

第4章 モーメント方程式

4-1 はじめに

前章は Fokker-Planck 方程式を用いて、降雨強度の不確実性を考慮した降雨流出機構を表現する理論を述べた。Fokker-Planck 方程式を解けば、流出高 q の確率密度関数 $P(q, t)$ の時間発展が分かるが、通常、Fokker-Planck 方程式を厳密に解くことは非常に困難であるため、数値解析を行う必要がある。

降雨流出における山田モデルの支配方程式のような微分方程式にランダム外力を加えると、その確率密度関数 $P(q, t)$ の時間発展を支配する Fokker-Planck 方程式は位相空間上における1次元2階偏微分方程式となる。この方程式は数値的に解くことが可能である。

次に、降雨流出機構が複数の支配方程式群から成る連立方程式によって表現される場合を考える。式群(4-1)は、表面流の発生機構と鉛直の浸透機構を考慮することによって、単一斜面における降雨流出の基礎式を拡張したものである。

$$\begin{cases} \frac{dq_s}{dt} = a_s q_s^{\beta_s} (r(t) - q_0 - q_s) \\ \frac{dq_*}{dt} = a_0 q_*^{\beta} (q_0 - q_*) \\ \frac{dq_0}{dt} = (r(t) - q_0) \frac{q_0 - K_s}{h + h_k} - \frac{q_0}{(\theta_s - \theta_i) K_s} \frac{(q_0 - K_s)^2}{h + h_k} \\ \frac{dh_s}{dt} = r(t) - q_0 \end{cases} \quad (4-1)$$

ここに、 q_s : 表面流に関する流出高[mm/h]、 q_* : 中間流に関する流出高[mm/h]、 q_0 : 浸透量[mm/h]、 h_s : 湛水深[mm]である。その他のパラメータの物理的意味及び式群(4-1)に関する詳しい議論は、付録を参照されたい。式群(4-1)に降雨の不確実性を加えると、システムの状態変数 (q_s, q_*, q_0, h_s) の確率密度関数は $P(q_s, q_*, q_0, h_s, t)$ となる。 $P(q_s, q_*, q_0, h_s, t)$ の時間発展式は以下の Fokker-Planck 方程式となる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} = & -\frac{\partial a_s q_s^{\beta_s} (\bar{r}(t) - q_0 - q_s) P}{\partial q_s} - \frac{\partial a_0 q_*^{\beta} (q_0 - q_*) P}{\partial q_*} \\ & - \frac{\partial ((\bar{r}(t) - q_0) \frac{q_0 - K_s}{h + h_k} - \frac{q_0}{(\theta_s - \theta_i) K_s (h + h_k)}) P}{\partial q_0} \\ & - \frac{\partial (\bar{r}(t) - q_0) P}{\partial h_s} + \text{拡散項} \end{aligned} \quad (4-2)$$

式(4-2)は確率密度関数 $P(q_s, q_*, q_0, h_s, t)$ に関する4次元の2階偏微分方程式である。その4次元は実在空間ではなく、連立常微分方程式(4-1)の位相空間である。4次元の式(4-1)に対しては、解析的に解くことはできず、数値解析も非常に困難である。そのため、ここで考えられる方法は、確率密度関数 $P(q_s, q_*, q_0, h_s, t)$ の時間発展式を直接解かず、確率密度関数 $P(q_s, q_*, q_0, h_s, t)$ のモーメントの時間発展を導くことである。

4-2 確率常微分方程式のモーメント方程式

伊藤の確率微分方程式の一般的な形式は以下のように書ける。

$$dX = f(X)dt + \sigma(X)dw \quad (4-3)$$

式(4-3)と対応する Fokker-Planck 方程式は、

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial f(x)P(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (\sigma(x))^2 P}{\partial x^2} \quad (4-4)$$

である。一般的にランダム変数を記述するには、確率密度関数が用いられる。確率密度関数にはランダム変数のすべての情報が含まれている。しかし、確率密度関数を直接得ることが困難である場合、ランダム変数のモーメントで表すこともできる。

キュムラント展開定理(cumulant expansion theorem)は確率密度関数をモーメントに関する漸近級数で表すことができる定理である。ランダム変数のモーメントが分かるとランダム変数の一部の情報が分かる。なお、モーメントは以下の統計的な意味を持つ。1, 2, 3, 4-階モーメントはそれぞれランダム変数の期待値、分散、歪度、尖度である。したがって、確率密度関数の時間発展を直接求めることが困難である場合は、モーメントの時間発展を求めることが考えられる。

ランダム変数 X の n -階モーメントを以下のように定義する。

$$\langle X^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^n P(x) dx \quad (4-5)$$

式(4-4)と式(4-5)を合わせて、ランダム変数のモーメントの時間発展を支配する方程式を導くことができる。以下にランダム変数 X の1階モーメントの支配方程式を導出する。

$$\begin{aligned} \frac{d\langle X \rangle(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} xP(x, t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{\partial P(x, t)}{\partial t} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x \left(-\frac{\partial f(x)P(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (\sigma(x))^2 P}{\partial x^2} \right) dx \quad (4-6) \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x \left(-\frac{\partial f(x)P(x, t)}{\partial x} \right) dx}_{\text{①}} + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (\sigma(x))^2 P}{\partial x^2} dx}_{\text{②}} \end{aligned}$$

①と②を更に変形すると

$$\begin{aligned} \text{①} &= - \int_{-\infty}^{\infty} x d(fP) = \boxed{-xfP|_{-\infty}^{\infty}} + \int_{-\infty}^{\infty} f(x)P dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)P dx \\ &= \langle f(X) \rangle \\ \text{②} &= \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (\sigma(x))^2 P}{\partial x^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x d \frac{\partial (\sigma(x))^2 P}{\partial x} \quad (4-7) \\ &= \frac{1}{2} \left(\boxed{x \frac{\partial (\sigma(x))^2 P}{\partial x} \Big|_{-\infty}^{\infty}} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial (\sigma(x))^2 P}{\partial x} dx \right) \\ &= -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial (\sigma(x))^2 P}{\partial x} dx = \boxed{-\frac{1}{2} (\sigma(x))^2 P \Big|_{-\infty}^{\infty}} = 0 \end{aligned}$$

ここに、ランダム変数 X が無限になることがないので、赤い枠の項は0になる。まとめると、1階モーメント（期待値）の時間発展式は以下のようなになる。

$$\frac{d\langle X \rangle(t)}{dt} = \langle f(X) \rangle \quad (4-8)$$

式(4-8)は一見、式(4-3)と対応する決定論の式と同様の式形であるが、実際は僅かに異なる。式(4-3)に対応する決定論の式は、

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad (4-9)$$

である。仮に式(4-8)が以下のようなになると、式(4-9)と完全に同等である。

$$\frac{d\langle X \rangle(t)}{dt} = \langle f(X) \rangle \rightarrow \frac{d\langle x \rangle}{dt} = f(\langle x \rangle) \quad (4-10)$$

以上より、1階モーメント（期待値）の時間発展式と決定論的な式との違いは $f(\langle X \rangle)$ と $\langle f(X) \rangle$ の違いである。言い換えれば、 f を作用させる操作と、期待値を取る操作の順番が変えられるかどうかの違いである。

$f(x)$ が x に関して線形である場合：

$$f(x) = ax + b$$

$$\langle f(X) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)P dx \quad (4-11)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (ax + b)P dx = a \int_{-\infty}^{\infty} xP dx + b \int_{-\infty}^{\infty} P dx = a\langle X \rangle + b = f(\langle X \rangle)$$

従って、 $f(x)$ が線形の場合は $\langle f(X) \rangle = f(\langle X \rangle)$ であり、 X の1階モーメント（期待値）の時間発展式は決定論の式と同様の式となる。 $f(x)$ が x に関して非線形である場合：（例えば $f(x) = x^2$ ）

$$\langle f(X) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)P dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 P dx = \langle X^2 \rangle \quad (4-12)$$

$$f(\langle X \rangle) = \langle X \rangle^2$$

一般的に $\langle X \rangle^2$ と $\langle X^2 \rangle$ は等しくないため、 $f(\langle X \rangle)$ は $\langle f(X) \rangle$ と異なる。よって、 $f(x)$ が x に関して非線形である場合は、 X の1階モーメント（期待値）は決定論の式から解いた解と必ずしも一致する保証がない。これは一見予想と違うが、例えば乱流問題と比較すると、乱流の乱れ成分が平均流成分と比べて充分大きい場合は平均流成分にも影響を及ぼすことと同じことである。

したがって、 $f(x) = x^2$ の場合は、 x の1階モーメント（期待値）の時間発展式は、

$$\frac{d\langle X \rangle}{dt} = \langle X^2 \rangle \quad (4-13)$$

である。式(4-13)は X の1階モーメント $\langle X \rangle$ に関する常微分方程式であるが、それを解くには X の2階モーメント $\langle X^2 \rangle$ が必要である。 $\langle X^2 \rangle$ の時間発展式を導くと、式の中に X の3階モーメント $\langle X^3 \rangle$ が現れる。つまり、 X の n 階モーメントの式に X の $n+1$ 階モーメントが現れるため、何階のモーメントまでを考慮しても方程式の本数は永遠に未知数の個数より少ないのである。これをモーメントの完結問題（Moment closure Problem）と呼ぶ。

このことを先程と同様に乱流問題と比較する。レイノルズ平均モデルを用いる時は、レイノルズ応力の本体は速度の乱れ成分の2階モーメントマトリックスである。レイ

ノルズ応力の時間発展式を詳しく導くと、乱れ成分の2階より高いモーメントが現れるため、永遠に解けなくなる。これは乱流問題における有名な乱流完結問題である。これを解決するために、乱流モデルが必要になる。乱流モデルの役割は乱れ成分の n 階モーメントと、乱れ成分の n 階より低い階数のモーメントとの関係を構築することである。例えば、渦度粘性モデルはレイノルズ応力（2階モーメント）と平均流成分（1階モーメント）の関係を示している。この確率過程におけるモーメントの完結問題（Moment closure Problem）は本研究の困難点の1つである。

これまで、ランダム変数 X の1階モーメント（期待値）の時間発展を支配する方程式を導き、それに関するモーメントの完結問題について述べてきた。しかし、一般的にある確率密度関数 $P(x, t)$ を表現するには、期待値と分散、つまり少なくとも1階と2階モーメントが必要である。次に x の2階モーメントの時間発展式について説明する。

まず、 x の2階モーメントは以下の性質を持っている。

$$\begin{aligned} \langle (X - \bar{x})^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2 P(x, t) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 - 2x\bar{x} + \bar{x}^2) P(x, t) dx = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2 \end{aligned} \quad (4-14)$$

従って、 $\langle (X - \bar{x})^2 \rangle$ と $\langle X^2 \rangle$ の内のいずれかを対象にすれば良い。以下では $\langle X^2 \rangle$ を対象とする。 X の2階モーメントの時間発展は

$$\begin{aligned} \frac{d\langle X^2 \rangle}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 P(x, t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{\partial P(x, t)}{\partial t} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \left(-\frac{\partial f(x) P(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (\sigma(x))^2 P}{\partial x^2} \right) dx \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \left(-\frac{\partial f(x) P(x, t)}{\partial x} \right) dx}_{\textcircled{1}} + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (\sigma(x))^2 P}{\partial x^2} dx}_{\textcircled{2}} \end{aligned} \quad (4-15)$$

1階モーメントの式と同じように項①と②を変形する。

$$\begin{aligned} \textcircled{1} &= - \int_{-\infty}^{\infty} x^2 d(fP) = -x^2 fP \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} f(x) P dx^2 \\ &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) P dx = 2 \langle X f(X) \rangle \end{aligned} \quad (4-16)$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{2} &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (\sigma(x))^2 P}{\partial x^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 d \frac{\partial (\sigma(x))^2 P}{\partial x} \\
 &= \frac{1}{2} \left(x^2 \frac{\partial (\sigma(x))^2 P}{\partial x} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial (\sigma(x))^2 P}{\partial x} dx^2 \right) \\
 &= - \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{\partial (\sigma(x))^2 P}{\partial x} dx = - \int_{-\infty}^{\infty} x d(\sigma(x))^2 P \\
 &= x(\sigma(x))^2 P \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma(x))^2 P dx = \langle (\sigma(X))^2 \rangle
 \end{aligned}$$

まとめると、 X の2階モーメントの時間発展式は

$$\frac{d\langle X^2 \rangle}{dt} = 2\langle Xf(X) \rangle + \langle (\sigma(X))^2 \rangle \quad (4-17)$$

式(4-17)は、 $\langle f(X) \rangle$ と $\langle (\sigma(X))^2 \rangle$ は未知数であるから、 $f(x)$ と $\sigma(x)$ の具体的な形式を議論しない限り、 x のモーメントの式にならない。一番簡単の場合、例えば $f(x) = ax + b$ 、 $\sigma(x) = \sigma$ の場合、式(4-17)は以下のようなになる。

$$\frac{d\langle X^2 \rangle}{dt} = 2a\langle X^2 \rangle + b\langle X \rangle + \sigma^2 \quad (4-18)$$

ここで、 $f(x) = ax + b$ は線形であるから、式(4-18)は x のモーメントの式となり、モーメントの完結問題は存在しない。しかし、 $f(x)$ が非線形である場合、例えば $f(x) = x^2$ 、 $\sigma(x) = \sigma$ の場合、

$$\frac{d\langle X^2 \rangle}{dt} = 2\langle X^3 \rangle + \sigma^2 \quad (4-19)$$

式(4-19)には X の3階モーメントが現れる。式(4-11)と合わせると、 $f(x)$ が非線形である場合、モーメントの完結問題が現れることがはっきり分かる。

4-3 降雨流出過程の摂動解析

前節で明らかにしたように、物理システムの時間発展を表す $f(x)$ が非線形の場合、モーメントの支配方程式には完結問題が存在する。それを解決するには2つの方法がある。1つは乱流モデルのようにランダム変数の n 階モーメントと n 階より低い階数のモーメントとの関係を構築すること（方法①）、2つ目の方法は非線形システムを線形化すること（方法②）である。

本研究では方法②を用いた。線形化手法の中で最も使われている手法の1つは摂動解析法である。本節では降雨強度の不確実性を考慮した降雨流出過程を例とし、基礎式に対して摂動解析を行い、非線形システムを線形化する。

4-3-1 単一斜面における降雨流出の基礎式の摂動解析

第3章に述べたように、降雨強度の不確実性を考慮した降雨流出過程の支配方程式は以下のように表わせる。

$$\frac{dq}{dt} = a_0 q^\beta (\bar{r}(t) + r' - q) \quad (4-20)$$

降雨強度の不確実な成分 r' が平均成分 $\bar{r}(t)$ に比べて十分小さい時、 r' を摂動パラメータで表現できる。

$$\frac{dq}{dt} = a_0 q^\beta (\bar{r}(t) + \varepsilon r' - q) \quad (4-21)$$

ここに、 r' は $\bar{r}(t)$ と同じオーダーであり、 ε は充分小さい摂動パラメータである。摂動項 $\varepsilon r'$ の影響によって、式(4-21)の解は以下のように書ける。

$$q(t) = q_0(t) + \varepsilon q_1(t) + \varepsilon^2 q_2(t) + \dots \quad (4-22)$$

ここに $q_0(t), q_1(t), q_2(t) \dots$ は全て同じオーダーである。摂動パラメータ ε のべき乗をかけることによって、方程式の解 $q(t)$ を ε のべき乗のオーダーごとに分離することができた。次に、議論を簡単化するため、 ε の1乗オーダーまで考慮する。

$$q(t) = q_0(t) + \varepsilon q_1(t) \quad (4-23)$$

式(4-23)を(4-21)に代入すれば、

$$\begin{aligned} \frac{dq_0 + \varepsilon q_1}{dt} &= a_0 (q_0 + \varepsilon q_1)^\beta (\bar{r}(t) + \varepsilon r' - q_0 - \varepsilon q_1) \\ \frac{dq_0}{dt} + \varepsilon \frac{dq_1}{dt} &= a_0 \left(q_0^\beta + \beta q_0^{\beta-1} (\varepsilon q_1) \right) (\bar{r}(t) + \varepsilon r' - q_0 - \varepsilon q_1) \end{aligned} \quad (4-24)$$

$$\begin{aligned} \frac{dq_0}{dt} + \varepsilon \frac{dq_1}{dt} &= a_0 q_0^\beta (\bar{r}(t) - q_0) + \varepsilon q_0^\beta (r' - q_1) \\ &+ \varepsilon \beta q_0^{\beta-1} q_1 (\bar{r}(t) - q_0) + \varepsilon^2 \beta q_0^{\beta-1} q_1 (r' - q_1) \end{aligned}$$

ε の0乗オーダー方程式は

$$\frac{dq_0}{dt} = a_0 q_0^\beta (\bar{r}(t) - q_0) \quad (4-25)$$

ε の1乗オーダー方程式は

$$\frac{dq_1}{dt} = a_0 q_0^\beta (r' - q_1) + a_0 \beta q_0^{\beta-1} q_1 (\bar{r}(t) - q_0) \quad (4-26)$$

整理すると,

$$\frac{dq_1}{dt} = (a_0 \beta q_0^{\beta-1} (\bar{r}(t) - q_0) - a_0 q_0^\beta) q_1 + a_0 q_0^\beta r' \quad (4-27)$$

ε の0乗オーダー方程式(4-25)はランダム項のない決定論的なアプローチの式と同様の式であり, q_0 は決定論的なアプローチの解である. q_0 を ε の1乗オーダー方程式(4-27)に代入すると, 式(4-27)は q_1 に関する線形の方程式となる. したがって, q_1 のモーメント方程式を導けば, モーメントの完結問題を避けることができる.

4-3-2 単一斜面における降雨流出基礎式の摂動解析に対する妥当性の検証

上記に示した q_1 についてのモーメント方程式を導出する前に, 摂動展開した方程式は本来の方程式の良い近似であるかどうかを検証する必要がある. 式(4-20)から(4-27)までの導出は降雨強度の不確実な成分(摂動成分) r' が一般的な関数か, 確率過程的に関わらず成立するため, 検証の際は $r'(t)$ をSin関数と仮定する.

検証用問題を以下のように設定する.

表 4-1 摂動解析の妥当性を検証する数値実験に使用する設定

	平均降雨強度	パラメータ	降雨強度の 摂動成分
記号	$\bar{r}(t)$	a_0, β	r'
設定	4(mm/h) For (0 < t < 100Hour)	$a_0 = 0.047$ $\beta = 0.4$	Sin 型

摂動成分 r' がない時, つまり $\varepsilon = 0$ の場合の解を図 4-1 に示す.

