

中央大学博士論文

確率過程論に基づく

不確実性を有する物理システムの予測に関する研究

——降雨流出過程への応用——

Cheng Daiwei

成 岱蔚

博士（工学）

中央大学大学院
理工学研究科
都市環境学専攻

平成28年度

2017年3月

目次

| | |
|------------------------------------|----|
| 第1章 序論..... | 1 |
| 1-1 はじめに..... | 1 |
| 1-2 古典力学と近代力学 | 2 |
| 1-3 不確実性を有する物理システムの解析 | 4 |
| 1-4 水文学における不確実性 | 6 |
| 1-5 本論文の構成 | 8 |
| 第2章 不確実性を有する物理システム | 9 |
| 2-1 はじめに..... | 9 |
| 2-2 工学における物理システムの不確実性 | 10 |
| 2-2-1 モデルすることによって生じる不確実性 | 10 |
| 2-2-2 観測、認識の限界 | 13 |
| 2-2-3 カオスによる決定論的な不確実性 | 16 |
| 2-3 不確実性があるシステムの扱う手法 | 18 |
| 2-3-1 解析法 | 18 |
| 2-3-2 サンプルング方法 | 20 |
| 2-3-3 確率過程論 | 22 |
| 2-3-4 連続確率過程（Wiener 過程を例とする） | 23 |
| 第3章 確率過程論を導入した流出解析と不確実性の評価 | 28 |
| 3-1 降雨流出過程 | 28 |
| 3-1-1 降雨流出モデルの発展..... | 29 |
| 3-1-2 単一斜面における降雨流出の基礎式の概要..... | 31 |
| 3-1-3 単一斜面における降雨流出の基礎式の検証..... | 33 |
| 3-1-4 鉛直浸透を考慮した降雨流出モデル..... | 36 |
| 3-2 確率過程論を降雨流出過程への導入..... | 39 |
| 3-2-1 確率微分方程式..... | 39 |
| 3-2-2 Fokker-Planck 方程式..... | 41 |
| 3-2-3 降雨流出の基本式と確率微分方程式の関係..... | 42 |
| 3-2-4 拡散係数の物理的意味..... | 47 |
| 第4章 モーメント方程式 | 52 |
| 4-1 はじめに..... | 52 |
| 4-2 確率常微分方程式のモーメント方程式 | 53 |
| 4-3 降雨流出過程の摂動解析 | 58 |
| 4-3-1 単一斜面における降雨流出の基礎式の摂動解析..... | 58 |

| | |
|--|------------|
| 4-3-2 単一斜面における降雨流出基礎式の摂動解析に対する妥当性の検証..... | 59 |
| 4-4 降雨の不確実性を考慮した降雨流出過程のモーメント方程式..... | 64 |
| 4-4-1 単一斜面における降雨流出の基礎式のモーメント方程式..... | 64 |
| 4-4-2 単一斜面における降雨流出基礎式に対するモーメント方程式の妥当性の検証..... | 65 |
| 第 5 章 確率微分方程式論に基づく不確実性を考慮した物理システムの予測手法..... | 76 |
| 5-1 はじめに..... | 76 |
| 5-2 データ同化..... | 77 |
| 5-2-1 データ同化の基本的な考え方..... | 77 |
| 5-2-2 拡張カルマンフィルタを用いた実時間流出予測..... | 79 |
| 5-3 降雨強度の不確実性を考慮した予測手法の開発..... | 80 |
| 5-3-1 計算手法..... | 80 |
| 5-3-2 計算結果..... | 82 |
| 5-4 モーメント方程式から偏微分方程式への拡張..... | 85 |
| 5-4-1 常微分方程式から連立常微分方程式への拡張..... | 85 |
| 5-4-2 連立常微分方程式と偏微分方程式..... | 86 |
| 5-4-3 開水路 1 次元不定流..... | 88 |
| 5-4-4 せん断応力の不確実性を考慮した 1 次元不定流の計算..... | 91 |
| 第 6 章 結論..... | 102 |
| 6-1 結論..... | 102 |

第1章 序論

1-1 はじめに

台風、洪水、地震などの自然災害のもたらす外力は、人間が制御できる範囲を超える時がある。そこで、一般的には安全性の水準を定めて、その水準までは防災工事によるハード対策で対応し、水準を超えた外力については警報や避難といったソフト対策で対応する。例えば洪水災害の主な原因は豪雨であり、その基準とする物理量は平均降雨強度（1 時間、3 時間、3 日間など）である。しかし、近年設計水準を超えた災害がよく発生する。たとえば、2015 年（平成 27 年）9 月が発生関東・東北豪雨。9 月 7 日から 9 月 11 日までに観測された総降水量は、栃木県日光市今市で 647.5mm、宮城県丸森町筆甫で 536.0mm を観測するなど、関東地方で 600mm、東北地方で 500mm を超え、9 月の月降水量平年値の 2 倍を超える大雨となった。このような設計基準を大きく超えた水災害は、近年社会からの注意が払われるようになってきている。その大きな理由は、昔あまり経験してこなかったとこの 10 数年前から防災学者に認識されつつある気候変動による影響である。

防災の設計において、いかなる強い災害に対しても絶対に安全な設計を施すことは不可能である。設計基準を超えた災害の発生時の対応はリスクマネジメントの重要な課題である。リスクの概念を簡単に表すと、災害が発生する確率と災害が発生した時の被害の積となる。つまりリスクを把握するには、災害が発生する確率を把握することが非常に重要である。しかし、防災設計が扱う物理システムのスケールは非常に大きく、複雑な非線形システムである。つまり、設計基準と同様の頻度の外力が来たとしても、必ずしも同様規模の災害が起きるわけではない。その原因は、物理システムの中に不確実性が含まれているためである。その不確実性の意味は、第 2 章で詳しく説明するが、以上の議論によって、災害のリスクを把握するには、不確実性を有する物理システムの予測方法が必要であることが分かった。本研究の着目点はここにある。

| 日時 | 名称等 | 概略 |
|--------|----------------|---|
| 2015.9 | 平成27年9月関東・東北豪雨 | 関東、東北で記録的な大雨。鬼怒川が決壊、常総市が広域に渡り浸水被害。 |
| 2014.8 | 平成26年8月豪雨 | 西日本から東日本の広い範囲で大雨。京都府福知山で内水氾濫被害、広島で土砂災害。 |
| 2013.9 | 台風18号による大雨 | 四国地方から北海道の広範囲で大雨。京都府由良川が氾濫。 |
| 2012.7 | 平成24年7月九州北部豪雨 | 九州北部を中心に大雨。 |
| 2011.7 | 平成23年7月新潟・福島豪雨 | 新潟県や福島県会津で記録的な大雨。 |

図 1-1 近年の主な水害(2011-2015). 気象庁 HP 参照, 顕著な被害(損壊家屋等 1000 棟以上, 浸水家屋 10000 棟程度以上など)が起きた場合. 水に関連する災害の“減災”が近年の大きなテーマになっており, ハード・ソフト一体化した対策が必要である.

1-2 古典力学と近代力学

不確実性を有する物理システムを解析することは容易ではない. そもそも, 不確実性や, 確率論などの概念を物理システムの解析に導入することが非常に困難である. 近代的な自然科学の始まりとして, Johannes Kepler は Tycho Brahe が 1576~1597 年の間の天文観測データを解析し, Kepler の法則を提案した. Kepler の法則を用いて, ある時刻の惑星の位置が分かれば, その後の惑星の位置がすべて予測できるようになった. Kepler 法則の予測は実際の天文観測データで正しさを検証することができる. この業績は近代的な自然科学の方法論の基礎を作った. つまり, 実験と観測から理論と仮説を提唱し, またその理論を用いて, 自然現象を予測し, 予測結果を実験と観測で検証を行った. さらに, 1687 年に Isaac Newton は Newton の運動法則を発表した. Newton の運動方程式は位置ベクトルの時間に対する二階の常微分方程式であり, ある時刻の位置と運動量を与えれば, あらゆる時刻の運動状態を確定することができる.

Newton 以来の物理学が巨大な成功を収めてきたため, 19 世紀の末に物理学のコミュニティは「物理学における重要な法則はすべて発見した。」という論調も出始めた. 例えば Albert A. Michelson の有名な論述は 1894-1895 の「Annual Register」に記載されていた.

While it is never safe to affirm that the future of Physical Science has no marvels in store even more astonishing than those of the past, it seems probable that most of the grand underlying principles have been firmly established, and that further advances are to be sought chiefly in the rigorous applications of these principles to all the phenomena which come under our notice. It is here that the science of measurement shows its importance—where the quantitative results are more to be desired than qualitative work. An eminent physicist has remarked that the future truths of Physical Science are to be looked for in the sixth place of decimals.

しかし、20 世紀の頭に Albert Einstein が相対論を発表して、固定的な時空間の概念が破れられた。さらに Werner Heisenberg の不確定性原理によって、量子のスケールから見れば、粒子の位置と運動量はある限られた精度でしか同時に正しく知ることができないということを示した。つまり量子システムの時間発展を決定論的に予測するのは本質的に不可能である。

相対論と量子力学は物理学に深遠な影響を与えた。Newton の時代からの方法は相対論と量子力学の時空間スケールに通用しなくなった。近代物理学は相対論と量子力学を中心にして発展し始めた。

しかし、相対論と量子力学が議論している時空間スケールは、人間の日常生活の時空間スケールではない。したがって、近代物理学が一般的な工学の設計分野に与えた影響は限られており、その状況は 1961 年まで続いた。1961 年、Edward Norton Lorenz が、簡単な非線形常微分方程式から作られた天気予報の気象分野の中に、方程式の初期条件を僅かに変えると、予測の結果が大きく変わるという現象を発見した。この方程式が初期条件に対して非常に敏感であるという性質がカオスと呼ばれる現象である。このカオスによって、複雑なシステムに対して決定論的な長期予測をすることは不可能である。その上で、工学や計画論で扱う物理システムは通常スケールが大きいので、直接第一原理の物理法則を用いることができず、モデル化を行う必要がある。しかし、モデル化した支配方程式には対象とする物理システムを表現できるかどうか、という問題が生じる。さらに、システムを解析するための観測や、経験データには、物理真実を反映できるかどうか、という問題がある。実際、われわれは不完全な情報を用いて物理システムの時間発展を予測している。

1-3 不確実性を有する物理システムの解析

前節で述べたように、量子力学が導入する前は、決定論的な考え方が物理学の主流であった。力学系の行動を調べるにあたり、以前の古典力学では、運動を支配する微分方程式とその初期条件を完全に与えられるならば、未来の状態の精密な予言が原理的に可能であり、それを求めることが努力の目標であった。しかしながら、物理的な世界に対してその初期条件、運動方程式の形を完全に知るということは本来、抽象的な概念であり、古典力学が成立するのは、理想化された事情のもとにおいてのみである。ここでさらに現実に近いことを考えると、力学系の行動を、理論的に可能な最大限の知識の下でなく、不完全な規定から出発しても論じ得る方法が必要になってくる。統計力学の役目は、ここにある。

統計力学は気体論から誕生するまでに、多くの段階を経た。気体の運動学の理論は、19 世紀 John Dalton(1766-1844 年), Amedeo Avogadro(1766-1856 年)等によって、化学において確立された分子の概念を熱現象の考察に導入したものである。気体の場合には分子の運動がほとんど自由であると考えられ、分子を完全に弾性的な球体と仮定して、相互の衝突のために各分子がいかに制約されるかを論じ、これによって気体の諸性質を説明しようとするものである。だから、分子説の確立はその理論の前提でなければならない。だが、Maxwell, Boltzmann が気体運動の分子論的な構成に苦闘していた当時、分子説の実験的基礎は必ずしも確立したものではなかった。とくに、1870 年代において、熱力学第二法則、すなわちエントロピー増加の法則の説明に異常な困難があった。すなわち熱力学の第二法則によって、熱現象は常にエントロピーの増大する方向にのみ起こり、その逆を示さない点で非可逆的現象である。これに対して分子の運動が力学の法則に従うかぎり、まったく可逆的な現象でなければならない。可逆的变化のみを行う分子の体系において、いかにして非可逆的な熱現象が起こるかということである。ここに困難があったのである。

気体論が出くわしたこの大難関は、Mach, Krichhoff, Ostwald 等の記述学派ないしは経験批判論を発生させた。Mach 等は熱現象の力学的、分子論的説明の可能性を疑った。Mach 等の見地によれば、物理現象の力学的説明はすべて仮説的なものである。われわれは物理学を事実の記載に限定し、事実の背後に仮説をたててはならない。Mach 等の考え方は、力学的自然観を否定するとともに、あわせてわれわれの経験の背後にある外界までも抹殺しようとするものである。これに対して、Boltzmann の立場は、物質の存在しない運動は考えられないということであった。Maxwell により確立された気体分子に関する速度分布則を確率論的に完成し、Boltzmann 方程式を導い

た．そして、エントロピー S と状態確率分布との間に $S = k * \log W$ (k は比例定数)を見出し、 H 定理を証明し、熱力学過程の非逆性を気体運動論的に導き出すことに成功した．**Boltzmann**は物理学に確率の概念を導入し、偶然性の介入によって初めてこの結果に到達したのである．さらに、エントロピーの概念は1948年に**Shannon**によって情報工学の分野に導入された．「1年先の未来を予測することは1分間先の未来を予測することよりは絶対簡単だろう」という直感は誰でももっているが、それを数学的に、定量的に記述することが可能になるのは「情報エントロピー」の概念である．

統計力学の最初の役割は、微視的な運動（気体分子の挙動）から、巨視的現象（熱現象）を解釈することである．その中で重要なことは、微視的な運動に確率の視点を導入することである．これに関して、もう1つの問題が注目されることとなった．

イギリスの植物学者**Brown**は、1828年に**Philosophical Magazine**という雑誌に、花粉から出た微粒子の運動についての観察（1826～1827年に行った観察）を論文としてまとめている．この現象は長い間原因が不明のままであったが、1905年、**Einstein**により、熱運動する媒質の分子の不規則な衝突によって引き起こされているという論文が発表された．その後、1921年から1923年にかけて、**Wiener**によってその現象が数理的モデルとして発表されている(**Wiener**1921a,1921b,1923)．また、1910年代には、**Fokker**(例えば1914), **Planck**(例えば1917)によって、**Langevin**方程式(**Langevin**1908)から確率密度関数の時間発展に関する偏微分方程式(**Fokker-Planck**方程式)が導かれており、1930年代になると、**Fokker-Planck**方程式は**Kolmogorov**(1931)によって一般化され、**Markov**過程の場合に**Fokker-Planck**方程式が成立する事が示された．これは、**Kolmogorov**の前向き方程式として知られ、**Fokker-Planck-Kolmogorov**方程式と呼ばれることもある．分野や対象とする現象によって呼び名は様々であるが、いずれにしても確率過程論的に密度関数の時間発展を記述した偏微分方程式に他ならない．本論文では先駆者である**Fokker**と**Planck**の名に因んだ**Fokker-Planck**方程式という用語を用いて、この偏微分方程式を呼称する．

ブラウン運動は分子運動論と同様に、直接観測できない分子スケールの運動を対象としている．ブラウン運動はあるスケール（花粉、微粒子）に着目し、それよりサブスケールの力（水分子の衝撃）はランダムな外力として扱うことで、サブスケールの力が着目しているスケールの現象に及ぼす影響を議論している．この理論は土木設計に取り入れることができる．土木設計が扱う物理システムは通常第一原理の物理法則を直接使うことができず、あるスケールに着目し、それ以下のサブスケール効果を無視する．しかし、**Fokker-Planck**方程式を用いて、サブスケールの効果を評価できる可能性がある．

1-4 水文学における不確実性

水文学史における「現代」のうち、1950年頃からの「理論化時代」の中の1970年頃には、水文統計や確率水文学と呼ばれるような研究が盛んに行われるようになった。この動きは、数学的統計学、確率理論および情報理論に関する1930年頃からの著しい研究の成果による影響が大きく、十分な水文資料を欠くという当時の実状（現在もそうであるが）においてすら、防災工学や水資源開発というテーマに対して、水文量の推定、予測、調整などの工学的手法が不断に求められていたという背景に起因するものであった（山岡 1970）。このような時代背景の中、確率水文学と呼ばれるような専門分野が端を発したわけである。図 1-2 では、当時の Kisiel (1969) の論文での水文学におけるシステムの概念的分類を紹介したい。

この分類は特に流出過程における不確実性に着目したものはないが、これを見る限り、入力と変換系（つまり流出メカニズムを記述するシステム）に多岐にわたる不確実要因が内在している可能性を見て取ることが出来る。例えば入力つまり降雨データの捉え方を「A 因果関係と偶然性によるもの」と「B 時間的及び空間的分布によるもの」に大別した後、A を更に「決定論的」「準決定論的」「確率論的」「ハイブリッド」の4つに分類している。降雨の捉え方を確率論的に捉えた場合には、降雨に起因する不確実性を取り扱うことになる。特にこの場合、確率過程的に降雨時系列データを捉えられることが指摘されている。本論文は、降雨の不確実性に起因する流出量の不確実性を評価するものであるが、この降雨時系列を確率過程的に捉えることが大きなポイントになる。また、タイトルにもある「確率過程論」とは、この考え方やアプローチを指し、本論文では確率過程論的な○○ということとする。

I 入力 (降雨)

- A 因果関係(causality)と偶然性(chance)によるもの
 - 1. 決定論的(deterministic)
 - 2. 準決定論的(quasi-deterministic)
 - 3. 確率論的(probabilistic)
 - a. 推計的(stochastic)
 - (1) 純正にランダムな系列(pure-random sequence)
 - (a) 定常過程(stationary process)
 - (b) 非定常過程(non-stationary process)
 - (2) 純正にはランダムでない系列(nonpure-random sequence)
 - (a) 定常過程
 - (b) 非定常過程
 - b. 非推計的(nonstochastic)
 - (1) 頻度解析(frequency analysis)
 - (2) 順序統計学(order statics)
 - (3) 離散事象の確率(probability of discrete events)
 - 4. ハイブリッド, 決定論と確率論の組合せ
- B 時間的及び空間的分布によるもの
 - 1. 均一
 - 2. 非均一

II 変換系(transformation system)

