

第5章 結論と今後の課題

5-1 本論文で得られた成果

雨粒がいつどこにどれほどの数着地するか、その後どのような経路をどれほどの時間をかけて流れ、河川水となるかは、一粒一粒の雨粒の質量と組成、経路の追跡、空中や着地後の結合、そしてその後の経路を観測誤差なしに、限りなくほとんど連続的に測ることで不確かさなく明確に知りうると考えられる。しかし、現状の技術では不可能であるし、現在の我々の知識と技術ではそのような未来が来ることはなかなか考えづらい。

我々が明らかにしたいスケールによっては、観測精度は格段に上がっており、時間的・空間的に密な観測体制が築かれつつある。特に、降水量（主に降雨量）の観測体制、観測精度は、XバンドMPレーダネットワークの構築、フェーズドアレイレーダの技術開発と実証的研究等の進歩から、他の水文データと比較すると、近年、我々が認識できる情報が格段に増えている。他方、川の流量観測（流速、水深、河道断面形状）についても、ここ10年来目覚ましい発展を見せており、ADCP（Acoustic Doppler Current Profiler）による超音波のドップラー効果を用いた観測手法により、従来から行われている浮子による流量観測と比較すると、時間的・空間的に高密度に観測できるようになっている。

このように、水文データの観測値について我々が知り得る情報量は増えつつあるし、観測する必要がある項目もわかりつつある。これらは先人の研究者たちが成し遂げた、一言では言い表すことができない素晴らしい功績であり、それらを礎に、我々は発展しなければならないが、それでもなお、本章の冒頭で論じたように、不確かさを除外して議論してよい状態ではない。

このような「わからなさ」は、本論文で取り上げた流出過程において重要な問題であり、特に河川流量や河川水位といった水文データは、大規模な洪水時において避難

判断の意志決定を下す人々にとって重要な情報である。堤防が破壊される、もしくは越水する可能性がある大規模洪水時には、もちろん、判断の決め手として意思決定者の経験的な要素や事前のトレーニング、シミュレーションが重要なウェイトを占めることは間違いないが、それでも科学的に、破堤が、もしくは越水が「どれくらいの可能性で起きるか」を示すことは重要である。この「可能性を示す」ために確率という概念が有用で、意思決定時には有益な知見を与える。

このような背景のもとに、不確実性を定量的に評価し得る手法の提案が本論文の主題であり、その重要な基礎的な理論として、確率過程論を用いた。この確率過程論の概要に関しては付録を参照されたい。Wiener 過程 (Brown 運動)、確率微分方程式、Fokker-Planck 方程式などの確率過程論の重要な概念とその数理化を詳述している。第4章では、確率過程論を導入した流出解析手法を示すとともに、不確実性評価のための理論的な枠組みを示した。また、前述の堤防破壊や越水可能性を議論する枠組み、加えて超過洪水ピーク流量の決定手法との関係性を示している。

以下では、各章で得られて結果を列挙する。

第1章では、降雨流出過程において、現状の観測技術や科学的知見からわかっている範囲の「わからなさ」の存在を指摘した。また、水文学の歴史を解説しつつ、1930年代からの数学的統計、確率理論、情報理論の著しい発展を受けて、防災工学や水資源開発のための水文量の推定、予測、調整に際する不確実要因の解明が望まれたこと、確率水文学という概念、分野が登場したという、水文過程 (降雨流出過程) の研究分野で不確実性が着目されるようになった時代背景を簡単にまとめた。また、一般的な不確実性の定義、水文学における不確実性の定義、決定論的思考と確率論的思考 (確率過程論的思考) の分類を Kisiel (1969) と山岡 (1970) の論文をレビューする形で解説した。加えて、近年の水文データの観測技術の進歩と人間の認識の限界について触れ、本論文で取り扱う「確率過程論を流出解析に導入する試み」の位置づけを明確にした。

第2章では、山腹斜面における降雨流出過程の最小スケールを単一の斜面であるとして、連続式と一般化された運動則から導いた集中定数系方程式：単一斜面における降雨流出の基礎式の導出過程を示した。また、種々の流出パラメータの物理性について、kinematic wave 法と不飽和浸透理論の基礎式 (1次元の Richards の式) を比較することでパラメータの物理性の根拠が示されることを論じた。加えて、単一斜面における降雨流出の基礎式を用いて、2つの流出計算手法を示した。一つは、呉・山田によって示された Green-Ampt 理論を鉛直浸透の基礎式としている「鉛直二層流れを考慮した流出計算手法」、もう一つは、各層の土壌内水位についての連続式と斜面方向