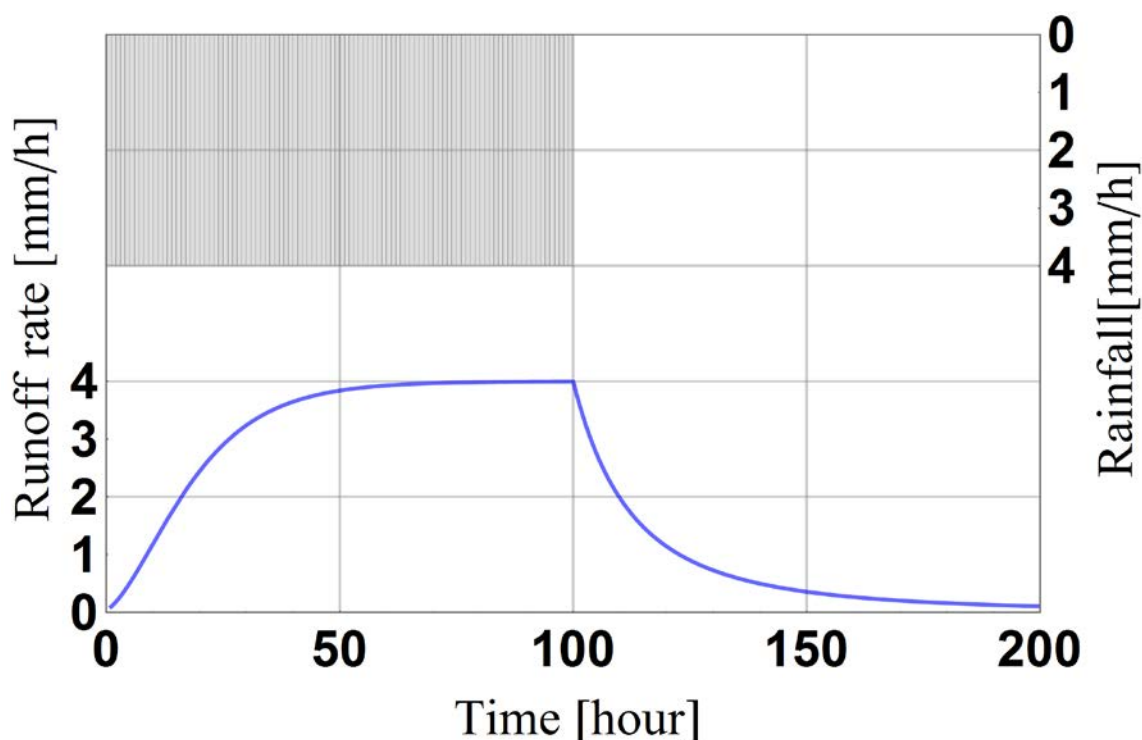


図 4-1 降雨強度が 4mm/h 一定で降雨が 100 時間続く場合の降雨流出過程. 図に示すように不確定性を考慮しなければ, ある一定値の降雨強度で一定時間降雨が続くと, 流出高の値は降雨強度の値と同じ値となり, ある定常状態に到達する.

$\varepsilon = 0$ の場合, 方程式は第 3 章に述べた決定論的な降雨流出の基本式と同様の式であり, その解も当然同じである. なお, この解は先述の摂動解析における ε の 0 乗オーダー方程式の解 q_0 と同様である. 次に ε が 0 でない時, つまり, 一定の降雨強度の上で Sin 波形を加えた降雨の場合の流出過程を検討する.

ε が 0 でない場合, 解を得る方法は以下の 2 通り考えられる. 1 つは, ε の値を元の支配方程式(4-21)に代入し, 直接方程式を解く方法 (方法①) である. 図 4-2 と図 4-3 に示した結果はこのようにして得られた結果である. 2 つ目の方法は, 先述の摂動解析で得られた ε の乗数が異なる方程式を順に解いていく方法 (方法②) である. この方法には, 次の 3 つのステップがある. まず ε の 0 乗オーダー方程式(4-25)を解き, $q_0(t)$ が得られる. 次に, $q_0(t)$ を ε の 1 乗オーダー方程式(4-27)に代入し, 方程式を解くことで $q_1(t)$ が得られる. ここに注意すべき点は, 以上の 2 つステップは ε の値と 2 関係ないことである. 最後に, $q_0(t)$ と $q_1(t)$ を ε の 1 乗オーダーまで考慮した解である式(4-23)に代入し, ε の値に応じて $q(t)$ を求める.

図 4-2 降雨強度が一定値である場合と、一定値に Sin 波形を加えた場合の降雨流出過程の計算結果。赤線は図 4-1 と同様に一定の降雨が続く場合の流出過程である。また、青線は Sin 波形を与えた場合の流出過程である。図に示すように、青い線も赤い線の上である Sin の波形を加えた形に見える。これは摂動解析の仮定とよく一致する。ある摂動項 r' を加えた時、その新しい解は、元の解と摂動項によって生じた解の線形和として表現される。

方法②は摂動解析の結果を用いている。一見方法②のほうが複雑なように見えるが、実際方法①は ε の値に応じて毎回微分方程式を解かなければならないのに対して、方法②は ε の値に関わらず、2回微分方程式を解けばよいだけある。 ε の値に応じて計算を行えば、最後に解 $q(t)$ が得られる。そのため、実際計算を行う際には、方法②が遥かに簡単である。ただし、方法①は直接支配方程式を解くことに対して、方法②は ε の1乗オーダーの精度まで取った近似的な解き方である。次に、この近似の妥当性を検証する。

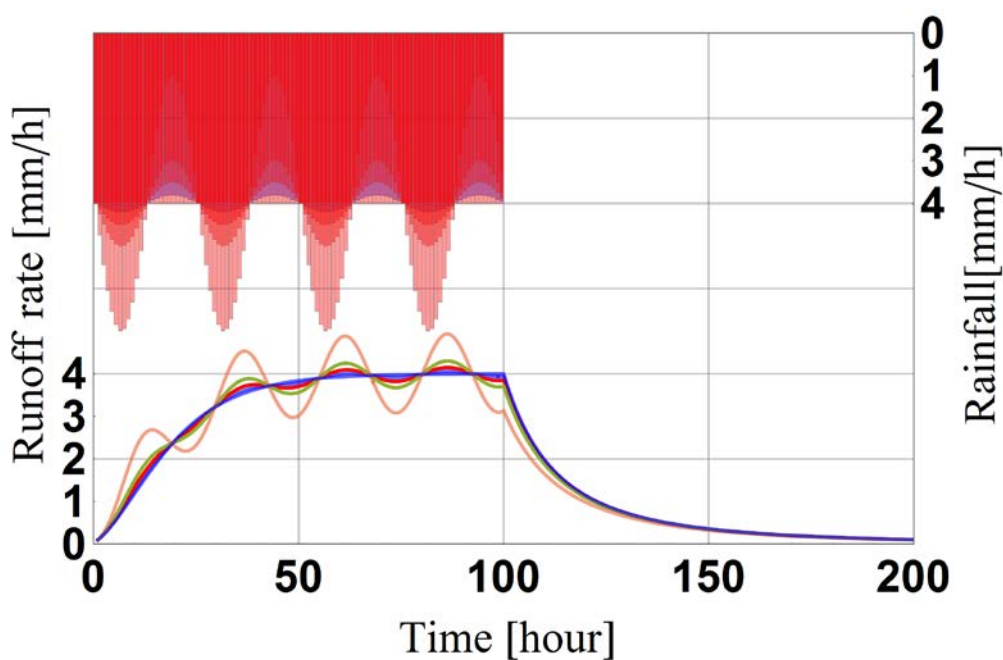


図 4-3 摂動パラメータ $\varepsilon = 0.2, 0.5, 1, 3$ の時の計算結果. 摂動パラメータ ε の大きさが流出過程に与える影響がわかる.

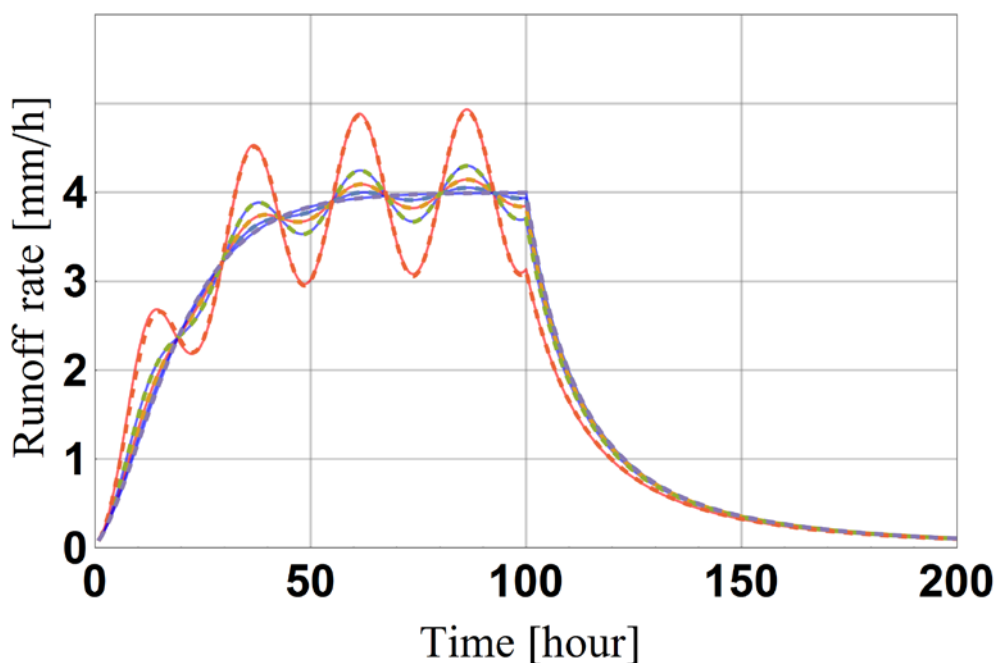


図 4-4 方法①（支配方程式を直接解く方法）と方法②（摂動解析で得られた方程式を解く方法）を用いて、摂動パラメータを $\varepsilon = 0.2, 0.5, 1, 3$ と変えた場合の計算結果. 実線は方法①の結果、点線が方法②の結果である.

図4-4は方法①と方法②を用いて計算した結果を示している。点線と実線の差は目に見えないほど小さい。ここで ε が最も大きい値を取る時、降雨の時系列は $4 + 3 * \sin(2t/25\pi)$ mm/hとなる。Sin波形の最大値が平均降雨強度4mm/hの75% (3mm/h)となっても、 ε の1乗オーダーの精度まで取った方程式は元の支配方程式の解に対して良い近似であることが分かった。

4-4 降雨の不確定性を考慮した降雨流出過程のモーメント方程式

4-4-1 単一斜面における降雨流出の基礎式のモーメント方程式

ここまでの議論で、流出高の確率密度関数の時間発展を追う Fokker-Planck 方程式が高次元である場合は、解析的及び数値的に解である確率密度関数を求めることが困難であるため、代わりにランダム変数のモーメントの時間発展を追う方法を提案した。しかし、考える物理システムが非線形ならば、モーメント方程式には完結問題が現れるため解が求められない。そのため、前節では、摂動解析を用いて非線形である降雨流出基礎式の解の平均からずれる成分を線形化した。そのことよって、降雨の平均からずれる成分がランダム変数であるならば、それに対応する Fokker-Planck 方程式のモーメント方程式を導くことが可能となった。本節では、非線形である単一斜面における降雨流出基礎式の解（流出高）の確率密度関数の期待値及び分散、つまり1階及び2階モーメントの時間発展方程式を導出する。

前節で示したように、摂動解析をした後の方程式は以下のように表わせる。

$$\frac{dq_0}{dt} = a_0 q_0^\beta (\bar{r}(t) - q_0) \quad (4-25)$$

$$\frac{dq_1}{dt} = (a_0 \beta q_0^{\beta-1} (\bar{r}(t) - q_0) - a_0 q_0^\beta) q_1 + a_0 q_0^\beta r' \quad (4-27)$$

簡単化のため、以下の記号を用いる。

$$\begin{aligned} A_0(t) &= (a_0 \beta q_0^{\beta-1} (\bar{r}(t) - q_0) - a_0 q_0^\beta) \\ B_0(t) &= a_0 q_0^\beta \end{aligned} \quad (4-28)$$

ε の1オーダー方程式は以下のようなになる。

$$\frac{dq_1}{dt} = A_0(t) q_1 + B_0(t) r' \quad (4-29)$$

式(4-27)を伊藤の確率微分方程式の形式に書き換えると、

$$dq_1 = A_0(t) q_1 dt + B_0(t) \sigma \sqrt{T_L} dw \quad (4-30)$$

それと対応する Fokker-Planck 方程式は

$$\frac{\partial P(q_1, t)}{\partial t} = -A_0(t) \frac{\partial q_1 P}{\partial q_1} + \frac{(B_0(t) \sigma \sqrt{T_L})^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial q_1^2} \quad (4-31)$$

である。式(4-8)及び式(4-17)を用いると q_1 の1階と2階モーメントの時間発展を支配する方程式が得られる。

$$\frac{d\langle x \rangle}{dt} = \langle f(x) \rangle \quad (4-8)$$

$$\frac{d\langle x^2 \rangle}{dt} = 2\langle xf(x) \rangle + \langle (\sigma(x))^2 \rangle \quad (4-17)$$

$$\frac{d\langle x \rangle}{dt} = \langle f(x) \rangle \rightarrow \frac{d\langle q_1 \rangle}{dt} = \langle A_0(t)q_1 \rangle \rightarrow \frac{d\langle q_1 \rangle}{dt} = A_0(t)\langle q_1 \rangle \quad (4-32)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\langle x^2 \rangle}{dt} &= 2\langle xf(x) \rangle + \langle (\sigma(x))^2 \rangle \rightarrow \frac{d\langle q_1^2 \rangle}{dt} \\ &= 2\langle q_1 A_0(t)q_1 \rangle + (B_0(t)\sigma\sqrt{T_L})^2 \\ &\rightarrow \frac{d\langle q_1^2 \rangle}{dt} = 2A_0(t)\langle q_1^2 \rangle + (B_0(t)\sigma\sqrt{T_L})^2 \end{aligned} \quad (4-33)$$

以上をまとめると、 q_1 の1階モーメントの時間発展式は、

$$\frac{d\langle q_1 \rangle}{dt} = A_0(t)\langle q_1 \rangle \quad (4-34)$$

q_1 の2階モーメントの時間発展式は、

$$\frac{d\langle q_1^2 \rangle}{dt} = 2A_0(t)\langle q_1^2 \rangle + (B_0(t)\sigma\sqrt{T_L})^2 \quad (4-35)$$

この2本の式は本ノートが得られた成果である。次に、この式の妥当性を検証する。

4-4-2 単一斜面における降雨流出基礎式に対するモーメント方程式の妥当性の検証

本研究ここまでの内容をまとめる。不確実性を有する物理システムの時間発展を求める方法は以下に示す3つである。方法①：サンプリング法。不確実性がある物理量に対して乱数を発生させ、決定論と同じように計算を大量に行い、得られた結果の分布を作成する。方法②：Fokker-Planck 方程式に初期分布を与え、方程式を解く方法。方法③：本研究で提案したモーメント方程式(4-34)及び(4-35)を解く方法。

次に、上記3つの方法から得られた結果を比較する。検証問題の設定は全て同一条件とした。

基本式：

$$\frac{dq}{dt} = a_0 q^\beta (\bar{r}(t) + r' - q) \quad (4-36)$$

	平均降雨強度	パラメータ	降雨強度の 摂動成分
記号	$\bar{r}(t)$	a_0, β	r'
設定	4(mm/h) For (0 < t < 100Hour)	$a_0 = 0.047$ $\beta = 0.4$	$TL = 1\text{Hour}$ $\sigma_{Rain} = 0.3\text{mm/h}$

表 4-2

検証問題の条件を表 4-2 に示す. 表 4-2 は設定した降雨強度を図示したものである.

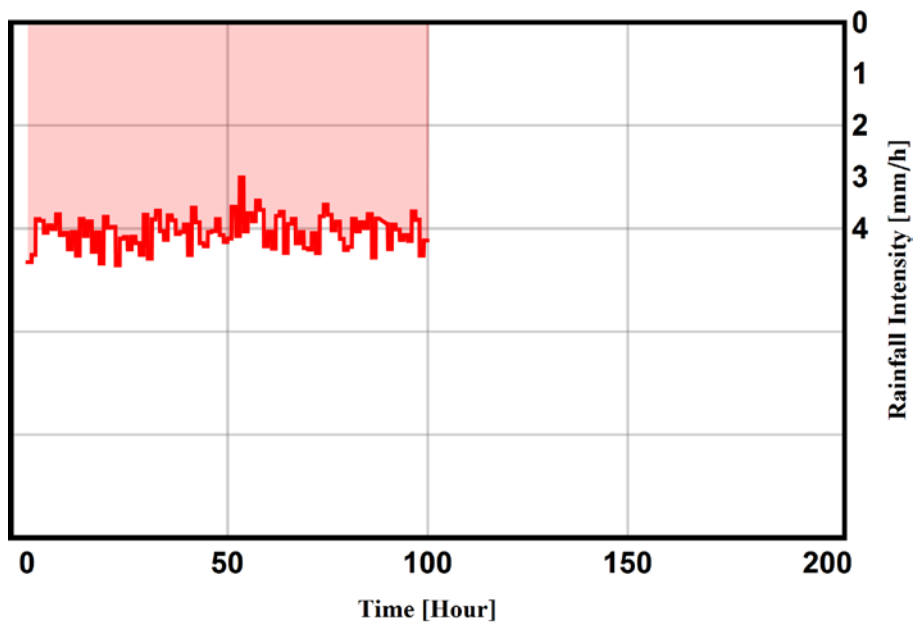


図 4-5 検証問題に設定した降雨強度

方法①, つまりサンプリング法を用いて得られた結果を図 4-6 に示す.

