確率過程論を導入した降雨流出過程における不確実性評価に関する研究
STUDY ON UNCERTAINTY EVALUATION IN RUNOFF SYSTEM BASED ON STOCHASTIC PROCESS

都市環境学専攻　吉見和紘
Kazuhiro YOSHIMI

1．研究背景と目的

河川計画では，対象とする流域の過去の降雨記録，洪水記録の確率統計的な分析を経て，計画規模の降雨や流量の決定が行われるのが一般的である．河川計画の大きな目的は，基本高水流量の決定，洪水防御施設の計画，それに伴う計画高水流量の決定である．計画規模の決定手法は，河川によって異なるものの，多くの場合は，過去の降雨記録から100年確率，200年確率等に対応する降雨量が決められ，その降雨量で生起する可能性があるピーク流量を対象として，カバー率という考え方を用いて，計画規模のピーク流量が決定される．このように，河川計画の策定過程において，最終的な基本高水・計画高水流量は，ある一つの値が決定論的に決められるのが現状である．この値を決定する過程で重要な流出解析では，対象とする地域特有の地質・土質状態・植生の有無や種類，山地・都市域等の多様な土地利用をモデリング（理論化）し，降雨データを入力として，流量・水位を決定論的に算出する．

しかし，流出解析で用いる降雨データは多種多様であり，観測手法の違いや観測場所等によって，降雨データの時間分解能，空間分布は異なるため不確実性を含むデータであると考えられる．観測手法ひとつ取っても，地上に到達した雨滴を転倒マスで測って降雨強度換算するのか，上空の雨滴をレーダで捕捉して降雨強度換算するのかによって，同一の降雨イベントのハイエトグラフの概形は異なると考えるのが妥当であろう．加えて，それぞれの方法において観測誤差が内包されているのが常である．これは，降雨観測に限った話ではなく，自然現象を観測する際に常に付きまとう問題である．これらの事実から，我々の認識には限界がある事を認知したうえで，不確定・不確実な現象をどのように取扱うべきかを考えざるを得ない．筆者は計画的な議論の場においても，これらの不確実さをどのように考え，考慮するかを考える段階にきていると考えている．水工計画の分野において，従来の決定論的な考え方からの脱却と確率論・確率過程論的な考え方の導入が今後の大きなテーマになる．

2．研究手法と結果

本論文では，流出計算の基礎式の確率微分方程式としての記述，確率微分方程式とFokker-Planck方程式の対応関係を用いて，流量・水位の確率密度関数の時間発展を求める．加えて，水位に対する堤防の破壊確率を，堤防内の土壌パラメータの不確実性を考慮して求めることができれば，水位の確率密度関数を外力，堤防の破壊確率を耐力とした信頼性解析を行うことが可能であるという考

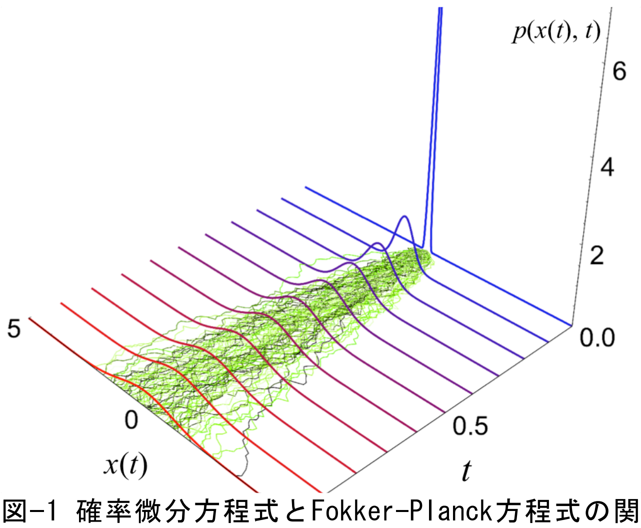


図-1 確率微分方程式とFokker-Planck方程式の関係．（簡単な例として，確率微分方程式$dx(t)=\sigma\, dw(t)$（:Wiener過程）とそれに対応するFokker-Planck方程式の計算例を示す．一本一本の確率経路に対して，それぞれの時間に対応する確率密度関数が描かれており，両者は同一の現象を異なる視点から記述した方程式であることがわかる．）