の基礎式を組み合わせた「多層流れを考慮した流出計算手法」である。後者は、本論文で新しく提示した計算手法であり、前者との違いは、鉛直方向に任意の層数の流出成分を考慮できる点にあり、これは遅い流出成分（イメージとしてはB層やC層）を考慮でき、ハイドログラフ逡減部の外形および、ハイドログラフピーク付近の流出高を適切に見積もることができるという事である。また、草木ダム流域を対象として過去19の洪水イベントを用いて、流出パラメータの推定を行い、クロスバリデーションをすることで最適なパラメータセットを決定した。その結果、洪水のスケール毎に適切なパラメータセットを設定することが望ましいという結果を得た。また、多層流れを考慮した計算手法では、モデル構造の選択も重要であるため、2層モデル、3層モデルの構造を定義して、それぞれにおける特徴を比較した。結果として、草木ダム流域では2層流れの構造で十分な再現性を発揮することがわかった。本章の最後には、地下水流れ（洪水時の各流出成分からはパラメータがワンオーダー程度小さな値）を考慮した流出計算を行い、最下層の地下水流出成分を考慮する場合としない場合で計算結果を比較した。その結果、考慮した場合に無降雨時の再現性が格段に向上し、提示した流出計算手法で長期流出・短期流出の両者を表現可能であることを示した。

第3章では、降雨の空間的な分布（空間的な不確実性）が流出量に及ぼす影響を明らかにするため、サブ流域の流域平均降雨量を流域全体の総降雨量一定という条件のもとでハイドログラフを入れ替えて計算し、空間的な雨の降り方が流出量のボリュームにどのような影響を与えるかを検証した。利根川上流域を対象として、全流域を奥利根、吾妻、烏、神流の4つの流域に分割して降雨の空間分布と流出量の関係を明らかにした。同流域で既往最大洪水であるS22年9月洪水（カスリーン台風）時の降雨データを用いて、上記の検証を行った。流出計算は、斜面計算と河道計算を行い流域での遅れ時間も考えることで、小流域毎のピーク流量の生起時間のずれを考慮した。その結果、直感的に当然の結論であるが、流域下流端の懸案地点から小流域までの位置関係（流下距離）とピーク流量の生起時間に強い相関が見られた。すなわち、懸案地点に相対的に近い流域のピーク流量の生起時間が早く、懸案地点から遠い流域のピーク流量の生起時間が遅い場合、懸案地点でピーク流量の生起時間が重なり、相対的に最大流量をもたらす結果となった。直感的に想定できる結果であるものの定量的に明らかに出来た点にこの結果の意義があると考えている。また、流域内のある特定の地点のみに強い降雨域が発生した場合に、下流懸案地点のピーク流量にどの程度の影響をもたらすかを検証した。その結果、対象とした特定の流域の総降雨量が3%増加した場合に流域全体の末端でのピーク流量は12%、6%増加した場合に15%増加する

という結果を得た。これは流域治水の観点からすると、面的な対策のみならず点で考える対策の有用さを示唆するものであり、水工構造物の計画に際して有益な知見を提供するものであった。

第4章では、流出解析に確率過程論を導入し、入力データの不確実性を評価するために、確率過程論の概要を解説した。具体的には、Brown運動の数理化であるWiener過程の定義と確率過程の意味、それを基礎として展開されるIto calculusを解説した。また、Brown粒子の運動を記述したLangevin方程式とIto calculusによって確率解析学的な微積分の規則が導入された確率微分方程式の概念とそれに対応するFokker-Planck方程式の存在を示した。加えて、Fokker-Planck方程式の導出は、確率微分方程式から行えることを示した。また、最もシンプルな確率過程であるドリフトを持たない（時間的に拡散するのみ）Wiener過程の確率微分方程式とFokker-Planck方程式の解を比較して、両者が同一の確率過程を表現する異なる方程式系であることを示した。

加えて、流出計算の入力データである降雨時系列データが時間的にランダムな要素を含む確率過程であると考えることで、流出計算の基礎式が確率微分方程式で記述できることを示した。この際、右辺第二項に相当するランダム項の拡散係数は、G.I.Taylorの拡散理論を応用することで、降雨時系列の微小擾乱成分の標準偏差 σ と時定数 T_L で表わされることを示した。従来決定論的に議論されていた流出モデルの確率微分方程式型で表現形式の提示も本論文の一つの結論であるが、加えて、本章で示した通り、確率微分方程式とFokker-Planck方程式の対応関係から、流出高に関するFokker-Planck方程式を導出した。これにより、流出高の確率密度関数の時間発展を理論的に求めることが可能となった。当然、流出高に関する確率密度関数とFokker-Planck方程式の計算結果は同条件のもとでは、同じ結果を示した。また、流出高に関するFokker-Planck方程式が定常時に解析解を持つことを示し、その解析解を用いて、各種の流出パラメータの変化と得られる確率密度関数の関係性について検証した。さらに、基礎式である流出モデルが線形モデルの場合($m=0$)の場合、Fokker-Planck方程式の定常分布は、正規分布を示す確率密度関数に酷似した関数形であることを示した。また、得られた流出高の確率密度関数を確率密度関数の変換公式を用いて、流量や水位の確率密度関数に変換し、得られた流量の確率密度関数を超過洪水決定手法へ応用した。さらに、総合確率法の数学的解釈において、本研究で得られた洪水ピーク流量の確率密度関数が持つ意味を明らかにした。また、水位の確率密度関数が理論的に得られることを示すとともに、越水確率の算出や、堤防の破壊確率と併せたリスク評価への応用可能性を示した。本論文では、堤防の破壊確率の算出やそれと水位の確率密度関数を用いた

信頼性解析についての細かい計算は掲載しないが、その理論的枠組を示すとともに、今後は提示したフレームワーク内の各パーツの精度向上を図ることで、より信頼度の高いリスク評価が河川水工分野で行うことができる可能性を示した。

