

## 付録D 降雨時系列の微小擾乱成分の標準偏差と降雨強度の関係

### D-1 降雨強度と標準偏差 $\sigma$ の関係

第4章では、降雨強度の標準偏差  $\sigma$  を簡易的に定数として与えていた。しかし、実際は図 D-1 から見て取れるように、降雨強度の増加とともに、バラつきが大きくなるように見える。そこで、図 D-2 に示すように横軸に降雨強度、縦軸に 5mm/h 幅を 1mm/h ずつずらして (5mm/h~10mm/h, 6mm/h~11mm/h, …,  $r \sim r+5$  mm/h のようにして)、領域ごとの標準偏差をプロットしている。この結果からわかるように、降雨強度の微小成分の標準偏差は降雨強度の増加とともに、徐々に増加する傾向にある。強い降雨強度域では、データ数が少ないため、バラつきが大きいが、 $\sigma$  を降雨強度  $r(t)$  の関数として、(D-1)式で近似出来るとすれば、 $\sigma(r(t))$ は、

$$\sigma(r(t)) = a \tan^{-1}(br(t)) \quad (r(t) > 0) \quad (\text{D-1})$$

とおける。

### D-2 標準偏差 $\sigma$ を降雨強度の関数とした場合の FPE の数値計算結果

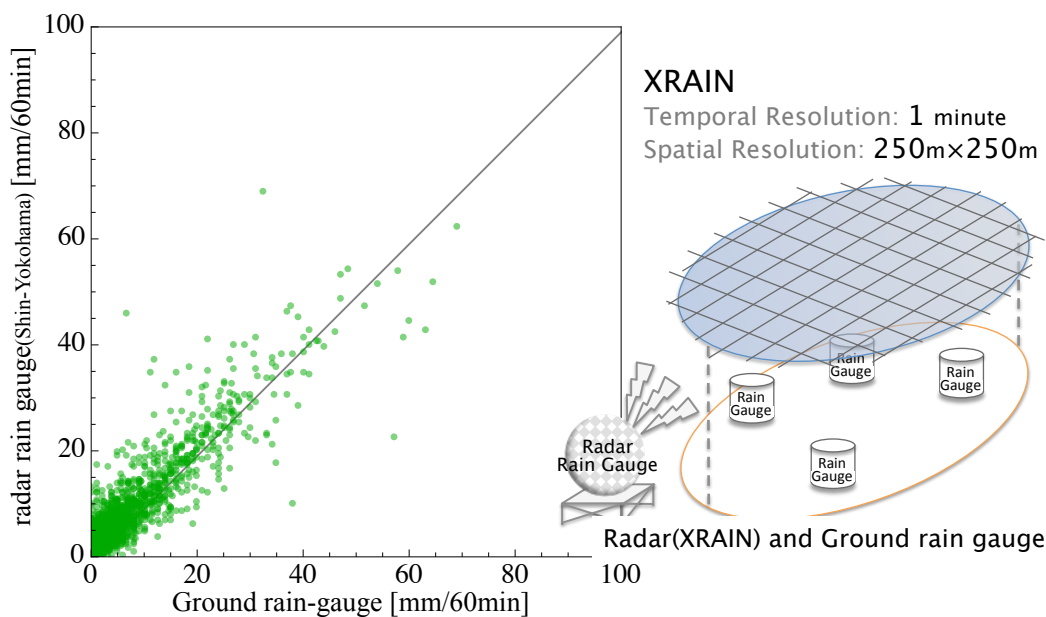
第4章で示した Fokker-Planck 方程式、

$$\frac{\partial p(q_*(t), t)}{\partial t} = - \frac{\partial a_0 q_*^\beta (\bar{r} - q_*) p(q_*(t), t)}{\partial q_*} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (a_0 q_*^\beta \sigma \sqrt{T_L})^2 p(q_*(t), t)}{\partial q_*^2} \quad (\text{D-2})$$

の右辺第二項において、 $\sigma = \sigma(r(t))$ として、(D-2)式を数値的に解いた結果を図 D-4 に示す。 $\sigma = \sigma(r(t))$ としている以外の計算条件は、前章の数値計算結果と同じである。また、図 D-5 に示すのが、 $t=3.0, 5.5, 7.0$ hour 時点の図 D-3 と図 D-4 の確率密度関数の比較である。

以上から、降雨強度を変数とした乱れ成分の上旬偏差  $\sigma(r(t))$  の影響を考慮した流出高の確率密度関数の時間発展を得るとともに、降雨強度の増加とともに流出高の確率密度関数の裾の広がりが大きくなっていることがわかる。

つまり、**図 D-4** の結果は(D-1)式の傾向に従うため、降雨強度が大きくなるに従って、流出高の確率密度関数の標準偏差も大きくなる。一方で、ハイドログラフ逓減部では、(D-1)式の傾向から標準偏差が 0 に近づくため、流出高の確率密度関数の標準偏差も小さくなる。



