確かさを評価する手法を示す。以下では, 流出高の確率微分方程式の解及び Fokker-Planck 方程式の解を示す。

図 4-4 に示すのが, (4-10)式によって決定論的に流出計算(従来での流出計算)した結果である。入力降雨強度時系列は, ピーク降雨強度が 50mm/h の 1 周期 2 時間の Sin 波形の降雨を与えている。

図 4-5 には, 流出高についての確率微分方程式を用いた計算結果を示している。計算の試行回数は 1000 回であり, 確率過程論的に求めたハイドログラフが 1000 ケース描写されている。 $\sigma=5\text{mm/h}$  として一定値,  $T_L=1/6\text{h}$  を与えている。 $\sigma$  については図 4-6 のような地上雨量とレーダ雨量の比較図において, 地上雨量を真値と考えた場合のレ

一ダ雨量との偏差から計算している (図 4-7) .

図 4-8 には, 流出高についての Fokker-Planck 方程式から得られる確率密度関数の時間発展を示している. 確率論的な計算においても, 決定論的な計算条件は踏襲しており, 入力降雨強度は, ピーク降雨強度が 50mm/h の 1 周期 2 時間の Sin 波形の降雨を与えている.  $\sigma$  は, 降雨強度の変化に伴って, 時間ないし降雨強度の関数として表せるはずであるが, ひとまずここでは,  $\sigma$  を一定値として考えている.

また, 図 4-9 には, ピーク付近の  $t=5.5\text{hour}$  時点において, 確率微分方程式から得たヒストグラムと Fokker-Planck 方程式から得た確率密度関数の比較を示している.

また, 図 4-9 のヒストグラムと確率密度関数の比較からも確率微分方程式と

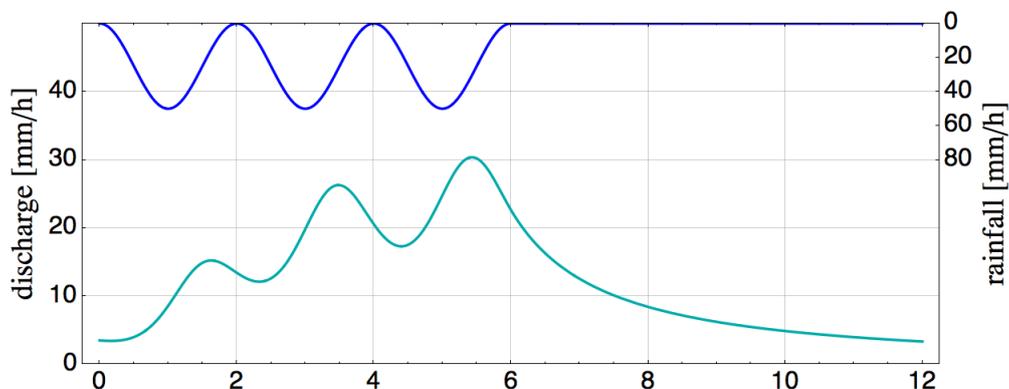


図 4-4 決定論的に求めたハイドログラフ. (従来の計算手法を用いている. 入力降雨には Sin 波形を用いており, 最大降雨強度 50mm/h である.)

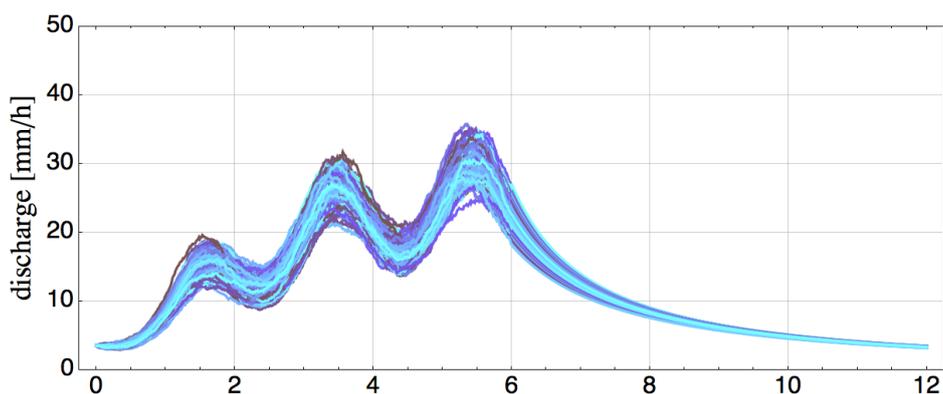


図 4-5 SDE を解いて求めたハイドログラフ (図 4-4 と同様に Sin 波形を入力降雨として与えているが, 入力降雨強度に微小な乱れ  $r'(t)$  としてホワイトノイズが加わった降雨強度を入力として SDE を解いている (SDE の計算試行回数  $N=1000$ ,  $\sigma=5\text{mm/h}$ ,  $TL=1/6\text{h}$  である.))