5-2 今後の課題

第4章で示した著者がイメージする洪水時のリスク評価の枠組みの中で、本論文で示した成果はこの理論的枠組みの中の外力の試算に関する部分であることは先にも述べた。当然、本論文の結果が全てではなく、枠組みの中で、今後もセクションごとの精度を高めていく必要があるという点が課題として残っている。

外力のセクションで言うと、本論文では斜面計算と河道計算から構成される流出解析の中で、斜面計算の外力に微小な擾乱がある場合の流出高の不確実性を求めたのであった。決定論的な流出解析では河川水位は、河道計算を介して求められるが、本論文で示した確率過程論的な解釈では、計算された流出高が対象とする流域末端で得られる値であると考えて、流域面積を与えて流量換算し、適当な河積を考える事で、Manningの平均流速公式を確率密度関数の変換式として水位の確率分布を求めた。この点は決定論的な流出解析の枠組みと比較するとラフな過程を辿っていると言わざるを得ない。つまり、地表に降った雨が河川水となった後も、河道内から様々な力を受け、不確実さは大きくなる（もしくは小さくなる可能性もある）ことが考えられるため、この問題についても、本論文と同様に確率過程論的に考えるのであれば、時間のみならず、空間的な不確実要因を考慮できる確率偏微分方程式型のシステムを考えて、不確実さを評価する必要があるであろう。この部分に関しては、著者もまだ取り組んでいない研究課題であり、理論体系づくりが望まれるところである。

以上を踏まえると、今後は、ひとつひとつのセクションの精度を高めるためにも、より一層の“物理現象の観測”が重要なキーワードとなってくると考えている。例えば、単に流量観測と言っても、日本のような急流河川の洪水時に観測できる場所は限られているし、時間的・空間的に密な観測は現状では難しい。しかし、河川管理の観点からも重要である洪水時の河床変動形態の解明や洪水ピーク流量の算出に関しては、ADCP (Acoustic Doppler Current Profiler) による超音波のドップラー効果を用いた観測手法などの目覚ましい発展によって精力的に研究が行われており、徐々に明らかになりつつある。

参考文献

山岡勲, 1970: 水文学における確率過程, 水工学に関する夏期研修会講義集, 6, B.11.1-B.11.18.

C.C.Kisiel, 1969: Time series analysis of hydrologic data, Advances in Hydroscience, (Volume 5-1969) Edited by V. T. Chow, Academic press.

謝辞

本研究を取りまとめるにあたり、終始懇切なる指導を賜りました中央大学理工学部教授山田正先生には、厚くお礼を申し上げます。学部生の頃から6年間にわたり、山田研究室という最高の学びの環境に身をおくことができ、学問や研究のみならず人間関係や社会性など多くの事を学ぶことができました。ひとりの人間として大きく成長することが出来たと感じております。言葉で申し尽くせるものではありませんが、ここに深甚の感謝の意を表します。

また、審査の過程で随時適切なるご助言・ご意見を頂きました中央大学理工学部教授鎌倉稔成先生、同じく檜山和男先生、同じく平川大貴先生、中央大学研究機構教授福岡捷二先生、埼玉大学教授田中規夫先生には、特段のお礼を申し上げる次第です。今後ともよろしくご指導賜りますようよろしくお願い致します。

北海道大学准教授山田朋人先生には、何編もの査読付き論文の執筆に際し、本研究の重要性を指摘していただくとともに、数多くの貴重なご意見を頂きました。ここに記して謝意を表します。

富山県立大学准教授手計太一先生には本研究の遂行にあたり、研究に対するご助言のみならず、著者の研究室の先輩として、私生活においても多くのご指導を賜りました。また、研究室の他の先輩方との交流の場を数多く設けていただきました。東北大学助教呉修一先生には、本研究の基盤となる流出モデリングの構築において、先生が緻密に作りこまれたプログラムを少なからず参考にさせて頂きました。お二人の先生に厚くお礼申し上げます。

中央大学理工学部助教銭潮潮先生には、本学位論文を取りまとめるにあたり、内容に対して有益なご指摘をして頂くのみならず、学内予備審査会や公聴会の日程、書類の作成など右も左もわからない著者を全力で支援して頂きました。また、山田研究室助手寺井しおり氏には、研究室での生活や学会参加の手続き、学生の指導法など多岐にわたり教えを頂きました。ここに感謝の意を表します。

また同期の王昭雯氏，博士課程後期課程の先輩佐々木翔太氏には，研究に対する率直な意見を述べて頂くとともに，著者の公聴会前には，本学位論文執筆に集中できるよう研究室業務や後輩指導に関して必要以上に負担して頂くなど，格別の配慮をして頂きました．ここに厚くお礼申し上げます．

研究室の後輩として本研究の遂行に尽力いただいた修士2年清水雄太くん，洪水観測では実質的なリーダーとしてまとめてくれた同じく諸岡良優くんには，著者の未熟さから多大な迷惑をおかけするとともに，数々の無理難題を強いてしまいました．ここに真摯にお詫びするとともに，感謝の意を表します．特に諸岡くんは，私の愚行を反面教師とし，今後の研究室活動，後輩指導に尽力して頂ければと思います．また，研究室の学生諸兄には多大なるご支援頂きました．ここに全ての方々を挙げさせて頂くわけには参りませんが，心よりお礼申し上げます．