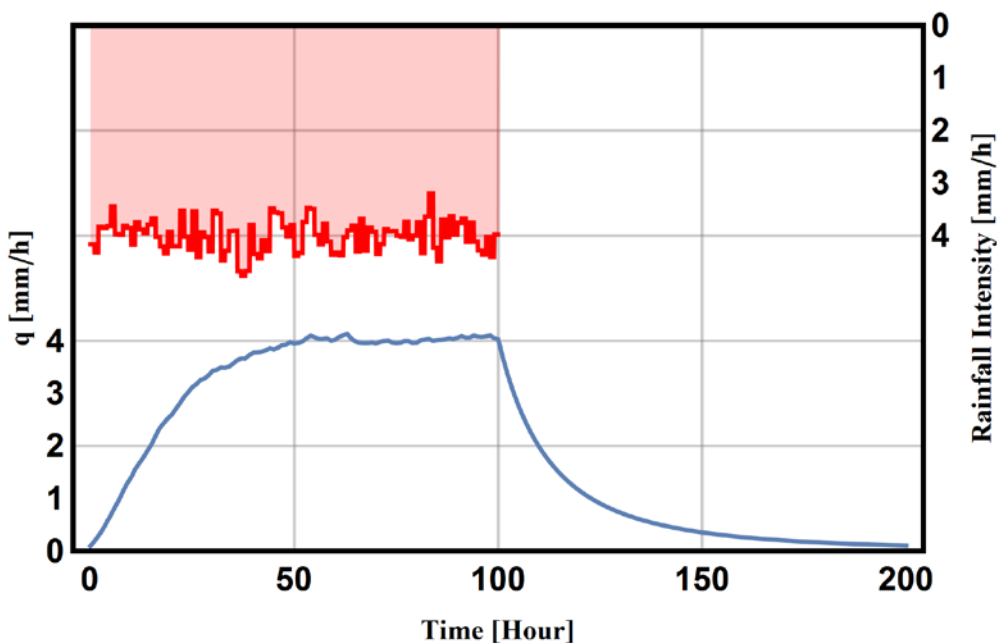


図 4-6 方法①（サンプリング法）の計算結果（サンプル数=1 とした場合）。降雨強度の不確実性が流出高に及ぼす影響がはっきり見える。

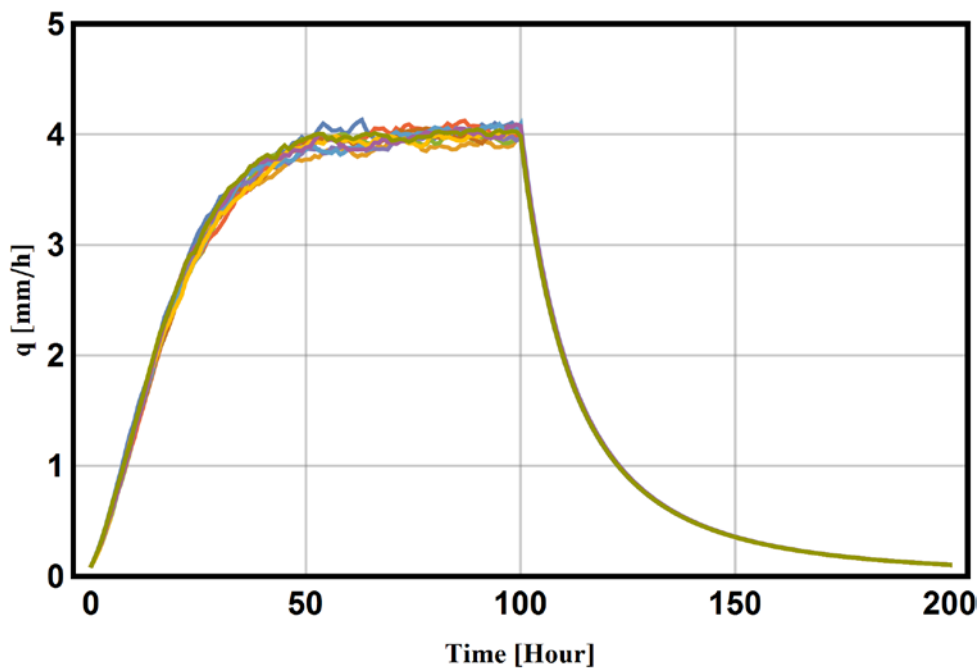


図 4-7 方法①（サンプリング法）の計算結果（サンプル数=10 とした場合）。流出高の計算結果は、ある幅があるように見える。雨が止むと、その幅は徐々になくなる。

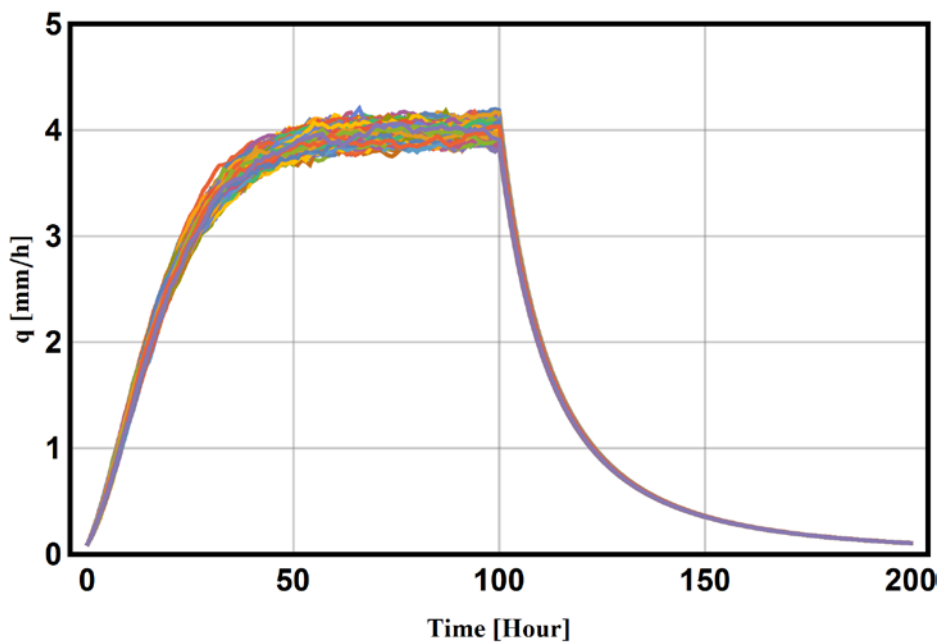


図 4-8 方法①（サンプリング法）の計算結果（サンプル数=500 とした場合）。ここで注意すべき点は、流出高はある幅を持っているが、その幅の上下限值が発生することは非常に稀である。

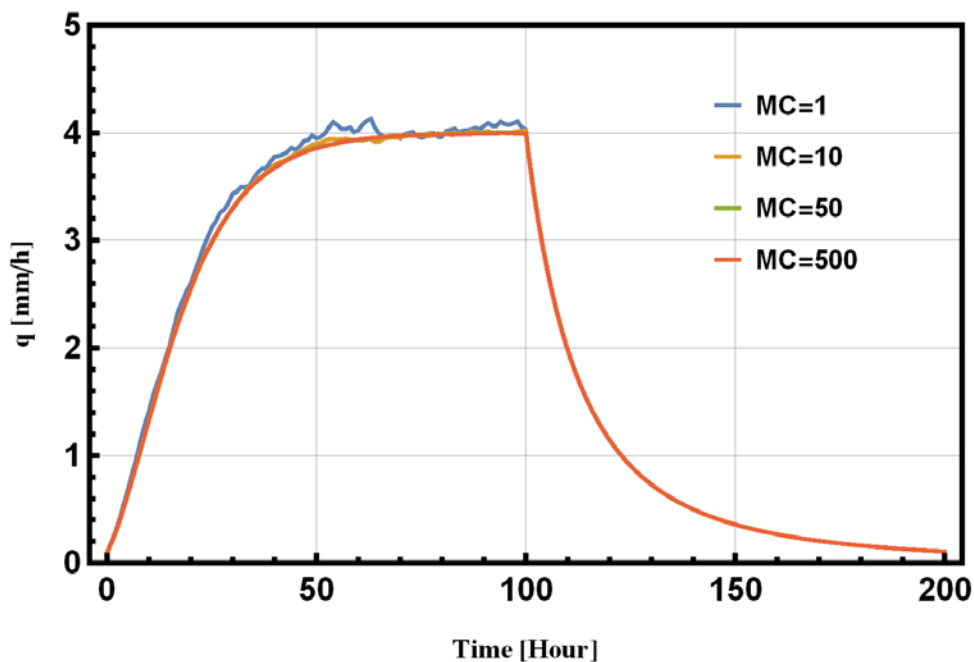


図 4-9 方法①（サンプリング法）を用いた時の流出高 q の平均値 $\langle q \rangle (t)$ の計算結果。サンプリング法から得られた結果の平均を取ると、簡単に求められる。

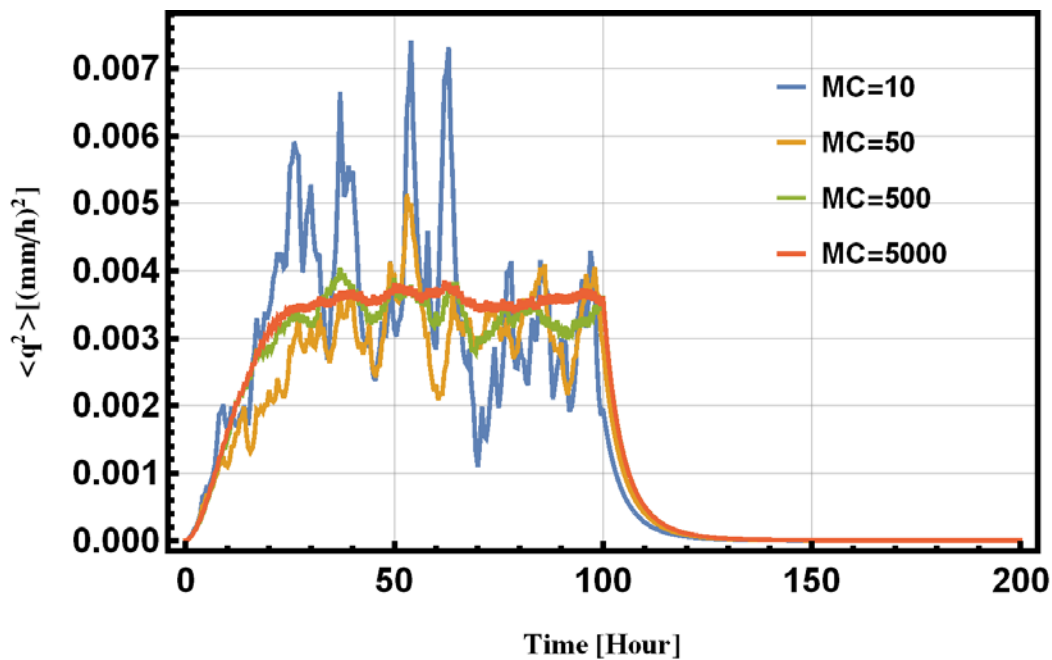


図 4-10 方法①（サンプリング法）を用いた時の流出高 q の分散 $\langle q^2 \rangle (t)$ の計算結果.

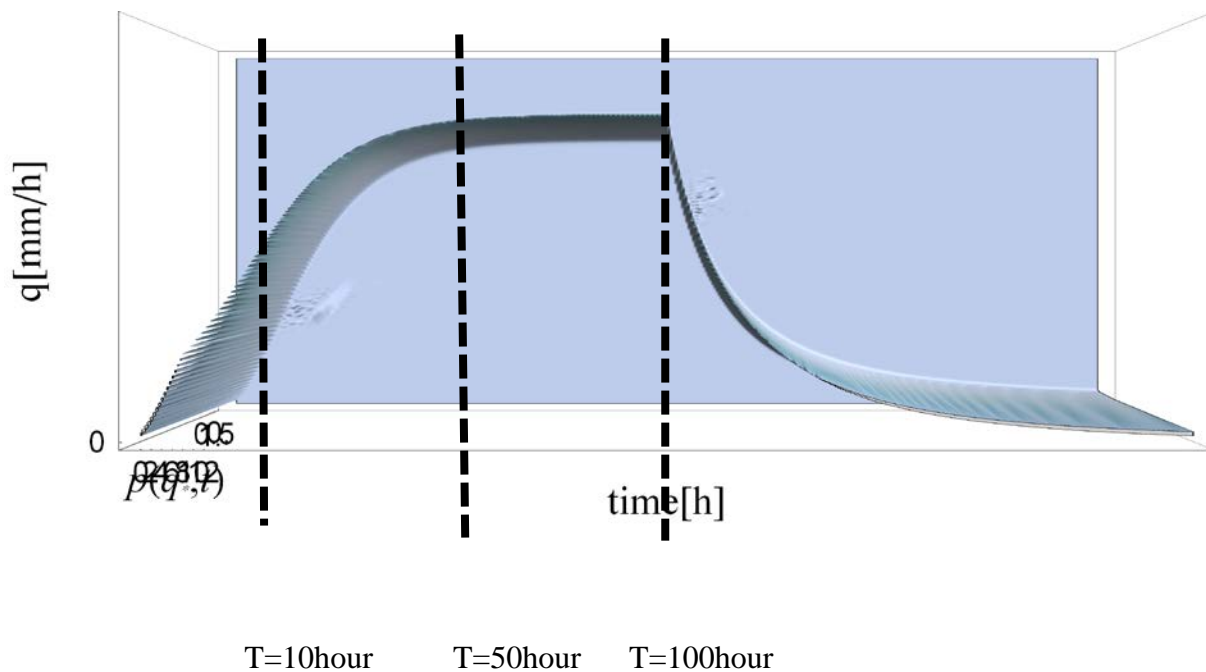


図 4-11 Fokker-Planck 方程式 (FPE) を解いて求めた流出高 q に関する確率密度関数 $p(q, t)$ の時間発展. (初期条件として極めて分散の小さい正規分布を与え, 降雨の標準偏差 σ , 時定数 TL は一定値として FPE を解いている.)

図 4-6 から図 4-10 はサンプリング法を用いて検証問題を計算した結果である。図 4-6 から図 4-8 を見ると、降雨強度のランダム成分 $r'(t)$ の統計性質が全く同じでも、サンプル数が増えると、平均値から大きくずれるケースが生じることが分かる。図 4-9 と図 4-10 に流出高 $q(t)$ の平均値と分散を示す。平均値と分散は、それぞれ $q(t)$ の 1 階および 2 階モーメントである。サンプル数が増えるほど、平均値と分散は安定することが分かる。この結果は、直感と一致する。

次に方法②、Fokker-Planck 方程式を用いて検証問題を解いた結果を示す。

図 4-11 から図 4-15 は、Fokker-Planck 方程式から得られた結果とサンプリング法から得られた結果との比較である。図 4-12 から図 4-14 に示すように、どの時刻で見ても、Fokker-Planck 方程式の解とサンプリング法の解が一致することが分かった。

図 4-15 は、決定論的方程式(4-25)の解と Fokker-Planck 方程式を解いて得られた流出高 q に関する確率密度関数の平均値との比較である。ここで、Fokker-Planck 方程式の数値解は、 q が小さい時には非常に不安定であるため、積分できない。そのため、 q が小さい時の q の平均値は正しく計算できない。(図中の右下端及び左下端部) なお、理論上 q の分散を求めることができるが、ここに $\langle q^2 \rangle$ のオーダーはせいぜい 0.005[mm/h]程度であるから、Fokker-Planck 方程式を数値解析する際の数値誤差がそのオーダーを遥かに超えており、計算できない。

最後に、本研で提案した方法③を用いて、検証問題を解く。

q_1 の 1 階モーメントの時間発展式は、

$$\frac{d\langle q_1 \rangle}{dt} = A_0(t)\langle q_1 \rangle \quad (4-37)$$

q_1 の 2 階モーメントの時間発展式は、

$$\frac{d\langle q_1^2 \rangle}{dt} = 2A_0(t)\langle q_1^2 \rangle + (B_0(t)\sigma\sqrt{T_L})^2 \quad (4-38)$$

ここに、 q_1 は q_0 からのずれである。その初期値は $\langle q_1 \rangle$ は 0 である。 $A_0(t)$ は q_1 と無相関の関数であるから、式(4-34)より、その解は $\langle q_1 \rangle(t) = 0$ となる。つまり、平均値からみると、 $\langle q_0 \rangle$ と $\langle q_1 \rangle$ には差がないということである。

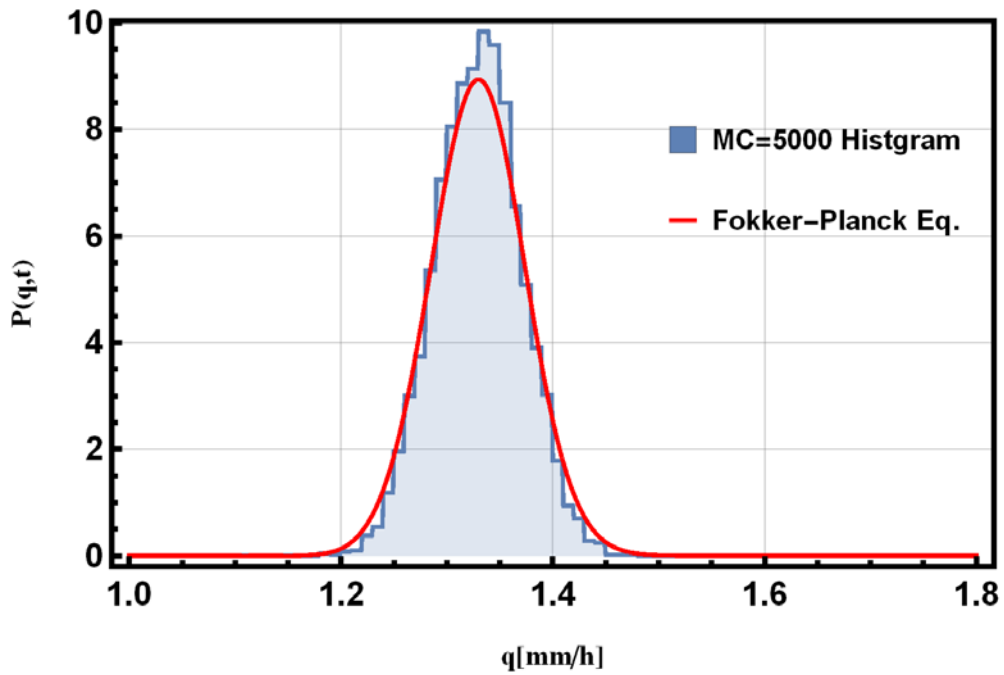


図 4-12 $T=10$ hour の時における Fokker-Planck 方程式の解とサンプリング法の解との比較.