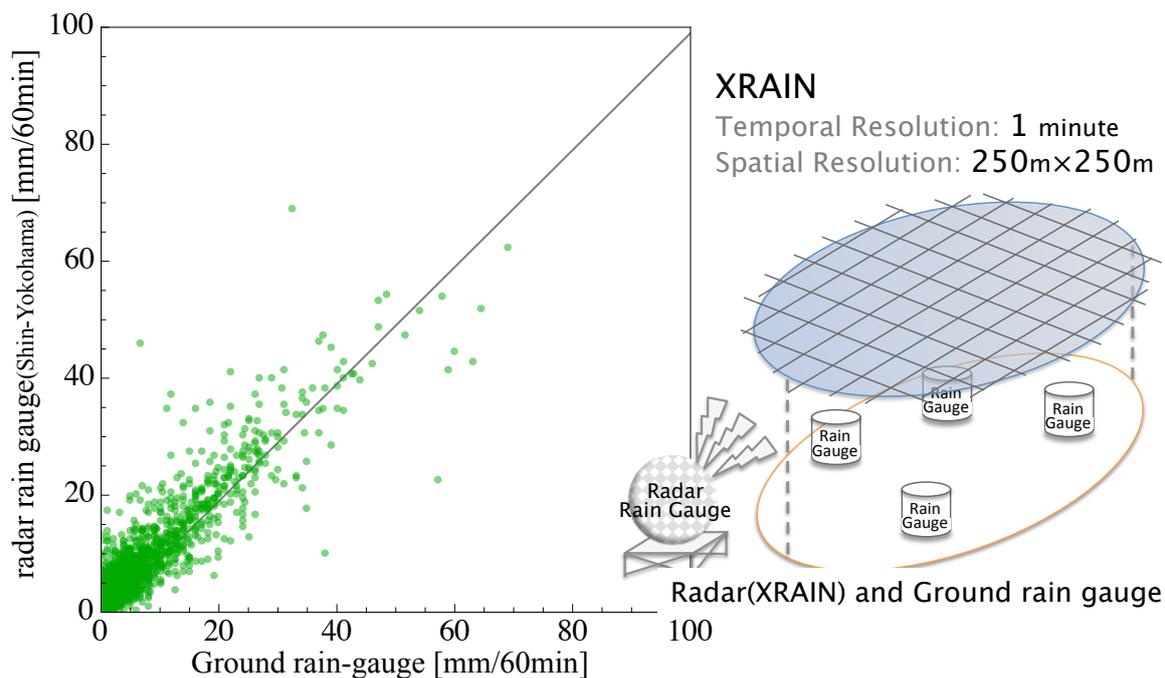


図 4-6 地上雨量計と XRAIN 雨量強度の比較. (右のポンチ絵は、両雨量データの観測形態の概念図であり、地上雨量計と地上雨量計が位置するレーダのメッシュ雨量との比較をしたものがプロットされている.)