最後になりますが，いつも私を支えてくれた両親，祖母，叔父に感謝いたします．また，この3年間，勝手気ままな私を見放さず献身的に支えてくれた足助美岐子氏に深く感謝します．

付録A 鉛直浸透・斜面流出機構を分離した流出計算手法の長期流出解析への適用性について

Type-C 構造は今回検証した構造の中で最も遅い流出成分を考慮したものであり、洪水時の再現性に関しては Type-A,B の再現性と変わらず良好であった。

本章では、前章で記述した洪水時のパラメータ推定値を用いて長期流出への適用性について検証した。具体には、Type-C と Type-C に更に一層加えた Type-C' と定義した構造を用いて長期流出解析を行い、結果を比較した。対象とした流域は前章同様、草木ダム流域である。本章の計算では雪の影響を無視出来ると考えられる降雪期間、融雪出水期間を除く 5 月～11 月までを対象として解析を行った。また、Type-C' の最下層は地下水のような極めてゆっくりとした水の流れを表現するものと考え、パラメータは Type-C の最下層のパラメータを一律 1/10 倍として与えた。

Type-C による再現計算結果の一例を図 A-1 中段の青破線として示す。流出高のピーク値が 1mm/h を超える洪水、もしくはそれに匹敵するような比較的大きな洪水に着目すると、ピーク値は極めて良好に再現できている。しかしながら、計算期間を通して見ると、低水時の再現性が悪い事がわかった。実測の総流出高は 1284mm であるのに対し、計算の総流出高は 897mm であり、計算値は実測値の 70%程度であった。これは、層構造が少なく、実際の流出現象では更に深い層から浅地下水のような遅い流出成分が存在しているものと考えられる。

そこで、Type-C 構造の鉛直機構に対して、更に遅い流出成分を考慮した構造を用いて再度計算を行った。この構造を Type-C' と定義する。

Type-C' の結果を図 A-1 下段に赤破線として示した。図 A-1 下段の青破線は中段に示したものと全く同じであり Type-C 構造による計算結果である。また、図 A-1 下段

の茶一点長鎖線は、Type-C'構造の最下層からの流出高である。Type-C 構造では再現できなかった無降雨期のハイドログラフの再現性が向上している事がわかる。最下層を流れる遅い流出成分は、解析の対象とした期間においてほとんど変動がなく、洪水時のピーク値に大きな影響を与えていないが、低水時の再現性に関して大きく影響を与えており、Type-C 構造と比較して、再現性は大きく向上した。しかしながら、蒸発散の影響は各層のパラメータに内包される形で取り扱っているため、今後の課題として、表面の蒸発、植物を介した各層からの蒸発等を考慮する事を考える。