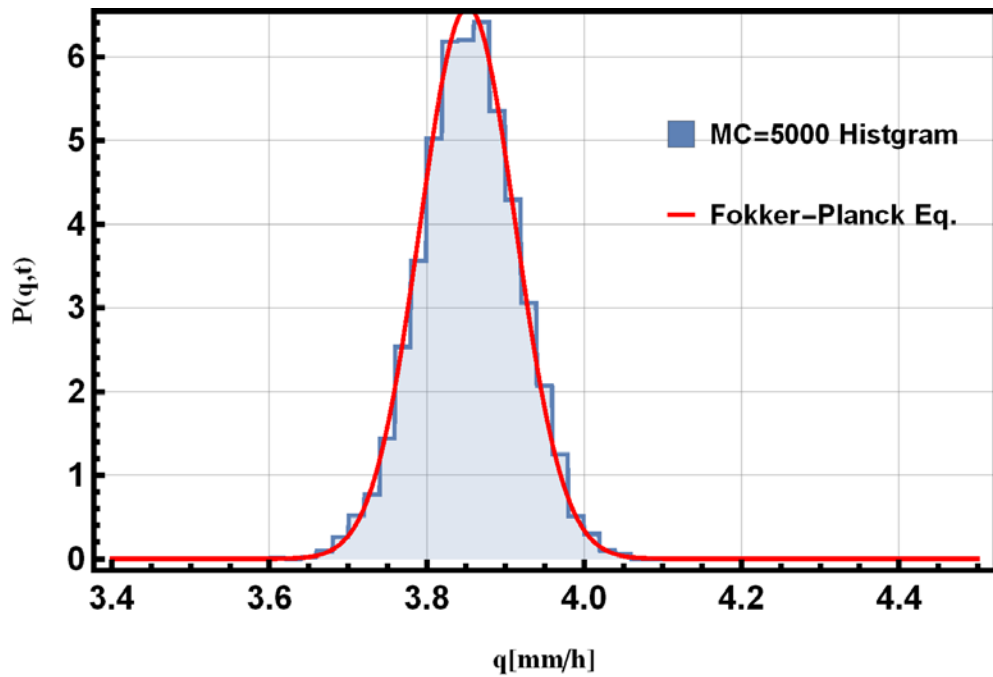


図 4-13 $T=50$ hour の時における Fokker-Planck 方程式の解とサンプリング法の解との比較.

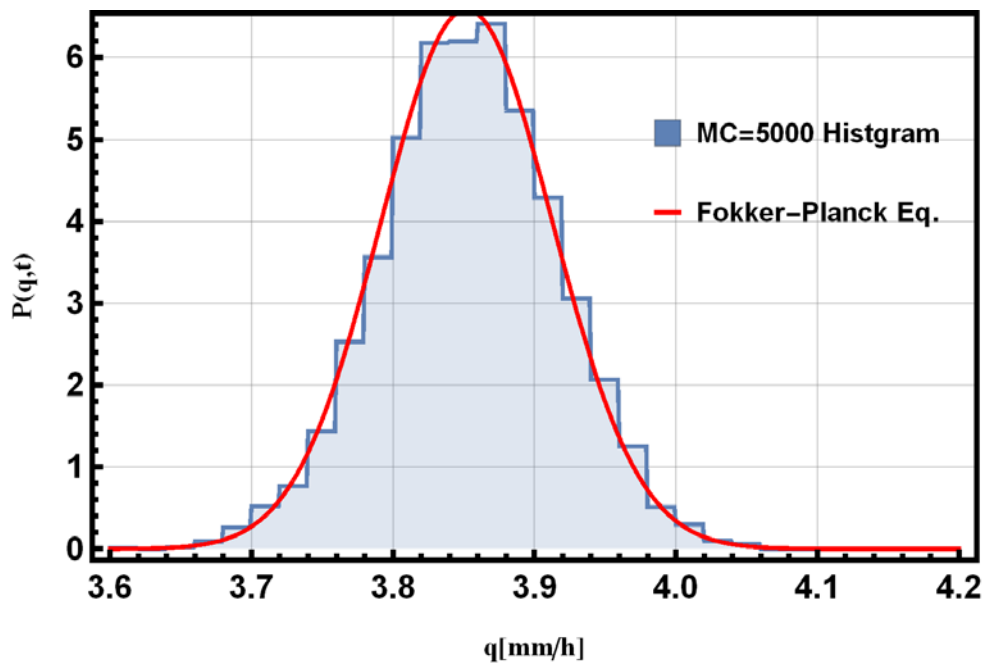


図 4-14 T=100hour の時における Fokker-Planck 方程式の解とサンプリング法の解との比較.

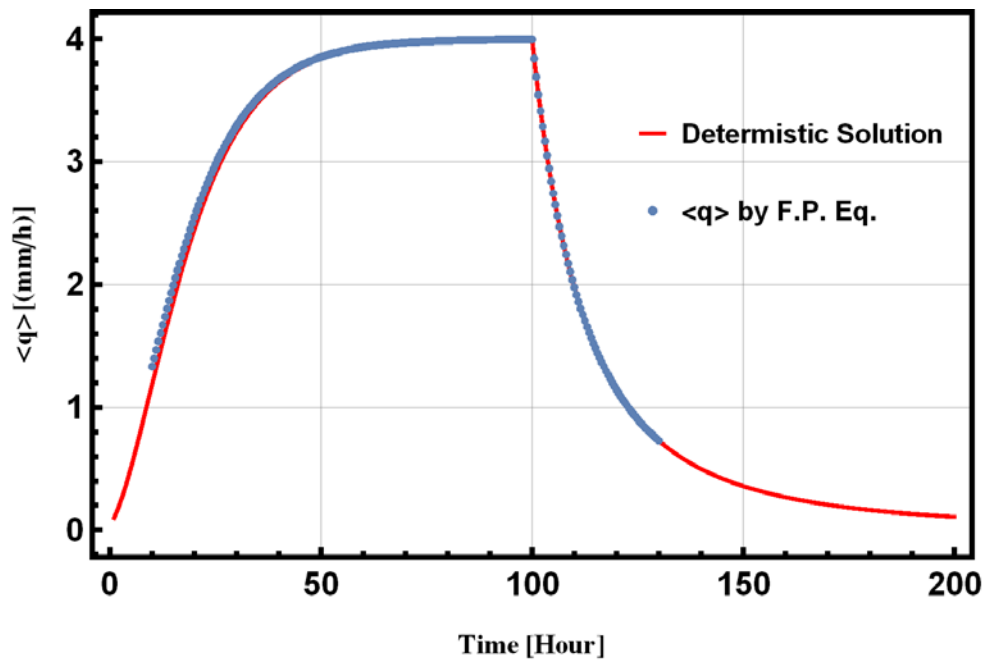


図 4-15 決定論的方程式の解と Fokker-Planck 方程式を用いて求めた流出高 q に関する確率密度関数の平均値 $\langle q \rangle (t)$ との結果の比較.

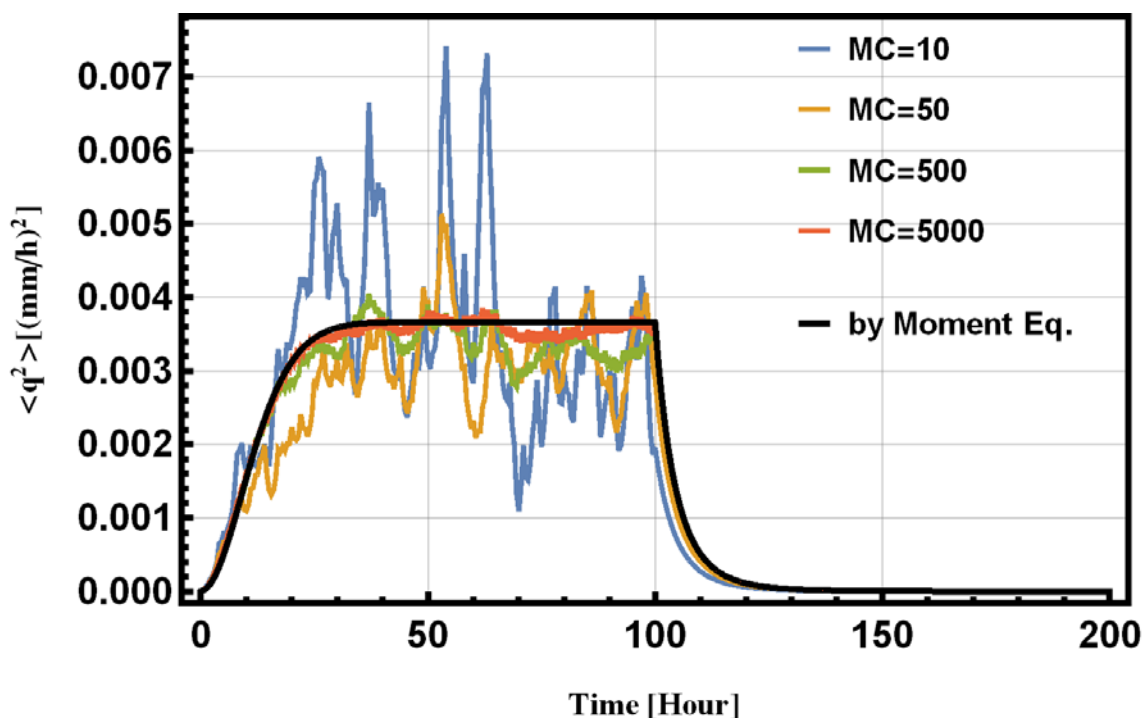


図 4-16 モーメント法を用いた流出高 q の分散 $\langle q^2 \rangle (t)$ の計算結果. 青い線から赤い線は, サンプルング法による計算結果を示している. サンプルング回数は 10 回から 5000 回である. サンプルングの回数が増えると, 流出高 q の分散値は次第に黒い線に近づく傾向があるように見える. 黒い線は本研究で提案した摂動解析とモーメント方程式を合わせて解析する手法の計算結果である. 提案した手法は分散 $\langle q^2 \rangle$ に関する微分方程式を解くだけであり, 必要な計算時間はほぼ無視できるレベルである. それに対して, サンプルング法は常微分方程式を大量に解かなければならない. ここに本研究が提案する手法の優位性がある.

参考文献

- 椎葉充晴, 立川康人, 市川温: 水文学水工計画学, 京都大学学術出版会, 2013
- 伊藤清: 確率論【現代数学(14)】, 岩波書店, 1953.
- K. Beven, "Future of distributed modeling," *Hydrologic Processes*, vol. 6(3), pp. 253–254, 1992.
- T. M. Carpenter, K. P. Georgakakos, "Intercomparison of lumped versus distributed hydrologic model ensemble simulations on operational forecast scales," *Journal of Hydrology*, vol. 329, pp. 174–185, 2006.
- M. Hino, "Prediction of hydrologic system by Kalman filtering," *Journal of JSCE*, vol.221, pp.39-47, 1974.
- A. H. Weerts, G.Y.H. El Serafy "Particle filtering and ensemble Kalman filtering for state updating with hydrological conceptual rainfall-runoff models," *Water Resources Research* vol.42, W09403, 2006.
- K. Ito, "Stochastic integral," *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, vol. 202, pp. 519-524, 1944.
- K. Ito, "On a stochastic integral equation," *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, vol. 22, pp. 32-35, 1946.
- R. E. Kalman, "A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems," *Journal of Basic Engineering* vol.82, 1960
- K. Shimula, N. Ohara, H. Matsuki, T.Yamada "Studies on runoff characteristics of the large-scale channel network using a physically based model," *J. Japan Soc. Hydrol. & Water Resour.*, vol. 14, No. 3, pp.217-228, 2001
- Martin Frank, 2007: A Fast and Accurate Moment Method For The Fokker-Planck Equation And Applications To Electron Radiotherapy, *SIAM J. Vol.67, No.2*, pp.582-603
- Hans Arnfinn Karlsen, 1990: Existence of Moments in a stationary stochastic difference equation, *Adv. Appl. Prob.* 22, pp.129-146
- Abhydai Singh, *Moment Closure Techniques for Stochastic Models in Population Biology*
- D. C. C. Bover, 1978: Moment Equation Method for Nonlinear Stochastic Systems, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 65, pp.306-320
- N. G. F. Sancho, 1970: On the Approximate Moment Equations of a Nonlinear Stochastic Differential Equation, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 29, pp.384-391
- J.S.B. Gajjar, 2010: *Asymptotic Expansions and Perturbation Methods*
- Zong-xia Liang, 1996: Estimates on moments of the solutions to stochastic differential equations with respect to $\langle [q_1]^2 \rangle / dt = 2A_0(t) \langle [q_1]^2 \rangle + (B_0(t) \sigma \sqrt{(T_L)})^2$ martingales in the plane, *Stochastic Processes and their Applications* 62, pp.263-276

Ramon van Handel, 2007: Filtering, Stability, and Robustness, California Institute of Technology

Yukiko Hirabayashi, 2013: Global flood risk under climate change, Nature Climate Change.

C. F. Clement, 1980: Moment and Fokker-Planck equations for the growth and decay of small objects, Proc. R. Soc. Lond. A371, pp.553-567

Carsten Montzka, 2012: Multivariate and Multiscale Data Assimilation in Terrestrial Systems A Review, Sensors 2012, 12

第5章 確率微分方程式論に基づく不確実性を考慮した物理システムの予測手法

5-1 はじめに

分野に関わらず，決定論に基づく物理システムの予測は，簡単に言えば，以下の3つのステップを踏む．①実現象を良く再現できるモデルを構築する．②パラメータを過去の観測，実験データから同定する．③初期条件，境界条件を与え，予測を行う．3つのステップの中で最も重要なステップは，第1ステップである．第1ステップの重要かつ困難な点は，モデルが対象とする物理システムを良く再現できたかどうかを評価することである．

決定論に基づく予測は，一般的に計算結果と観測結果が最も合うようなモデルが最適なモデルと考えられている．その評価基準は各時刻の観測値と計算値の差の自乗和である．したがって，パラメータの同定もその自乗和が最小になるように最適なパラメータを決定している．

工学が対象とする物理システムに対して，計算結果と観測値が完全に一致することはほぼ皆無であり，一般的に観測値と計算値の差を“誤差”と呼ぶ．“誤差”という言葉は，英語だと **Error** であり，誤りによって生じる差のイメージである．その“誤り”は実際，第二章に述べたように，観測、モデルの構造とパラメータの不確実性である．その不確実性を不確実性として扱うか，あるいは“誤り”として扱うかは，本研究と従来の方法の本質的な相違点である．

一方，気象学や海洋学の分野においてよく用いられている予測手法であるデータ同化は，観測、モデルの構造およびパラメータの不確実性を考慮した予測手法であり，その本質は，本研究と一致している．これらの分野においては，物理法則などの法則に基づいて時空間シミュレーションモデルを構成し，これの計算を行なうことで，実際の地球システムなどの再現，解明，予測を行なうことになる．その際に，システムの持つ非線形性が原因となり，初期条件や境界条件さらにはモデルに含まれるパラメ

ータの不確実性によって、シミュレーション結果が現実の現象から乖離した、著しく不適切なものとなることが問題となる。データ同化の目的は、実際の観測を取り込むことによって、これらシミュレーションにおける初期条件、境界条件ならびにシミュレーションモデルに含まれるパラメータの不確実性を制約することである。

しかし、データ同化は、物理システムの不確実性の物理意味を考慮せずに、その不確実性の性質を統計的な手法を用いて観測データから同定する。よって、データ同化は異なる原因で生じる不確実性がシステムに及ぼす影響を評価することができない。それに対し、本研究が提案した確率微分方程式による確率過程の表現は、不確実性の物理的な意味が非常に明確であり、データ同化と結合し、より良い予測手法を構築できる。

本章は、降雨強度の不確実性を考慮した降雨流出過程を例として、第3章、第4章で提案した確率微分方程式による確率過程の表現に基づく、データ同化の逐次同化理論と結合した新たな予測手法を提案し、その妥当性を利根川上流域のダム流域で検証した。

5-2 データ同化

5-2-1 データ同化の基本的な考え方

データ同化は不確実性のあるシステムを予報する手法であり、近年における気象分野でよく使用されている。代表的なデータ同化手法はフィルタリング理論と4次元変分法である。データ同化の基本的な考え方を以下の図-5に示す。

データ同化はシステムの時間発展を状態空間の中の点の運動と見なす。状態空間の中の点は状態ベクトル $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ で表現する。点の運動は微分方程式に支配される。

決定論的な予報手法では、ある時刻の状態空間の点の位置を与えれば、そのあと点の運動軌跡を計算によって求めることができるが、データ同化の基本概念は、ある時刻のシステムの状態は不確実性があるために、状態空間の一点に定めることが出来ない。そのため、ある時刻のシステムの状態は状態空間上の確率密度関数で記述する必要がある。

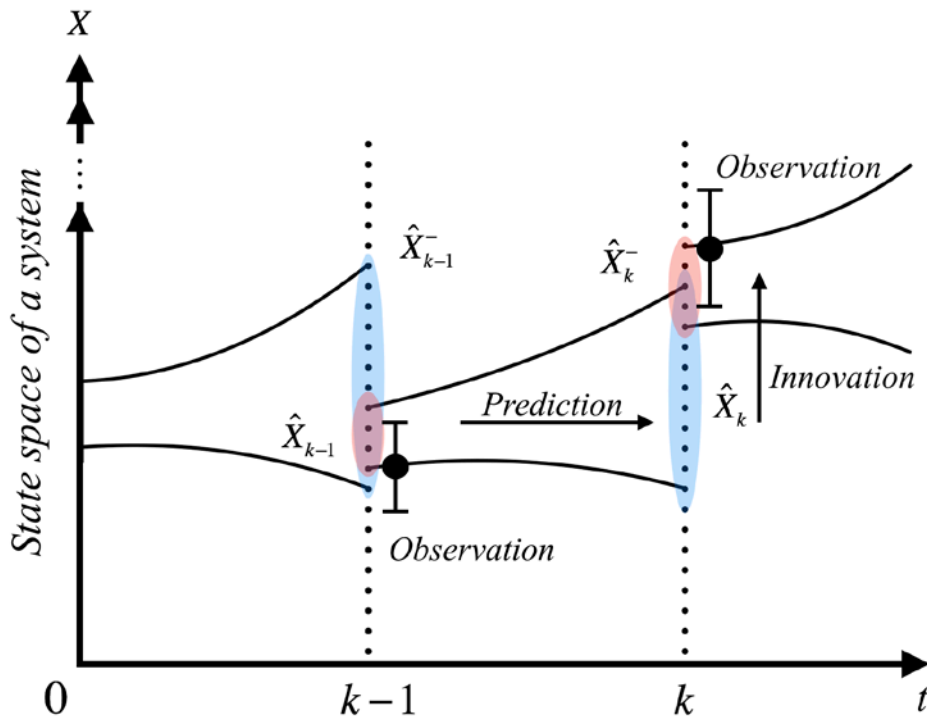


図 5-1 データ同化の概念図. ここに、横軸は時間であり、縦軸はある時刻のシステムの状態を表す値である. データ同化には 2 つのステップがある. ステップ 1 は予測である. 時刻 $k-1$ のシステムの状態の確率密度関数を用いて、時刻 k の状態の確率密度関数を予測する. この予測結果を事前確率密度と呼ぶ. ステップ 2 はイノベーションである. 時刻 k の事前確率密度と観測値を用いて、時刻 k の事後確率密度関数を計算する. この事後確率密度関数は時刻 k の観測情報を考慮した、時刻 k の最終的な予測である.