- A 因果関係と偶然性によるもの
- B 河域応答の線形性と時間不変性によるもの
 - 1. 線形時間不変型(linear time invariant)
 - 2. 線形時間変化型(linear time variant)
 - 3. 非線形時間不変型
 - 4. 非線形時間変化型
- C パラメータ形によるもの
 - 1. 集中パラメータ形(lumped-parametric form) (通常の線形微分方程式)
 - 2. 分布パラメータ形(distributed-parameter) (偏微分方程式)
- D 系の開放状態によるもの (すべての流出は流域のより低い端末で現れる)
 - 1. 開かれている: 流域の地中の地質によって決められる.
 - 2. 閉じられている
- E 地形学的情報による
- F エネルギー貯留による
 - 1. 反応のある (貯水池への如きエネルギー貯留) (reactive)
 - 2. 反応のない (摩擦力による如きエネルギーの減殺) (non reactive)

III 出力 (流出域は蒸発)

- A 入力の場合のように因果関係と偶然性によるもの

図 1-2 水文学的系の概念的分類 (山岡 1970)

1-5 本論文の構成

以上を踏まえて、本論文では以下に示す章構成でまとめるものとする。

第1章は研究の背景および問題点について論述した。古典力学系の決定論的な考え方には限界がある。エントロピーとリスクを考慮する時に、物理システムの不確実性を考慮しなければならない。

第2章は不確実性を有する物理システムの数学的な扱い方を紹介した。入力と出力の物理量は関数関係がある場合は解析法を直接使うことができる。物理システムが微分方程式に支配されている場合は確率過程論を使う。

第3章は流出解析に確率過程論を導入し、入力データの不確実性を評価するために、確率過程論の概要を解説した。具体的には、Brown運動の数理化であるWiener過程の定義と確率過程の意味、それを基礎として展開されるIto calculusを解説した。また、Brown粒子の運動を記述したLangevin方程式とIto calculusによって確率解析学的な微積分の規則が導入された確率微分方程式の概念とそれに対応するFokker-Planck方程式の存在を示した。加えて、Fokker-Planck方程式の導出は、確率微分方程式から行えることを示した。また、最もシンプルな確率過程であるドリフトを持たない（時間的に拡散するのみ）Wiener過程の確率微分方程式とFokker-Planck方程式の解を比較して、両者が同一の確率過程を表現する異なる方程式系であることを示した。

第4章は第3章で導いたFokker-Planck方程式が、より複雑な物理システムに応用することが困難であることを指摘。摂動解析を用いて、Fokker-Planck方程式の漸近展開を行い、モーメント方程式を導いた。その妥当性を検証した。

第5章は本研究が提案した手法を、実際に草木ダム流域に使い、その効果について検討した。

参考文献

菅原正巳, 1972: 流出解析報-水文学講座【7】巻。

高棹琢馬, 1963: 出水現象の生起場とその変化過程, 京都大学防災研究所年報, 第6号, pp.165-180.

山岡勲, 1970: 水文学における確率過程, 水工学に関する夏期研修会講義集, 6, B.11.1-B.11.18.

第2章 不確実性を有する物理システム

2-1 はじめに

19 世紀末の物理学は、物理システムの時間発展をその物理システムの状態変数の時間に対する微分方程式の形式で記述することが主流であった。物理システムにある時刻の初期条件を与えれば、その後あらゆる時刻の物理システムの状態を確定できる。その考え方は大きな成功を収めてきたが、量子力学の誕生および発展によって、決定論の考え方は量子のスケールでは通用しないことがわかってきた。決定論に対して不確実性という言葉は **Heisenberg** によって提唱され、現在では“不確定性原理”として知られている。それによると、粒子の位置を決めるとその運動量が一意には決まらず、運動量を決めると位置が統計的にしか決まらないという驚くべき内容である。現在、量子力学および不確定性原理は一般的に認められている理論であるが、工学上扱う物理システムは通常人間が感知できるスケールであるから、量子力学の効果が無視できるほど小さい。そのため、現在の工学、設計の分野では決定論的な考え方が主流になっている。

しかし、実際に工学においても、決定論的にシステムを解析することが根本的に可能かどうかに関しては論争がある。その原因は、工学において第一原理の物理法則を直接使える場合は極めて少ないためである。複雑な現実の工学問題をモデルという単純化された数学的表現に変換しようとする考え方は工学の基礎になっている。しかしそれにより、物理モデルは本来の物理真実とは必ず差異が生じる。その上で観測の限界や、人間の認識の限界があるため、われわれは不完全な情報に基づいて、システムを解析、予測している。

さらに、モデル化を一切せず、第一原理を直接用い、その上で、観測の技術が非常に進んだと仮定しても、カオス現象があるため、長期的に決定論的にシステムを予測することは不可能である。カオス現象とは、非線形の物理システムが初期条件に非常に鋭敏性を持っており、初期条件が僅かに異なると、しばらく時間が経ったときに、

予測結果が大きく異なるという現象である。カオス現象は“決定論的な不確実”とも呼ばれている。それは量子力学において議論した本質的な不確定性と区別をするべきである。

以上の点を踏まえ、本章は以下の問題を議論する：1，モデル化、認識の限界およびカオス現象が工学における物理システムの解析、予測に及ぼす影響。2，本研究が対象とする降雨流出現象を紹介する。3，不確実性を有する物理システムの数学的な表現について述べる。

2-2 工学における物理システムの不確実性

前節に述べたように、工学設計が扱う物理システムは通常、量子力学の中で議論する不確実性はないが、以下の3つの原因から、決定論的にシステムの未来を予測することが非常に困難である。1，モデル化することによって、用いられるモデルは物理真実を表現できるかどうか？ 2，観測，および人間の認識の限界によって，システムの未来を予測するための全ての情報を手に入れることが可能かどうか？ 3，カオス現象のあるシステムの未来を決定論的に予測することが可能かどうか？以下は，この3つの原因について詳しく論じる。

2-2-1 モデルすることによって生じる不確実性

決定論的な考え方に基づくモデル化の方法は，一般的に以下の3つにまとめることができる。

(1)第一原理モデリング：物理現象を支配する第一原理（例えば Newton の運動法則，質量保存則，エネルギー保存則）を直接使う。この方法は対象とする物理システムの構造が完全に既知である場合に適用する。

例えば乱流問題に対して，乱流モデルを使わずに流体力学の支配方程式 Navier-Stokes 方程式を直接解くことである。この方法は DNS(Direct Numerical Simulation)と呼ぶ。しかし，DNS を使うには計算コストが非常に大きいため，大きいスケールの工学問題に適用できない。

(2)近似的なモデリング：ここで用いる，「近似」という言葉は2つの意味で用いられる。1つ目として，対象とする物理システムに第一原理を用いて表現するが，第一原理の微分方程式を直接解くことが困難である際に，物理システムの状況を合わせて，ある特定の状況を想定し，本来の微分方程式を簡単化する場合である。例えば海岸工

学によく使われている微小振幅波理論を考える．以下の制約条件を加えて，流体の運動を支配する方程式を大きく簡単化した．1，完全流体．2，渦なし．3，水深 H /波長 $L \ll 1$ ．4，外力は重力のみ．条件1と2を用いると，速度場が速度ポテンシャルを用いて表現され，方程式の未知数の個数が減る．条件3を用いると摂動法によって運動方程式を線形化することができ，方程式の近似解が得られる．これが微小振幅波の理論の基本的な考え方である．

このような実際の対象を考慮し，ある制限条件の下で物理システムの支配方程式を簡単化するのは，工学モデリングの中において非常に重要な思想である．このように構築したモデリングは，通常，第一原理モデリングと同じように，調整できるパラメータがない．さらに，実験室は制限条件をコントロールすることができるため，モデリングの正しさは実験で非常に高精度に検証することができる．

「近似」は2つ目に，対象システムの構造が完全に把握することができず，モデリングをする時にある一部分のみに第一原理の物理法則を用い，残りの部分は経験則と実験あるいは観測結果を用いて決める際に用いる．

例を挙げれば，開水路非定常流の近似理論 **Kinematic Wave** 法は，このように構築したモデルである．**Kinematic Wave** 法は河川の上流に洪水が来る時に，流量，水位の増大が下流に伝播する現象を表現する方法である．この現象と対応する第一原理の物理法則は質量の保存則と流体の運動方程式である．それに対して，**Kinematic Wave** 法は質量の保存則を使ったが，運動方程式は使われていない．その代わりに以下の水深と流量の経験式を使った．

$$q = \alpha \cdot h^m \quad (2-1)$$

ここに， h は水深であり， q は単位幅流量である． α と m は経験則から決まるパラメータである．式(2-1)は運動方程式と同様の役割であるが，運動方程式から直接導くことができない．経験則を用いることによって，物理システムの支配方程式は大きく簡単化したものである．そのため，より大きなスケールに適用できるようになった．しかし，経験から決まるパラメータが存在するため，モデルを新しいケースに応用する場合に，パラメータを同定しなければならない．なお，物理システムの物理構造が完全に明らかにされていないので，経験から決まるパラメータには不確実性がある．例えば水文学に良く使われる貯留関数法を例として説明する．

貯留関数法は1962年に木村らによって提案された洪水流出モデルである．基本式は**Kinematic Wave**に基づいてさらに常微分方程式まで簡単化された式である．貯留関数は流出現象の非線形性を比較的単純な形式で表現でき，計算も容易なことから，基本高水流量算定及び洪水予測手法として多用されてきた．しかし，そのモデル定数

の物理的意味が不明確なことから、モデル定数値と流出特性を規定する斜面長、勾配、粗度などの流域特性値ないしは降雨特性値との関係性を明確化できず、どの因子が計算精度に影響するかを定量的に評価できないという課題がある。

| 水系名 | 洪水数 | c_{11} | | c_{12} | | c_{13} | | 減衰係数(λ) | |
|-------|-----|-------------|------------------|-------------|------------------|-------------|------------------|-------------------|------------------|
| | | 平均(μ) | 標準偏差(σ) | 平均(μ) | 標準偏差(σ) | 平均(μ) | 標準偏差(σ) | 平均(μ) | 標準偏差(σ) |
| 天塩川 | 51 | 12.213 | 5.040 | 0.143 | 0.178 | 1.445 | 0.406 | 0.019 | 0.005 |
| 渚滑川 | 42 | 11.193 | 3.992 | 0.183 | 0.124 | 1.308 | 0.491 | 0.017 | 0.005 |
| 湧別川 | 32 | 10.157 | 2.219 | 0.181 | 0.072 | 1.438 | 0.289 | 0.014 | 0.003 |
| 常呂川 | 34 | 13.581 | 3.894 | 0.123 | 0.073 | 1.652 | 0.488 | 0.018 | 0.005 |
| 網走川 | 20 | 17.005 | 4.604 | 0.094 | 0.040 | 2.939 | 1.259 | 0.014 | 0.003 |
| 留萌川 | 39 | 11.293 | 2.816 | 0.193 | 0.087 | 1.477 | 0.479 | 0.017 | 0.010 |
| 石狩川 | 72 | 11.193 | 4.320 | 0.144 | 0.126 | 1.848 | 0.600 | 0.019 | 0.014 |
| 尻別川 | 69 | 12.624 | 4.172 | 0.106 | 0.058 | 1.854 | 0.484 | 0.017 | 0.004 |
| 後志利別川 | 65 | 9.232 | 2.382 | 0.148 | 0.081 | 1.469 | 0.396 | 0.020 | 0.006 |
| 鹉川 | 34 | 10.591 | 2.580 | 0.146 | 0.065 | 1.491 | 0.680 | 0.023 | 0.005 |
| 沙流川 | 60 | 10.893 | 2.470 | 0.130 | 0.077 | 1.307 | 0.357 | 0.016 | 0.005 |
| 釧路川 | 42 | 21.878 | 7.517 | 0.078 | 0.047 | 3.370 | 1.287 | 0.018 | 0.006 |
| 十勝川 | 86 | 13.649 | 4.143 | 0.114 | 0.065 | 1.781 | 0.789 | 0.017 | 0.004 |
| 標津川 | 4 | 20.465 | 3.495 | 0.073 | 0.007 | 2.448 | 0.429 | 0.012 | 0.005 |
| 全水系 | 650 | 12.488 | 5.035 | 0.135 | 0.094 | 1.750 | 0.824 | 0.019 | 0.013 |

表 2-1 単一流域を対象とした北海道内の一級河川(標津川は指定河川)における 650 個の既往洪水事例から同定した c_{11} , c_{12} , c_{13} 及び λ の値である。表に示すように、同じ流域でもパラメータを一意に定まることができなく、ある分布を持つ結果しか得られない。

(3)システム同定のモデリング：このモデリングの方法は物理法則を使わない、実験、観測データに基づくモデリングである。データ駆動型のモデリングとも呼ばれている。

大量の観測、実験、計測データから、いかにして意味のある情報を抽出するかは、現代工学における重要な一つの課題である。古典的な方法として、曲線をあてはめる方法がある。それは実験、観測から得られたデータに最もよく当てはまるような曲線を求めることである。その後この方法を基礎にし、一般的な線形物理システムの同定に関しては、理論体系が完備された。それは線形物理システムを伝達関数(Transfer function)で表現することである。

さらに、近年コンピュータの計算能力の向上とともに、機械学習(Machine learning)というシステムの手法が発展してきた。実験、観測データから、ある程度の数のサンプルデータの集合を入力して解析を行い、そのデータから有用な規則、ルール、知識

表現, 判断基準などを抽出し, アルゴリズムを発展させる. なお, データ集合を解析するので, 統計学との関連が深い. なお, システム同定のモデリングには物理法則が全く使われていないので, 汎用性が極めて広い. 機械学習は検索エンジン, 医療診断, スпамメールの検出, 金融市場の予測, DNA 配列の分類, 音声認識や文字認識などのパターン認識, ゲーム戦略, ロボット, など幅広い分野で用いられている. しかし, システム同定のモデリング手法はシステムの大量の観測あるいは実験のデータが必要であるため, データが乏しい場合には適用できない. なお, 物理法則を使っていないため, システムの物理構造が変わる場合は, 新しいシステムとして扱う必要がある.

2-2-2 観測、認識の限界

観測の現状は対象によって大きく異なる. 以下は本研究が対象とする降雨流出現象の観測を例として, 水文観測の現状について述べる.

降雨にはそれをもたらす気象要因によって低気圧, 前線, 台風等のメソ α , β スケールから強降雨域が 1~2 キロ程度の局所的集中豪雨, いわゆるゲリラ降雨がある. さらにこの 20 年来, 縦方向に 100 キロ程度の長さを有し, 1 日オーダーの時間スケールで降り続くいわゆる線状降水帯からの降雨も発生している. この中でメソ α スケールの気象擾乱や台風や低気圧に起因する降雨の監視に関しては, 従来の気象庁や国土交通省保有の C バンドレーダ (波長 5cm 帯の電波を使用) のデータを用いることでかなりの精度での降雨強度の推定が可能である. 一方, 非常に強降雨強度を示す線状降水帯やゲリラ豪雨の観測には国土交通省が近年配置しつつある X バンド MP (マルチパラメータ) レーダが威力を発揮する. 従来, 強い雨の場合には電波の減衰が危惧され, これを避けるためにできるだけ波長の長い電波を使用するほうが有利であった. しかし, 波長の長い電波を使うということは降水粒子の詳細情報が欠落するという二律背反の特性を有していた. 一般に, 落下中の降水粒子は容易に想像されるような涙型ではなく, 底の盛り上がったおむすび型をしていることがわかっている. この情報を捉えることが出来れば降雨強度をより精密に測定出来るようになるが, この利点を取り込んだのが同一波長の 2 種類の電波を使う X バンド MP (マルチパラメータ) レーダである. この場合には, 降雨減衰を補間する目的で同一地点に 2 台から 4 台の複数のレーダを併用し, 三次元的に落下しつつある降雨強度の空間分布を捉えることが出来, これにより今後 5 分から 20 分以内に地上に落下するであろう豪雨の卵を見つけ出し, 地上降雨強度を直接予測することが可能となりつつある. この新しい降雨観測システムの有効利用のために国土交通省は X バンド MP レーダに関する技術開発コンソー

シアムを立ち上げている。このコンソーシアムは国の研究機関である気象庁気象研究所，国土交通省国土技術政策総合研究所や独立行政法人の土木研究所，防災科学技術研究所，情報通信研究機構や各種の財団法人および大学，民間企業からなる 41 組織から構成されており，降雨の定量観測の精度向上からこれを用いた降雨の短時間予測手法の開発や洪水氾濫予測手法の開発等の積極的な活動がなされている。流出モデルの出力値と実測河川流量との間に不一致が見られるとき，従来は降雨の空間分布が十分に把握されていない為であるという言い訳が成り立ち得たが，X バンド MP レーダを用いた高精度の降雨観測データが得られる以上，従来のイクスキューズは使えなくなり，より精密な流出モデルや流出パラメータの合理的な選定が強く求められる時代に突入したと言えよう。

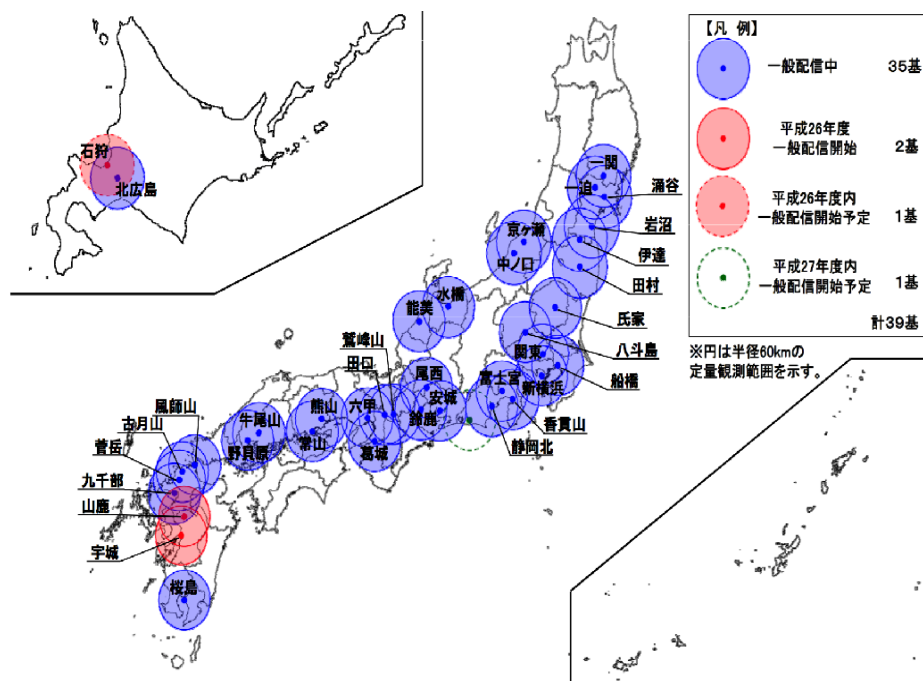


図 2-1 XRAIN の整備状況（平成 27 年度一般配信開始予定も含む。平成 26 年 7 月 7 日時点，国土交通省 HP，2015 年 11 月 23 日参照。）