**図 D-1** 地上雨量計と XRAIN 雨量強度の比較. (右のポンチ絵は、両雨量データの観測形態の概念図であり、地上雨量計と地上雨量計が位置するレーダのメッシュ雨量との比較をしたものがプロットされている。)

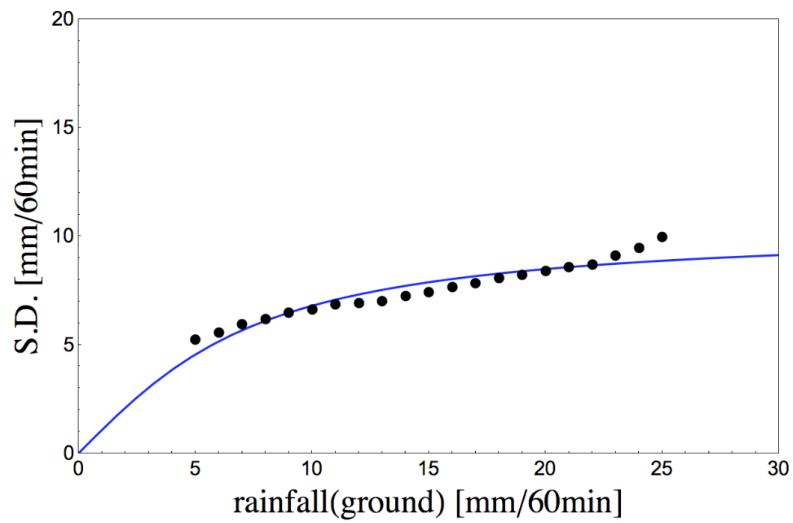


図 D-2 降雨強度に対する降雨時系列の乱れ成分の標準偏差（時間降雨強度）。図中の青線は近似曲線。

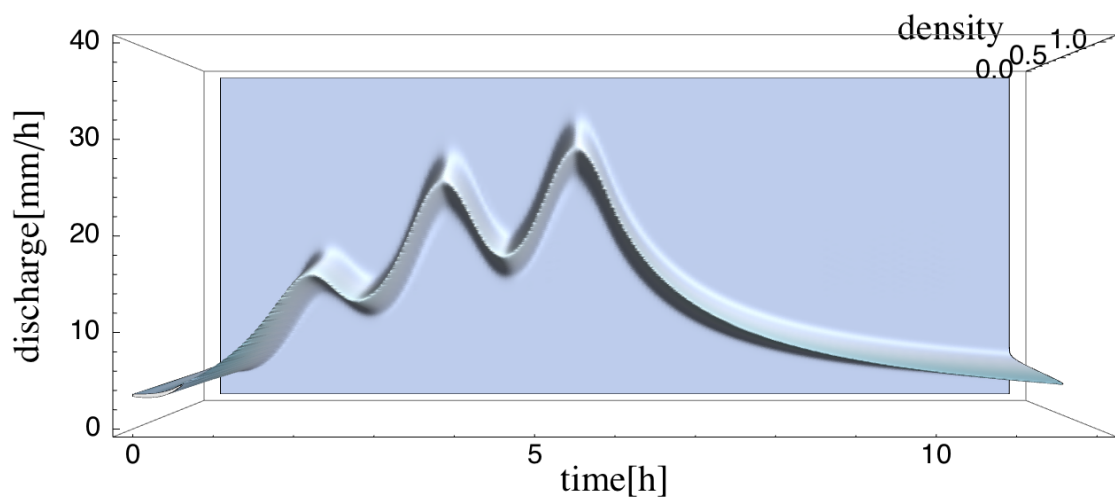


図 D-3 FPE を解いて求めた流出高に関する確率密度関数の時間発展。（初期条件として極めて分散の小さい正規分布を与え、降雨の標準偏差  $\sigma$ ，時定数 TL は一定値として FPE を解いている。）