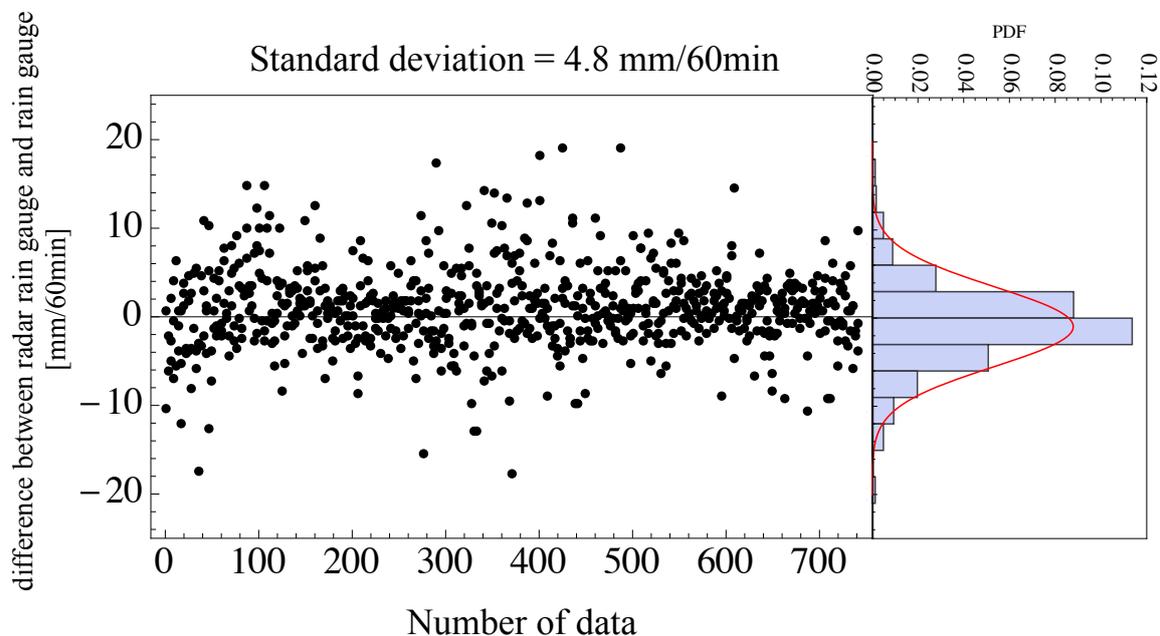


図 4-7 地上雨量で観測された降雨強度と XRAIN で観測された降雨強度の差のプロット. (データは図 4-6 のデータを用いている)

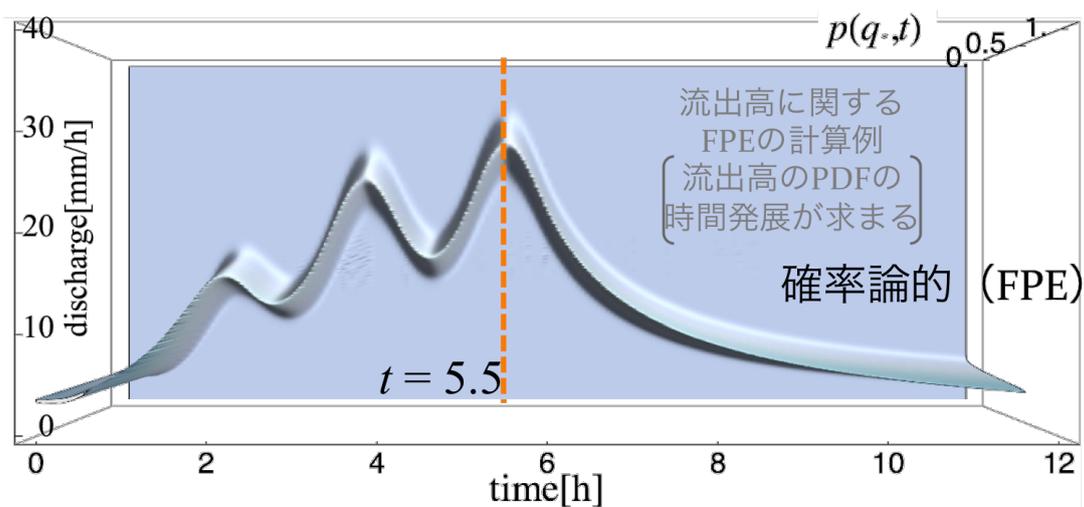


図 4-8 FPE を解いて求めた流出高に関する確率密度関数の時間発展。(初期条件として極めて分散の小さい正規分布を与え、降雨の標準偏差  $\sigma$ 、時定数 TL は一定値として FPE を解いている.)