次に河道内の洪水の実態監視に関して述べる。従来、治水計画においては流量が基本となっている。それは流量が10km オーダー離れた上下流の二地点間における変化が少なく、数10km 以上流下して初めて流量の変化が現れるという保存量としての特性を内包しているからであろう。しかし、洪水時の危機管理においては一般的には流量よりもむしろ水位の時系列データがより重要な役割を果たす。現在では河川のいくつかの地点における水位を基に地元の市町村等は避難勧告や避難指示を出す。決められた1,2 地点のみの水位データだけでは不十分であり、あくまで洪水防御システムの一つとしての堤防の高さと強度と水位およびその継続時間との相対関係から総合的に判断されるべきものであろう。従来、気象条件によらず長期間安定して水位を測ることは意外にも技術的に難しい問題であり、水位計の設置と維持にもそれなりの維持管理費を必要としてきた。一方 IT 機器やリモートセンシング技術の長足の進歩は目覚ましいものがあり、これを有効に活用して河川の流下方向にほぼ連続的とも言える密な水位観測が可能となりつつある。現代はまさにこれらを積極的に取り込む時期である。一方、扇状地河川や低平地を流れる河川といえども局所的には水位の他に流速そのものも注視しなければならない観測量である場合がある。これに関しても ADCP に代表される超音波や電磁波を用いた洪水流の河道内横断計測も可能になっている。一般に行政が行う水理水文観測には、将来の治水計画や管理のためのオペレーショナルな観測と、危機管理のための観測の2 種類がある。そのどちらの観測方法や観測体制にしても、従来の観測方式を継続しつつも、新しい技術の積極的導入が望まれる。上記の新しい観測手法に関しては、米国が圧倒的優位を保っており、その観測手法は ISO 基準化へと向かっている。日本においては北海道十勝川においてほぼ実物スケールの堤防破壊実験が継続されており、これによって越水型堤防破壊の水理学的・地盤工学的物理メカニズムの解明が進められていると同時に、氾濫水の挙動に関するリモートセンシング技術の開発も行われており、ここから得られる知見が氾濫シミュレーションの精度向上に寄与することを望むものである。特に航空機や人工衛星を利用したリモートセンシング技術の氾濫予測や避難シミュレーションへの応用技術の進展と行政によるその実用化への促進が強く望まれる。

次に都市域におけるいわゆる都市型水害について考える。都市型水害は多くの場合ゲリラ豪雨や線状降水帯的集中豪雨によってもたらされることが多いが、都市域における氾濫予測の観測体制はひとえに下水管を流れる流量・水位・流速の面的同時観測体制の構築である。多くの研究者やコンサルタントは都市内氾濫シミュレーション手法の開発を行っているが、その検証に耐えうる下水管内を流れる同水の水文観測データの不足に常に悩まされてきた。仮に地表面氾濫計算をおこなっている都市域とい

えども一旦氾濫が起きたときの地表面水位の計測システムが完備しているところはなく、洪水痕跡だけが実証に用いるデータでしかないのが現状である。数年前にインドネシアで発生した津波被害では、世界中で30万人以上の人々が亡くなっている。この時の経験では、たとえ都市部の地表面水深が50cm程度といえども流速次第では多くの人命が奪われることがわかっている。低平地の都市域においては大河川の氾濫水の他に、津波高潮による浸水被害や地震に伴う堤防破壊に伴う浸水も考慮しなければならない。これらに関してはその観測全てを地方自治体に委ねることが技術的、経済的および行政的に可能であるかという問題がある。例えば低平地都市部の排水機場は内水氾濫用の排水能力しかもっておらず、大河川からの氾濫水の排水用には設計されていないのが現状である。さらに人口過密地帯の低平地都市部における治水対策そのものの計画・管理主体は従来のままでいいのか。これは今後の治水体制に関して大いに議論すべきところであろう。

一方で、観測精度が向上しているとは言え、観測手法の違いや我々の認識の限界に起因する降雨の不確定性、不確実性が存在するのも事実である。冒頭で記したとおり、雨粒がいつどこで氷の粒から相転移したか、その雨粒がどの経路を辿って、どれ程の時間をかけて落下し、途中、衝突し体積が増えたか、分離して体積が減ったか、蒸発したか、いつどこに着地したかを一粒ずつ時間的・空間的に、ほとんど連続的に観測することができれば(雨粒と書くが、当然分子レベルで観測できれば)、降雨現象はほとんど確実に決定論的に知ることが可能である。現状では、我々が認識可能な降雨とは、レーダ雨量計で観測されたもの、もしくは地上雨量計で観測されたもの等であり、いずれも流域に降った雨滴を連続的に一粒ずつ認識しているわけではない。また、観測という過程を経て数値的に認識する以上、観測誤差が付きものである。加えて、我々が認識できる現象には限界がある事を知る必要がある。しかし、土木工学において、これら観測限界や認識限界までを不確実性として扱い、その理論的枠組みを提示するような研究は今まで行われてこなかった。

2-2-3 カオスによる決定論的な不確実性

モデルが完全にシステムの物理真実を反映することができないことと、観測の限界によって、対象とするシステムのすべての情報を手に入れることができないことは広く知られている。しかし、前節にも述べたように、観測の技術が発展するにつれて、システムの情報をより詳しく、正しく手に入れることが可能になる。なお、コンピュータの発展により、数値計算の能力も向上している。従来では不可能であった高解像

度の計算もできるようになった。では将来、モデル化をせずに、システム全体を第一原理で表現し、観測も、すべての情報が正しく手に入れることが可能になったら、「完璧」な予測あるいはシミュレーションは可能であるか？本節はこの質問について議論する。

結論から言うと、決定論的な「完璧」な予測はほぼ不可能である。その原因はカオス現象である。カオス現象に最も注意しなければならないのが、気象予報の分野である。天気予報はハイテクの現代でも、依然とても困難である。それは天気が風、雲量、温度、湿度などの極めて多くの要素に支配される複雑な現象だからである。気象観測地点を増やして地表を細かい観測網で覆い、詳しく正確なデータを取り、スーパーコンピュータを用いて詳しい理論式に入れて処理する方法が発達すれば、天気予報はもう少し正確になるに違いない。

しかし、この方法で気象予報を改良する努力を進めていた研究者は、天気が実際には本質的に無秩序であることに気づいた。天気の変化は本質的にカオス的である。アメリカの気象学者 Lorenz は気象変化の研究に取り組み、1 つから 2 つの方程式からなる気象変化の連立方程式をコンピュータにかけていた。1961 年のある日、計算結果の検算のために、はじめに入力した値を再び入れてみた。しかし、コンピュータは前と全く異なる計算値を示した。その原因は、Lorenz のはじめの入力値には、検算をした時の入力値と $1/5000$ 程度の誤差があったことである。その程度の誤差は問題にならないと思ったが、計算の過程で誤差は急激に拡大されて、前の計算と全く異なる計算値が得られたのであった。

コンピュータは正しく働いていた。入力が完全に同様であれば、その後の計算値は決定論的に一意的に決まってくる。しかし、もし入力がわずかでも異なれば、すぐに全く似たところのない結果が得られた。これは初期条件に対する敏感性と言われている。Lorenz は気象変化のモデル方程式を扱っている中で、これを偶然発見した。

まとめると、初期値鋭敏性により極めて小さな差も指数関数的に増大していくので、初期値鋭敏性を有する実在の系の将来を数値実験で予測しようとしても、初期状態（入力値）の測定誤差を無くすことはできないので、長時間経過後の状態の予測は近似的にも不可能となる。つまり、決定論的に長時間の予測は不可能であるということである。この性質は無限にモデルを精密化し、あるいは観測網を細かくし、予測精度を上げるという手法は、本質的に限界があることを示している。

2-3 不確実性があるシステムの扱う手法

不確実性のある物理システムの扱う手法は以下の3つが挙げられる。1) 物理量の間の関数関係がはっきり分かるような簡単な物理システムであれば、解析法が使える。ただし、このような物理システムは現実中に非常に少ないである。2) 一般的なシステムに対して、以下のサンプリング手法が使える。システムの中に不確実性が有する物理量に対して乱数を発生させ、つまりサンプリングをする。すべてのサンプリングの結果の統計性質からシステムの時間発展を求める。この方法は物理システムに対して特に制限なし、汎用性が非常に強いが、場合によって、安定な統計性質をサンプリングの結果から抽出する際に、必要なサンプル数が非常に多いことがある。他に、サンプリング手法は、物理量の不確実性はどのようにシステムの時間発展に影響するのを解析的に解釈することができない。3) 確率過程論的にシステムの時間発展を解析する方法。この方法は本研究で扱う手法であるため、次の節で詳しく紹介する。

2-3-1 解析法

解析法：この方法は以下の場合によく使われている。物理量 x と y の間の関数関係がわかる場合は、 x の不確実性から y の不確実性を計算する。例えば、河川の流量を、直接連続観測するのは非常に難しいため、通常は観測地点の水位 (H) と流量 (Q) の関係を求め、連続的に観測する水位データから、観測水位に対応する流量を算出することができる。

図 2-2 に示すように赤い点は観測された水位と流量のデータである。洪水時、河床勾配の緩やかな河川では、水位上昇期と下降期の同じ水位において流量を比較すると、水面勾配の影響を受けて、洪水上昇期の流量の方が多く、水位 H と流量 Q の関係は反時計周りの楕円状軌跡となっている。簡単化すると、水位 H と流量 Q の関係はその楕円軌跡の中心軸で表現する。図においては、その中心軸を二次関数で近似している。

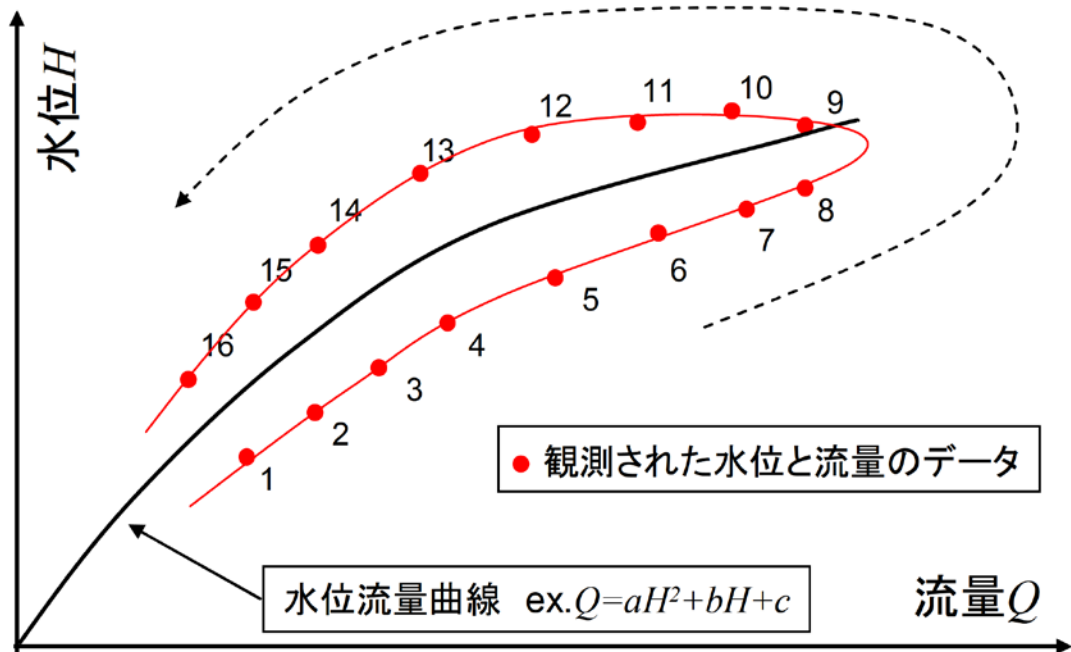


図 2-2 H—Q 曲線の典型例. 実測データを用いて, この関係を同定することができる. この関数関係があれば, 例えば水深観測誤差がある場合, それが流量に及ぼす影響は簡単に解析法で計算できる.

これで水位 H と流量 Q の関数関係がわかった, 以下の解析法を用いて, 水位の不確実性から流量の不確実性を算出することができる.

$$Q = g(H) \quad (2-1)$$

$$F_Q(q) = F_H(g^{-1}(q)) \quad (2-2)$$

ここに, 式 (2-1) は H と Q の関数関係を示している. 式 (2-2) の中の, $g^{-1}(q)$ は $g(H)$ の逆関数である. $F_Q(q)$ は流量 Q の分布関数であり, $F_H(h)$ は水位 H の分布関数である. これで H の分布から Q の分布を計算できる. さらに,

$$f_Q(q) = \frac{dF_Q(q)}{dq} = f_H(g^{-1}(q)) \frac{dg^{-1}(q)}{dq} \quad (2-3)$$

式 (2-3) から, H の確率密度関数から Q の確率密度関数を直接求めることができる.

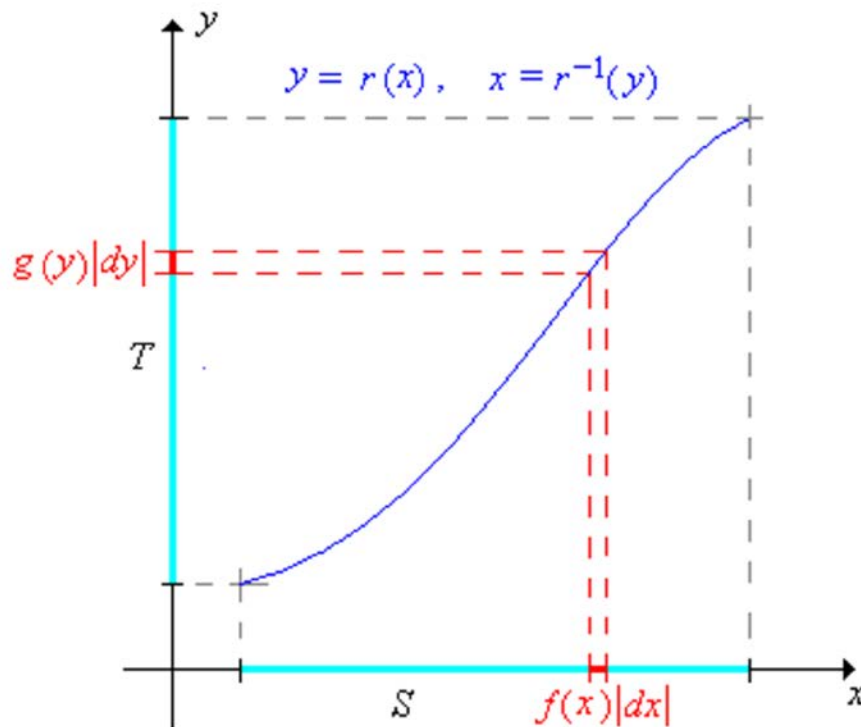


図 2-3 ある確率変数 X を考え、その確率密度関数を $f_X(x)$ とする。このとき、 X の関数 $Y=g(X)$ で与えられる確率変数 Y の確率密度関数 $f_Y(y)$ はこのように求められる。

2-3-2 サンプルング方法

物理システムを解析する時に、通常は基本的な物理法則を用いて複数の物理量に関する微分方程式を立てる。そして、初期条件と境界条件を用いて、微分方程式を解き、物理量の間の特関関係を明らかにする。

しかし、微分方程式を厳密に解き、物理量の間の特関関係が得られることは極めて少ない。これが得られない場合は、方法 1 の解析を使うことができなくなり、以下のサンプルングの方法が必要になる。

サンプルング計算とは、不確実性を持つ物理量（初期値、パラメータ、外力）に乱数を与え、複数の計算を行い、得られた結果を統計的に処理することで、物理量の持つ不確実性がシステムの時間発展に与える影響を評価する方法である。

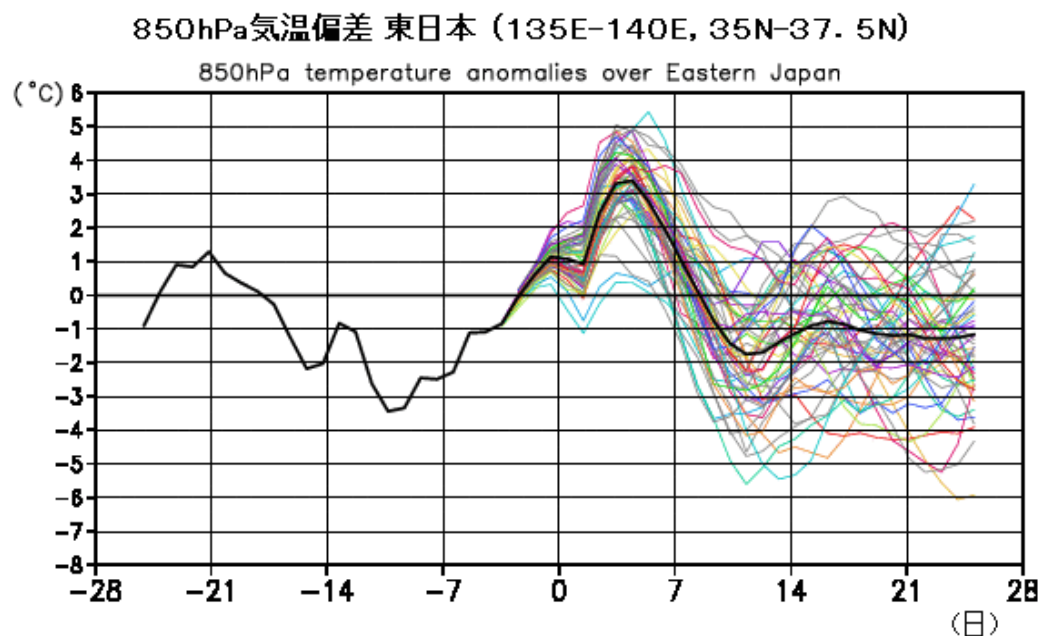


図 2-4 気象庁が行っているアンサンブルの予測手法である。気象システムは初期条件に対して敏感であるカオス性質があるから、初期条件を変えて、サンプリング予測を用いている。