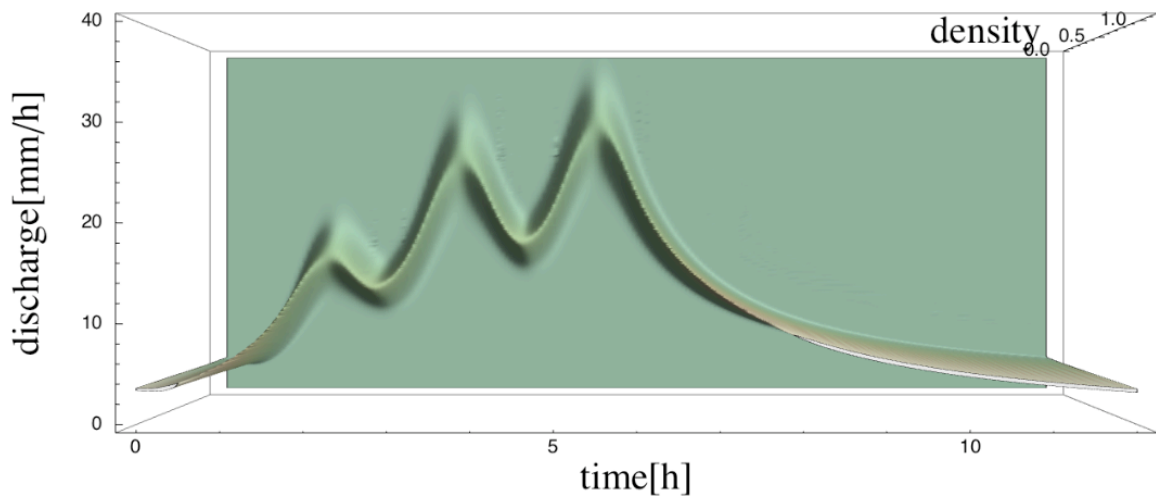


図 D-4 降雨時系列の乱れ成分  $\sigma$  を  $\sigma(r(t))$  として降雨強度の関数で与えた場合の Fokker-Planck 方程式の数値計算結果.

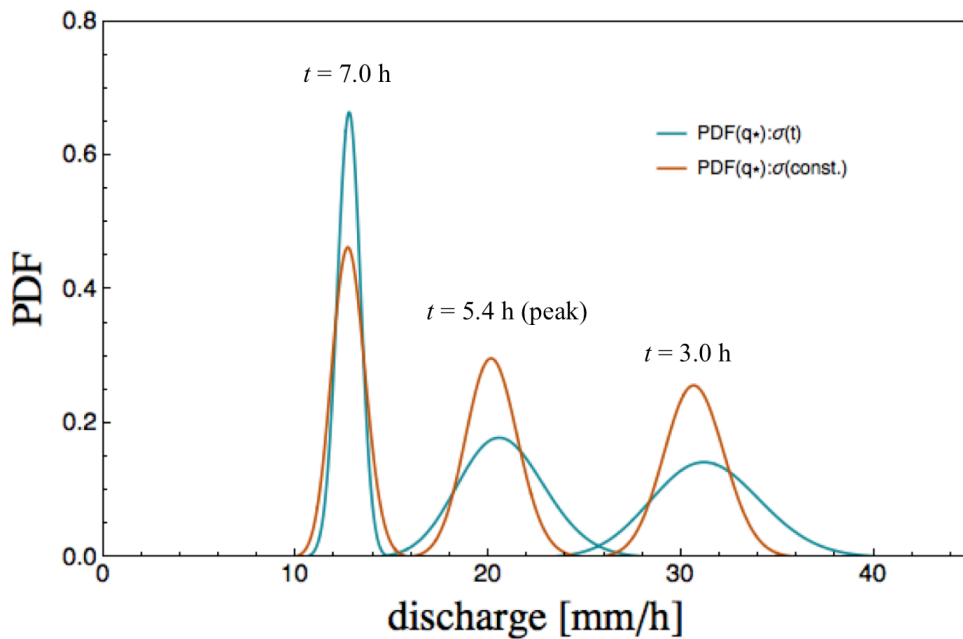


図 D-5  $\sigma = \text{const.}$  と  $\sigma = \sigma(r(t))$  とした場合の流出高の確率密度関数の比較 ( $t=3.0, 5.5$  (peak 近傍),  $7.0$  hour). ハイドログラフのピーク近傍までは,  $\sigma = \sigma(r(t))$  の方が流出高の確率密度関数の標準偏差が大きい, ハイドログラフ逡減部では  $\sigma$  が一定値の場合の方が標準偏差が大きい.



## 付録E 流出高の確率微分方程式の非負性

降雨強度の微小擾乱成分  $r'(t)$  を定義する以上、降雨強度  $r(t)$  が負の値を取る可能性がしばしば指摘される。たしかに  $dw$  が負の値をとるのは確かに事実であるが、 $q_*$  についての確率微分方程式が幾何ブラウン運動を記述する確率微分方程式タイプであることから非負の性質を満たすと考えられる。また、 $q_*$  が小さな値では、ランダム項の  $a_0 q_*^\beta \sigma T_L^{1/2}$  の値はゼロに近づき、 $q_*$  に対する  $r'(t)$  のランダム力は相殺されると考えられる。以下に示す図 E-1 は、本論中と同様の計算をし、 $t=0\sim 1.0\text{h}$  の範囲を描いたものである。図 E-2 は図 E-1 における  $t=0\sim 0.4\text{h}$  までを  $0.1\text{h}$  刻みで抽出したスライスデータのヒストグラムである。

これらの図からわかるように、初期値として  $0$  と近似しても支障ない  $q_*=10^{-6}\text{mm/h}$  (本論中の値は  $3.5\text{mm/h}$ ) を与えているが、 $q_*$  が小さな値を取る範囲、概ね  $t=0\sim 0.4\text{h}$  でも非負の性質を満たしている事がわかる。