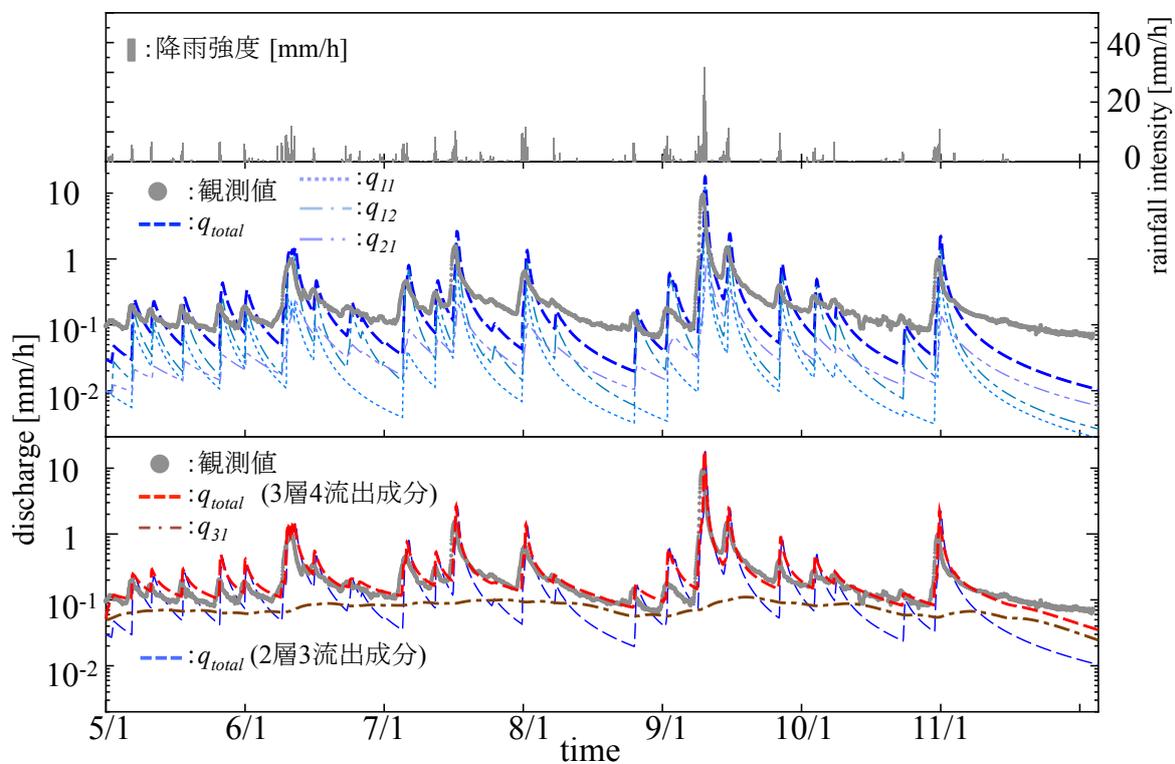


図 A-1 Type-C の下層に更に一層加えた Type-C' を用いた長期流出計算の結果。(図中上段はハイドログラフ，中段は Type-C による長期流出計算結果，下段は Type-C' を用いた長期流出計算の結果である。中段と下段の比較では，無降雨期間のハイドログラフの再現性が格段に向上していることが見て取れる。)

付録B 降雨の多様性とダムの持つ治水効果

手法2による計算結果を踏まえ、S22年9月洪水当時に、吾妻川流域に八ッ場ダムが存在したと仮定した場合の流出解析の結果を示す。本節では、吾妻川流域に八ッ場ダムが存在した場合、ダムの持つ洪水調節機能がどの程度であるかを定量的に評価する事を目的とする。

ダム操作手法は現在予定されている放流方式を参考に、一定量放流方式を採用した。本計算では、カット開始流入量を $700\text{m}^3/\text{s}$ ～ $1500\text{m}^3/\text{s}$ まで $200\text{m}^3/\text{s}$ 刻みで変化させる事(全5ケース)により、ダムの持つ治水容量を最大限に活用できる貯留量を調べた。また、ダム制御がない場合とある場合に八斗島基準点における洪水制御効果を検証した。

図B-1に示す通り、S22年9月洪水時に流入量 $1500\text{m}^3/\text{s}$ から一定量放流方式でダム制御を行った場合、治水容量の6割程度まで貯留する事が可能である。また、同洪水時に流入量 $700\text{m}^3/\text{s}$ 及び $900\text{m}^3/\text{s}$ から一定量放流を開始すると、両者とも一定量放流開始から約13時間後に、八ッ場ダムの治水容量 $6.5 \times 10^7\text{m}^3$ を上回る事がわかる。よって、流入量 $1100\text{m}^3/\text{s}$ から放流を開始した場合に治水容量に対して9割以上貯留する事が可能であり、八ッ場ダムの持つ治水能力を最大限に活かせる事がわかった。

各地点におけるダム制御がない場合とある場合の水深比は図B-2に示す通りであり、八斗島基準点ではダム制御がない場合と比較して最大4%、水深にして0.4m近い低減効果が見込める事を示した。

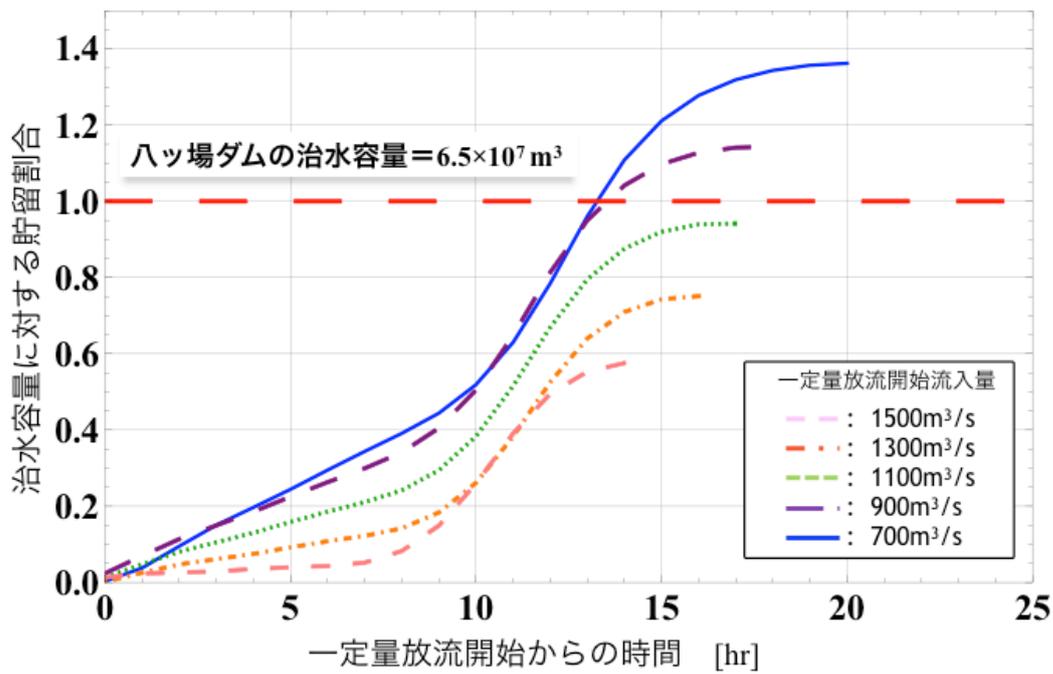


図 B-1 ハッ場ダムにおける一定量放流開始からの時間と治水容量に対する貯留割合の時間変化.