図 2-4 は日本国土交通省気象庁が作成したサンプリング予測の一例である。ここでは 850hPa（地上約 1,500m）の気温の平年差の予測を示している。50 本の細い実線は個々の予測結果である。初期条件の不確実性がシステムに与える影響を評価するため、初期値にわずかなバラツキを与えた。その結果、50 個全ての予報が異なる予測結果を示していることが分かる。黒の太い実線は 50 本の細い線を平均したもので、これがアンサンブル平均の予測結果である。

2-3-3 確率過程論

確率過程とは、確率変数が時間とともに変化する過程である。不確実性を持つ物理量は確率変数として扱うことができる。当然、不確実性を有する物理量システムの時間発展は、確率過程論で記述することができる。さらに、確率過程論の記述する方法は以下の2つがある。

Markov 連鎖による記述する手法。この方法は最初時間上離散的な Markov 過程を記述する方法である。Markov 過程とは、1 個前の状態だけによって次の状態が決まる確率過程である。これは例えば 1 時間後の流出高は 3 時間前の降雨強度、流出高と関係なく、現在の降雨強度および流出高のみから決まるということである。

以下は Markov 連鎖の簡単に紹介する。ある物理システムの状態を状態ベクトル \vec{X} で記述する。物理システムの時間発展を解析することは、時々刻々の状態 $\vec{X}(t)$ を知ることと同様である。確率過程論の基本的な役割は、物理システムの現在と過去の状態から、未来のある状態に遷移する確率を明らかにすることである。この確率は「遷移確率」と呼ぶ。現在の時刻は $t = n$ だとすると、遷移確率は以下の式で表すことができる。

$$P(\vec{X}(n+1) = \vec{x}_{n+1} | \vec{X}(n) = \vec{x}_n, \vec{X}(n-1) = \vec{x}_{n-1}, \dots, \vec{X}(0) = \vec{x}_0) \quad (2-4)$$

遷移確率は条件付き確率である。式 2-4 の条件付き確率の意味は、 $t = n$ 時刻のシステムの状態を知るには、システムの過去時々刻々の状態をすべて知る必要がある。この条件は一般的な物理システムに対して強すぎるため、以下のことを考えられる。

$$P(\vec{X}(n+1) = \vec{x}_{n+1} | \vec{X}(n) = \vec{x}_n) \quad (2-5)$$

式 2-5 の条件付き確率の意味は $t = n$ 時刻のシステムの状態は、1 タイムスタンプ前の状態のみで決まる。先述ように、この性質は Markov 性と呼ぶ。Markov 性を有する確率過程は Markov 過程と呼ぶ。本研究が対象とする物理システムの時間発展はすべて Markov 過程だと仮定する。

決定論的な物理システムの時間発展は時間に関する微分方程式で表す。システムのある時刻の状態を初期条件としてその微分方程式を解けば、システムの状態はすべて予測できる。確率過程論の場合では、式 2-5 の遷移確率は決定論的なシステムの時間発展を支配する微分方程式と同じ役割である。遷移確率さえ分かれば、確率過程の時間発展を解析することができる。ただし、決定論とは異なり、確率過程論は物理システムのある時刻の状態ベクトルの確率分布の時間発展を明らかにしなければならない

いので、式 2-5 を状態ベクトルの確率密度関数の時間発展に関する式に書き換える必要がある。

まずは最も簡単な場合を想定する．1) 物理システムの状態ベクトルは一次元である．つまり、 $\vec{X}(n+1) = X_{n+1}$ ということである．2) 物理システムの時間発展は離散的に表すことができる．

$$\begin{aligned} & P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_{n-1} = x_{n-1}) \\ &= \int P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n) P(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1}) dx_n \end{aligned} \quad (2-6)$$

式 2-6 は一般的に Chapman-Kolmogorov 方程式と呼ばれる．1906 年にポーランドの物理学者 Smoluchowski により、特別な場合が導出されるとともに、その後英国の物理学者 Chapman やロシアの数学者 Kolmogorov らによって、一般的な形で定式化された．この式は物理システムのある時刻の状態変数の確率密度関数と遷移確率の関係を示している．例えば、 $t = n + 1$ 時刻の確率密度関数 $P(X_{n+1} = x_{n+1})$ を求めたい場合:

$$P(X_{n+1} = x_{n+1}) = P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_{n-1} = x_{n-1}) \cdot P(X_{n-1} = x_{n-1}) \quad (2-7)$$

式 2-7 は条件付き確率の定義そのものである．つまり Chapman-Kolmogorov 方程式と条件確率の定義を合わせば、確率過程の解析ができる．Chapman-Kolmogorov 方程式のような確率密度関数の時間発展を表す式は一般的に Master 方程式と呼ばれる．Chapman-Kolmogorov 方程式は Master 方程式の一種である．ここに一種ということとは Chapman-Kolmogorov 方程式は Markov 性のある確率過程の Master 方程式である．以下は Wiener 過程を例として、確率過程の時間解析の流れを説明する．

2-3-4 連続確率過程 (Wiener 過程を例とする)

イギリスの植物学者 Brown は、1828 年に Philosophical Magazine という雑誌に、花粉からでた微粒子の運動についての観察 (1826~1827 年に行った観察) を論文としてまとめている．最初に花粉の微粒子の運動を観察し、その原因を探るために様々な溶媒や溶質を用いて観察して、論文としてまとめている (江沢 2013)．その後、この運動に関連して、分子の熱運動に関する研究が Boltzmann (1872) によって行われているが、Brown 運動に関係する研究はそれ程盛んに行われてはいなかった．しかし、1905 年に Einstein (1905) がブラウン運動 (Brown, 1827) する微粒子は熱運動する分子の不規則な衝突に起因することを理論的に示してから目覚ましい発展を見せる．この理論は、Einstein の関係式として知られ、拡散係数 D は半径 a のブラウン粒子の場合、

媒質の粘性係数を η , 温度を T として式で表現できることを示したものである. また, これは揺動散逸定理の一つの記述方式として広く認識されている.

$$D = \frac{k_B T}{6\pi a \eta} \quad (2-8)$$

ここに, k_B はボルツマン定数 $= 1.381 \times 10^{-16} \text{erg} \cdot \text{K}^{-1}$. その後, 1921 年から 1923 年にかけて, Wiener によってその現象が数理的モデルとして発表されている (Wiener 1921a, 1921b, 1923). このモデルは現在 Wiener 過程と呼ばれる.

前節述べたように, 確率過程の時間発展を支配するものは遷移確率である. Wiener 過程は連続の確率過程ため, 遷移確率は以下の式のように書き換える.

$$W(X(t + \tau) = x + \Delta x | X(t) = x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D\tau}} e^{-\frac{(\Delta x)^2}{4D\tau}} \quad (2-9)$$

ここに, x_1 と x_2 はブラウン運動をしている粒子の t_1 と t_2 時刻の位置である. システムの状態変数の確率密度関数と区別するために, 遷移確率の記号を W する. D は揺動散逸定理から計算した拡散係数である. $t_1 = 0$, $t_2 = \tau'$, $t_3 = \tau + \tau'$ 3 つの時刻を考慮し, 遷移確率を式 2-6 の Chapman-Kolmogorov 方程式は以下のようになる.

$$\begin{aligned} & P(X(\tau + \tau') = x_3 | X(t_1) = x_1) \\ &= \int P(X(\tau + \tau') = x_3 | X(\tau') = x_2) P(X(\tau') = x_2 | X(0) = x_1) dx_2 \end{aligned} \quad (2-10)$$

式 2-10 の両辺を τ に対して微分を取り, そして $\tau \rightarrow 0$ の極限を取る.

$$\begin{aligned} & \partial_\tau P(X(\tau' + \tau) = x_3 | X(t_1) = x_1) \\ &= \int \partial_\tau (P(X(\tau' + \tau) = x_3 | X(\tau') = x_2) P(X(\tau') = x_2 | X(0) = x_1)) dx_2 \\ &= \int \partial_\tau (P(X(\tau' + \tau) = x_3 | X(\tau') = x_2) P(X(\tau') = x_2 | X(0) = x_1)) dx_2 \\ &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \int \partial_\tau (P(X(\tau' + \tau) = x_3 | X(\tau') = x_2) P(X(\tau') = x_2 | X(0) = x_1)) dx_2 \quad (2-11) \\ &= \int (-a_0(x_2) \delta(x_3 - x_2) \\ &+ W(X(\tau' + \tau) = x_3 | X(\tau') = x_2)) P(X(\tau') = x_2 | X(0) = x_1) dx_2 \end{aligned}$$

ここに、 $\delta(x)$ は Dirac デルタ関数であり、 $a_0(x_2)$ は以下のように求める．まず、以下の極限の形式を仮定する．

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \partial_\tau (P(X(\tau' + \tau) = x_3 | X(\tau') = x_2)) = -a_0(x_2)\delta(x_3 - x_2) + W(X(\tau' + \tau) = x_3 | X(\tau') = x_2) \quad (2-12)$$

$P(X(\tau' + \tau) = x_3 | X(\tau') = x_2)$ を τ に対する Taylor 展開をすると

$$\begin{aligned} & P(X(\tau' + \tau) = x_3 | X(\tau') = x_2) \\ &= (1 - a_0(x_2)\tau)\delta(x_3 - x_2) + \tau W(X(\tau' + \tau) = x_3 | X(\tau') = x_2) + o(\tau^2) \end{aligned} \quad (2-13)$$

式 2-12 と式 2-13 を比較すると、 $a_0(x_2)$ が分かる：

$$a_0(x_2) = \int W(X(\tau' + \tau) = x_3 | X(\tau') = x_2) dx_3 \quad (2-14)$$

式 2-10 から式 2-14 をまとめると、連続 Markov 過程の Master 方程式は以下のようになる．

$$\begin{aligned} & \partial_\tau P(X(\tau' + \tau) = x_3 | X(t_1) = x_1) \\ &= \int (W(X(\tau' + \tau) = x_3 | X(\tau') = x_2)P(X(\tau') = x_2 | X(0) = x_1) \\ & \quad - W(X(\tau' + \tau) = x_2 | X(\tau') = x_3)P(X(\tau') = x_3 | X(0) = x_1)) dx_2 \end{aligned} \quad (2-15)$$

式 2-15 における遷移確率を $W(x, -r)$ の形式に書き換えることができる、 x は遷移する前の状態であり、 $-r$ は時間間隔 τ の間の確率密度関数の変化量である．そして、式 2-15 はさらに変形することができる．

$$\partial_\tau P(x_3, \tau) = \int (W(x_3 - r, r)P(x_3 - r, \tau) - W(x_3, -r)P(x_3, \tau)) dr \quad (2-16)$$

式の右側の第一項 $W(x_3 - r, r)P(x_3 - r, \tau)$ を r に対して Taylor 展開をする．

$$\begin{aligned} & W(x_3 - r, r)P(x_3 - r, \tau) \\ &= W(x_3, r)P(x_3, \tau) - r \partial_x (W(x_3, r)P(x_3, \tau)) \\ & \quad + \frac{1}{2} r^2 \partial_x^2 (W(x_3, r)P(x_3, \tau)) \end{aligned} \quad (2-17)$$

式 2-17 を 2-16 に代入し、整理すると、以下の式が得られる．

$$\partial_\tau P(x, \tau) = -\partial_x (A(x)P(x, \tau)) + \frac{1}{2} \partial_x^2 (B(x)P(x, \tau)) \quad (2-18)$$

ここに、 $A(x)$ と $B(x)$ 遷移確率に関する係数である．

$$\begin{aligned} A(x) &= \int rW(x,r)dr \\ B(x) &= \int r^2W(x,r)dr \end{aligned} \tag{2-19}$$

式 2-18 は Fokker-Planck 方程式と呼ばれる．この方程式は一般的な連続の確率過程の確率密度関数の時間発展式である．式 2-9 を代入すると，Wiener 過程の支配方程式拡散方程式が得られる．以上は示したのは遷移確率による確率過程の表現から Fokker-Planck 方程式までの導き方である．しかし，この導き方は数学的に厳密ではない．その原因は，遷移確率という概念は元々離散的な確率過程の概念である．連続確率過程の遷移確率の厳密な数学定義は 1970 年代に日本の数学者伊藤清によって明らかにされた．伊藤らはそれに基づいて確率微分学の数学の基礎を作った．その上，伊藤の確率微分方程式という新たな確率過程の記述手法を提案した．

確率微分方程式による記述手法．この手法は本研究において用いられる手法であるため，次の章で詳しく紹介する．

参考文献

- 伊藤清, 1953: 確率論【現代数学(14)】, 岩波書店.
- 保江邦夫, 2000: 数値確率解析入門, 森毅・斎藤正彦・野崎昭弘編, 朝倉書店.
- 藤原洋一, 大出真理子, 小尻利治, 友杉邦雄, 入江洋樹: 地球温暖化が利根川上流域の水資源に及ぼす影響評価, 水工学論文集, 第50巻, pp.367-372, 2006.
- N. Wiener, 1921: The average of an analytic functional, Proc. Nat. Acad. Sic. USA 7, pp.253-260.
- N. Wiener, 1921: The average of an analytic functional and the Brownian movement, Proc. Nat. Acad. Sic. USA 7, 294-298.
- N. Wiener, 1923: Differential space, J. Math, and Physics 2, 131-174.
- Langevin, P., 1908: Sur la théorie du mouvement brownien, *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences* 146, 530-538.
- Stratonovich, R., 1992: Nonlinear Nonequilibrium Thermodynamics I : Linear and Nonlinear Fluctuation-Dissipation Theorems, Springer Series in Synergetics, 377.
- Yukiko Hirabayashi, 2013: Global flood risk under climate change, Nature Climate Change.
- C. F. Clement, 1980: Moment and Fokker-Planck equations for the growth and decay of small objects, Proc. R. Soc. Lond. A371, pp.553-567
- Albert Benveniste, 1987: Adaptive Algorithms and Stochastic Approximations, Applications of Mathematics 22
- Robert B.Ash, 1970: Topics in Stochastic Processes Probability and Mathematical Statistics A Series of Monographs and Textbooks
- A. Skorobogatov, 1998: Quantum mechanics can be formulated as a non-Markovian stochastic process, PHYSICAL REVIEW Vol.58
- Hanchen Huang, 1995; Formulation of a moment method for multidimensional Fokker-Planck equations, PSYSICAL REVIEW vol.51
- Henry D.I. Abarbanel, 2013: Predicting the Future
- Guido Bacciagaluppi, 2012: Non-equilibrium in Stochastic Mechanics

第3章 確率過程論を導入した流出解析と不確実性の評価

3-1 降雨流出過程

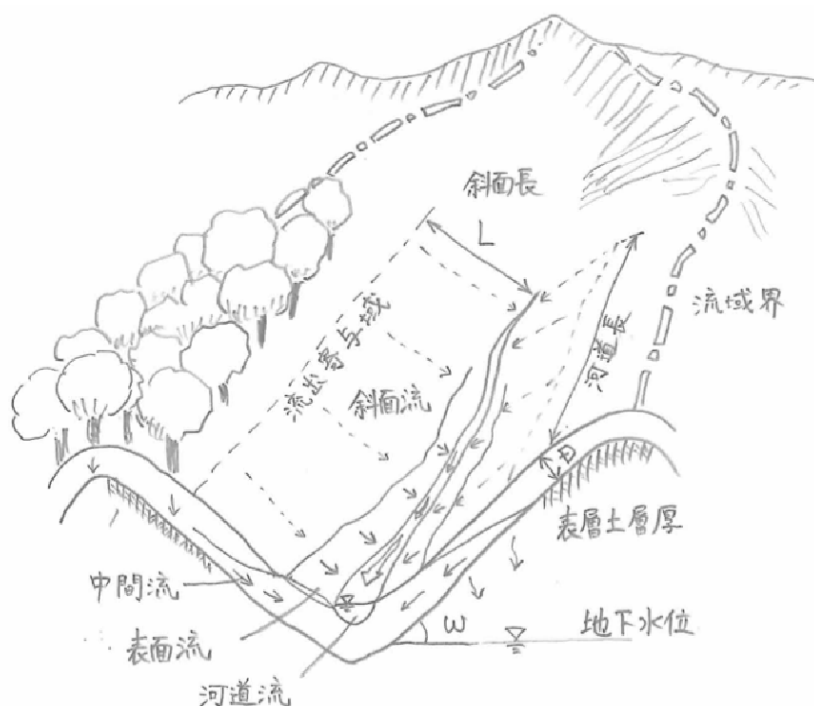


図 3-1 降雨流出過程の概念図. 流域の境界は流域界である, 通常は周辺が一番高いところである. 雨が流域内に降ると, 地表面を流れる表面流になる. あるいは河道の中に降り, 河道流になる. または土壌に浸透し, 中間流になる. どの流れを選んでも, 最後はある支配断面から流出する. この過程を物理, 数学的に表現するのが降雨流出モデルの役割である.