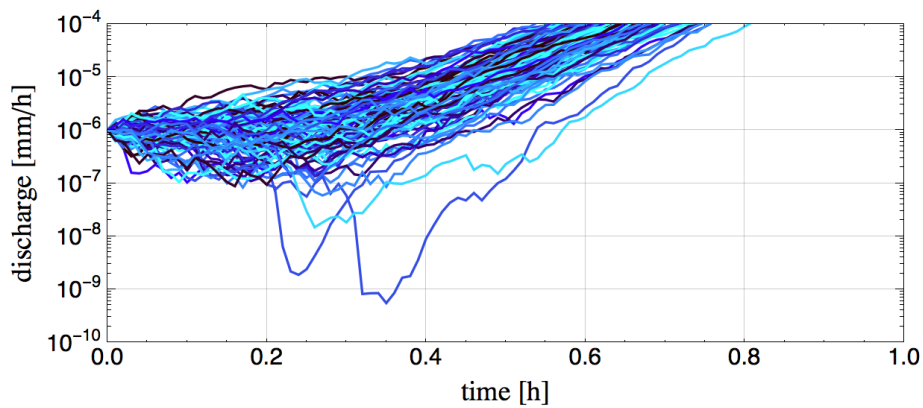


図 E-1 SDE を解いて求めたハイドログラフ (試行回数 100 回,  $t=0\sim 1h$ ). 縦軸は表示範囲は  $10^{-10}$  から  $10^{-4}$  と非常に小さな値であるが, 負の値にはならず, 上昇していくことが見て取れる. これは,  $q^*$  が微小な区間ではランダム項の値自体が 0 に近づき,  $q^*$  に対する  $r'(t)$  のランダム力が小さくなり, 結果的に相殺されるからである.

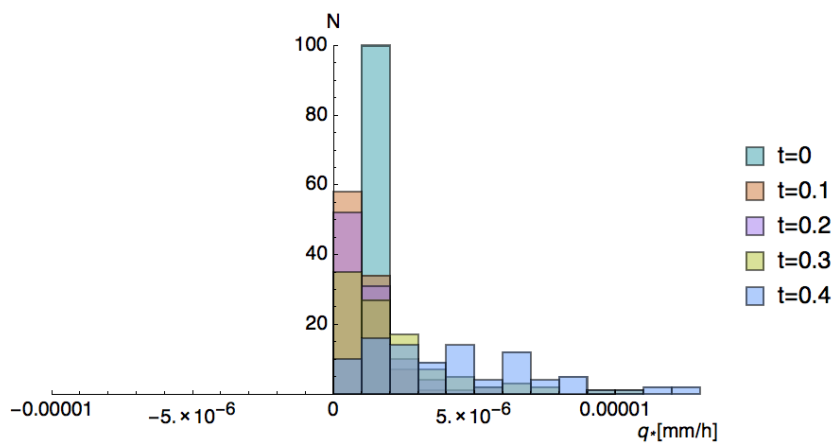


図 E-2 図 E-1 の時刻  $t=0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$  におけるスライスデータのヒストグラム (非負の性質があることがわかる. )





## 付録F 確率微分方程式の数値計算

### F-1 確率微分方程式の数値計算

以下では、保江のテキスト「数値確率解析入門」第6章に従って、確率微分方程式の数値計算法を示す。いま、伊藤の確率微分方程式、

$$dx(t) = g(x(t))dt + h(x(t))dw(t) \quad (\text{F-1})$$

を考える。伊藤の確率微分方程式は、

$$x(t) = x(a) + \sum_{s \leq t} (g(x(s))ds + h(x(s))dw(s)) \quad (\text{F-2})$$

をマルチンゲール分解するような確率過程  $x(t)$  を一意に定めるが、これは連続時間区間  $[a, b] = \{t \mid a \leq t \leq b\}$  を  $N$  等分することで得られる等分割時系列

$$t_n = a + \frac{n}{N}(b-a), \quad n = 0, 1, 2, \dots, N \quad (\text{F-3})$$

での確率過程の時刻  $t_n$  に対応する値  $x(t_n)$  が与えられていることを意味する。

### F-2 Euler-丸山スキーム

さらに、標準 Wiener 過程の確率微分

$$dw(t) = w(t_{n+1}) - w(t_n) \quad (\text{F-4})$$

は期待値 0、分散  $dt = (b-a)/N$  なので、これを期待値 0、分散 1 の正規乱数と分散  $(b-a)/N$  の積で置き換えて、(F-1)式を漸化的に記述すると、

$$\begin{aligned}
 x_0 &= x(a) \\
 x_1 &= x_0 + g(x_0) \frac{1}{N} (b-a) + h(x_0) \sqrt{\frac{1}{N} (b-a)} y_1 \\
 x_2 &= x_1 + g(x_1) \frac{1}{N} (b-a) + h(x_1) \sqrt{\frac{1}{N} (b-a)} y_2 \\
 &\vdots \\
 x_N &= x_{N-1} + g(x_{N-1}) \frac{1}{N} (b-a) + h(x_{N-1}) \sqrt{\frac{1}{N} (b-a)} y_N
 \end{aligned} \tag{F-5}$$