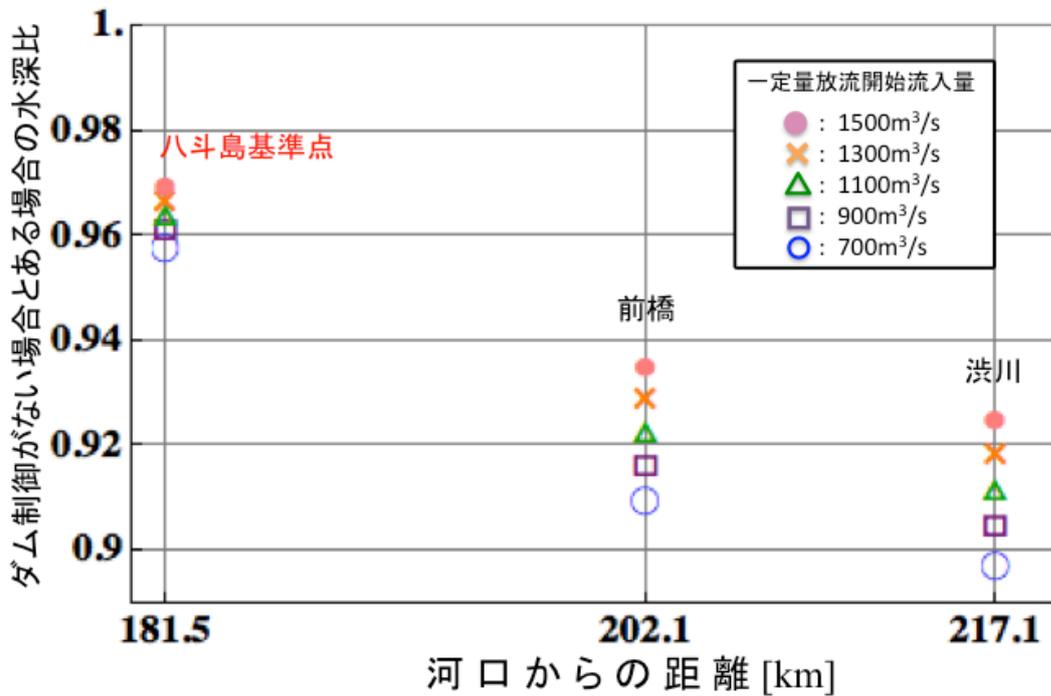


図 B-2 ダム制御を行わない場合と一定量放流を行った場合の八斗島基準点における水深比.

付録C 確率過程論の概要

C-1 確率過程

確率過程の概念，一般的な確率微分方程式の概念，Fokker-Planck 方程式の概念を説明し，確率過程論的な流出解析を行うための基礎理論を示す。

C-2 伊藤過程と伊藤の確率微分方程式 (SDE)

一次元空間において，時系列 $x(t)$ の微分 dx が次式に従って動いている時，この時系列 $x(t)$ の動きを伊藤過程という。

$$dx(t) = g(x(t), t)dt + \sigma(x(t), t)dw(t) \quad (\text{C-1})$$

ここに， $g(x(t), t)$ ， $\sigma(x(t), t)$ は時間 t と時系列 $x(t)$ の任意の関数である。また， $dw(t)$ は Wiener 過程 $w(t)$ の微小時間変化量であり，平均 0，分散 dt の正規分布に従っている。伊藤過程とは一般化した Wiener 過程の定数部分を x と t の任意関数でより一般化したものである。このように，空間座標 $x(t)$ の増分が上式の様子に右辺のドリフト項と確率増分項で表されるとき，上式を伊藤の確率微分方程式という。

C-3 伊藤の補題

以下からは伊藤の補題の概要を記す。正規分布 $N(0, dt)$ に従うブラウン運動をする確率過程 $x(t)$ があるとき，時間 t と確率過程 $x(t)$ の関数 $f(x(t), t)$ の微小変化 df は，

$$df(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial t} dt + \frac{\partial f(x)}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} (dx)^2 \quad (\text{C-2})$$

で表される。ある任意関数 $f(x)$ について， $f(x+dx)$ を x の近傍で Taylor 展開すると，

$$df(x) = \frac{f'(x)}{1!} dx + \frac{f''(x)}{2!} (dx)^2 + \frac{f'''(x)}{3!} (dx)^3 + \dots \quad (\text{C-3})$$

となる。解析学では一般的に、関数 $f(x)$ の微分 $df(x)$ は、

$$df(x) = f'(x)dx \quad (\text{C-4})$$

であるが、確率解析学では、

$$df(x) = f'(x)dx + \frac{1}{2}f''(x)(dx)^2 \quad (\text{C-5})$$

が成立する。これは、例えば任意の空間座標 x の微小時間増分 $dx(t)$ を

$$dx(t) = y(t)dt + z(t)dw(t) \quad (\text{C-6})$$

として $dx(t)^2$ を計算した場合、

$$dx(t)^2 = y(t)^2 dt^2 + 2y(t)z(t)dt dw(t) + z(t)^2 dw(t)^2 \quad (\text{C-7})$$