通常、データ同化には 2 つのステップがある. ステップ 1 は予測である. 時刻 $k-1$ のシステムの状態の確率密度関数を用いて、時刻 k の状態の確率密度関数を予測する. この予測結果を事前確率密度と呼ぶ. ステップ 2 はイノベーションである. 時刻 k の事前確率密度と観測値を用いて、時刻 k の事後確率密度関数を計算する. この事後確率密度関数は時刻 k の観測情報を考慮した、時刻 k の最終的な予測である.

ステップ 1 の予測手法の違いによって、様々な同化の手法が提案されている. その中にカルマンフィルタがよく降雨流出の予測に応用されている. 本研究は式(9)の Fokker-Planck 方程式を用いる. さらに、事前確率密度関数と観測値の関係から、拡散係数 σ を同定する.

5-2-2 拡張カルマンフィルタを用いた実時間流出予測

貯留関数法を用いた流出予測システムの基本式(6)は以下のように書ける：
状態方程式：

$$\frac{ds}{dt} = f_1 r(t - T_L) - \left(\frac{s(t)}{K}\right)^{\frac{1}{p}} + v'(t) \quad (5-1)$$

出力方程式：

$$q(t) = \frac{A}{3.6} \left(\frac{s(t)}{K}\right)^{\frac{1}{p}} \quad (5-2)$$

観測方程式：

$$y_k = q(t_k) + w_k'(t) \quad (5-3)$$

ここに、 $s(t)$ は時刻 t の貯留高、 $r(t)$ は降雨強度、 $q(t)$ は下流段支配断面の流量、 y_k は時刻 t_k における下流の支配断面の観測流量、 f_1 、 T_L 、 K 、 p はモデルのパラメータ、 A は流域面積、 $v'(t)$ はシステムノイズ、 $w_k'(t)$ は観測ノイズである。

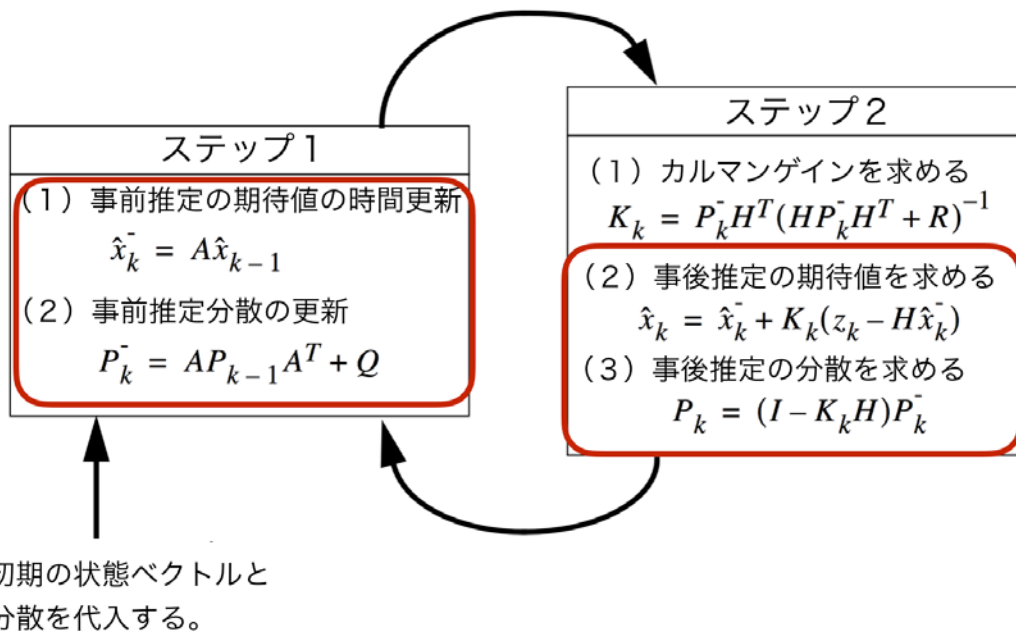


図5-2 カルマンフィルタの概念図。ステップ1は予測である。カルマンフィルタは物理システムを線形化し、平均値と分散の時間発展を求めることで予測する。ステップ2はイノベーションである。計算分布と観測値を合わせ、最小分散推定を用いて、推定分布を求める。

5-3 降雨強度の不確実性を考慮した予測手法の開発

貯留関数法の基本式は式(4)の山田モデルと等価であることは過去の研究^{x)}によって明らかされている。ノイズ $v'(t)$ を加えると、式(10)が確率微分方程式になった。それと対応するFokker-Planck方程式を直接用いれば、状態変数の分布の時間発展を求めることができる。一方で、拡張カルマンフィルタは逐次、最新の状態量の推定値の周りにテイラー展開を用いて方程式を線形化する。それによって状態変数の分布の期待値と分散の時間発展を求める。

Fokker-Planck方程式を直接用いた手法と比べて、方程式を線形化することは計算上容易になったが、方程式に非線形性が強い場合では、誤差が生じる。なお、拡張カルマンフィルタはシステムノイズの物理的な意味を全く表現することができない。

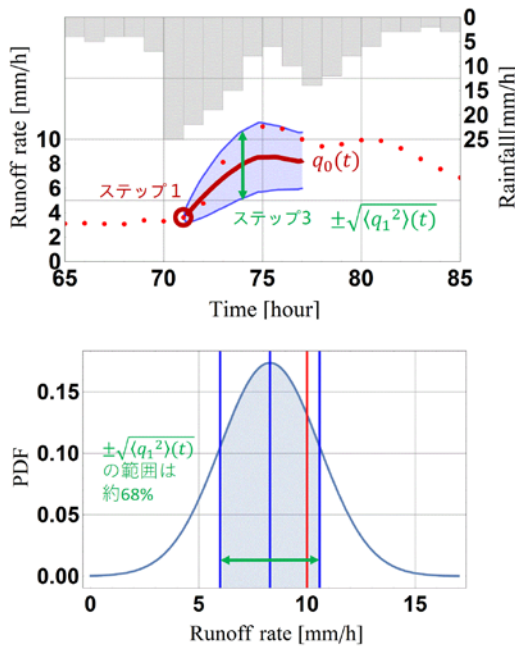
以上の2つの問題点に対して、本研究は状態量の分布の時間発展を提案した式(9)を用いることで、方程式を非線形の状態のまま解くことができる。さらに、ノイズ成分は降雨の不確実性の物理的な解釈を付けることができる。言い換えれば、降雨の不確実性が流出予測にどのような影響を与えるかが分かる。

5-3-1 計算手法

式(9)のFokker-Planck方程式を用いて降雨流出計算を行うには、拡散係数 $\sigma\sqrt{T_L}$ を同定する必要がある。 σ の物理的な意味は降雨強度の分散、 $\sqrt{T_L}$ は降雨強度の時定数であるが、直接的に降雨強度の観測値から同定するには、時間、空間的に非常に高い分解能を持った観測データが必要である。本研究は、拡張カルマンフィルタのような逐次フィルタの考え方を用いて、事前予測値と観測値の差から、拡散係数 $\sigma\sqrt{T_L}$ の同定を行う。

前節に述べたように、時刻 $k-1$ の確率密度関数を与えれば、式(9)のFokker-Planck方程式を用いて時刻 k の確率密度関数を計算できる。一般的な同化手法は、時刻 $k-1$ の事前予測と観測値を用いて、時刻 $k-1$ の確率密度関数を推定するが、ここでは、簡単のため、観測値を真値とする。つまり、観測方程式が無くなり、時刻 $k-1$ の確率密度関数は観測値を中心点とするディラックのデルタ関数になる。

第3章において議論した草木ダム流域を再び例とする。流出高 q に関して、観測データは1時間ごとのデータである。時刻 $k-1$ の観測値が q_{k-1}^{obs} だとすると、時刻 $k-1$ の q の確率密度関数は $\delta(q - q_{k-1}^{obs})$ である。



ステップ1：ある時刻を開始時刻と設定し，その時刻の流出高を初期条件として，次の方程式を解く．

$$0^{\text{th}}\text{-order equations} \quad \frac{dq_0}{dt} = a_0 q_0^\beta (\bar{r}(t) - q_0)$$

ステップ2：ステップ1から得られた結果 $q_0(t)$ を次の式に代入し， $A_0(t)$ と $B_0(t)$ を計算する．

$$A_0(t) = a_0 \beta q_0^{\beta-1} (\bar{r}(t) - q_0) - a_0 q_0^\beta$$

$$B_0(t) = a_0 q_0^\beta$$

ステップ3：ステップ2から得られた結果を次の微分方程式に代入し，初期条件を0とし，方程式を解く．

$$\frac{d\langle q_1^2 \rangle}{dt} = 2A_0(t)\langle q_1^2 \rangle + (B_0(t)\sigma\sqrt{T_L})^2$$

図5-3 計算のフローチャートを示す．図に示すとおり，3つのステップがある．ステップ1は開始時刻の流出高を初期条件として設定し， 0^{th} オーダーの方程式を解く．ここに注意すべき点は， 0^{th} オーダーの方程式は決定論の方程式と一致している点である．これは降雨強度の不確実性がホワイトノイズであり，そのノイズの平均値は0になっている．ステップ2はステップ1から得られた結果を用いて，モーメント方程式の係数を求める．ステップ3はモーメント方程式を解く．ここにもう一つ注意すべき点がある．モーメント方程式を解くには初期条件が必要である．この初期条件を0と設定するのは，観測値が真値だと仮定していることを意味する．

計算に用いた雨量データは1時間平均データである，それは観測の時間間隔と一致する． $\delta(q - q_{k-1}^{\text{obs}})$ を初期条件として，式(9)を解くと，1時間後の q の確率密度関数が得られる．その解は近似的に平均 q_k ，標準偏差 $A_k \sigma \sqrt{T_L}$ の正規分布になる．ここに， A_k は式(9)を数値的に解くことによる決まるものであり， q_k は決定論的な解の時刻 k の q である．なお，降雨強度の分散は平均降雨強度と関係あると考えられるので，本研究は降雨強度の分散 σ は平均降雨強度と線形関係すると仮定する．つまり $\sigma(t) = \sigma_{\text{non}} \bar{r}(t)$ と置き， σ_{non} は無次元量である．

これで，時刻 k の観測値は確率密度関数 $N(q_k, A_k \sigma_{\text{non}} \bar{r}(t_k) \sqrt{T_L})$ のサンプルと見なすことができる．つまり，任意の時刻 k に対して，統計量 $(q_k^{\text{obs}} - q_k) / A_k \bar{r}(t_k)$ は正規分布 $N(0, \sigma_{\text{non}} \sqrt{T_L})$ に従う．この関係を用いて， σ_{non} を同定することができる．

5-3-2 計算結果

本節は、前節で紹介した降雨強度の不確実性を考慮した予測手法を用いて、実際の草木ダム流域に応用して、その結果を検討する。対象とする降雨イベントは草木ダムにおける1978年から2013年までの22回の洪水イベントである。

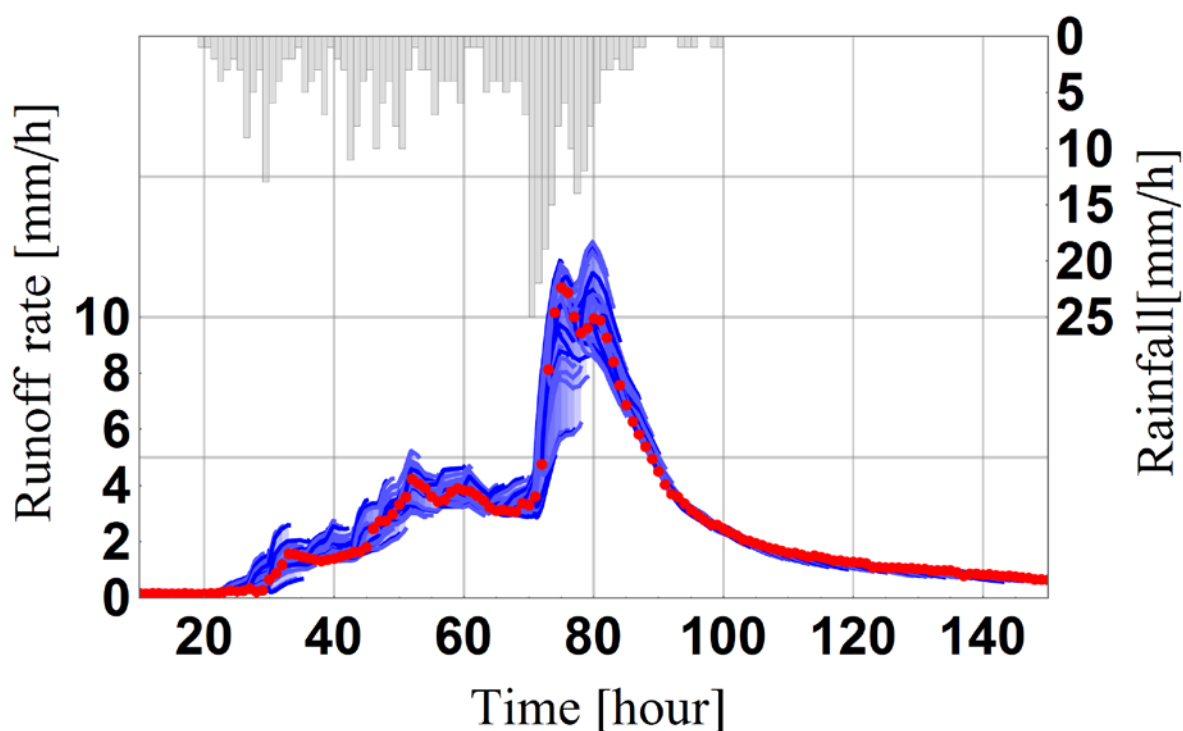


図 5-4 草木ダム流域 (254km²) における降雨イベント。この図は、降雨のイベント全体の予測区間を示している。予測区間の算出方法は図 5-3 に示している。流出過程すべての観測値がある時間を開始時刻として設定し、前節で紹介した計算ステップを振り返せば、イベント全体の予測区間を計算することができる。注目すべき点は、降雨強度が強いほど、予測の区間の拡張速度が早く見えることである。その理由は、用いられる式は降雨強度の不確実性を考慮しているため、降雨強度が強いほど拡散係数が大きいためである。なお、イベント全体から見れば、観測値はほとんど予測区間内に入っていることが分かる。

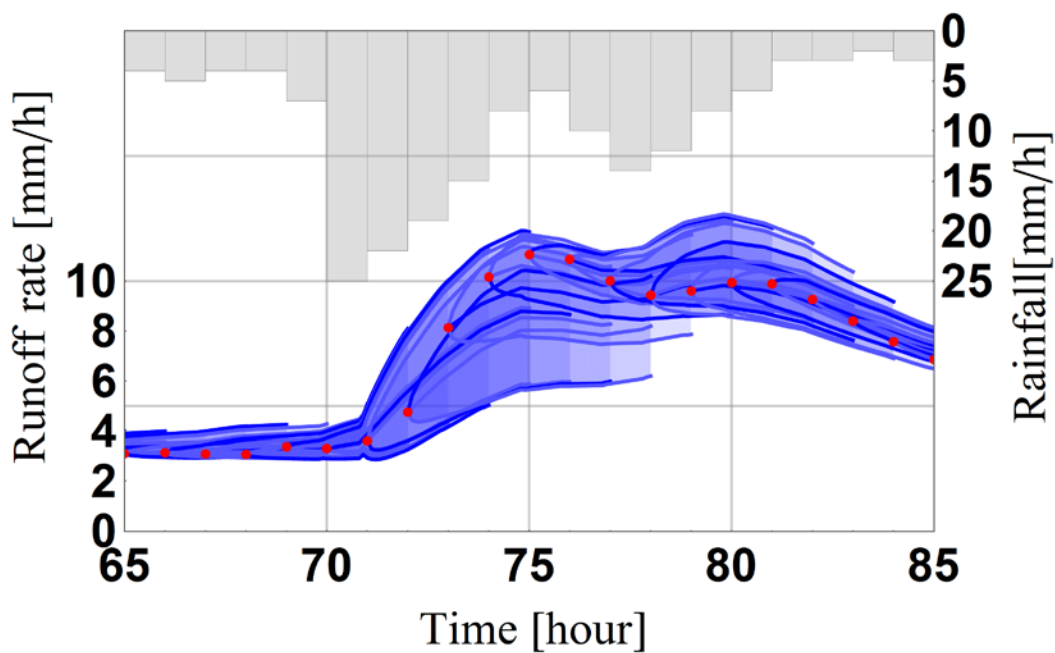


図5-5 草木ダム流域 (254km²) の降雨イベント. 1983年08月14日0時から始まる降雨イベントのピーク付近の拡大図である. 赤い点は観測値であり, 青色の空間は予測区間である. この図から, 各開始時刻から得られた予測区間が重なっている様子を明確に視認することができる. なお, 観測値は予測区間の範囲内に入っていることが分かる.