え方を示すものである．

(1)　伊藤の確率微分方程式

以下では確率微分方程式とFokker-Planck方程式の数学的な対応関係について簡単に説明する．一次元空間において，時系列$x(t)$の微分dxが次式に従って動いている時，この時系列$x(t)$の動きを伊藤過程という．

$$dx(t) = y(x(t),t)dt + z(x(t),t)dw(t) \tag{1}$$

ここに，$y(x(t),t)$，$z(x(t),t)$は時間tと時系列$x(t)$の任意の関数である．また，$dw(t)$はWiener過程$w(t)$の微小時間変化量であり，平均0，分散dtの正規分布に従っている．伊藤過程とは一般化したWiener過程の定数部分をxとtの任意関数でより一般化したものである．このように，空間座標$x(t)$の増分が上式の様に右辺のドリフト項と確率増分項で表されるとき，上式を伊藤の確率微分方程式という．重要な点は，常微分方程式で記述される決定論的なシステムは，何らかのノイズを考慮すると，この確率微分方程式の形式で表現できるという点である．

(2)　Fokker-Planck方程式

Fokker-Planck方程式の導出は確率微分方程式から導く方法や，Chapman-Kolmogorov方程式からmaster方程式を経てFokker-Planck方程式を導出する方法等があるが，本論文では確率微分方程式からFokker-Planck方程式を求めている．以下に示す式は(1)式に対応するFokker-Planck方程式である．

$$\frac{\partial p(x(t),t)}{\partial t} = -\frac{\partial y(x(t),t)\, p(x(t),t)}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 z(x(t),t)^2\, p(x(t),t)}{\partial x^2} \tag{2}$$

両者の関係を図化すると，**図−1**のようになる．これらは，同一の現象を異なる2つの視点から捉えた式であり，確率微分方程式がある確率過程$x(t)$，ひとつひとつの経路を表現しているのに対して，経路の確率密度関数の時間発展$p(x(t),t)$を満たす偏微分方程式がFokker-Planck方程式と呼ばれる．確率微分方程式は，決定論的項と確率論的項とで表現されるものであり，(1)式の右辺第一項が決定論的，右辺第二項が確率論的な軌跡を表現する．そして，これら二項の$y(x(t),t)$，$z(x(t),t)$はFokker-Planck方程式の右辺第一項と第二項の$y(x(t),t)$，$z(x(t),t)$にそれぞれ対応している．

(3)　流出解析への導入

$$dq_* = a_0 q_*^{\beta}(\bar{r} - q_*)dt + a_0 q_*^{\beta}\sigma\sqrt{T_L}\,dw \tag{3}$$

$$\frac{\partial p(q_*(t),t)}{\partial t} = -\frac{\partial a_0 q_*^{\beta}(\bar{r} - q_*)\, p(q_*(t),t)}{\partial q_*} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 (a_0 q^{\beta}\sigma\sqrt{T_L})^2\, p(q_*(t),t)}{\partial q_*^2} \tag{4}$$

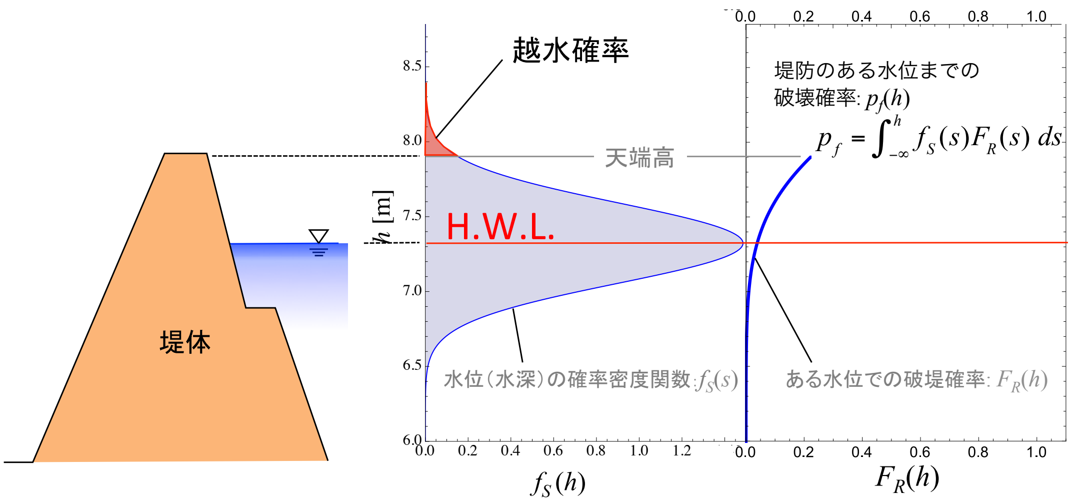
(3)式，(4)式がそれぞれ流出高に関する確率微分方程式およびFokker-Planck方程式であり，いずれかを数値的もしくは解析的に解くことによって確率密度関数の時間発展を求めることができる．これは，上述の通り，降雨を時間的に変動する平均値周りに不確定性を有する入力情報であるとして，貯留関数法などの貯留型の流出計算手法を確率微分方程式の形式で捉えることで得られる．流出計算の基礎式と確率微分方程式の関係性から，流出高に関するFokker-Planck方程式を得ることができ，得られた確率密度関数を変換すれば，流量・水位の確率密度関数の時間発展を求めることができる．