河川流域に降った雨が地表面や土壌中を流れ, 河川水として流れ出るまでの過程をモデル化 (理論化) し, 水の動きを再現したものを降雨流出モデルという. 一般的に

流域内の水の流れの計算は、雨が地表面に到達し河川まで伝わる過程と、河川に流入した水が河川水として流域内をどのように伝わるかに大別して考えることができる。前者の過程を降雨流出過程といい、この過程を概念的、物理的に表現しようと試みたものが降雨流出モデルである。

3-1-1 降雨流出モデルの発展

単位図法は、1932年に Sherman らによって提案された流出モデルである。単位図法の基本的な仮定は1) 流出ハイドログラフ (unit hydrograph) が降雨強度と比例する。2) 各時刻の降雨からの流出量は足し合わせることができる。この2つの仮定は降雨と流出の応答が線形であることと同様である。そして、降雨強度の時間変化をパルス列とみなし、対応する unit hydrograph の畳み込み積分によって流出量が表現できる。unit hydrograph を求める時に、通常は対象流域の観測データから抽出する。unit hydrograph 中に負の値が算出される問題が生じることもある。unit hydrograph は物理的には集水域内の各地点からの到達時間遅れを表現していると考えられるが、線形応答であるという点に違和感を覚える研究者が多い。

貯留関数法は、現在国土交通省の現場において一般的に利用されている流出モデルである。貯留関数法の特徴は、流出高を流域に蓄えられている貯水量の一価関数で表され则认为、これに、質量保存（連続）の式を連立させて解くことである。遮断や浸透による損失は考慮せず、有効降雨と呼ばれる洪水流出に直接寄与する分を入力として用いる。パラメータの設定によっては線形モデルとなる。一般的には洪水ごとに観測流量と雨量から2つのパラメータを定めることができ、計算が容易であることから実時間予測などにもしばしば利用される。

等価粗度法は、まず、流域を長方形斜面であると考え、斜面方向に水深が変化する流れが生じて洪水をもたらすと考え、運動方程式を Kinematic wave 方程式で表す。流速が水深のべき乗関数で与えられるとすると、有効降雨が時間的に一定の場合には特性曲線法と呼ばれる手法で解析的に解くことが可能であったため、計算機が自由に利用可能となる以前から用いられてきた。また、河川水の河道流下も全く同じ形の方程式で表現することができるので、水理学的な美しさもあって Kinematic Wave で洪水をシミュレートする研究が数多くなされてきた。現在では、流域を複数の長方形流域に分割し、数値計算によって解くことが行われている。土地改変の影響などは流速式で利用されている粗度を変化させ、表現することができる。

タンクモデルは、1969年に菅原正己が提案したもので、線形のタンクを縦に並べ、

さらにタンクの底だけでなく、それぞれのタンクのある高さにも適宜流出孔を設けて流出現象の非線形性を表現したものである。初期には、実際に実験室内でタンクにみたてた容器を置いて水を入れて実験をしたりもしたが、最近では計算機で数値計算を行う。流出係数や流出孔の高さ、タンクの高さなどのパラメータは試行錯誤で決定されるが、自動化や、決定のための指針も提供されている。イメージの湧きやすさや数学的な単純さなどから世界でも広く用いられ、各種の工夫を施したタンクモデルが提案されているが、上記パラメータの一般性に対する不信から、物理的流出モデルではないと見なされることもある。

Kinematic wave 法にせよ、タンクモデルにせよ、解析的にも解く事ができる数式で表されるかどうかは別にして、流域を平板斜面の集合と考えるか、いくつかの穴あきタンクの塊だと考えるか、という違いだけで、どちらも特徴的な物理的なイメージがある。加えて、どちらも物理法則に反しないという意味で、どちらも物理的モデルであると言って良いであろう。また、多くの降雨流出モデルは両者いずれかに立脚していることが多い。しかし、斜面における土壤中の水の移動に関し、実験室内で確かめられる様なより厳密な物理的方程式に立脚して水の移動をシミュレーションしたい、という動きが 1970 年代以降高まってきた。そうした場合には、河川流域を正方形メッシュや三角形要素、サブ流域などに区切って、その要素ごとに土壤浸透能や植生分布などの物理パラメータを当てはめて計算することになるので、そうした降雨流出モデルの多くは分布型と呼ばれている。これに対し、流域全体（平均）のパラメータしか持たない降雨流出モデルは集中型（lumped）と呼ばれる。

分布型流出モデル自体は必ずしも物理的であることを意味しないが、通常は浸透・流下方程式、植生過程、地下水などについてそれぞれ物理数学的方程式をたて、それらを数値的に解くことが行われている。必要な物理パラメータはリモートセンシングや地図などから得られる情報に基づいて決定され、地形はもちろん数値地図（Digital Elevation Map; DEM）から構築することができる。分布型流出モデルを有効に利用するためには、入力である降水量や太陽放射なども面的に与える必要がある。分布型流出モデルは、パラメータや入力データの推定、準備などに手間がかかる上、物理パラメータは必ずしも面的に得られないことが多いのが問題点である。計算時間も膨大であるが、10 万 km² 程度の流域なら現実的にシミュレーションすることも可能である。また、分布型流出モデルでは洪水氾濫に伴う水深分布なども再現することができ、被害推定や浸水地図の作成、あるいは治水浸透施設構築に伴う被害の軽減などをシミュレーションすることができるのは今日的に非常にメリットが大きい。降雨分布の移動が考慮できる点も長所の一つである。計算機の発展が著しく進むとしても、効率性を

考えると、分布型流出モデルや大気の影響を考慮した地表面モデルではある程度大きなグリッドで流域を区切って計算することになる。しかし、ある程度の大きさを持つ領域内では、土地被覆、植生、土壌など地表面パラメータの分布（同じ単位面積内での土地被覆の不均一性）・同じ土壌タイプ・植生被覆内での浸透能の違い（“同一”土地区分内での不均一性）・降水量や放射量の不均一性（外力データの不均一性）などが現実には存在する。こうした不均一性をいかに扱っていくかが自然科学的な水文学では一つの課題であり、すでにいくつかの提案はなされているが今後まだまだ検討する余地がある。

3-1-2 単一斜面における降雨流出の基礎式の概要

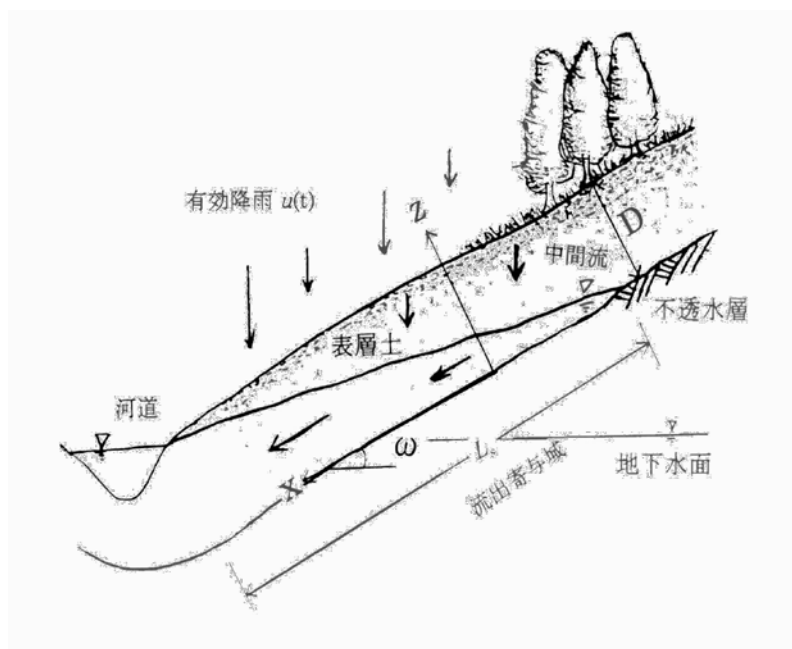


図 3-2 単一斜面の模式図である。図 3-1 と比較すると、これが流域の縦断図だと考えればよい。単一斜面は真実の流域に対する一種の物理近似である。この近似を想定し、連続式と運動方程式を用いれば、降雨流出過程の基本式を導くことができる。

山田（1981, 1982, 1983, 1988, 1991, 2003）は、従来から実験や観測、数値計算等の複数のアプローチによって、数理的、実用的に有用である単一斜面における一般化した降雨流出の基礎式を導き、物理的水文学を切り開いた。これらの一連の研究で基礎式とされている単一斜面における降雨流出の基礎式が本研究でも重要な位置付けであるため、以下にその理論の概要を記す。

単一斜面で幅広矩形断面を想定すると湛水深と単位幅流量についての連続式は式(3-1)で表される．また，様々な流出形態に対応するため運動則を式(3-2)に示すよう，断面平均流速（単位幅流量）は湛水深のべき乗に比例するという形式で表現する．一般的な kinematic wave 理論における式(3-2)の表現は，著者らの記述方法とは異なり，単位幅流量 q が水深のべき乗に比例する形式で記述する事が多いため，べき数 m の値に注意する必要がある．例えば，Mannig 則では $\alpha=i^{1/2}/n, m=2/3$ であり，飽和ダルシー則では， $\alpha=k_s i, m=0$ となる．式(3-1)と式(3-2)より単位幅流量 q についての式(3-3)を得る．

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = r(t) \quad (3-1)$$

$$v = \alpha h^m, \quad q = vh = \alpha h^{m+1} \quad (3-2)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \alpha(m+1) \left(\frac{q}{\alpha} \right)^{\frac{m}{m+1}} (r(t) - \frac{\partial q}{\partial x}) \quad (3-3)$$

ここに， v ：断面平均流速[mm/h]， h ：湛水深[mm]， q ：単位幅流量[mm²/h]， $r(t)$ ：有効降雨強度[mm/h]， α ， m は流域特性を表すパラメータである． α ， m の物理的な解釈については後述する．

直接流出は流出寄与域（河道及び河道近傍の湿潤領域）のみからの流出と考えると，斜面長は実地形上の斜面長より十分短いものと考えられ，式(3-4)に示す変数分離形の近似式が仮定できる．

$$q(x,t) \cong xq_*(t) \quad (3-4)$$

ここに， q_* ：流出高[mm/h]である．また，斜面長 L の末端で考え $x=L$ として式(3-4)を用いると，偏微分方程式である式(3-3)は式(3-5)に示すように流出高に関する常微分方程式に変形できる．

$$\frac{dq_*}{dt} = (m+1) \left(\frac{\alpha}{L} \right)^{\frac{1}{m+1}} q_*^{\frac{m}{m+1}} (r(t) - q_*) \quad (3-5)$$

ここに， L ：流出寄与域斜面長である．

$$\alpha_0 = (m+1) \left(\frac{\alpha}{L} \right)^{\frac{1}{1+m}} \quad (3-6)$$

$$\beta = \frac{m}{m+1} \quad (3-7)$$

とおけば，式が一般化された単一斜面からの降雨流出の基礎式となる．

$$\frac{dq_*}{dt} = \alpha_0 q_*^\beta (r(t) - q_*) \quad (3-8)$$

また，土壌・地形特性を示す流出パラメータ α と m の値に関して志村ら(2001)は，鈴木(1984a, 1984b)，窪田ら(1988)の不飽和浸透理論と kinematic wave 法の式展開を比較することにより，式(3-9)，式(3-10)で示されるよう，土壌・地形特性から決定できることを示している．

$$\alpha = \frac{k_s i}{D^{\gamma-1} w^\gamma} \quad (3-9)$$

$$m = \gamma - 1 \quad (3-10)$$

ここに， i ：斜面勾配， D ：表層土層厚[mm]， γ ：土壌の透水性を表す無次元パラメータ， k_s ：飽和透水係数[mm/h]， w ：有効空隙率であり， $w = \theta_s - \theta_r$ (θ_s ：飽和含水率， θ_r ：残留含水率)で定義される．これにより，斜面流下方向流れに関して飽和・不飽和側方流を対象とする場合，土壌・地形特性から流出パラメータを決定し降雨流出計算を行う事が可能である．

3-1-3 単一斜面における降雨流出の基礎式の検証

次に前節紹介した単一斜面における降雨流出の基本を実際の降雨イベントの再現計算に使用し，その結果を評価する．対象とする流域は草木ダム流域である．草木ダムは利根川水系渡良瀬川の本川上流部に建設されたダムである．ダムが支配している流域面積は約 254km² であり，流域の概要は図 3-3 に示す．

草木ダム（くさきダム）は、群馬県みどり市東町座間、一級河川・利根川水系渡良瀬川の本川上流部に建設されたダムである。旧名は神戸ダム（ごうどダム）。独立行政法人水資源機構が管理する多目的ダムで、東京都を始めとする首都圏への利水と渡良瀬川・利根川の治水を目的とした利根川水系 8 ダムの一つである。この流域を選んだ理由は以下の 3 つが挙げられる。1) 山地流域であることは本研究が用いられるモデルの適用条件である。2) 流域面積は集中型モデルで表現できる大きさである。3) 観測データは比較的に充分である。

図 3-4 に示したのは単一斜面の基礎式を用いた草木ダムの 1983-08-14 降雨イベントの計算結果である．

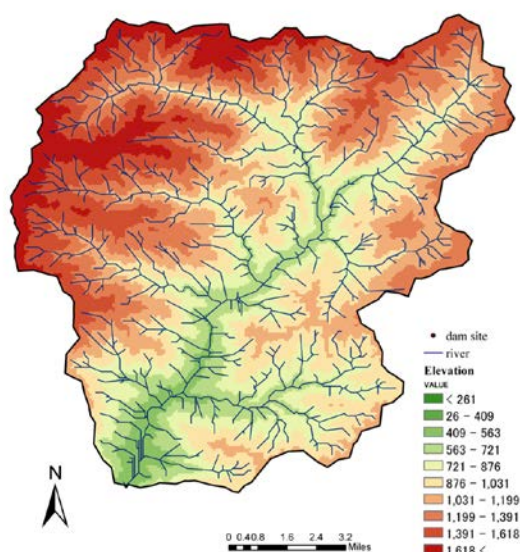


図 3-3 草木ダム流域の概要図.

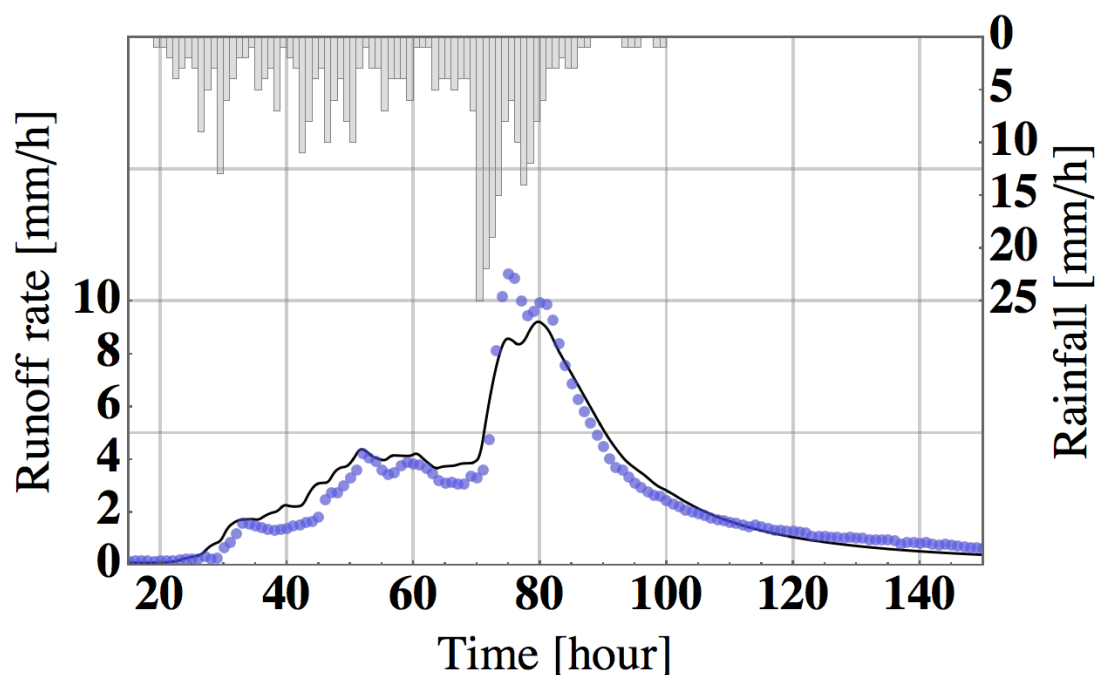
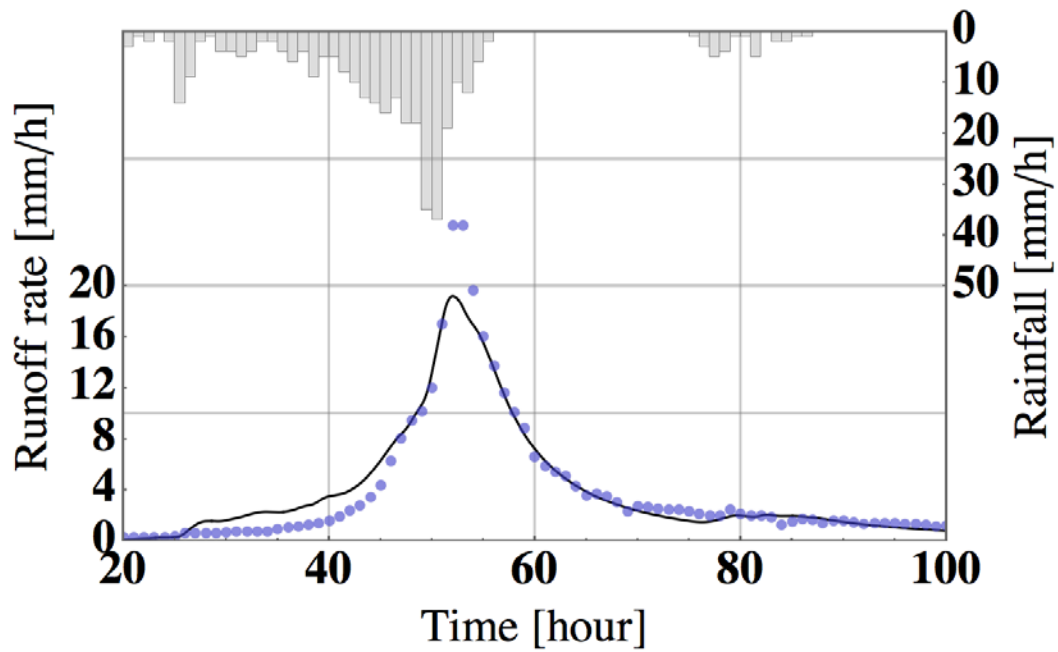
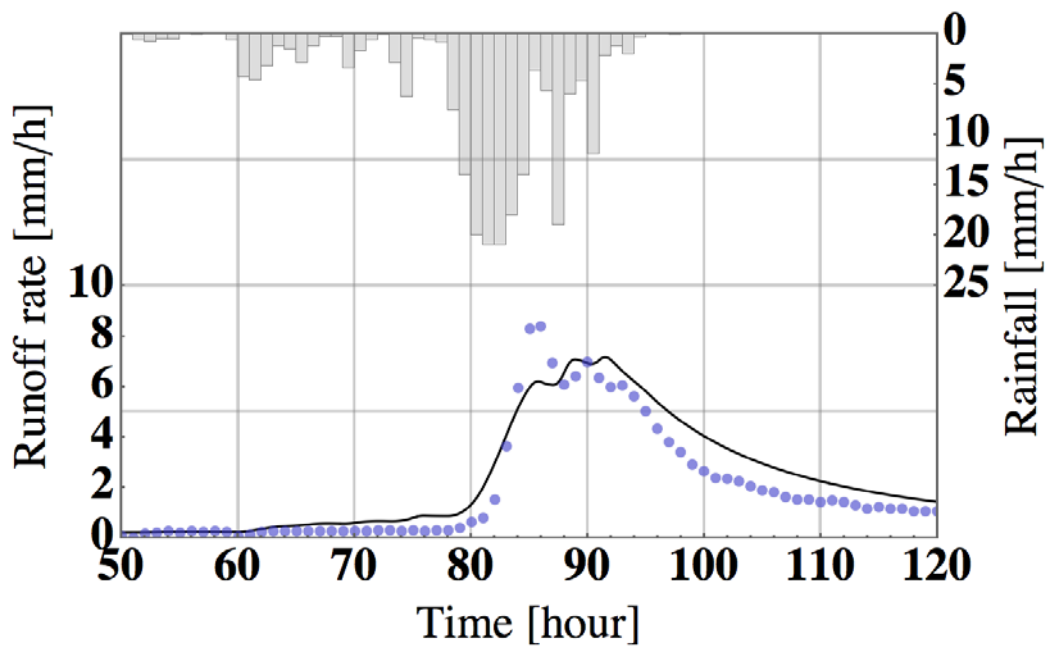


図 3-4 草木ダム流域の洪水イベント 1983-08-14. 青い点は観測値であり、黒い線はモデルから得られた計算結果である. 図に示すように、イベントのピーク部分は再現できていないことが分かる. なお、立ち上がり部分の波形も観測値とずれている. 用いたパラメータは本イベントに最適化したパラメータである. つまり、これは本モデルが表現できる最もあうような波形である.