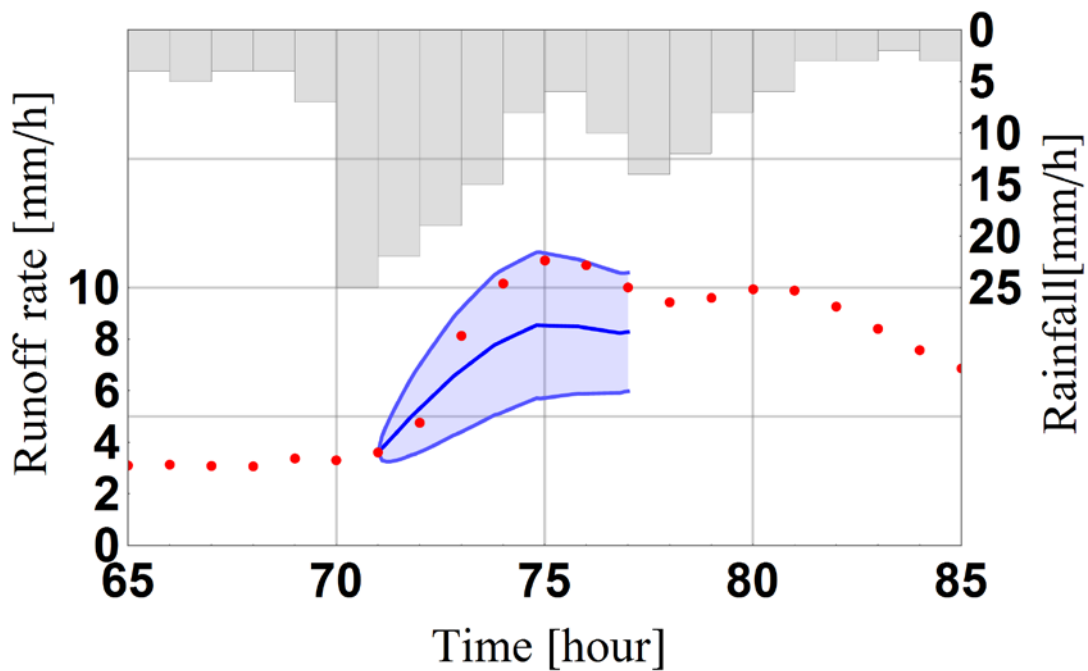


図5-6 草木ダム流域 (254km²)における1983年08月14日0時から始まる降雨イベント。この図は開始時刻が71時における予測区間を示している。予測の時間的な長さは6時間である。ここに、6時間先と設定した理由は、気象庁が6時間の降雨予測を公表しているため、本研究によって提案した手法を現実のリアルタイムの洪水予測に使う時にその降雨予測が使える点である。しかし、現段階で考慮している不確実性は実測降雨が捉えない時間の中のみである。気象庁の降雨予測を使うのであれば、その降雨予測の不確実性を考慮しなければならない。それゆえ、単純化のため、過去の降雨イベントの実測降雨データを使った。

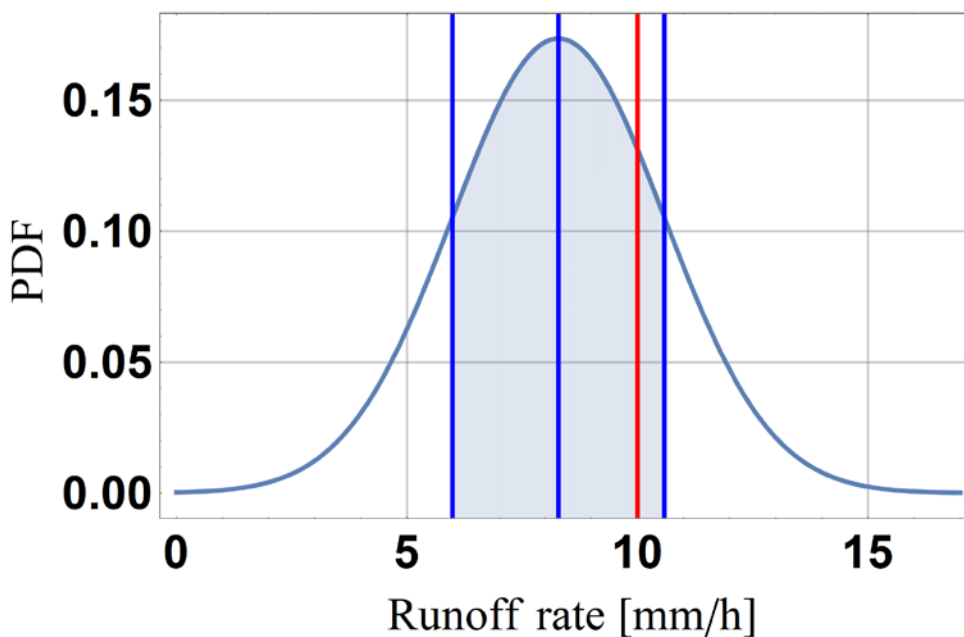


図5-7 草木ダム流域 (254km²)における1983年08月14日0時から始まる降雨イベント。この図は開始時刻が71時間の6時間先の予測分布である。この図から得られた解釈を以下に示す：現在の時刻は71時である。気象庁の予測から見るとこの先6時間は大雨が降る。現時刻の流出高を用いて6時間先の流出高の予測分布が分かる。この分布を用いて、設計基準を超えるような流出が発生するリスクを計算することができる。

5-4 モーメント方程式から偏微分方程式への拡張

前節は本研究によって提案されたモーメント方程式を用いた降雨強度の不確実性を考慮した流出過程の予測手法の計算方法と結果を議論した。モーメント方程式は第3章の Fokker-Planck 方程式に基づいた式である。モーメント方程式は、元の Fokker-Planck 方程式の一つの漸近的な解法とも言える。当然ながら、モーメント方程式を解くことは、元の Fokker-Planck 方程式を解くことに比較して簡単であると言える（常微分方程式対偏微分方程式）。しかし、現在用いられている決定論的な方程式は一層のモデルであり、常微分方程式である。それと対応している Fokker-Planck 方程式も同様に解くことは困難ではない。ゆえに、モーメント方程式を使うか、直接 Fokker-Planck 方程式を解くか。どちらにしても求解に費やす労力と工夫はほぼ同じである。次は本研究が提案した手法を、元の決定論的な式が連立偏微分方程式の場合まで拡張し適用する。

5-4-1 常微分方程式から連立常微分方程式への拡張

伊藤の確率微分方程式の一般的な形式は以下のように書ける：

$$dX = f(X)dt + \sigma(X)dw \quad (5-4)$$

ここに、大文字の X は確率変数を表す。 dw は標準的な Winner 過程である。(5-4)式と対応する Fokker-Planck 方程式は以下の(5-5)式に表す。

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial f(x)P(x,t)}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (\sigma(x))^2 P(x,t)}{\partial x^2} \quad (5-5)$$

ここに、 $P(x,t)$ は確率変数 X は時刻 t における確率密度関数である。ここに注意すべき点は、 x は確率変数ではない点である。次は連立の常微分方程式の場合について考える。伊藤の確率微分方程式の形式では、連立確率常微分方程式は以下のように書ける：

$$d\vec{X} = \vec{F}(\vec{X},t)dt + \vec{\sigma}(\vec{X},t)d\vec{W} \quad (5-6)$$

ここに、 $\vec{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ はシステムの状態ベクトルである。 $\vec{F}(\vec{X},t)$ はシステムの時間発展を支配する決定論の部分である。 $\vec{\sigma}(\vec{X},t)$ は外力の共分散行列である。状態ベクトルの各成分に作用するランダム外力はお互いに相関がない場合は $\vec{\sigma}(\vec{X},t)$ は対角行列になる。 $\vec{W}(t)$ は n 次元の Wiener 過程である。微小時間 dt の間に n 次元の Wiener 過程に従う時系列 $\vec{W}(t)$ の変化量 $d\vec{W}$ は、平均が0、共分散行列が対角行列 $diag(\sqrt{dt}, \sqrt{dt}, \dots, \sqrt{dt})$ の n 次元ガウス分布に従う。 $\vec{\sigma}(\vec{X},t)d\vec{W}$ はシステムに作用するラ

ンダム外力を表現する。

(5-6)式のような伊藤の確率方程式に対して、状態ベクトル $\vec{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ の存在確率密度関数 $p(\vec{X}, t)$ の時間発展を支配する Fokker-Planck 方程式が存在する。

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(\vec{x}, t)}{\partial t} = & - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (f_i(\vec{x}, t)p(\vec{x}, t)) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (D_{ij}(\vec{x}, t)p(\vec{x}, t)) \end{aligned} \quad (5-7)$$

ここに、 $f_i(\vec{X}, t)$ は $\vec{F}(\vec{X}, t)$ の成分であり、 σ_{ij} は共分散行列 $\vec{\sigma}(\vec{X}, t)$ の成分である。 D_{ij} は拡散係数行列であり、 D_{ij} と σ_{ij} の関係は以下の式で表す：

$$D_{ij}(\vec{x}, t) = \sum_{k=1}^n \sigma_{ik}(\vec{x}, t)\sigma_{kj}(\vec{x}, t) \quad (5-8)$$

式(5-7)で表す Fokker-Planck 方程式は、外見上は第3章で導いた Fokker-Planck 方程式であるが、式(5-7)の次元数は第3章の Fokker-Planck 方程式より遥かに大きい。確率密度関数を展開して書けば、 $p(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$ になる。Fokker-Planck 方程式の次元は、実空間の次元ではなく、対応する決定論の式の位相空間の次元である。例えば二段三層の時は方程式の状態変数は5つあり、それと対応する Fokker-Planck 方程式は5次元の式になり、直接解くことは非常に困難である。つまり、状態変数が多い場合は、本研究によって提案したモーメント方程式は柔軟に対応し応用の幅が広いと言える。

5-4-2 連立常微分方程式と偏微分方程式

5-4 節で解決したい問題は、偏微分方程式に支配されている物理システムに不確実性を考慮すると、その不確実性の効果を評価する方法を如何にして探すかである。5-4-1 節に、連立常微分方程式なら、不確実性を評価する方法が存在することを明らかにした。もし偏微分方程式と連立常微分方程式の関係が分かれば、5-4-1 節に議論した方法を偏微分方程式に適用できることが期待される。

偏微分方程式は連立常微分方程式より近似できる。最も簡単な考え方は空間離散化である。以下の式(5-9)の一次元の線形移流方程式を対象として説明する。

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + C \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = 0 \quad (5-9)$$

ここに、 $u(x, t)$ は任意の物理量であり、 C は移流速度である。式(5-9)の解は、初期の波形が移流速度 C で x 方向に進む、わざわざ空間離散化を行い数値計算するまでもなくわかる。しかし、偏微分方程式と連立常微分方程式の関係を説明するために方程式

(5-9)を空間的に離散化する.

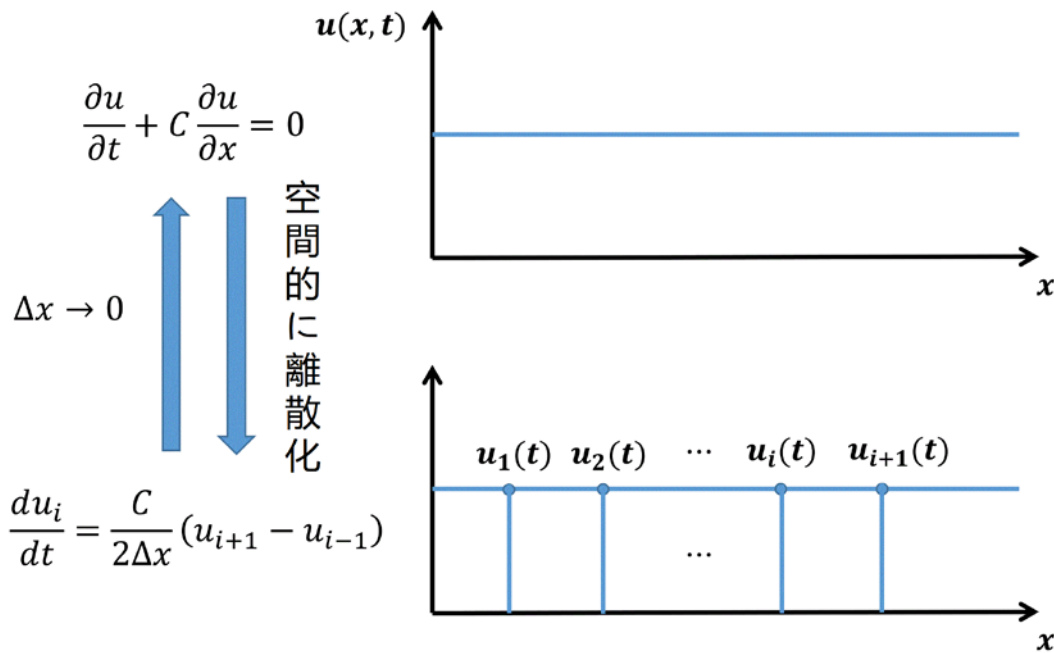


図 5-8 偏微分方程式と連立常微分の関係を示す. 図のように, 偏微分方程式を空間的に離散化することで未知関数 $u(x, t)$ が関数ベクトル $\vec{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots)$ になり, 偏微分方程式は連立常微分方程式となる. 逆に, Δx が 0 に近づくと, 連立常微分方程式は偏微分方程式に戻る.

この関係を用いることで, 不確実性を有する偏微分方程式の解析が可能になった. まずは以下の式(5-10)を対象とする.

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + C \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = r'(x, t) \quad (5-10)$$

式(5-10)は方程式(5-9)の右辺にランダム的な外力 $r'(x, t)$ を加えたものである. 離散化をすると, 以下の形式になる.

$$dU_i = \frac{C}{2\Delta x} (U_{i+1} - U_{i-1}) dt + \sigma_i dw_i \quad (5-11)$$

式(5-11)は式(5-6)の伊藤確率微分方程式形式の連立確率常微分方程式と一致している. つまり, 第 3 章と第 4 章が議論した手法は式(5-11)に使うことができる. 詳細な導出方法は付録を参考して頂きたい. 結論を言えば, 式の 2 階モーメント方程式を導き, Δx が 0 になる極限を取ると, 以下の偏微分方程式が得られる.

$$\frac{\partial \text{Cov}(x, y, t)}{\partial t} + C \frac{\partial \text{Cov}(x, y, t)}{\partial x} + C \frac{\partial \text{Cov}(x, y, t)}{\partial y} = \sigma^2 \quad (5-12)$$

ここにすべての σ_i が σ だとする. 式 (5-12)はランダム変数関数 $U(x, t)$ の共分散 $Cov(x, y, t)$ の時間発展に関する方程式である. $Cov(x, y, t)$ は以下のように定義する:

$$Cov(x, y, t) = E(U(x, t)U(y, t)) \quad (5-13)$$

$Cov(x, y, t)$ は, $U(x, t)$ の2階モーメントとも言える. まとめると, 式 (5-12)を解けば, $U(x, t)$ の分布の2階モーメントまでの情報を手に入れることができる.

5-4-3 開水路1次元不定流

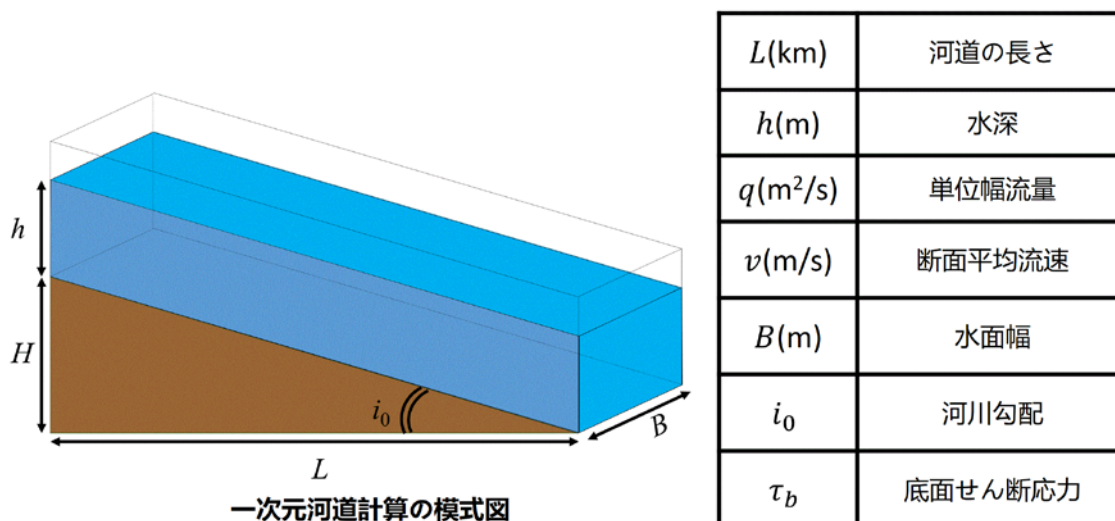


図 5-9 開水路一次元不定流の模式図. 右辺は各記号の意味である. 最も単純な場合を考える, 開水路の断面は一様な矩形断面を想定する. 河川勾配も一定とする. この場合, 開水路不定流の状態変数は水深 $h(x, t)$ と単位幅流量 $q(x, t)$ で決まる.

一次元開水路流れにおける連続式および運動方程式は以下の2つ式である.