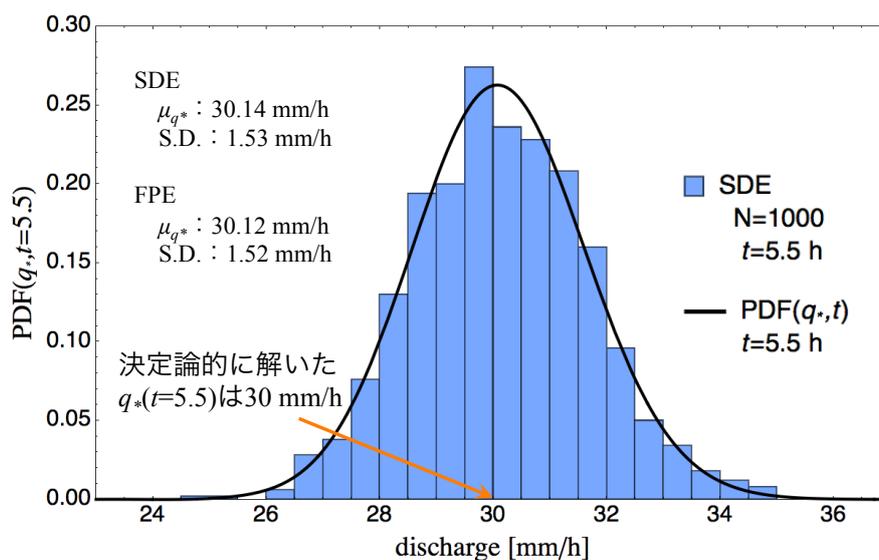


図 4-9 確率微分方程式 (SDE) から求めたヒストグラムと Fokker-Planck 方程式 (FPE) で求めた確率密度関数の比較。(t=5.5hour 時点の  $q^*$  のヒストグラムで、SDE と FPE の計算結果から得られる平均と標準偏差はそれぞれ、SDE : 平均 30.14mm/h, 標準偏差 1.53mm/h, FPE : 平均 30.12mm/h, 標準偏差 1.52mm/h であり、両者の差は極めて小さい.)

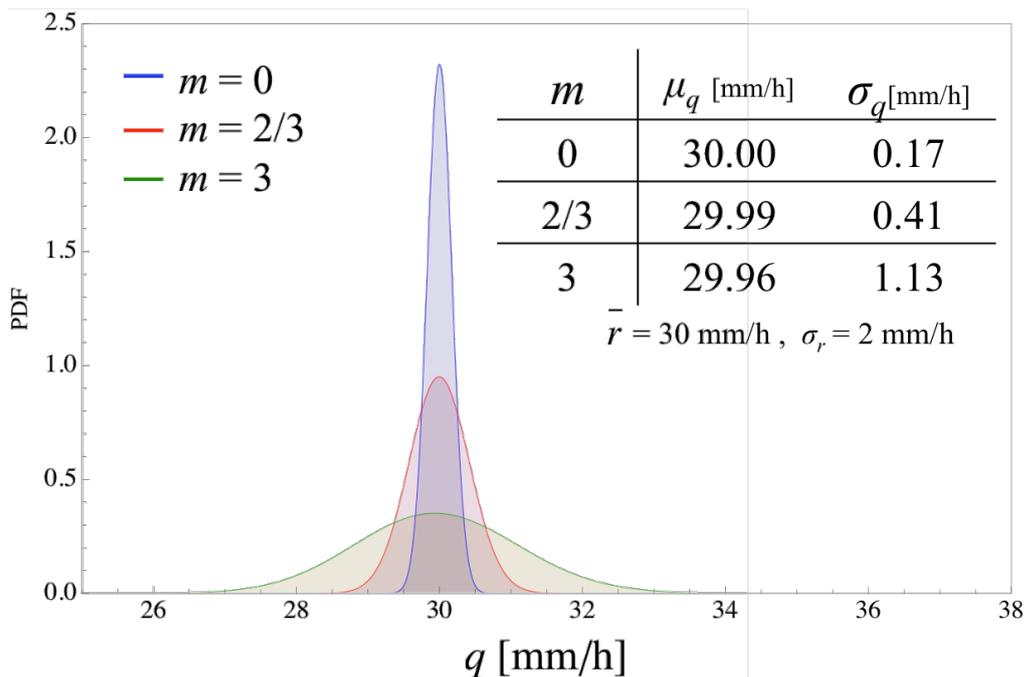


図 4-10 抵抗則と流出高の確率密度関数の関係. 抵抗則が大きくなるに従って, 確率密度関数の裾が広がり, 流出高の不確実性は大きくなる. つまり, 流出現象の非線形性が強くなると, 流出高の不確実性は高くなる.

Fokker-Planck 方程式が同一の現象を記述していることがわかる. 常微分方程式型の貯留型の流出計算手法を確率微分方程式として解いた計算結果と理論的に導き出された確率微分方程式に対応する Fokker-Planck 方程式を解いた解が一致しており, 流出過程を確率過程と考えた場合に容易に任意時間の確率密度関数を求められる事がわかる.