1982-07-31



1989-08-24

図 3-5 草木ダム流域の洪水イベント 1982-07-31 と 1989-08-24 青い点は観測値であり、黒い線はモデルから得られた結果である。結果として、違う降雨イベントであっても、示した経過は、図 3-5 と同様の結果であることが分かった。

図 3-6 は式(3-8)を用いて、草木ダム流域の洪水イベントの再現計算の結果である。検討対象としたイベントは 1978 年から 2013 年までの 22 回洪水イベントである。その中の 3 つのイベントを選出した。全体から見ると、式(3-8)を用いることで、計算値は観測値を再現できていることが分かる。しかし、イベントによって、例えば、1982-07-31 洪水イベントは洪水のピーク流量において、計算値と観測が大きく異なることがわかる。

観測値 q^{ob} と計算値 q^{cal} の差は、一般的に誤差と呼ばれている。決定論的な考え方はその誤差が小さいほど、モデルが良いと判断できる。ここに、注意すべき点はパラメータの値である。式(3-8)の中に、調整できるパラメータは α 、 β 、2 つがある。再現計算で用いたパラメータは式(3-11)に示すように、誤差の二乗和を最小だと目標関数とし、同定したものである。同定時に用いたデータは 22 回洪水イベントすべてのデータである。同定した結果は $\alpha = 0.047$ 、 $\beta = 0.4$ である。従って、図 3-4～図 3-5 の計算結果は、22 回洪水イベントすべてのデータを用いて同定したパラメータである、仮に各イベントに対してパラメータを最適化すれば、精度を更に高めることができるが、そのようにすることはあまり意味がない。

$$RSS = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (q_{cal} - q_{ob})^2 \quad (3-11)$$

3-1-4 鉛直浸透を考慮した降雨流出モデル

地表面に到達した雨水がどのような経路を辿り河川や湖沼に到達するかは、水文学の分野において精力的に研究されてきた。一般的に洪水時の流出現象は複数の流出成分で構成されると考えられており、従来から山腹斜面を多層構造化して流出計算手法が提案されている。例えば、Horton(1933)は降雨流出過程を土壤の浸透能を超えた降雨量が、表面流として流出するものとして扱った。吉川ら(1979)は、一つのサブシステムとして逓減特性の異なるタンクを考え、それぞれのタンクの逓減率として、流域固有の標準逓減曲線を用いる多段多列タンクモデルを提案している。また、立川ら(2004)は土壤水分量を考慮し、高棹の手法に飽和・不飽和流れの機構を導入することにより物理過程に基づく流量流積関係式を提案している。立川ら(2005)の手法は斜面流下方向流れを対象としており、斜面内を多層構造として不飽和、飽和側方流および表面流を考慮している。また、呉らは流域の最小スケールを単一の斜面であると考え、単一斜面における土壤・地形特性に基づく降雨流出計算手法を提案している。

しかし、これらの研究は精力的に行われているものの、物理的意義を持ち普遍的に

洪水ハイドログラフを再現し得るには至っていないと著者らは考えている。

山地流域における流出現象では、表面流より中間流が卓越することが知られている。このため、表面流と中間流の二層構造である既存モデルでは、実質的に中間層のみからの流出時とほぼ変わらない流出形態となり、ピーク値は再現することが出来ても、ハイドログラフの立ち上りや逡減部を再現するには限界があると考えられる。大規模出水もしくは斜面深層の流れを考慮した流出計算を行うためには、斜面内流れを多層構造として扱う必要がある。

そこで吉見ら(吉見 2013, 2014)は、以下に示す新しい流出計算手法を用いて再現性の向上を試みた。まず、山腹斜面が複数の層で構成されたと考え、 n 層目における鉛直浸透について考える。 $n-1$ 層から n 層目への浸透量 $V_{n-1}(=b_{n-1}s_{n-1})$ 、 n 層目から $n+1$ 層目への浸透量 $V_n(=b_ns_n)$ と各層における流出に寄与する雨量(流出に寄与する降雨量)の連続関係から(3-1)式を得る。

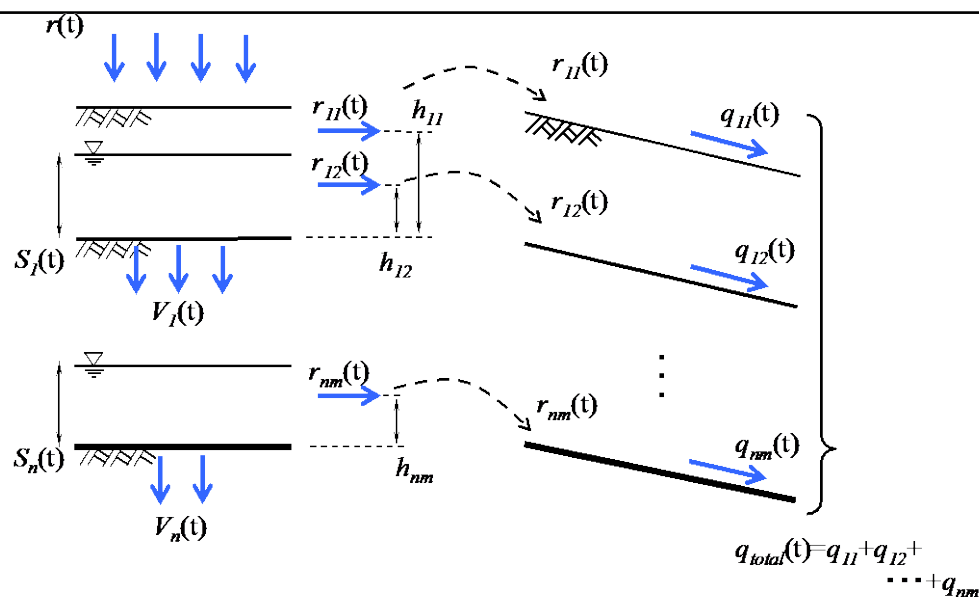
$$\frac{ds_n}{dt} = V_{n-1} - r_{nm} - V_n \quad (3-12)$$

$$\begin{cases} r_{nm} = 0 & (s_n < h_{nm}) \\ r_{nm} = a_{nm}(s_n - h_{nm}) & (s_n \geq h_{nm}) \end{cases} \quad (3-13)$$

各層の流出に寄与する降雨量は式 3-12 に示すように土層内水位 s_n が各層の保水力 h_{nm} を超えた時点で発生するとする。また、鉛直方向への浸透量 V_n は土層内水位 s_n に比例するものとした。さらに、式 3-12 中の r_{nm} を式 3-13 の基礎式に斜面流出に寄与する降雨として与えることで一連の斜面計算が行われる。

$$\frac{dq_{nm}}{dt} = \alpha_{nm} q_{nm}^{\beta_{nm}} (r_{nm} - q_{nm}) \quad (3-14)$$

ここに、 n : 層数、 m : 各層における側方成分の数である。例えば、流出高 q_{2l} は「表層から数えて 2 層目の上から 1 つ目の流出成分」であると考ええる。また、 s_n : 各層の土壌内水位[mm]、 a_{nm} 、 b_n : 各側方成分、浸透成分の比例定数[1/h]、 h_{nm} : 流出成分発生の閾値[mm]、 r_{nm} : 有効降雨量[mm/h]、 V_n : 鉛直浸透量[mm/h]である。 α_{nm} 、 β_{nm} は単一斜面における基礎式中のパラメータ a_0 、 β にそれぞれ対応する。このような構造を取ることで、鉛直浸透に起因する非線形性、側方流出に起因する非線形性を表現可能となった。以上の計算過程の概念図を図 3-6 に示す。



鉛直浸透の概念図

斜面計算の概念図

図3-7 鉛直浸透・斜面流出機構を分離した流出計算手法の計算過程の概念図。ここに、斜面流出は単一斜面における流出の基礎式を用いる。

以下は鉛直浸透を考慮した降雨流出モデルからの計算結果である。

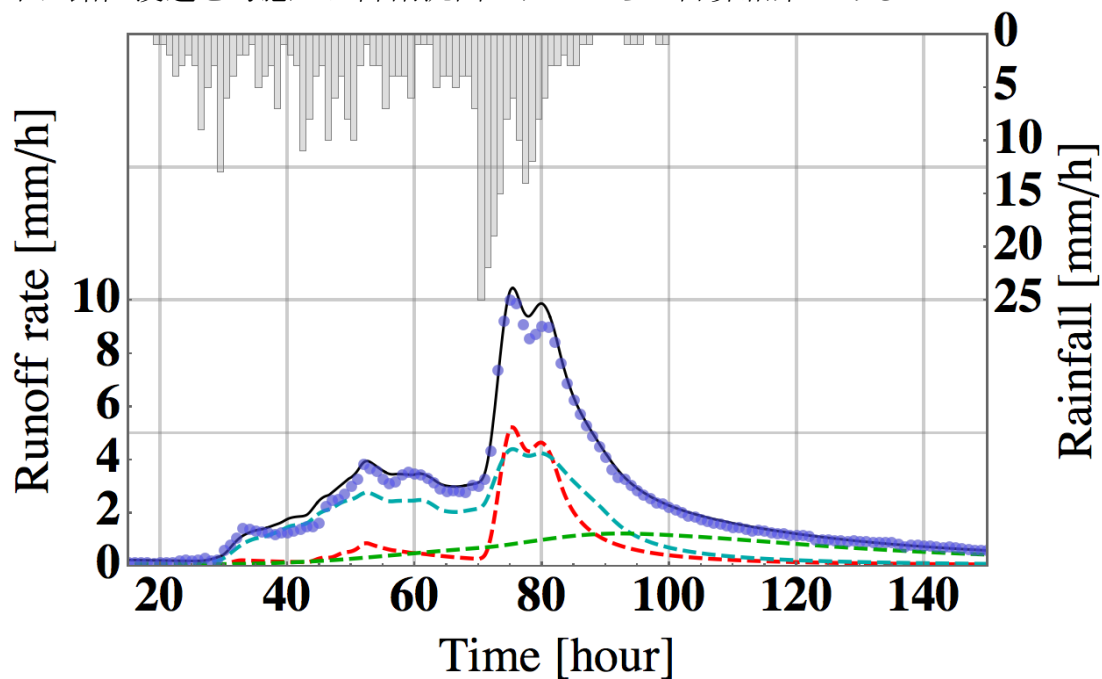


図3-8 草木ダム流域の洪水イベント 1983-08-14. 鉛直浸透・斜面流出機構を分離した流出計算手法の計算結果. 単一斜面における流出の基礎式と比較するとピーク付近の再現性および立ち上がり部分の再現性はかなりよかった。

3-2 確率過程論を降雨流出過程への導入

本論文の主題である降雨流出現象も不確実性を含む現象として広く認識されており、観測誤差や精度に関する不確実性の研究や流出解析手法に内在する不確実性に関連する研究が行われている。観測誤差や精度の不確実性は、降雨が時空間的に分布している事などに起因する。降雨の時空間的な分布に関して、近年ではこれらを補足するべく、レーダ雨量計による観測技術、観測網が発展している。例えば、強降雨強度を示す線状降水帯やゲリラ豪雨等の局所的な降雨の観測には国土交通省が近年配置を推進してきた X バンド MP レーダ網（現在 XRAIN と呼ばれる）による観測が適しており、空間分解能は $250\text{m} \times 250\text{m}$ 、時間分解能は 1 分と高分解能である。このように、降雨観測に関しては近年のレーダ観測網の発達により、時空間的により精緻なデータが得られるようになっている。

一方で、観測精度が向上しているとは言え、観測手法の違いや我々の認識の限界に起因する降雨の不確実性、不確実性が存在するのも事実である。我々が認識可能な降雨とは、レーダ雨量計で観測されたもの、もしくは地上雨量計で観測されたものなどであり、いずれも流域に降った雨滴を連続的に一粒ずつ認識しているわけではない。また、観測という過程を経て数値的に認識する以上、観測誤差が付きものである。加えて、我々が認識できる現象には限界がある事を知る必要がある。しかし、土木工学において、これら観測限界や認識限界までを不確実性として扱い、その理論的枠組みを提示するような研究は今まで行われてこなかった。

3-2-1 確率微分方程式

一次元空間において、時系列 $x(t)$ の微分 dx が次式に従って動いている時、この時系列 $x(t)$ の動きを伊藤過程という。

$$dx(t) = g(x(t), t)dt + \sigma(x(t), t)dw(t) \quad (3-15)$$

ここに、 $g(x(t), t)$ 、 $\sigma(x(t), t)$ は時間 t と時系列 $x(t)$ の任意の関数である。また、 $dw(t)$ は Wiener 過程 $w(t)$ の微小時間変化量であり、平均 0、分散 dt の正規分布に従っている。伊藤過程とは一般化した Wiener 過程の定数部分を x と t の任意関数でより一般化したものである。このように、空間座標 $x(t)$ の増分が上式の様に右辺のドリフト項と確率増分項で表されるとき、上式を伊藤の確率微分方程式という（伊藤 1942）。

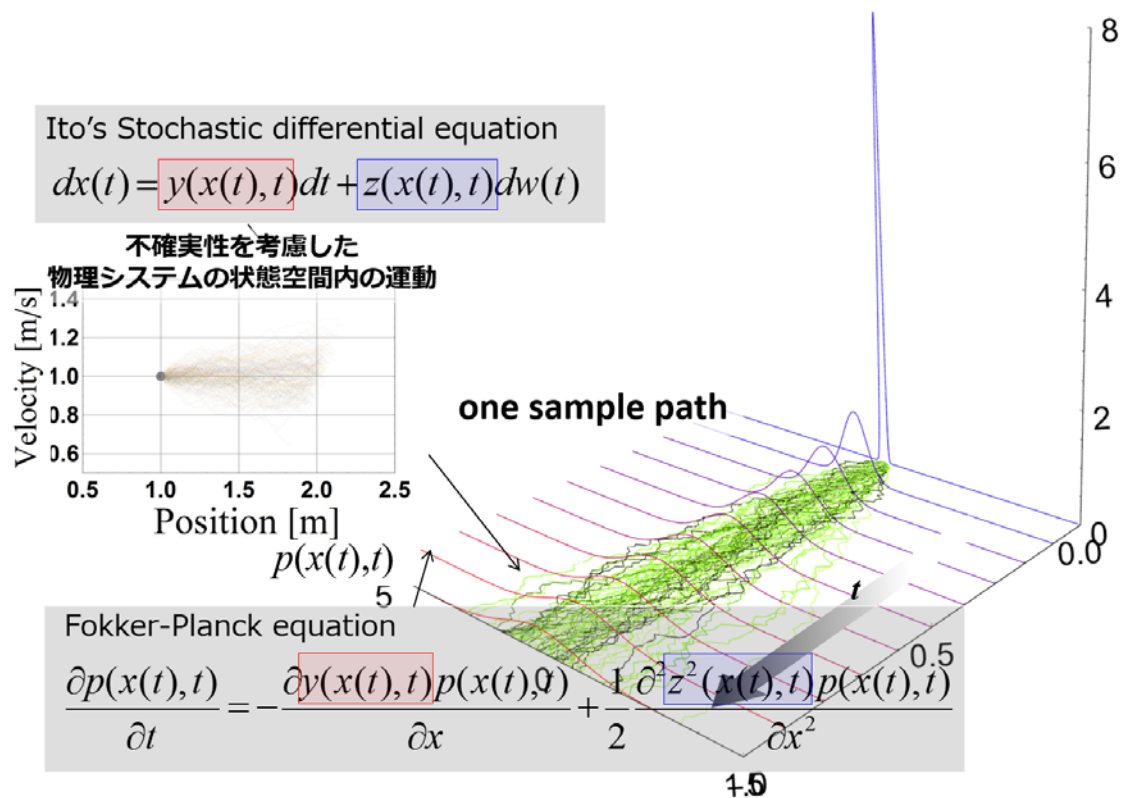


図 3-9 確率微分方程式と Fokker-Planck 方程式の関係. (簡単な例として, 確率微分方程式 $dx(t) = \gamma dw(t)$ (Wiener 過程) とそれに対応する Fokker-Planck 方程式の計算例を示す. 一本一本の確率経路に対して, それぞれの時間に対応する確率密度関数が描かれており, 両者は同一の現象を異なる視点から記述した方程式であることがわかる.)