となり、結局 $dx(t)^2$ が、

$$dx(t)^2 = z(t)^2 dw(t)^2 + O(dt) \quad (\text{C-8})$$

$$dx(t)^2 = z(t)^2 dt + O(dt) \quad (\text{C-9})$$

となるからである。これは、ブラウン運動をする分子の軌跡 $w(t)$ の微小変化 $dw(t)$ の二乗は、微小時間増分となる事を表している。つまり、 $dw(t)$ が正規分布 $N(0, dt)$ に従うブラウン運動するのであれば、

$$dw(t)^2 = dt \quad (\text{C-10})$$

が成立する。上式の意味するところは、ブラウン運動の微小変化分の二乗は、不確実性を有しない時間の微小変化分に対応するという事である（これは伊藤の補題2と呼ばれることもある）。

同様にして、 $dx(t)^n$ は、

$$dx(t)^n = 0 \quad (n = 3, 4, 5 \dots) \quad (\text{C-11})$$

となる。したがって、(C-5)式は dt のオーダーで2次の項まで考えれば良いので、(C-6)式を代入すれば、

$$df(x) = f'(x)\{y(t)dt + z(t)dw(t)\} + \frac{1}{2}f''(x)z(t)^2 dt \quad (\text{C-12})$$

$$df(x) = \left\{ f'(x)y(t) + \frac{1}{2} f''(x)z(t)^2 \right\} dt + f'(x)z(t)dw(t) \quad (\text{C-13})$$

となる。これが、伊藤の補題（伊藤の補題1）である。

C-4 Fokker-Planck 方程式（FPE）

以下では、伊藤の確率微分方程式からFokker-Planck方程式の導出をする。この導出過程が確率微分方程式とFokker-Planck方程式が同一の現象を異なる視点から表している揺るぎない根拠であり、本論文においても非常に重要な部分である。以下に示す導出過程は保江（2000）に記載されている導出過程を省略なく愚直に記述したものである。

いま、ある確率過程 $x(t)$ の確率密度関数を $p(x(t), t)$ として、ある任意の新しい確率変数 $h(x(t))$ の期待値を考えると、期待値 $E[\cdot]$ は、

$$E[h(x(t))] = \int_{-\infty}^{\infty} h(r(t))p(r(t), t)dr \quad (\text{C-14})$$

で与えられる。上式の両辺を t で微分すると、以下の式を得る。

$$\frac{d}{dt} E[h(x(t))] = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} h(r(t))p(r(t), t)dr \quad (\text{C-15})$$

上式の左辺は、時間微分のアンサンブル平均とアンサンブル平均の時間微分は等しいと仮定すれば、

$$\frac{d}{dt} E[h(x(t))] = E \left[\frac{dh(x(t))}{dt} \right] \quad (\text{C-16})$$

となる。このような性質をエルゴード性という。

一方で、伊藤の補題で示した(C-13)式は、

$$dh(x(t)) = \left\{ h'(x(t))y(x(t)) + \frac{1}{2} h''(x(t))z(x(t))^2 \right\} dt + h'(x(t))y(x(t))dw(t) \quad (\text{C-17})$$

となる。ここで両辺の期待値をとると、Wiener過程の定義から、 $E[dw(t)] = 0$ であるため、右辺第二項は0となる。よって、(C-17)式は以下のように書き表せる。

$$\frac{d}{dt} E[h(x(t))] = E \left[h'(x(t))y(x(t)) + \frac{1}{2} h''(x(t))z(x(t))^2 \right] \quad (\text{C-18})$$

さらに、(C-14)式の関係から(C-18)式は、

$$\frac{d}{dt}E[h(x(t))] = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ h'(r(t))y(x(t)) + \frac{1}{2}h''(r(t))z(x(t))^2 \right\} p(r(t),t)dr \quad (C-19)$$

となる。一方、(C-15)式の右辺は、

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} h(r(t))p(r(t),t)dr = \int_{-\infty}^{\infty} h(r(t)) \frac{\partial p(r(t),t)}{\partial t} dr \quad (C-20)$$

となるので、

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(r(t)) \frac{\partial p(r(t),t)}{\partial t} dr = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ h'(r(t))g(x(t)) + \frac{1}{2}h''(r(t))\sigma(x(t))^2 \right\} p(r(t),t)dr \quad (C-21)$$

を得る。ここでさらに、上式の右辺について考える。右辺を I とおいて整理する。

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} h'(r(t))g(x(t))p(r(t),t)dr + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} h''(r(t))\sigma(x(t))^2 p(r(t),t)dr \quad (C-22)$$

また、上式の右辺第一項を I_1 として解くと、

$$I_1 = [h(r(t))g(x(t))p(r(t),t)]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} h(r(t)) \frac{\partial g(x(t))p(r(t),t)}{\partial r} dr \quad (C-23)$$

となり、無限遠において、全ての物理量が急激に0になるとすると、(C-23)式は、

$$I_1 = - \int_{-\infty}^{\infty} h(r(t)) \frac{\partial g(x(t))p(r(t),t)}{\partial r} dr \quad (C-24)$$

となる。右辺第二項も同様にして以下のように得られる。

$$I_2 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} h(r(t)) \frac{\partial^2 \sigma(x(t))^2 p(r(t),t)}{\partial r^2} dr \quad (C-25)$$