#### 4-3-2 流出計算手法の非線形性と不確実性の関係

本節では, 抵抗則, 入力降雨の平均値, 入力降雨の偏差のそれぞれによってどのように変化するかを検証する. (4-10)式等のパラメータは, 流出パラメータ  $a_0$ ,  $\beta$ , 及び降雨の平均値, 標準偏差で構成されるが, 本章では流出パラメータ  $a_0$  に内包される土壌特性値は一定値を与え, 流出パラメータ  $a_0(k_s, w, i, L, D, m)$  は抵抗則を変数とする  $a_0(m)$  として取り扱うため, 抵抗則, 入力降雨の平均値, 入力降雨の偏差の三項目について検証する.

まず, 入力降雨の平均値=30mm/h, 入力降雨の偏差=2mm/h と固定して, 抵抗則を  $m=0, 2/3, 3$  とした場合の流出高の確率密度関数を図 4-10 に示す. 入力降雨に不確実性がある場合, 抵抗則  $m$  の値によって流出高の確率密度関数の裾の広がりが大きく

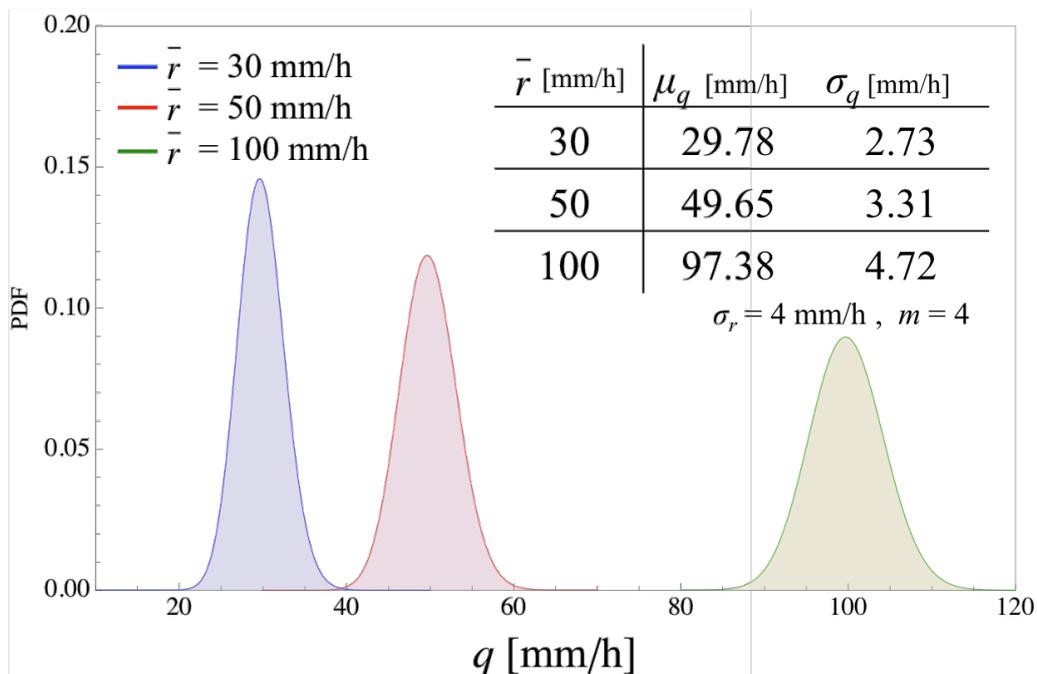


図 4-11 降雨の平均値と流出高の確率密度関数の関係。降雨強度の増加に伴って、流出高の不確実性が高くなる。

なる事がわかる。例えば、抵抗則  $m=0$  の場合、つまり降雨流出モデルが線形の場合、入力降雨の偏差=2mm/h に対して、流出高の標準偏差は約 0.17mm/h である。これに対して、 $m=2/3$  のとき流出高の標準偏差は約 0.42mm/h、 $m=3$  のとき流出高の標準偏差は約 1.13mm/h である。つまり、流出計算における非線形性が強くなればなるほど、流出高の不確実性は大きくなるといえる。

次に、入力降雨の偏差=4mm/h、抵抗則  $m=4$  と固定して、入力降雨の平均値を 30, 50, 100mm/h とした場合の流出高の確率密度関数を図 4-11 に示す。図 4-11 より、入力降雨の降雨強度が強ければ強いほど、流出高の確率密度関数の裾は広がり、降雨に対する流出高の不確実性が大きくなることがわかる。例えば、降雨強度が 100mm/h の場合、入力降雨の偏差=4mm/h に対して、流出高の標準偏差は 4.41mm/h である。抵抗則  $m=4$  という不飽和土壌中の流れ場においては、流出高の不確実性の方が、降雨の不確実性より大きくなる可能性がある。