３．考察とまとめ

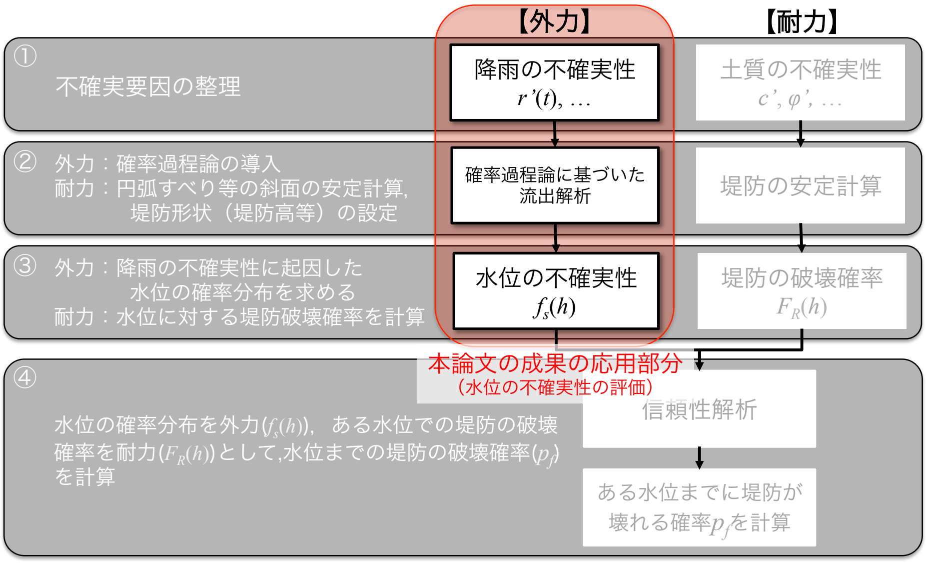
上記で示した枠組のうち，特に水位の不確実性（確率密度関数）が理論的に求まる事は，洪水時に避

難判断をするタイミングを議論する素材として極めて有用であるし，さらに，水位に対する堤防の破壊確率を求めることができれば，水位の分布を外力，堤防の破壊確率を耐力として，信頼性解析を行うことができる．このような考え方は，河川計画にリスク評価の考え方を導入できる可能性を示唆するものであり，気候変動による気象・水象現象の極端化が指摘される中で，「ある閾値を越えてしまう可能性の提示」は極めて重要な考え方である．また，時空間的な降雨のパターンを考慮し，計画規模の流量を求める手法である総合確率法の理論的な背景になるとも考えられ，各降雨パターンの生起確率が独立であると考えれば，ピーク流量の確率分布関数を統合することによって，対象とする流域のある確率年（超過確率）に対応する計画規模のピーク流量を求めることが出来る．