よって、(C-21)式($I=I_1+I_2$)は、

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} h(r(t)) \frac{\partial p(r(t),t)}{\partial t} dr = & \\ & - \int_{-\infty}^{\infty} h(r(t)) \frac{\partial g(x(t))p(r(t),t)}{\partial r} dr \\ & + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} h(r(t)) \frac{\partial^2 \sigma(x(t))^2 p(r(t),t)}{\partial r^2} dr \end{aligned} \quad (C-26)$$

となる。 $r(t)=x(t)$ とすれば、以下に示すFokker-Planck方程式を得る。

$$\frac{\partial p(r(t),t)}{\partial t} = -\frac{\partial g(x(t))p(r(t),t)}{\partial r} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \sigma(x(t))^2 p(r(t),t)}{\partial r^2} \quad (\text{C-27})$$

これが任意の $r=r(t)$ について成立するため、 $p(r(t),t)$ は Fokker-Planck 方程式を満たす (参考文献→保江邦夫：数値確率解析入門)。この Fokker-Planck 方程式と伊藤の確率微分方程式は数学的に厳密に等価であることが証明されている。つまり、ある確率過程 $x(t)$ のひとつひとつの過程を表現しているのが伊藤の確率微分方程式であり、それは決定論的な項とランダム項とで表現されるものである。そして、ある時点（もしくは、空間的なある点）における確率経路の確率密度関数 $p(x(t),t)$ を満たす偏微分方程式が Fokker-Planck 方程式と呼ばれる。

$$dx(t) = \gamma dw(t) \quad (\text{C-28})$$

$$\frac{\partial p(x(t),t)}{\partial t} = \frac{\gamma^2}{2} \frac{\partial^2 p(x(t),t)}{\partial x^2} \quad (\text{C-29})$$

例として、図 C-1 に最も簡単な Wiener 過程 ((C-28)式) が記述する確率経路とそれに対応する Fokker-Planck 方程式 ((C-29)式) の時間発展を計算した結果を示す。この図からも見て取れるように、両者は同一の現象を異なる 2 つの視点から捉えた式であることがわかる。

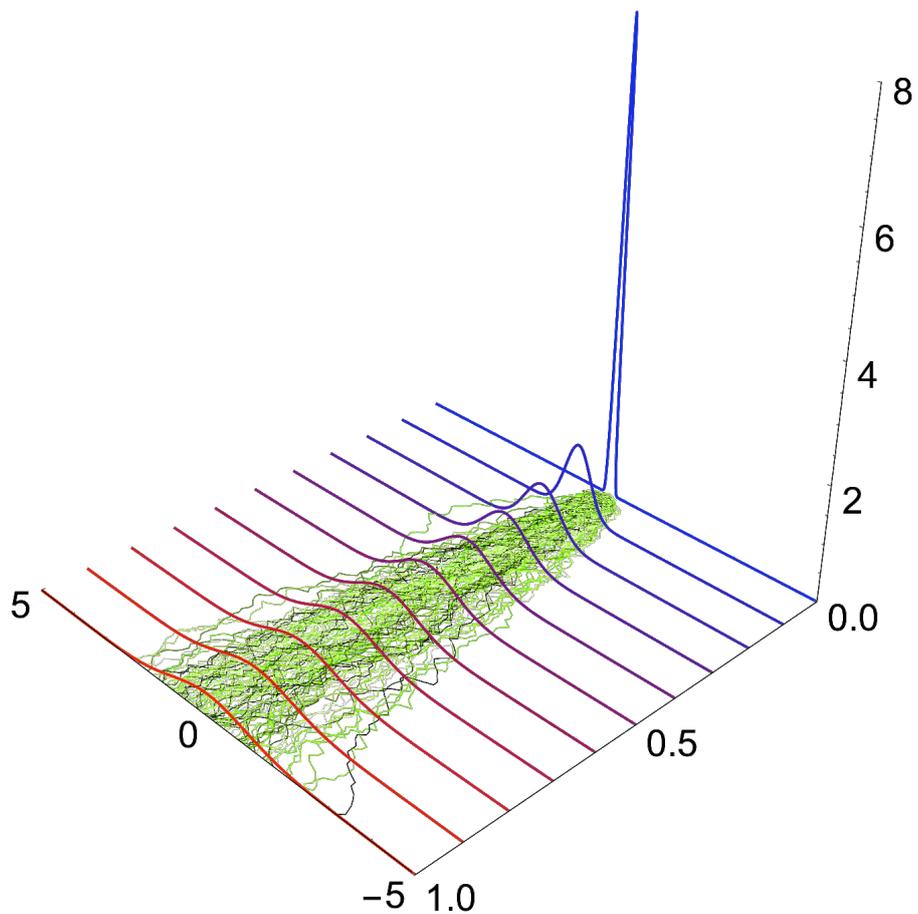


図 C-1 確率微分方程式と Fokker-Planck 方程式の関係. (簡単な例として, 確率微分方程式 $dx(t) = \gamma dw(t)$ (:Wiener 過程) とそれに対応する Fokker-Planck 方程式の計算例を示す. 一本一本の確率経路に対して, それぞれの時間に対応する確率密度関数が描かれており, 両者は同一の現象を異なる視点から記述した方程式であることがわかる.)