となる．この漸化的な表現は，常微分方程式を数値計算する際のオイラーの前進差分近似にきわめて似ており，確率微分方程式を数値計算する場合のオイラー-丸山スキームと呼ばれるものである．

### F-3 確率ルンゲ-クッタスキーム

次に，常微分方程式の数値計算で実用性の高いルンゲ-クッタ法の確率微分方程式への適用を考える．以下では2次のルンゲ-クッタスキームを示す．

$$\begin{aligned}
 x_0 &= x(a) \\
 x_1 &= x_0 + \frac{1}{2} \left( g(x_0) + g \left( x_0 + g(x_0) \frac{1}{N} (b-a) + h(x_0) \sqrt{\frac{1}{N} (b-a)} y_1 \right) \right) \cdot \frac{1}{N} (b-a) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left( h(x_0) + h \left( x_0 + g(x_0) \frac{1}{N} (b-a) + h(x_0) \sqrt{\frac{1}{N} (b-a)} y_1 \right) \right) \cdot \sqrt{\frac{1}{N} (b-a)} z_1 \\
 x_2 &= x_1 + \frac{1}{2} \left( g(x_1) + g \left( x_1 + g(x_1) \frac{1}{N} (b-a) + h(x_1) \sqrt{\frac{1}{N} (b-a)} y_2 \right) \right) \cdot \frac{1}{N} (b-a) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left( h(x_1) + h \left( x_1 + g(x_1) \frac{1}{N} (b-a) + h(x_1) \sqrt{\frac{1}{N} (b-a)} y_2 \right) \right) \cdot \sqrt{\frac{1}{N} (b-a)} z_2 \\
 &\vdots \\
 x_N &= x_{N-1} + \frac{1}{2} \left( g(x_{N-1}) + g \left( x_{N-1} + g(x_{N-1}) \frac{1}{N} (b-a) + h(x_{N-1}) \sqrt{\frac{1}{N} (b-a)} y_N \right) \right) \cdot \frac{1}{N} (b-a) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left( h(x_{N-1}) + h \left( x_{N-1} + g(x_{N-1}) \frac{1}{N} (b-a) + h(x_{N-1}) \sqrt{\frac{1}{N} (b-a)} y_N \right) \right) \cdot \sqrt{\frac{1}{N} (b-a)} z_N
 \end{aligned} \tag{F-6}$$

ここで，注目すべきは，オイラー-丸山スキームで定義した期待値 0，分散 1 の正規乱数時系列  $y_n$  と独立の期待値 0，分散 1 の正規乱数  $z_n$  を新たに導入している点である．この漸化式表現で明らかのように，オイラー-丸山スキームで 1step 進んだところでの流行過程と揺らぎの大きさを加味している．よって，安定的な差分近似となっている．



## 付録G 条件付き確率

ある事象 A と事象 B を考える。このとき、事象 A が生起したという条件のもとでは事象 B の確率は、

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad (\text{G-1})$$

で与えられる。ここに左辺は、事象 A が発生したという条件下での事象 B の確率である（条件付き確率）。また、右辺分子は事象 A と事象 B の同時確率である。右辺分母は、事象 B の生起とは無関係に事象 A が起きる確率である。確率変数が連続の場合は以下のように表現される。

$$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f(x)} \quad (\text{G-2})$$

以下では、条件付き確率  $f(y|x)$  が正規分布  $N(x, \sigma)$

$$f(y|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(y-x)^2}{2\sigma^2}\right] \quad (\text{G-3})$$

の場合の  $y$  の分布を考える問題を示す。  $x$  の分布も正規分布  $N(\mu_0, \sigma_0)$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \exp\left[-\frac{(x-\mu_0)^2}{2\sigma_0^2}\right] \quad (\text{G-4})$$

であるとわかっている場合、確率変数  $y$  の分布は、

$$f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \exp\left[-\frac{(x-\mu_0)^2}{2\sigma_0^2}\right] \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(y-x)^2}{2\sigma^2}\right] dx \quad (\text{G-5})$$

となる。これを以下のように展開し整理すると、

$$f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_0\sigma} \exp\left[-\frac{(\sigma_0^2 + \sigma^2)}{2\sigma_0^2\sigma^2} \left(x - \frac{\sigma_0 y + \sigma^2 \mu_0}{\sigma_0^2 + \sigma^2}\right) - \frac{(y - \mu_0)^2}{2(\sigma_0^2 + \sigma^2)}\right] dx \quad (\text{G-6})$$

$$f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_0\sigma} \exp\left[-\frac{(y - \mu_0)^2}{2(\sigma_0^2 + \sigma^2)}\right] \exp\left[-\frac{\left(x - \frac{\sigma_0 y + \sigma^2 \mu_0}{\sigma_0^2 + \sigma^2}\right)^2}{\frac{2\sigma_0^2\sigma^2}{\sigma_0^2 + \sigma^2}}\right] dx \quad (\text{G-7})$$