3-2-2 Fokker-Planck 方程式

第2章は遷移確率とChapman-Kolmogorov方程式からFokker-Planck方程式までの導き方について検討した。次は伊藤の確率微分方程式からも同様にFokker-Planck方程式が導出できることを示す。

まず式3-15の両辺に自乗を取る。

$$(dX)^2 = g(X(t), t)^2 (dt)^2 + 2g(X(t), t)\sigma(X(t), t)dt dw + \sigma(X(t), t)^2 (dw)^2 \quad (3-16)$$

確率過程は以下の性質がある。任意の関数 $h(x)$ に対して、 $h(x)$ を作用させることと期待値を取ること、この2つ操作の順番を変えられる。この性質を数式で表すと以下のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(h(X(t))) &= E\left(\frac{d}{dt} h(X(t))\right) \\ E\left(\frac{d}{dt} h(X(t))\right) &= E\left(\left(\frac{dh}{dX} dX + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 h}{dX^2}\right) (dX)^2\right) / dt\right) \end{aligned} \quad (3-17)$$

式3-16を式3-17に代入し、 dt の2次オーダー以上の項を無視すると、以下の結果が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(h(X(t))) \\ = \int_{-\infty}^{\infty} h'(x) g(x, t) P(x, t) dx + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} h''(x) \sigma(x, t)^2 P(x, t) dx \end{aligned} \quad (3-18)$$

式3-18の左辺を展開し、右辺の部分積分を行うと、以下のFokker-Planck方程式が得られる。

$$\frac{\partial p(r(t), t)}{\partial t} = -\frac{\partial g(x(t)) p(r(t), t)}{\partial r} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \sigma(x(t))^2 p(r(t), t)}{\partial r^2} \quad (3-19)$$

これが任意の $r=r(t)$ について成立するため、 $p(r(t), t)$ はFokker-Planck方程式を満たす(保江邦夫 2000)。このFokker-Planck方程式と伊藤の確率微分方程式は数学的に厳密に等価であることが証明されている。つまり、ある確率過程 $x(t)$ のひとつひとつの過程を表現しているのが伊藤の確率微分方程式であり、それは決定論的な項とランダム項とで表現されるものである。そして、ある時点（もしくは、空間的なある点）における確率経路の確率密度関数 $p(x(t), t)$ を満たす偏微分方程式がFokker-Planck方程式

と呼ばれる。第2章の導き方と比較すると、伊藤の確率微分方程式からの導き方はかなり簡潔である。当然だが、伊藤の確率微分方程式から確率過程の遷移確率を求めることは可能である。しかし、伊藤の確率微分方程式の記述手法を用いると、決定論的なモデルからものの不確実性を考慮することは遷移確率の記述手法より遥かに簡単である。

$$dx(t) = \gamma dw(t) \quad (3-20)$$

$$\frac{\partial p(x(t), t)}{\partial t} = \frac{\gamma^2}{2} \frac{\partial^2 p(x(t), t)}{\partial x^2} \quad (3-21)$$

例として、図 3-8 に最も簡単な Wiener 過程（式(3-20)）が記述する確率経路とそれに対応する Fokker-Planck 方程式（式(3-21)）の時間発展を計算した結果を示す。この図からも見て取れるように、両者は同一の現象を異なる2つの視点から捉えた式であることがわかる。

3-2-3 降雨流出の基本式と確率微分方程式の関係

本節では、本章で示した流出解析手法に確率過程論を導入する。具体的には貯留型の流出モデルの入力である降雨時系列がランダム過程であるとして、貯留型の流出モデルを確率微分方程式で表現し、流出高についての Fokker-Planck 方程式を求める。この Fokker-Planck 方程式から流出高の確率密度関数（不確実性）の時間発展を求める。本章で示したとおり、山田（1981, 1982, 1988, 1991, 2003）は単一斜面に対して幅広矩形断面を想定し、連続式と運動則を基礎式として、式(3-8)に示す貯留型の降雨流出計算手法を示している。本章でも、本章同様にこの方程式を基礎式として、流出過程における不確実性を評価する基礎式を導出する。

$$\frac{dq_*}{dt} = \alpha_0 q_*^\beta (r(t) - q_*) \quad (3-22)$$

ここに、 $q_*(t)$ は流出高[mm/h]である。 $r(t)$ は有効降雨強度[mm/h]であり、流出計算の入力値となる。式 3-22 は一般化された単一斜面からの降雨流出の基礎式であり、第2節で詳述した基礎式である。

式 3-22 は、流出高 q に関する一階の常微分方程式であり、差分形式で表現すると以下になる。

$$dq = \alpha q^\beta (r(t) - q) dt \quad (3-23)$$

ここで、入力降雨強度 $r(t)$ は連続の降雨強度である．それをある短い時間の間の平均降雨強度と微小な乱れ成分 2 つに分割する：

$$r(t) = \bar{r}(t) + r'(t) \quad (3-24)$$

式(3-24)を式(3-23)に代入すると、以下の式が得られる：

$$dq = \alpha q^\beta (\bar{r}(t) - q)dt + \alpha q^\beta r' dt \quad (3-25)$$

ランダム成分を含む項を伊藤の確率積分の結論を用いると以下のように書き換える：

$$dq = \alpha q^\beta (\bar{r}(t) - q)dt + \alpha q^\beta \sigma \sqrt{T_L} dw \quad (3-26)$$

ここに、右辺第一項が決定論的な項、右辺第二項が確率論的な項を表しており、 dw は Wiener 過程に従う時系列 $w(t)$ の微小時間変化量であり正規分布 $N(0, dt)$ に従う．式(3-19)に相当する Fokker-Planck 方程式は

$$\frac{\partial P(q, t)}{\partial t} = - \frac{\partial \alpha q^\beta (\bar{r}(t) - q) P(q, t)}{\partial q} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (\alpha q^\beta \sigma \sqrt{T_L})^2 P(q, t)}{\partial q^2} \quad (3-27)$$

となる．ここに、 $P(q, t)$ は流出高の確率密度関数である．初期の流出高 q の確率密度関数 $P(q, t_0)$ を与えれば、 $P(q, t)$ の時間発展を求めることができる．

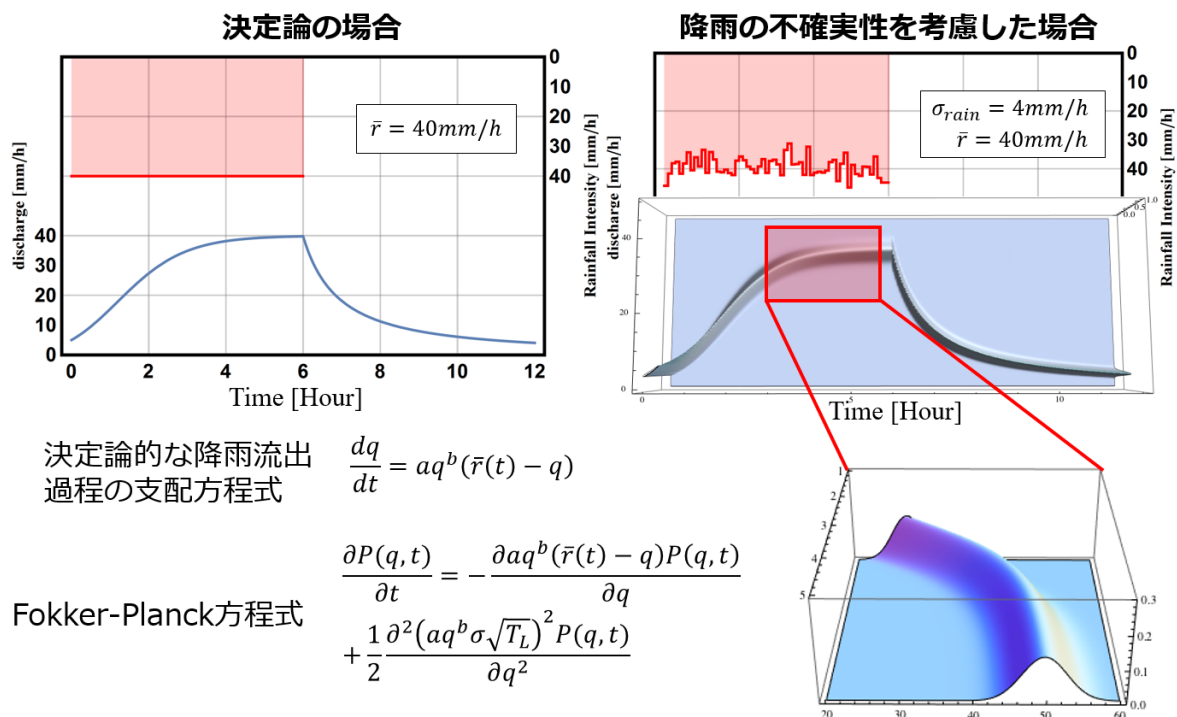


図 3-10 決定論的な降雨流出解析の結果と降雨の不確実性を考慮した流出解析の結果の比較。

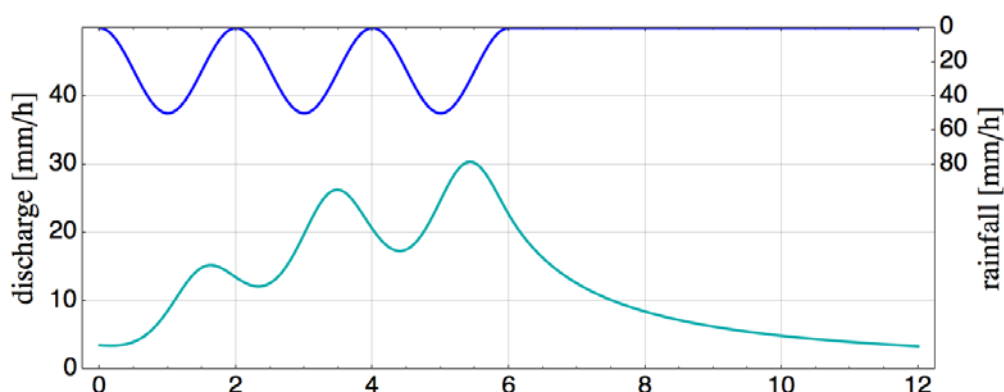


図 3-11 決定論的に求めたハイドログラフ. (従来の計算手法を用いている. 入力降雨には Sin 波形を用いており, 最大降雨強度 50mm/h である.)

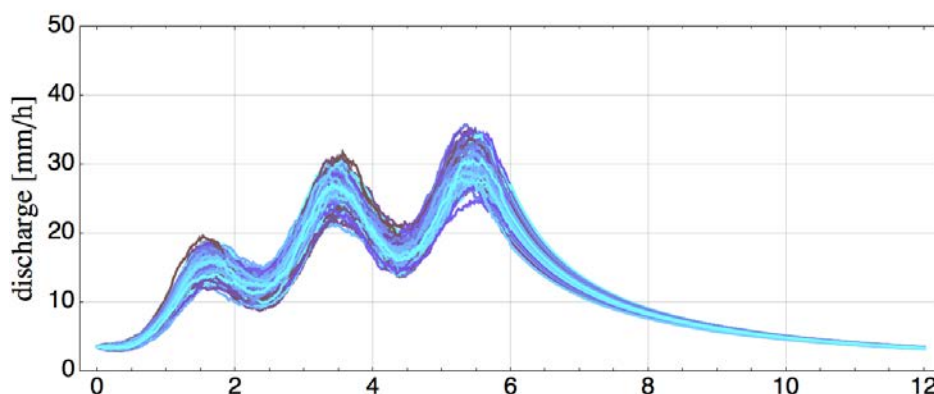


図 3-12 SDE を解いて求めたハイドログラフ (図 3-11 と同様に Sin 波形を入力降雨として与えているが, 入力降雨強度に微小な乱れ $r'(t)$ としてホワイトノイズが加わった降雨強度を入力として SDE を解いている (SDE の計算試行回数 $N=1000$, $\sigma=5\text{mm/h}$, $T_L=1/6\text{h}$ である.))

図 3-11 に示すのは, 式 3-22 によって決定論的に流出計算 (従来の流出計算) した結果である. 入力降雨強度時系列は, ピーク降雨強度が 50mm/h の 1 周期 2 時間の Sin 波形の降雨を与えている.

図 3-12 には, 流出高についての確率微分方程式を用いた計算結果を示している. 計算の試行回数は 1000 回であり, 確率過程論的に求めたハイドログラフが 1000 ケース描写されている. $\sigma=5\text{mm/h}$ として一定値, $T_L=1/6\text{h}$ を与えている.

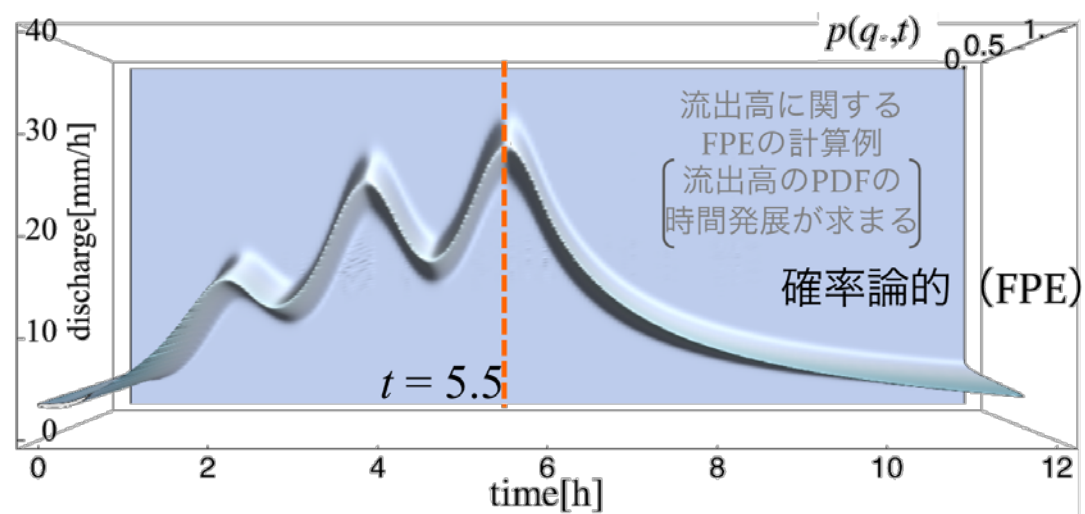


図 3-13 FPE を解いて求めた流出高に関する確率密度関数の時間発展。(初期条件として極めて分散の小さい正規分布を与え、降雨の標準偏差 σ 、時定数 TL は一定値として FPE を解いている.)

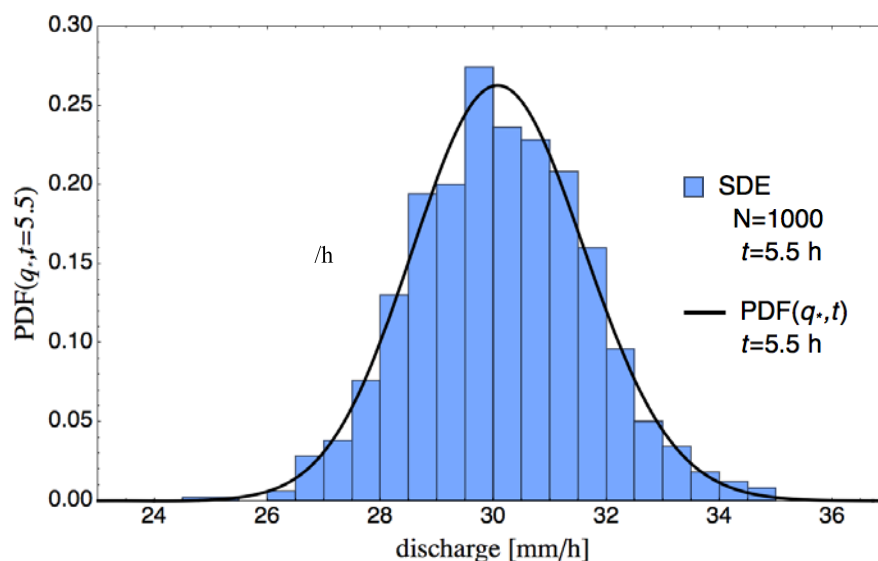


図 3-14 確率微分方程式 (SDE) から求めたヒストグラムと Fokker-Planck 方程式 (FPE) で求めた確率密度関数の比較。(t=5.5hour 時点の q^* のヒストグラムで、SDE と FPE の計算結果から得られる平均と標準偏差はそれぞれ、SDE : 平均 30.14mm/h、標準偏差 1.53mm/h、FPE : 平均 30.12mm/h、標準偏差 1.52mm/h であり、両者の差は極めて小さい.)

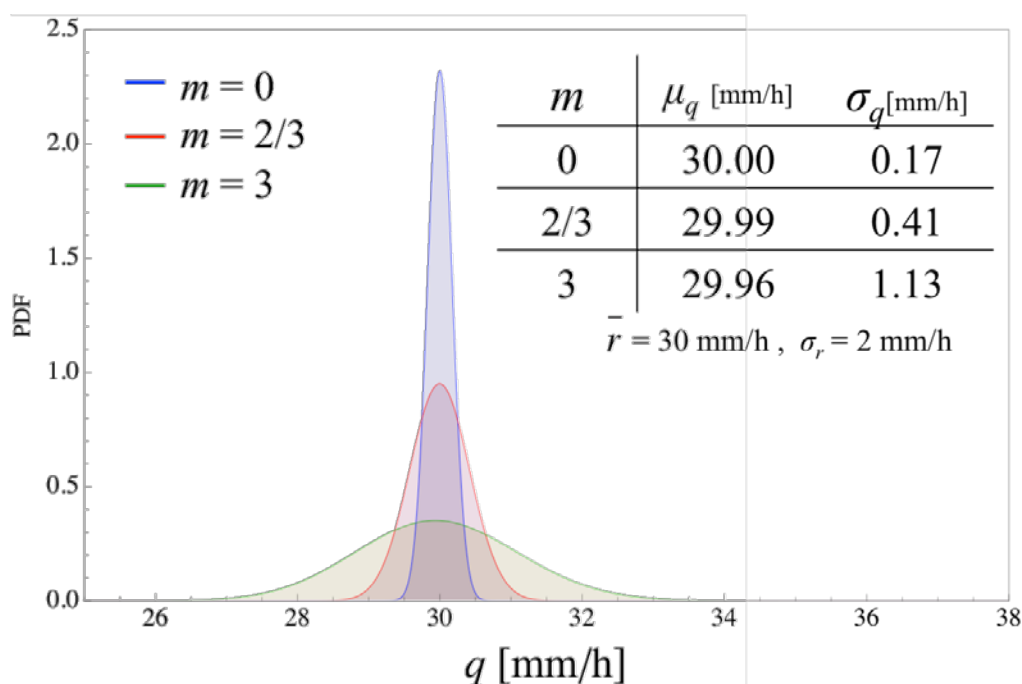


図 3-15 抵抗則と流出高の確率密度関数の関係. 抵抗則が大きくなるに従って, 確率密度関数の裾が広がり, 流出高の不確実性は大きくなる. つまり, 流出現象の非線形性が強くなると, 流出高の不確実性は高くなる.