次に、入力降雨の平均値=30mm/h、抵抗則  $m=4$  と固定して、入力降雨の偏差を 1, 2, 3mm/h とした場合の流出高の確率密度関数を図 4-12 に示す。図 4-12 より、入力降雨の偏差が大きくなればなるほど、流出高の確率密度関数の裾が広がり、標準偏差が大きくなることがわかる。降雨の偏差に対する流出高の標準偏差を見ると、降雨の

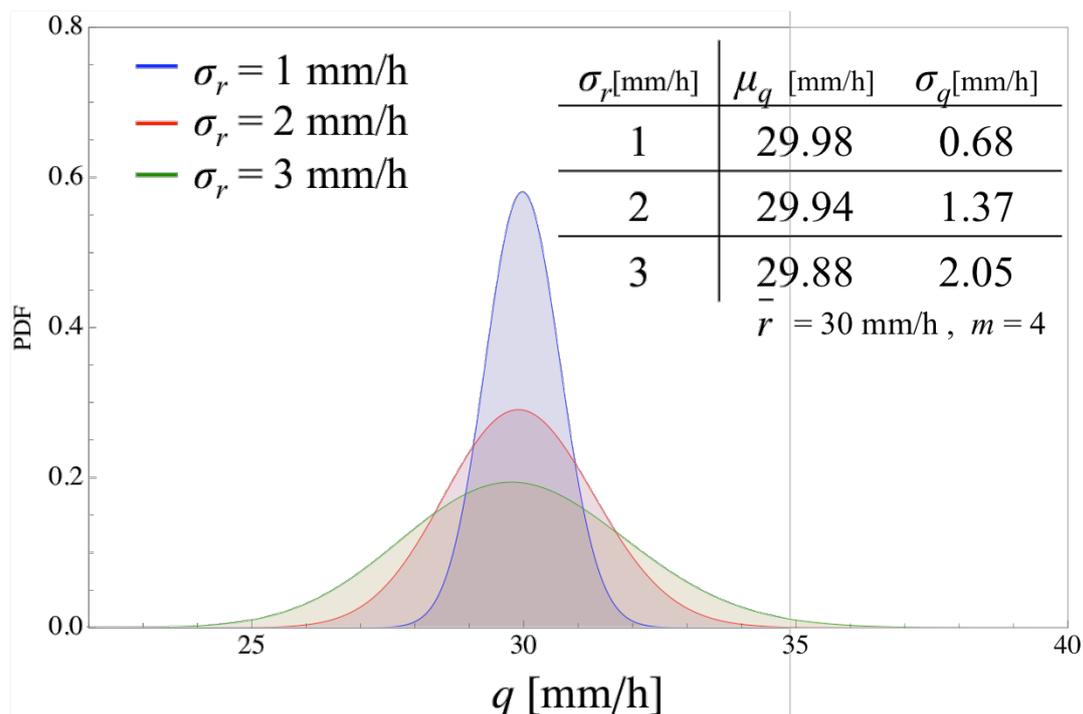


図 4-12 降雨の不確実性(偏差)と流出高の確率密度関数の関係。降雨の不確実性(偏差)が大きくなるとともに、流出高の不確実性も大きくなる。標準偏差の増加割合に差はなかった。

偏差=1mm/h に対して流出高の標準偏差は約 0.68mm/h であり、約 31.3%の差がある。同様に降雨の偏差=2, 3mm/h に対する流出高の標準偏差は、約 1.37, 2.05mm/h であり、それぞれ約 31.3%, 31.4%の差である。

#### 4-3-3 降雨の不確実さの度合いと時定数が流出高の不確実性に及ぼす影響

求めた(4-14)式の確率微分方程式もしくは、(4-31)式の Fokker-Planck 方程式から、流出高に関する確率密度関数の時間発展を得ることが出来ることは前節でも示した。ここでは、入力降雨の偏差、時定数のそれぞれによって流出高の不確実性どのように変化するかを検証する。(4-10)式等のパラメータは前節と同様に、流出パラメータ  $a_0$ ,  $\beta$ , 及び標準偏差, 降雨強度の乱れた時系列の時定数  $T_L$  で構成されるが、本章でも流出パラメータ  $a_0$  に内包される土壌特性値は一定値を与え、流出パラメータ  $a_0(k_s, w, i, L, D, m)$  は定数として取り扱う。特に断りがない場合、 $a_0$  及び  $\beta$  に内包される抵抗則  $m$  は流出現象の非線形性を考え  $m=4$  を与えた。また、時定数  $T_L=1\text{h}$  として与えた。