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0\sigma} \exp\left[-\frac{(y - \mu_0)^2}{2(\sigma_0^2 + \sigma^2)}\right] \sqrt{\frac{\sigma_0^2\sigma^2}{\sigma_0^2 + \sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\frac{\sigma_0^2\sigma^2}{\sigma_0^2 + \sigma^2}}} \exp\left[-\frac{\left(x - \frac{\sigma_0 y + \sigma^2 \mu_0}{\sigma_0^2 + \sigma^2}\right)^2}{\frac{2\sigma_0^2\sigma^2}{\sigma_0^2 + \sigma^2}}\right] dx \quad (\text{G-8})$$

となる. (G-8)式右辺の積分部分は1なので,  $f(y)$ は,

$$f(x) = \exp\left[\left(-\frac{(y - \mu_0)^2}{2(\sigma_0^2 + \sigma^2)}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0\sigma} \sqrt{\frac{\sigma_0^2\sigma^2}{\sigma_0^2 + \sigma^2}}\right] \quad (\text{G-9})$$

である. よって,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_0^2 + \sigma^2)}} \exp\left[\left(-\frac{(y - \mu_0)^2}{2(\sigma_0^2 + \sigma^2)}\right)\right] \quad (\text{G-10})$$

となる.



## 付録H 降雨流出過程の非線形性及び降雨強度と流出高の不確実性の関係

第4章では、降雨流出過程における非線形性と流出高の不確実性、降雨強度と流出高の不確実性の関係性について示した。以下では、降雨流出過程における不確実性に直接的に関連する単一斜面における降雨流出基礎式のパラメータ  $m$ 、すなわち貯留関数法における流出パラメータ  $P$  と降雨強度に対する不確実性の程度を整理した。