図 3-13 には, 流出高についての Fokker-Planck 方程式から得られる確率密度関数の時間発展を示している. 確率論的な計算においても, 決定論的な計算条件は踏襲しており, 入力降雨強度は, ピーク降雨強度が 50mm/h の 1 周期 2 時間の Sin 波形の降雨を与えている. σ は, 降雨強度の変化に伴って, 時間ないし降雨強度の関数として表せるはずであるが, ひとまずここでは, σ を一定値として考えている.

また, 図 3-13 には, ピーク付近の $t=5.5\text{hour}$ 時点において, 確率微分方程式から得たヒストグラムと Fokker-Planck 方程式から得た確率密度関数の比較を示している. また, 図 3-13 のヒストグラムと確率密度関数の比較からも確率微分方程式と Fokker-Planck 方程式が同一の現象を記述していることがわかる. 常微分方程式型の貯留型の流出計算手法を確率微分方程式として解いた計算結果と理論的に導き出された確率微分方程式に対応する Fokker-Planck 方程式を解いた解が一致しており, 流出過程を確率過程と考えた場合に容易に任意時間の確率密度関数を求められる事がわかる.

3-2-4 拡散係数の物理的意味

本節では検証問題を設定し，降雨強度の不確実性が降雨流出過程に与える影響を議論する．まず，平均降雨強度が一定の最も簡単な場合を設定する．基本式は本章に述べた支配方程式を用いる：

$$\frac{dq}{dt} = \alpha q^\beta (\bar{r}(t) + r' - q) \quad (3-28)$$

パラメータの値は $\alpha = 0.047$ ， $\beta = 0.4$ と設定する． $\bar{r}(t)$ は4mm/hの雨を100時間降り続くと設定する．雨の不確実性を考慮しない場合（ $r' = 0$ ），方程式(3-28)の解を図○○に示す．

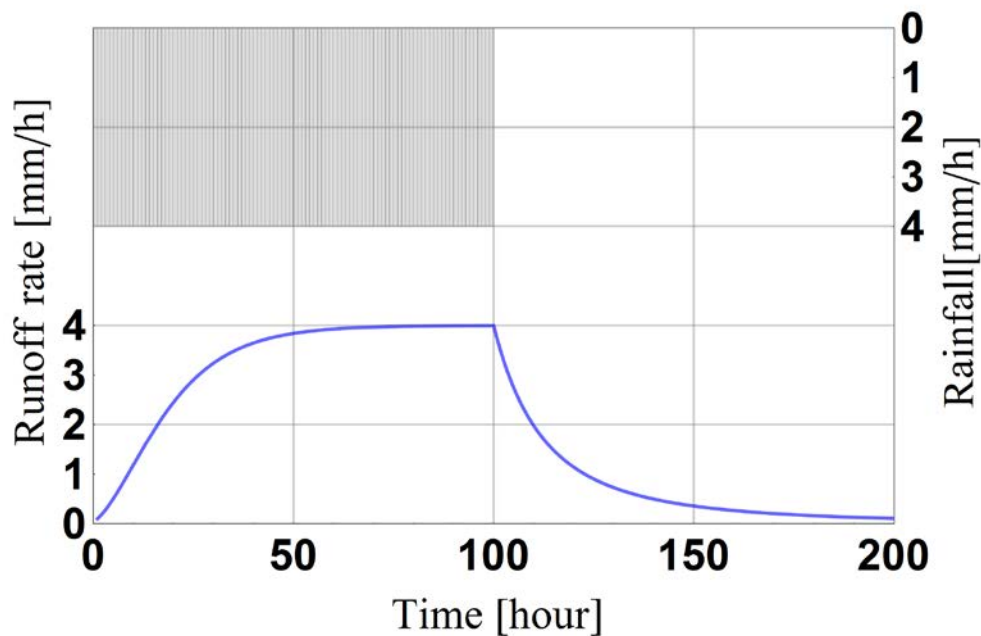


図 3-16 平均降雨強度が一定の場合の単一斜面における降雨流出基礎式の解．図に示すように，不確実性を考慮しなければ，一定値の降雨強度をある一定の時間続くと，流出高は降雨強度と同じになり，ある定常状態に到達する．

次は雨の不確実性が降雨流出過程に与える影響を議論する．前節に述べたように，雨の不確実性を表す項 $r'dt$ は Fokker-Planck 方程式に変換する際に $\sigma\sqrt{T_L}dw$ になる． σ は r' の分散であり， T_L は r' の時定数である．以下の図は σ ， T_L と r' の関係を示す．

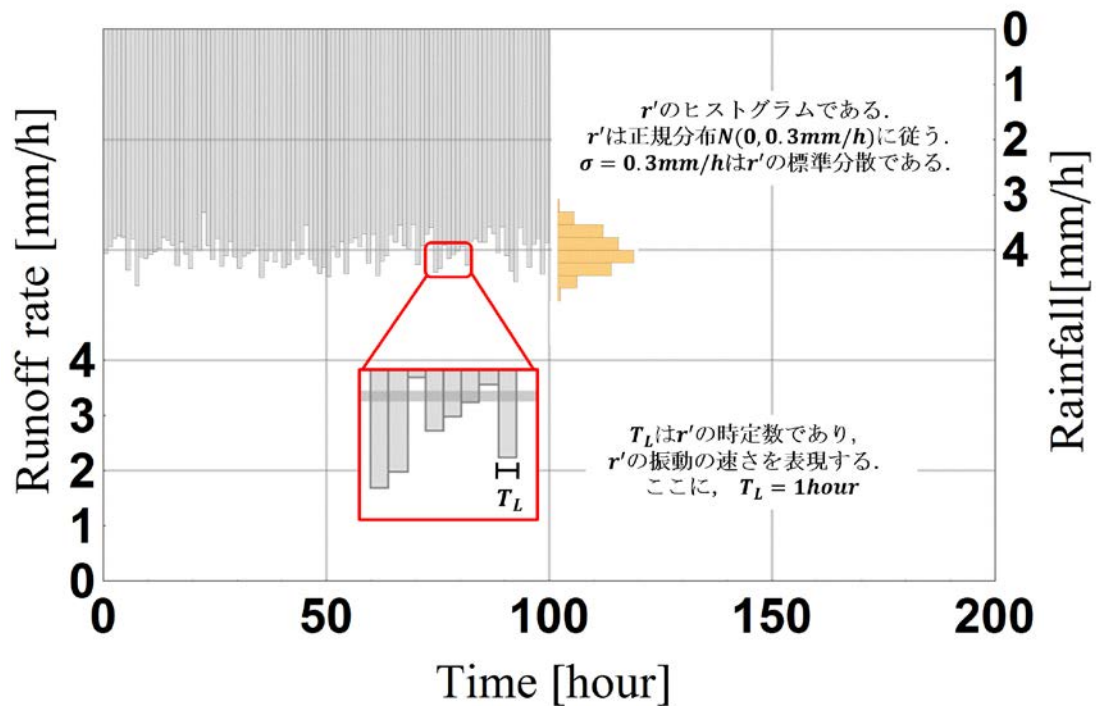


図 3-17 Fokker-Planck 方程式の拡散係数の物理的な意味。ヒストグラムは r' のヒストグラムである。 r' は正規分布に従い、図に示した降雨強度は r' の標準分散 $\sigma=0.3\text{mm/h}$ の場合の降雨強度である。時定数 T_L の意味は図に示している。つまり $r'(t)$ と $r'(t+T_L)$ は相関なし、図に示した降雨強度は $T_L=1\text{hour}$

T_L , σ が異なる値を取ると、降雨強度もそれに応じて変わる。具体的にどのように変わるのを以下の 2 つ図に示す。 T_L , σ は確率微分方程式の拡散係数を決める極めて重要なパラメータである。分子の熱運動の場合、拡散係数とランダム外力の関係は揺動散逸定理から厳密的に求めることができるが、降雨強度の場合、そのランダムは物理的な本質の不確実性と観測手段による不確実性両方混在しているため、直接に降雨強度の観測値から求めるのは困難である。

次の章は 2 つのパラメータの決まり方をさらに検討する。ここ注意すべきことは Fokker-Planck 方程式に影響を与えるのは $\sqrt{T_L}$ と σ の積、つまり $\sigma\sqrt{T_L}$ である。そのため、 σ と $\sqrt{T_L}$ の値が異なると、当然降雨強度のランダム振動の仕方は異なるが、 $\sigma\sqrt{T_L}$ さえ同様であれば、流出に及ぼす影響は同様になる。

図 3-18 T_L が一定, σ が異なる時の降雨時系列. ここに分かったことは, σ が異なる場合, 降雨過程がかなり違う. 図に示したとおりに実際計算を行わなくても, σ が大きいほど流出の不確実性が大きいと想像できる.

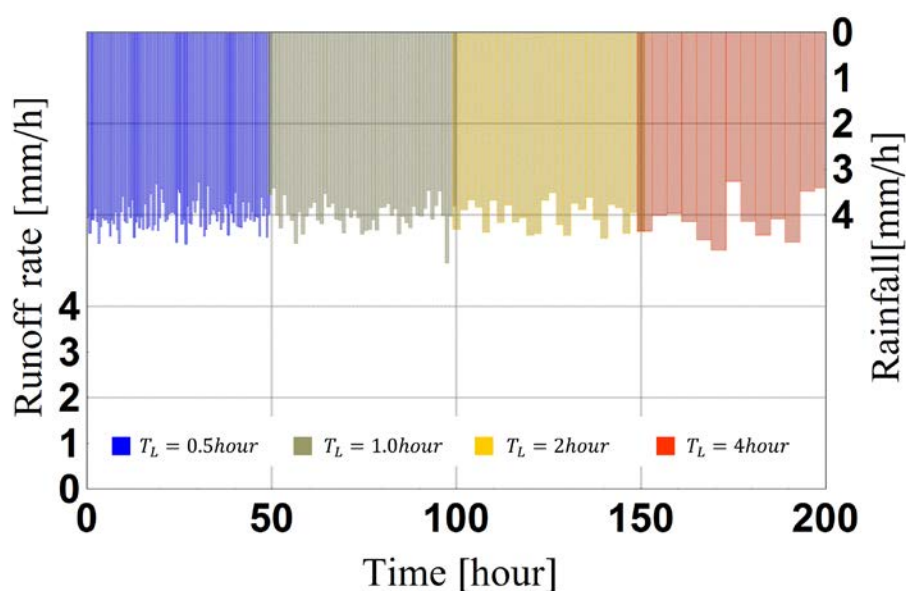
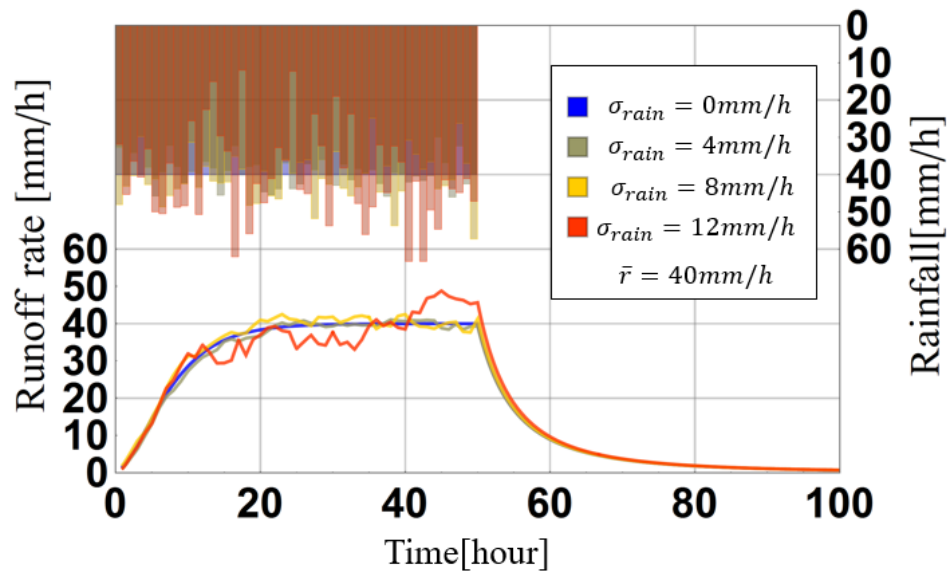
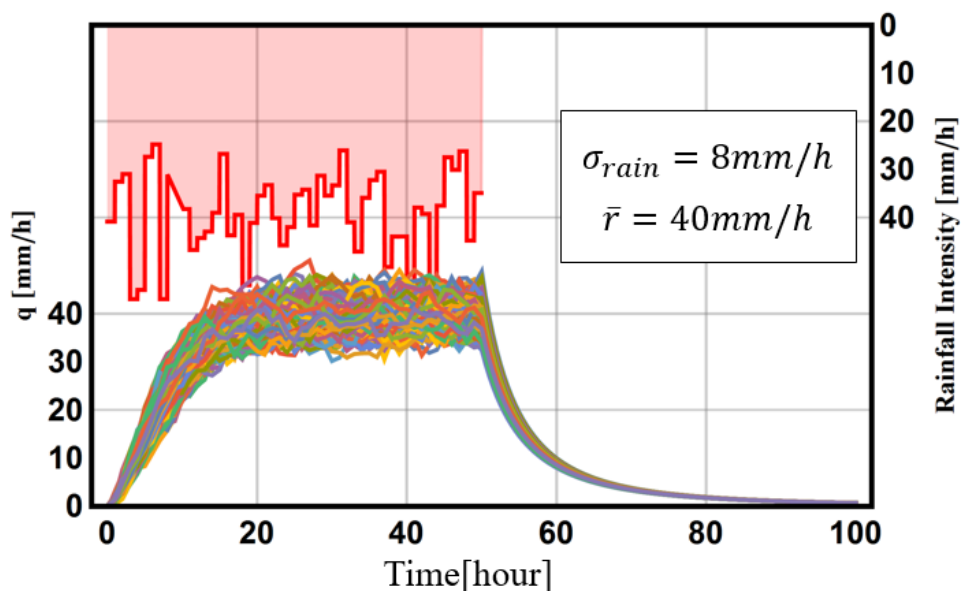


図 3-19 σ が一定, T_L が異なる時の降雨時系列. ここに分かったことは, σ が一定, T_L が異なる時に降雨の過程が違うが, どれが流出に及ぼす影響が強いのかのを直観的に想像できない.

降雨流出の計算時に用いた降雨強度は、平均降雨強度である。図 3-18 に示した降雨過程はすべて平均降雨強度 $\bar{r} = 4\text{mm/h}$ の降雨過程であるが、 T_L 、 σ の取り方によって降雨過程が大きく異なることが分かった。次に、降雨強度の不確実性が流出過程に与える影響を議論する。



平均雨量が 40mm/h 、雨の標準偏差が $0, 4, 8, 12\text{mm/h}$ の降雨流出経過



5000 回アンサンブル計算

図 3-20 降雨強度の不確実性が流出高に及ぼす影響

参考文献

木村俊晃:貯留関数法による洪水追跡流出法,建設省土木 研究所,1961.

呉修一,山田正:既往概念流出モデルの理論的導出,水文・水資源学会誌,Vol.22, No.5, pp.386-400, 2009.

山田 正: 時定数スペクトルを用いた山地小流域の洪水流出解析,土木学会論文報告集, 314, 87-98, 1981.

山田 正, 日野 幹雄, 藤田 光一: 小試験地における雨水の流出機構に関する研究, 水理講演会論文集, 26, 229-236, 1982.

山田 正, 小林 稔: 不飽和浸透の基本的特性とヒステリシスを考慮した新しい不飽和浸透理論, 水理講演会論文集, 32, 83-88, 1988.

山田 正, 豊田 康嗣: 洪水におけるハイドログラフの特性とその形成過程に関する研究, 水工学論文集, 35, 143-148, 1991.

山田正: 山地流出の非線形性に関する研究, 土木学会水工学論文集, Vol.47,pp.259-264,2003.

吉見和紘, 山田正, 山田朋人: 確率微分方程式の導入による降雨流出過程における雨の不確実性の評価, 土木学会論文集 B1(水工学), Vol.71, No.4, I_259-I264, 2015.

A. Einstein: On the Movement of Small Particles Suspended in Stationary Liquids Required by The Molecular-Kinetic Theory of Heat, Annalen der Physik, 17, 549-560, 1905.

Florian Herzog, 2013: Stochastic Differential Equations

A.Ercah, 2012:Ensemble Modeling of Hydrologic and Hydraulic Processes at One Shot: Application to Kinematic Open-Channel Flow under Uncertain Channel Properties by the Stochastic Method of Characteristics, Journal of Hydrology, 17(1),pp.168-181

Mario T. L., 2001: Large-scale hydropower system optimization, Water Resources Management, No.272

A.Calver 1988, Calibration, Sensitivity and Validation of a Physically-Based Rainfall-Runoff Model, Journal of Hydrology,103, pp.103-115

Keith Beven, 1989: Changing Ideas in Hydrology – The Case of Physically-Based Models, Journal of Hydrology, 105, pp.157-172

Egill B. Hreinsson, 1988: Optimal Short Term Operation of a Purely Hydroelectric System, IEEE Transaction on Power Systems, Vol.3, No.3

Javier Garcia-Gonzalez, 2001: Short-term Hydro Scheduling with Cascaded and Head-Dependent reservoirs based on Mixed-Integer Linear Programming, IEEE Porto Power Tech Conference