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (5-14)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial vQ}{\partial x} + gA \frac{\partial Z_s}{\partial x} + \frac{S\tau_b}{\rho} = 0 \quad (5-15)$$

ここに、 x ：流下方向座標、 t ：時間、 A ：断面積、 Q ：流量、 v ：断面平均流速、 Z_s ：水位、 S ：潤辺、 τ_b ：底面せん断応力、 ρ ：密度、 g ：重力加速度である。広幅長方形断面水路については、

$$A = Bh, Q = Bq, S = B \quad (5-16)$$

が成立する。（ B ：水路幅、 h ：水深、 q ：単位幅流量）。底面せん断応力は Manning 則で表現する。

$$\frac{\tau_b}{\rho} = g h I_f = \frac{g n^2 v^2}{h^{1/3}} \quad (5-17)$$

式 (5-16)と (5-17)を式 (5-15)と (5-14)に代入すると、(5-15)と (5-14)は以下のようになる。

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (5-18)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial vq}{\partial x} + gh \frac{\partial h}{\partial x} - ghi_0 + \frac{gn^2 q^2}{h^{7/3}} = 0 \quad (5-19)$$

式 (5-18)と (5-19)は本研究にて用いる式である。次はある検証問題を設定し、この連立偏微分方程式の解の形を検証する。上流端は以下のように流量過程を与える。

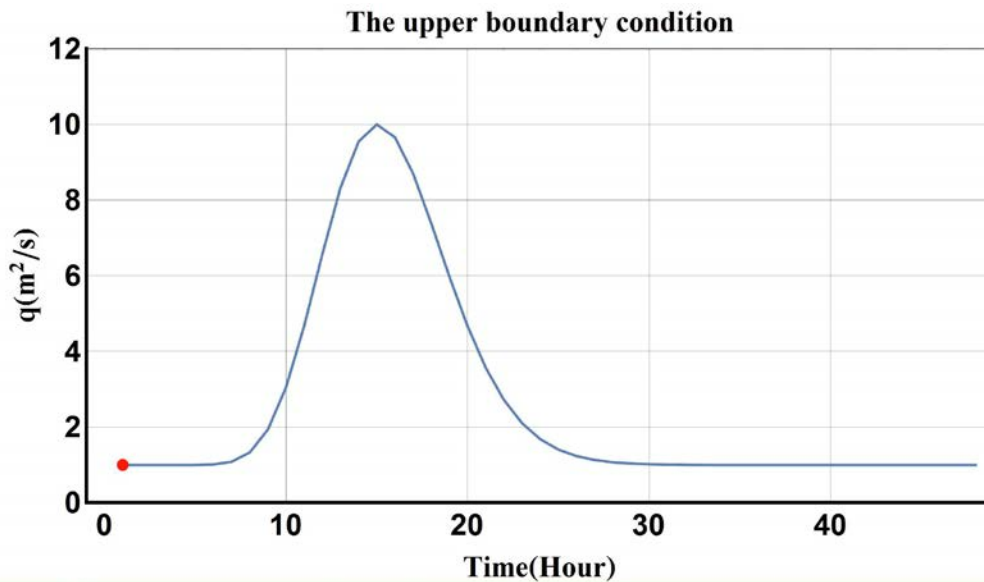


図 5-10 検証問題の上流端境界条件。指数関数形の流量過程を一次元河道の上流端に与える。ここに最も単純な一つピークの波形を選んだ。横軸は時間であり、縦軸上流端の単位幅流量である。ピーク指数を調整すれば、波形を変えることができる。開始時刻と終了時刻の流量は基底流量である。

計算のパラメータは以下の表に示す。

$L(\text{km})$	50	$\Delta x(\text{km})$	0.2
$T(\text{hour})$	48	$\Delta t(\text{s})$	18
$B(\text{m})$	200	τ_b	Manning 法則で 表現、Manning 係数=0.05
i_0	1/2000		

表 5-1 一次元不定流計算のパラメータ

計算結果：

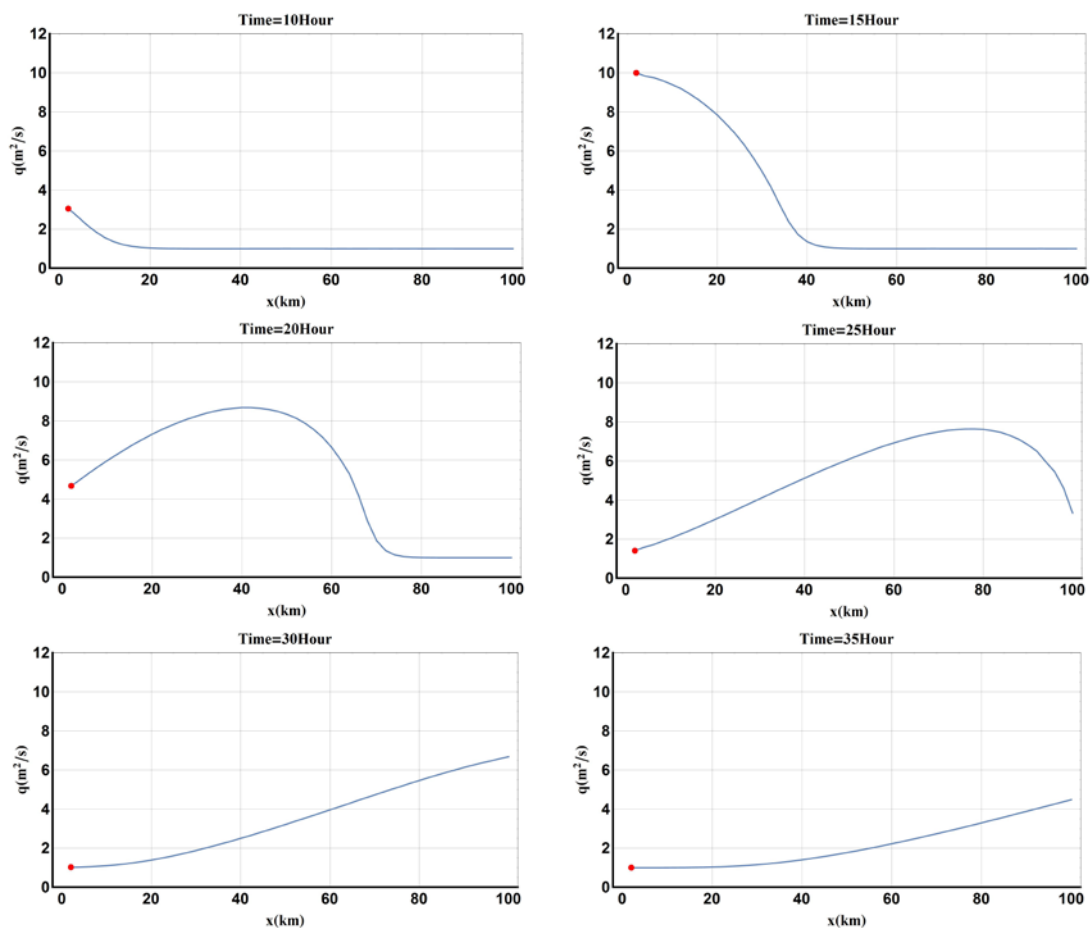


図 5-11 河川全体の単位幅流量の時間変化. 上流端の赤い点は上流の境界条件を示している. 全体の波形から見ると, 波形前段の勾配が徐々に大きくなることが分かった. それは非線形の移流効果によるものである.

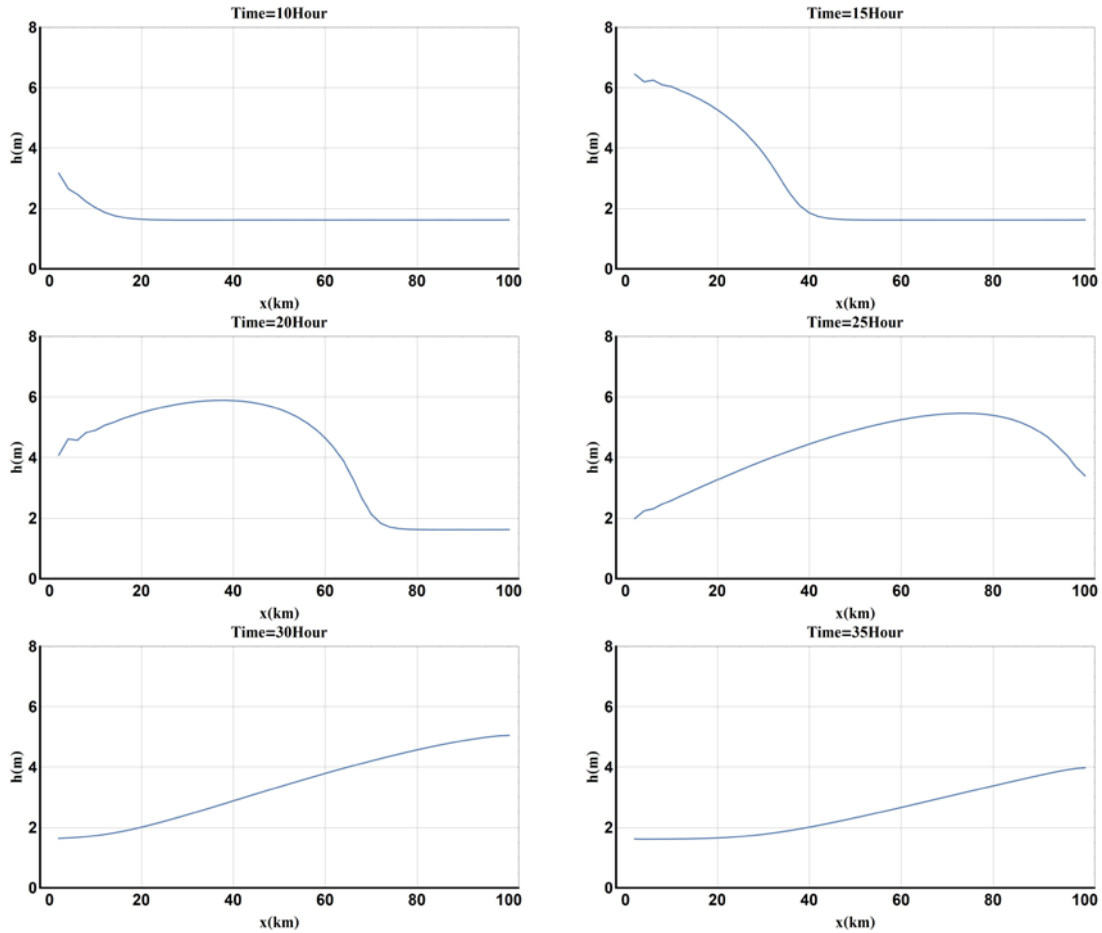


図5-12 河川全体の水深の時間変化. 図5-11に示した単位幅流量の波形と比較すると, 単位幅流量の波形の進む速度が少し早いことが分かる.

5-4-4 せん断応力の不確実性を考慮した1次元不定流の計算

式(5-17)に示したように, 底面せん断応力は Manning 則で表現している. しかし, 底面せん断応力は河床と流れの摩擦によって生じる乱流のエネルギー損失効果をモデルにしたものである. その平均値は Manning 則によって表現できるか, 瞬間瞬間を見ると, 乱流の効果によってせん断応力はある値の周りにふらつくことが分かる. 図5-13は管路の壁面せん断応力の瞬間瞬間の変動係数を実験で測った結果である. 左の図に示すように, レイノルズ数が大きいほど変動係数の分布が正規分布になることが分かった. 右の図から, レイノルズ数が大きいほど変動係数の標準分散は0.2(変動係数であるから次元がない)くらいに漸近することが分かった.

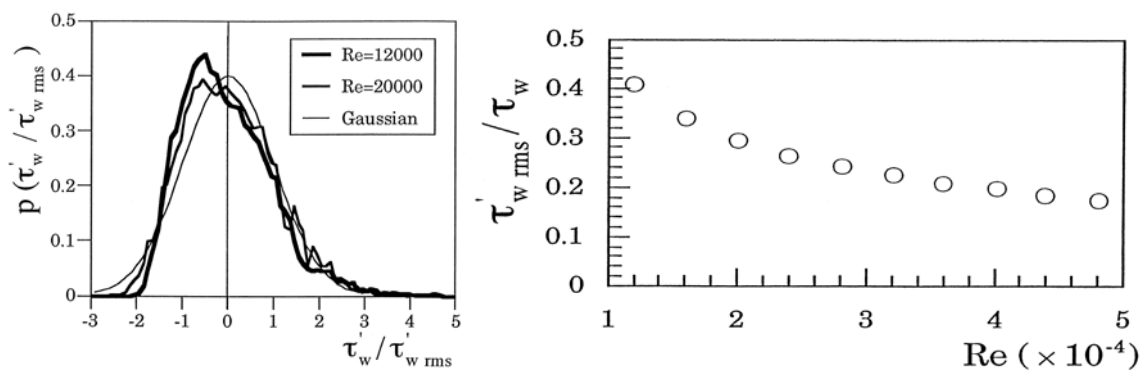


図 5-13 管路の壁面せん断応力（佐野ら）. ここに検討した変数はせん断応力の瞬間瞬間の時間変動成分割る変動成分の平均値である. つまり変動係数とも言える. 左の図は変動係数の確率密度関数である. 右の図は変動係数の標準分散を示している.

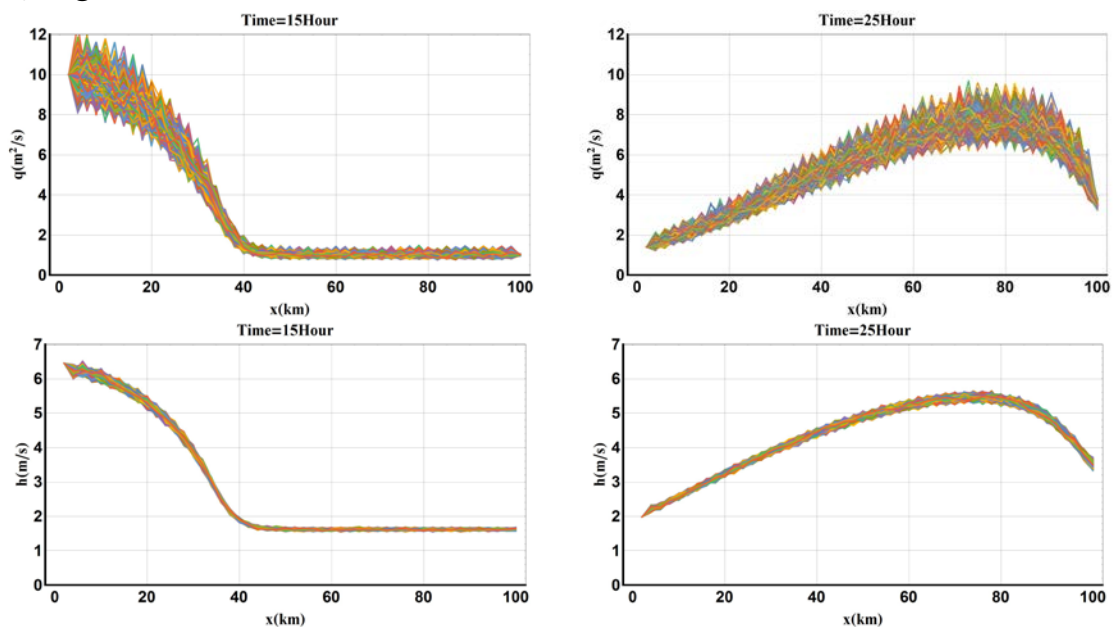


図 5-14 底面せん断応力瞬間瞬間の変動を考慮した 1次元開水路不定流計算. 第一行は単位幅流量の時間変化である. 第二行は水深の時間変化である. サンプル数は 10000 である.

せん断応力の瞬間瞬間の変化を考慮すると, 1次元不定流の支配方程式は以下のようになる:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (5-20)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial vq}{\partial x} + gh \frac{\partial h}{\partial x} - ghi_0 + \frac{gn^2 q^2}{h^3} (1 + w') = 0 \quad (5-21)$$

w' は変動係数である。佐野らの実験結果を用いて、 w' は平均0、標準分散0.2の正規分布だと設定する。乱数を発生させて、式(5-20)と(5-21)を解くと、結果は図5-14に示すようになる。単位幅流量と水深両方ある分布を持つようになった。水深と比較すると、単位幅流量の分布の幅が広く見える。方程式から分析すると、底面せん断応力の変動成分は直接に運動量方程式に関わる。水深は連続式から、単位幅流量の変化に応じて変化する。なので、単位幅流量の分布が広い。実際に河川観測を行うと、流量の不確実性が水深の不確実性より大きく見える。

式(5-20)と(5-21)は本研究が提案した、摂動解析とモーメント方程式を合わせる手法で、状態変数の平均と分散の時間発展を求めることが可能である。ここに、結論だけをまとめることとし、具体的な演算は付録を参照して頂きたい。

$$A_0 = \frac{2q_0}{h_0}, B_0 = \frac{q_0^2}{h_0^2}, C_0 = gh_0, D_0 = g \frac{\partial h_0}{\partial x}, E_0 = gi_0, F_0 = gn^2 \frac{2q_0}{h_0^3} \quad (5-22)$$

$$G_0 = gn^2 \frac{7}{3} \frac{q_0^2}{h_0^3}, H_0 = gn^2 \frac{q_0^2}{h_0^3}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_{h_1 h_1}(x, y, t)}{\partial t} &= - \frac{\partial C_{h_1 q_1}(x, y, t)}{\partial y} - \frac{\partial C_{q_1 h_1}(x, y, t)}{\partial x} \\ \frac{\partial C_{h_1 q_1}(x, y, t)}{\partial t} &= - \frac{\partial A_0(y) C_{h_1 q_1}(x, y, t)}{\partial y} + \frac{\partial B_0(y) C_{h_1 h_1}(x, y, t)}{\partial y} \\ &\quad - C_0(y) \frac{\partial C_{h_1 h_1}(x, y, t)}{\partial y} - D_0(y) C_{h_1 h_1}(x, y, t) \\ &\quad + E_0(y) C_{h_1 h_1}(x, y, t) - F_0(y) C_{h_1 q_1}(x, y, t) \\ &\quad + G_0(y) C_{h_1 h_1}(x, y, t) - \frac{\partial C_{q_1 q_1}(x, y, t)}{\partial x} \\ \frac{\partial C_{q_1 h_1}(x, y, t)}{\partial t} &= - \frac{\partial C_{q_1 q_1}(x, y, t)}{\partial y} - A_0(x) \frac{\partial C_{q_1 h_1}(x, y, t)}{\partial x} \\ &\quad + B_0(x) \frac{\partial C_{h_1 h_1}(x, y, t)}{\partial x} - C_0(x) \frac{\partial C_{h_1 h_1}(x, y, t)}{\partial x} \\ &\quad - D_0(x) C_{h_1 h_1}(x, y, t) + E_0(x) C_{h_1 h_1}(x, y, t) \\ &\quad - F_0(x) C_{q_1 h_1}(x, y, t) + G_0(x) C_{h_1 h_1}(x, y, t) \end{aligned} \quad (5-23)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial C_{q_1 q_1}(x, y, t)}{\partial t} &= -A_0 \frac{\partial C_{q_1 q_1}(x, y, t)}{\partial y} + B_0 \frac{\partial C_{q_1 h_1}(x, y, t)}{\partial y} \\
 &\quad - C_0 \frac{\partial C_{q_1 h_1}(x, y, t)}{\partial y} - D_0 C_{q_1 h_1}(x, y, t) \\
 &\quad + E_0 C_{q_1 h_1}(x, y, t) - F_0 C_{q_1 q_1}(x, y, t) \\
 &\quad + G_0 C_{q_1 h_1}(x, y, t)
 \end{aligned}$$

式 (5-21) は水深と単位幅流量の変動成分の共分散に関する方程式である。下付き文字 0 は摂動成分の 0 次オーダーの量であり、1 は摂動成分の 1 次オーダーの量である。確率常微分方程式の場合と同様に摂動成分の 0 次オーダーの方程式は決定論的な式と同様である。共分散行列の意味は、例えば $C_{h_1 h_1}(x, y, t)$ は x 地点の h_1 と y 地点の h_1 の相関係数である。 $C_{h_1 h_1}(x, x, t)$ は x 地点の h_1 の分散になる。式 (5-21) を解けば、水深と単位幅流量の確率密度関数の時間発展が、2 階モーメントまでの情報がわかる。