本研究では，水位の確率密度関数の時間発展を求める事ができたため，これを外力とし，堤体の土質定数の不確実性を考慮した信頼解析の枠組みを提示した．**図−2**に示すのが，水位の確率密度関数を外力，ある水位における堤防の破壊確率を耐力とした信頼性解析の概念図である．図中の左図は堤体のポンチ絵，水位はちょうどH.W.L.まで達している場合を想定しており，水位から天端高までが余裕高であると解釈できる．図中の中図は，第5章で求めた水位の確率密度関数であり，ちょうど，平均値がH.W.L.である場合を考えている．また，この確率密度関数を便宜上，水位の関数$f_S(h)$としている．図中の右図は，ある水位における堤防の破壊確率である．線が途中で切れているのは，水位が天端高以上になった場合は，越水が始まり，それ以上水位は上がらないからである．ある水位における破壊確率は$F_R(h)$で表している．つまり，$f_S(h)$と$F_R(h)$の積を0から天端高まで（もしくは無限大まで）積分すれば，ある水位までの堤防の破壊確率p_fを信頼性解析によって求めることができる．水位の確率密度関数の天端高より上の赤く反転している部分の面積は「越水確率」となる．また，$F_R(h)$が例えば，円弧すべり計算を介して算出されている場合，p_fはある水位までに「すべり破壊」する確率となるし，田端ら(2015)のように内田の式や浸透流解析を用いて詳細に堤体内の湿潤状態を計算し，破壊確率$F_R(h)$を計算した場合は，p_fはある水位までに「浸透破壊」する確率として表される．**図−3**に示すのは，著者がイメージする洪水時のリスク



図−2 堤防と水位のイメージ図（左），水位の確率分布fs(h)（中）と堤防の破壊確率FR(h)（右））．（水位の確率分布を示す図中の赤い領域の面積は越水確率を表している．また，右図の青い曲線はFR(h)は各水位における越水確率を算出し内挿した関数である．両者をそれぞれ外力と耐力として信頼性解析を行うことで，ある水位までに堤防がすべり破壊する確率を算出できる．さらに破壊確率と越水確率を比較することができる．）



図−3 水工計画へのリスク評価導入の枠組みと本研究の位置づけ．（赤枠で示した部分が本論文で提示した枠組みで，リスク評価をするための信頼性解析の中で外力（水位の確率密度関数）の算出を行う部分である．）

評価の枠組みである．本論文で示した成果はこの理論的枠組みの中の外力の試算に関する部分である．流出過程における不確実要因を精査し，水位の不確実性の度合いを算出する．当然，本論文の結果が全てではなく，今後もセクションごとの精度を高めていく必要がある点には留意していただきたい．しかしながら，水工計画の中に，リスク評価を組み込もうとする動きは，今まさに始まったばかりであり，本論文で提示したリスク評価の理論的な枠組みは，河川・水文分野の従来型の考えからの転換に際し，有益な知見を提供することは間違いない．

このように，本論文では，水文諸量における不確定性・不確実性の扱いに関して，流出解析に確率過程論を導入した理論的な不確実性の評価の枠組みを提示した．さらに，水位に対する堤防の破壊確率を求めることができれば，本論文で示した水位の分布を外力，堤防の破壊確率を耐力として，信頼性解析を行うことができ，洪水災害が起きるリスクと他の災害や事故の発生リスクとの相対比較ができる理論的な枠組みを示した．これは，洪水時に避難判断をするタイミングを議論する素材として極めて有用となる知見を提供するものである．

参考文献

A. Einstein: On The Movement of Small Particles Suspended in Stationary Liquids Required by The Molecular-Kinetic Theory of Heat, *Annalen der Physik,* 17, 549-560, 1905.

例えば，A. D. Fokker: Die mittlere Energie rotierender elektrischer Dipole im Strahlungsfeld, *Ann. Phys*. 348, 810–820, 1914.

例えば，V. M. Planck: Über einen Satz der statistischen Dynamik und seine Erweiterung in der Quantentheorie, *Sitzungberichte der Koniglich Preussischen Akademie der Wissenschften*, 323-341, 1917.

P. Langevin: Sur la théorie du mouvment brownien, Comptes-Rendus de I'Académie des Sciences 146, 530-538，1908.

A. Kolmogorov: Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, On Analytical Methods in the Theory of Probability, *Mathematics and its Applications,* 26, 448-451, 1931.

伊藤清：確率論【現代数学(14)】，岩波書店，1953.

田端幸輔，福岡捷二，瀬﨑智之（2015）：超過洪水時における堤防破壊確率評価手法に関する研究，土木学会論文集B1(水工学)，Vol.71，No.4，I_1273-I_1278.