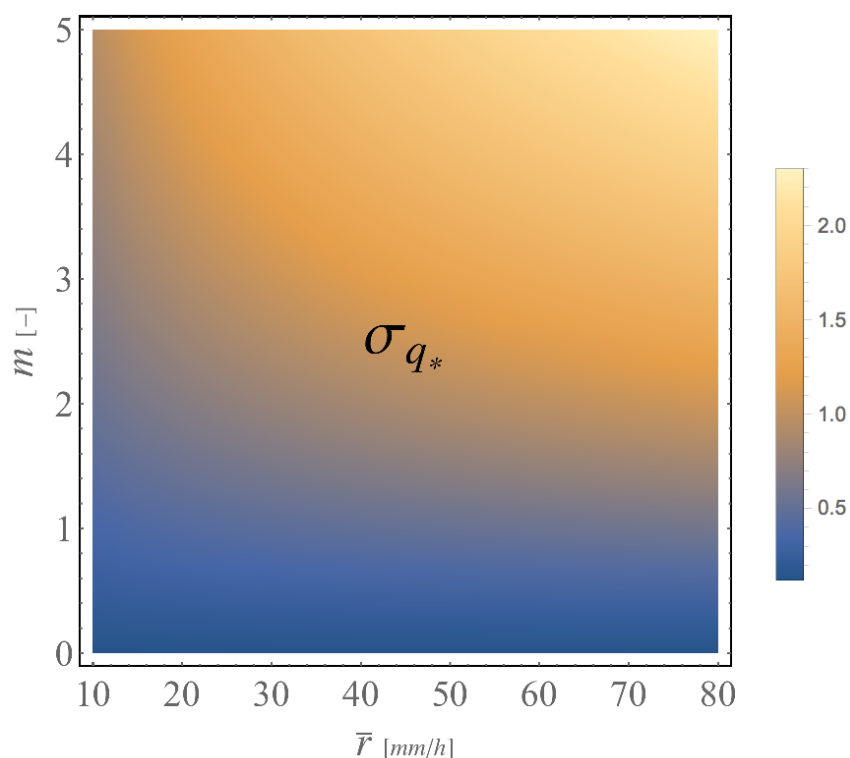


図 H-1 降雨強度と流出過程の非線形性が流出高の不確実性に及ぼす影響。降雨強度が強くなるほど、また抵抗則が大きくなるほど不確実性は大きくなる。

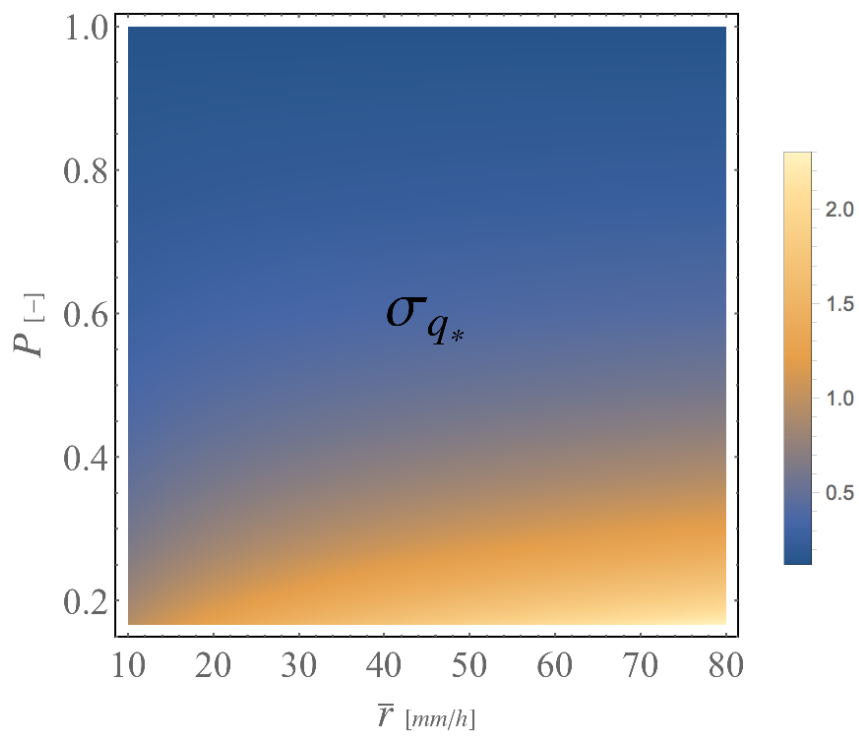


図 H-2 降雨強度と流出過程の非線形性が流出高の不確実性に及ぼす影響。降雨強度が強くなるほど、また抵抗則が大きくなるほど不確実性は大きくなる。



## 研究論文集（査読付き）

- [1] 山田正, 吉見和紘, 山田朋人：気象研究ノート「都市における極端気象の観測・予測・情報伝達」第6章予測の不確実性と河川流量・水位の関係, (2016 投稿決定)

## 論文（査読付き）

- [1] 吉見和紘, 山田正, 山田朋人, 確率微分方程式の導入による降雨流出過程における降雨の不確実性の評価, 土木学会論文集 B1(水工学) Vol. 71, No.4, I\_259-I\_264 (2015)
- [2] 吉見和紘, 山田正, 鉛直浸透機構を考慮した流出計算手法の長短期流出解析への適用, 水工学論文集第 58 巻, pp. 367-372 (2014)
- [3] 吉見和紘, 山田正, 鉛直浸透を考慮した斜面内流出計算手法の提案, 土木学会論文集 G (環境), Vol. 69, No. 5, pp. I\_145-I\_150 (2013)
- [4] 吉見和紘, 山田正, 利根川上流域における降雨パターンに着目した洪水流出解析とダムの治水効果の評価, 水工学論文集第 57 巻, pp. 367-372 (2013)
- [5] 吉見和紘, 岡部真人, 山田正, 利根川上流域における降雨パターンの違いが流出現象に与える影響に関する研究, 土木学会論文集 G(環境), Vo. 68. No. 5, I\_255-I\_260 (2012)
- [6] 吉見和紘, 山田正, 土屋信行：降雨特性の違いが洪水ピーク流量に与える影響-利根川上流域を例として-, 中央大学理工学研究所論文集, 2012.
- [7] 永田喜大, 吉見和紘, 永島健, 山田正, 降雨現象の短期的周期特性に関する研究, 土木学会論文集 G(環境), Vol.71, No.5, I\_277-I\_282,2015.
- [8] Chao-Wen WANG, Kazuhiro YOSHIMI, Tadashi YAMADA and Chikatsugu KARASHIMA: Reliability evaluation of the levee which introduced stochastic process theory based on the uncertainty of rainfall, J. JSCE, Ser.G, Vol.71, No.5, pp.1-6, 2015. (in Japanese).
- [9] Chao-Wen WANG, Kazuhiro YOSHIMI, Chikatsugu KARASHIMA and Tadashi YAMADA: RISK OF LEVEE DESTRUCTION BY THE CHANGE IN RIVER WATER LEVEL DURING FLOOD, The 3rd International Conference on Water Resources (ICWR-2015), 2015.
- [10] 吉見和紘, Chao-Wen WANG, 山田正, 山田朋人：確率過程論に基づいた降雨流出過程における不確実性評価の理論的枠組の提示, 土木学会論文集 B1(水工学),

Vol.72, No.4, I\_1225-I\_1230, 2016.

- [11] Chao-Wen WANG, Kazuhiro YOSHIMI, Tadashi YAMADA and Tomohito J. YAMADA : A Study on Landslide Analysis Induced by Rainfall Based on Stochastic Process, Journal of Japan Society of Civil Engineering, Ser. B1(Hydraulic Engineering), Vol.72, No.4, I\_1279-I\_1284, 2016.