本章では入力降雨の偏差が時間的に変化しないと仮定して、流出高の不確実性(確

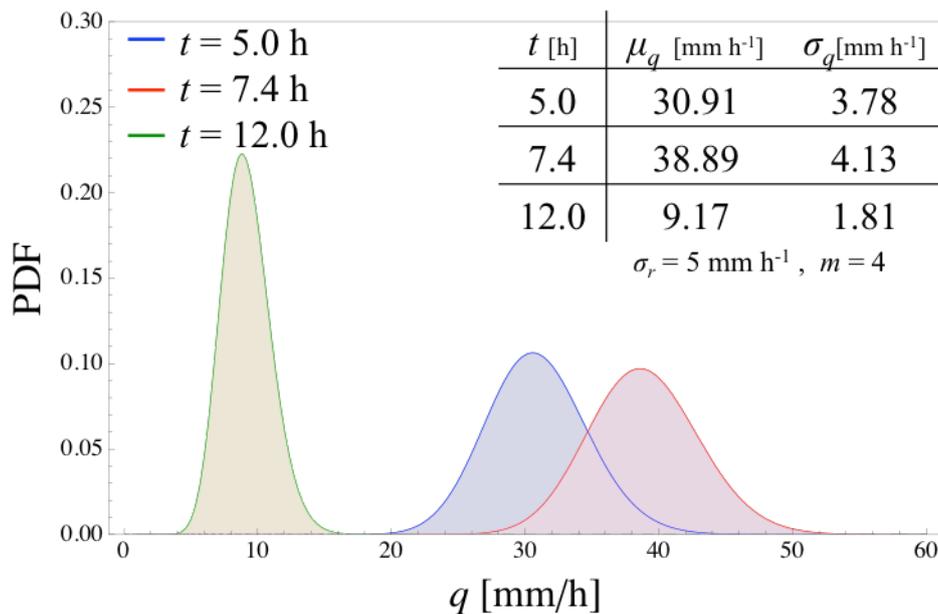


図 4-13 流出高の確率密度関数の時刻による違い ( $m=4$ ,  $\sigma=5 \text{ mm h}^{-1}$ ;  $t=5, 10, 15$ ). 洪水ピークまでは、流出高の確率密度関数の分散は大きくなり続け、ピーク時に分散は最大となる。その後降雨終了とともに流出高の確率密度関数の分散は小さくなり、分布の裾は狭まる。

率密度関数) の時間発展による変化、時定数  $T_L$  の程度が流出高の不確実性 (確率密度関数) へ及ぼす影響を検証した。流出高の不確実性は、降雨強度、抵抗則、 $r'(t)$  の標準偏差によって決まることを(4-33)式の解析解を用いて前節で示したが、本節では、定常状態の解析解を用いた計算ではなく、(4-31)式を数値的に解くことで流出高の不確実性の時間発展を求めた。

図 4-4、図 4-5、図 4-8 に示すのは、(4-10)式を用いて決定論的に流出高を計算した結果と、確率微分方程式(4-14)式を用いて確率論的に流出高の不確実性を計算した結果 (時刻によらず  $\sigma_r=5 \text{ mm h}^{-1}$  で一定) である。及び、流出高の Fokker-Planck 方程式(4-31)式を確率論的に解いた結果 (時刻によらず  $\sigma_r=5 \text{ mm h}^{-1}$  で一定で確率微分方程式と同条件) である。このように、(4-31)式を用いることにより、流出高の不確実性の時間発展を得ることが出来るのは前節で示した通りである。本節では、決定論的な計算結果のみならず、確率論的な計算結果の特徴について検証する。

図 4-13 は、ハイドログラフの立ち上り ( $t=5$ , 青), ハイドログラフのピーク ( $t=7.4$ , 赤), ハイドログラフの減水期 ( $t=12$ , 緑) の流出高の不確実性を示している。時間発展とともに確率密度関数の裾の広がり大きくなる。つまり、分散は大きくなり降