## 論文（査読なし）

- [1] 吉見和紘, 山上訓広, 岡部真人, 山田正, 流出計算のパラメータ逆推定と流出特性, 水文・水資源学会 2012 年度研究発表会要旨集, Vol. 25, p. 55 (2012)
- [2] 吉見和紘, 渡邊暁人, 岡部真人, 山田正, 降雨流出解析におけるパラメータの非線形性が降雨流出に与える影響, 水文・水資源学会研究発表会要旨集, Vol. 24, p. 55 (2011)
- [3] 礒貝二郎, 吉見和紘, 岡部真人, 三坂育正, 稲葉薫, 前浪洋輝, 此島健男子, 山田正, 屋上貯留による雨水流出抑制効果に関する研究, 水文・水資源学会研究発表会要旨集, Vol. 24, p. 73 (2011)
- [4] 岡部真人, 礒貝二郎, 吉見和紘, 三坂育正, 稲葉薫, 前浪洋輝, 山田正, 屋上貯留による熱環境緩和効果に関する研究, 水文・水資源学会研究発表会要旨集, Vol. 24, p. 74 (2011)
- [5] 吉見和紘, Chao-Wen WANG, 山田正, 山田朋人: 降雨流出解析への確率過程論の導入に関する基礎的研究, 水文・水資源学会研究発表会要旨集, Vol.28, (2015).
- [6] Chao-Wen WANG , Kazuhiro YOSHIMI and Tadashi YAMADA, The Storage Process for Landslides inner Slope During Rainfall, EGU 2015.
- [7] Kazuhiro YOSHIMI, Chao-Wen WANG and Tadashi YAMADA: Evaluation of Uncertainty in Runoff Analysis Incorporating Theory of Stochastic Process, EGU 2015.
- [8] Kazuhiro Yoshimi, Chao-Wen Wang, Yoshimasa Morooka and Tadashi Yamada: A basic study of the reliability evaluation of levee stability based on the theory of stochastic process, World Engineering Conference and Convention 2015 abstract book, p.151, 2015.
- [9] Kazuhiro Yoshimi, Tadashi Yamada: A study for application of vertical infiltration in runoff analysis model to long- and short-term evaluation, H11G-0938, GU Fall Meeting 2014.
- [10] Chao-Wen WANG , Kazuhiro YOSHIMI , Tadashi YAMADA and W.F. Lee, A Study of the Relationship between Mountain Bridges Damaged and Multi-Hazards Induced by Extreme Rainfall., AGU Fall Meeting 2014.

- [11] Kazuhiro YOSHIMI and Tadashi YAMADA: Studies on Formation of Hydrograph Intended for Large Scale River and Flood Control Abilities of Dams, APHW 2013.

全国大会 3 件, 関東支部 4 件.

## 口頭発表 (招待講演)

- [1] Kazuhiro YOSHIMI, Chao-Wen WANG, Tadashi YAMADA, Tomohito YAMADA: Uncertainty Estimate in Runoff Analysis Based on Theory of Stochastic Process, No.03980, JpGU 2015.

## 口頭発表

- [1] 吉見和紘, 山田正, 山田朋人, 確率微分方程式の導入による降雨流出過程における降雨の不確実性の評価, 土木学会論文集 B1(水工学) Vol. 71, No.4, I\_259-I\_264 (2015)
- [2] 吉見和紘, 山田正, 鉛直浸透機構を考慮した流出計算手法の長短期流出解析への適用, 水工学論文集第 58 巻, pp. 367-372 (2014)
- [3] 吉見和紘, 山田正, 鉛直浸透を考慮した斜面内流出計算手法の提案, 土木学会論文集 G (環境) , Vol. 69 (2013) No. 5, pp. I\_145-I\_150 (2013)
- [4] 吉見和紘, 山田正, 利根川上流域における降雨パターンに着目した洪水流出解析とダムの治水効果の評価, 水工学論文集第 57 巻, pp. 367-372 (2013)
- [5] 吉見和紘, 岡部真人, 山田正, 利根川上流域における降雨パターンの違いが流出現象に与える影響に関する研究, 土木学会論文集 G(環境), Vo. 68. No. 5, I\_255-I\_260 (2012)
- [6] 吉見和紘, 山上訓広, 岡部真人, 山田正, 流出計算のパラメータ逆推定と流出特性, 水文・水資源学会 2012 年度研究発表会要旨集, Vol. 25, p. 55 (2012)
- [7] 吉見和紘, 渡邊暁人, 岡部真人, 山田正, 降雨流出解析におけるパラメータの非線形性が降雨流出に与える影響, 水文・水資源学会研究発表会要旨集, Vol. 24, p. 55 (2011)
- [8] Kazuhiro YOSHIMI, Chao-Wen WANG and Tadashi YAMADA: Evaluation of Uncertainty in Runoff Analysis Incorporating Theory of Stochastic Process, EGU 2015.
- [9] Kazuhiro Yoshimi, Chao-Wen Wang, Yoshimasa Morooka and Tadashi Yamada: A basic study of the reliability evaluation of levee stability based on the theory of stochastic process, World Engineering Conference and Convention 2015 abstract book, p.151, 2015.

[10] Kazuhiro Yoshimi, Tadashi Yamada: A study for application of vertical infiltration in runoff analysis model to long- and short-term evaluation, H11G-0938, AGU Fall Meeting 2014.

その他多数.