図 5-15 は計算の結果を示している。上流端は流量過程のディリクレ型境界条件、下流端はノイマン型の境界条件を与えているため、境界の不確実性がない（図 5-15 の第 2 行示すように、上、下流端の分散は 0）。この結果は情報のある地点と離れるほど、不確実性が増える事実を反映している。つまり、物理システムの不確実性を考慮した予測は情報源から時間、空間の距離が増加することに連れて、予測の精度が落ちることを本研究が提案した手法で表現できた。その上で、サンプリング計算の結果とよく一致することが分かった。サンプリング手法は、システムの非線形性や、不確実性のソースに関わらず使える手法であるが、その収束性と計算コースが問題である。本研究が提案した手法は計算効率がサンプリング手法を遥かに超えているため、実際のリアルタイム予測に使えることが期待できる。

図 5-16 から図 5-18 はシステムのパラメータを変換すると、底面せん断応力が水位と単位幅流量に与える影響を示している。

図 5-16 は Manning 粗度係数を変換させ、不確実性の影響を検討する。Manning 粗度係数の大きさは流出の非線形と関わる。Manning 粗度係数が大きいほど非線形が強い。図に示したように、非線形性が強いほど、不確実性の影響が大きいことが分かった。その原因は非線形が強いほど、同様なふらつきに対して応答が大きいである。

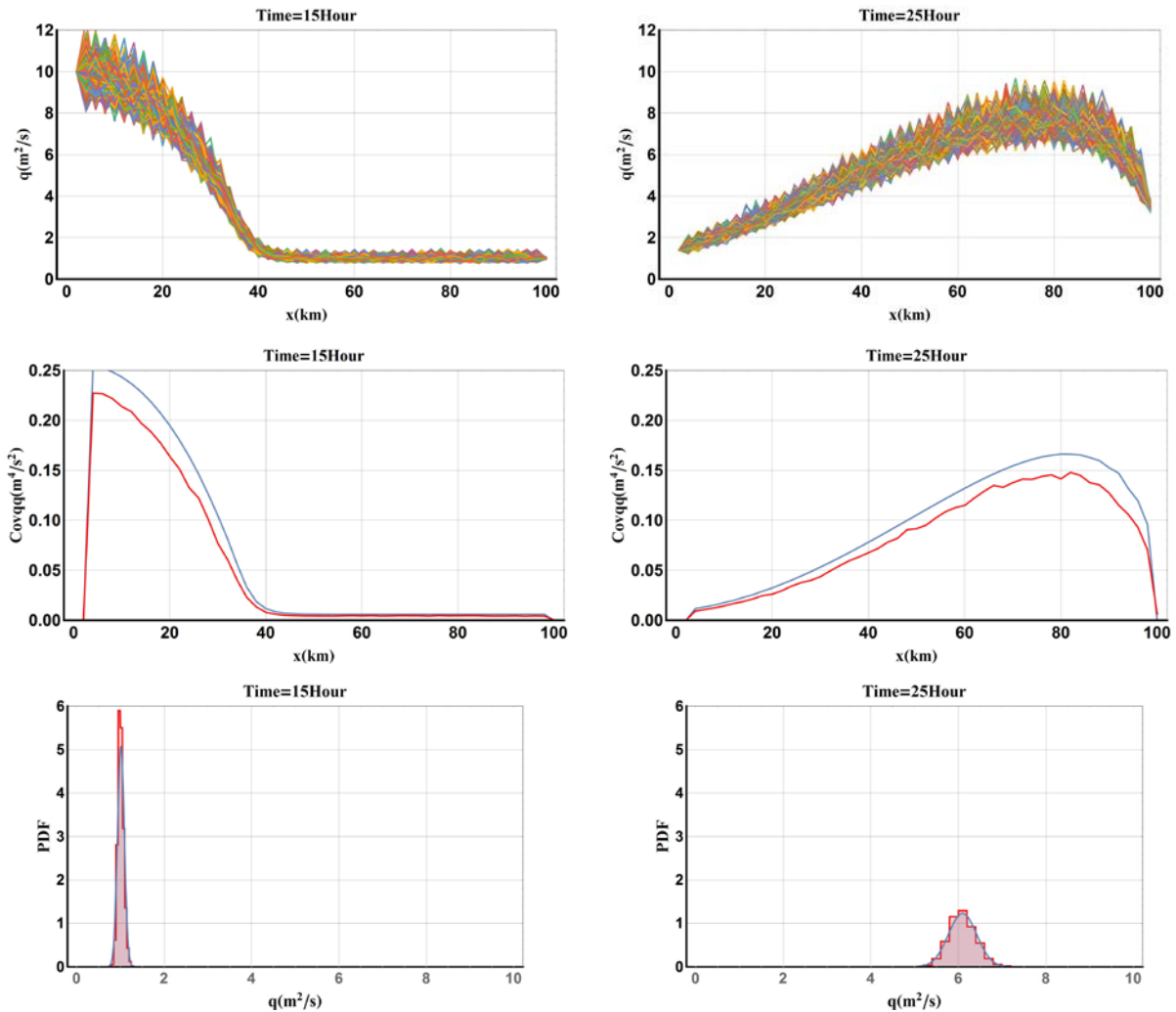


図 5-15 底面せん断応力の不確実性を考慮した一次元の開水路不定流計算結果. 第 1 行はサンプリング計算で得られた時間点 $t=15$ と $t=25$ における単位幅流量の波形である. 第 2 行は同じ時刻における単位幅流量の分散である. 共分散は本研究が提案した手法で得られた結果である. 第 3 行は同じ時刻における $x=50\text{km}$ 地点の分布である. (青線は本研究が提案した手法で得られた結果, 赤線は 10000 回のサンプリング計算の結果である.)

図 5-17 は上流に与える流量のピーク値を変化させている. 現在考慮している底面せん断応力の不確実性は, その絶対値にランダム成分を与えているわけではなく, 変動係数に不確実性をつけている. よって, ピーク値が大きいほど, 不確実性を比例的に大きくなることが予想できる.

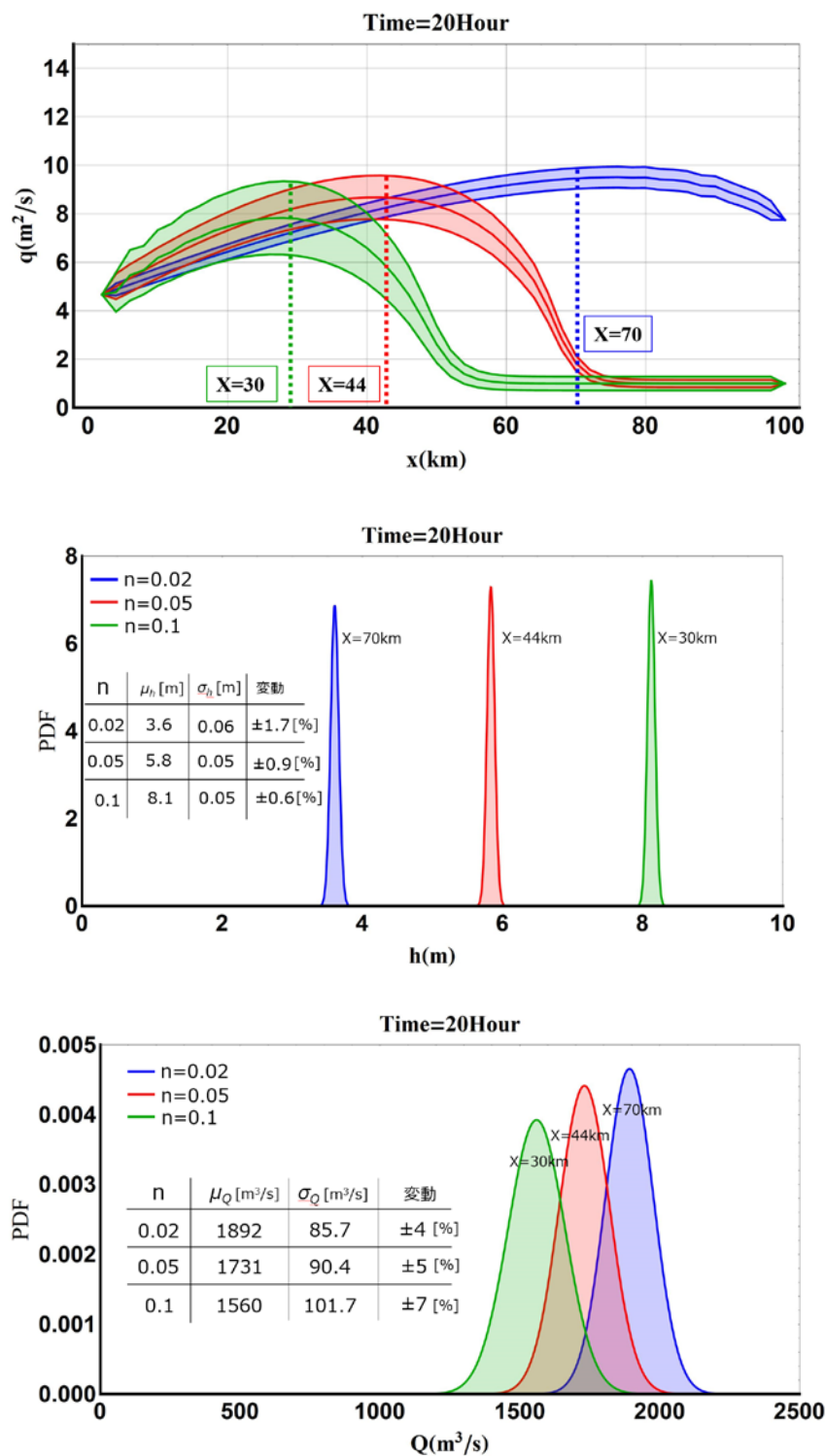


図 5-16 Manning 粗度係数を変化させ、底面せん断応力の不確実性の効果を検討する結果。時刻 $t=20$ を選んだ。第一行の図面は単位幅流量の $\pm 2\sigma$ の予測区間である。粗度係数が大きいほど、流量のピークが遅れ、不確実性が大きいことが分かった。第二、第三行の図面は示した断面の水深および流量の分布を示している。

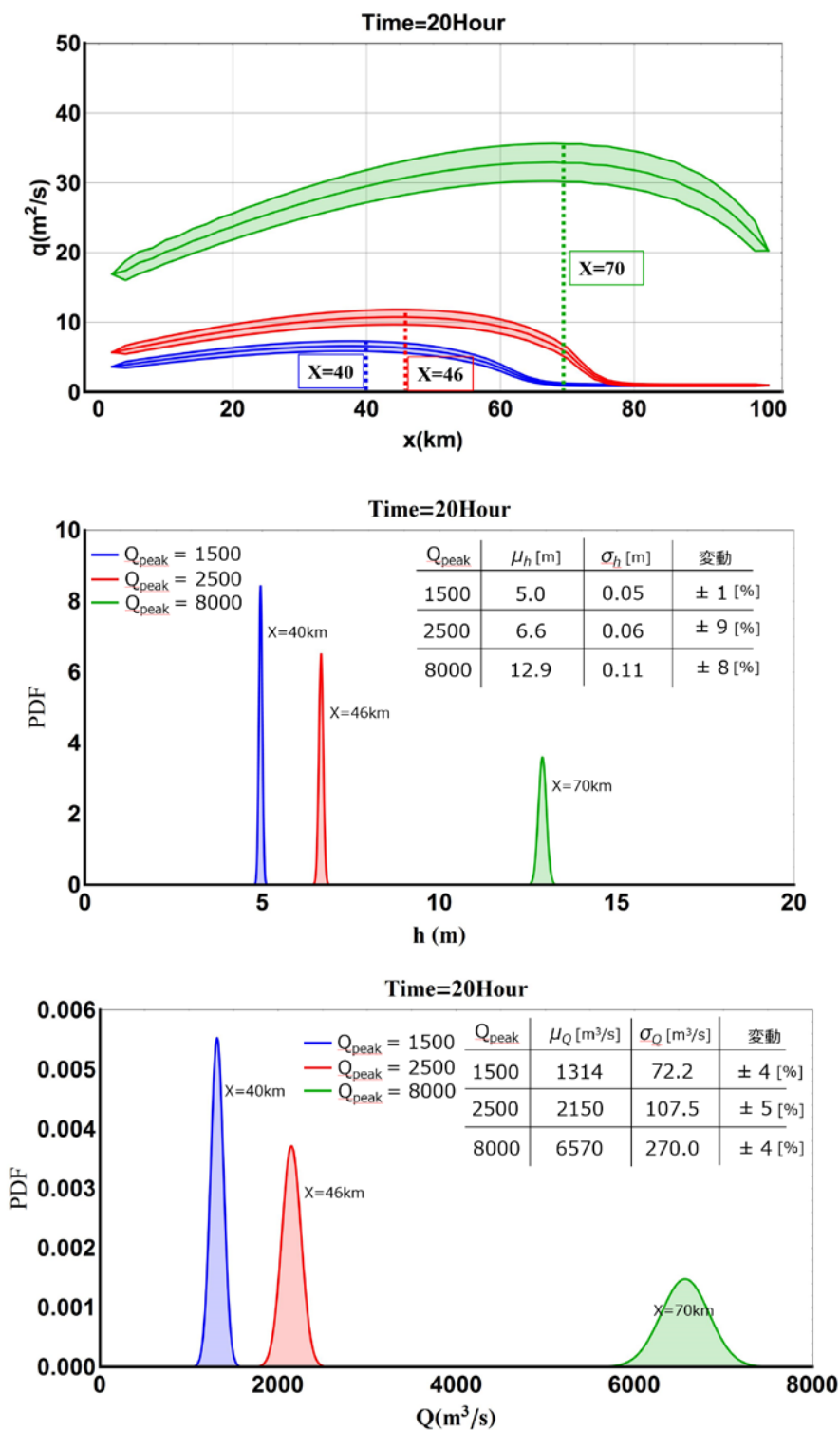


図 5-17 上流に与える流量のピーク値を変化させ、底面せん断応力の不確実性の効果を検討する結果. 時刻 $t=20$ を選んだ. 当然であるが, 上流から入る流量が大きいほど河川の流量と水位のピーク値が大きくなる. それに連れて, 分布の幅も広くなる.

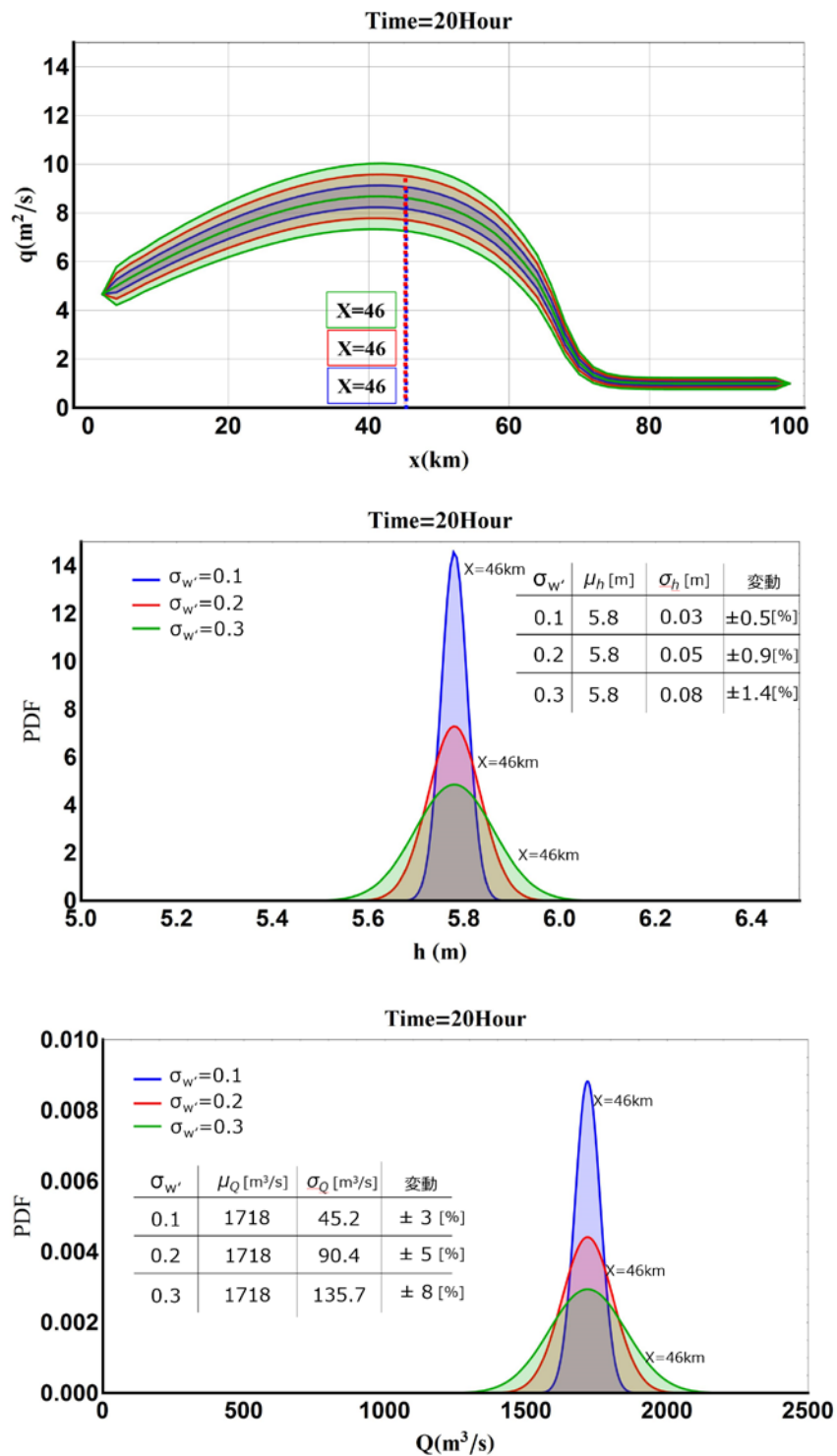


図 5-18 変動係数の分散を変化させ、底面せん断応力の不確実性の効果を検討する結果。変動係数が大きくなるほど流量と水位の不確実性が大きいことが予想できるが、ここに注意すべきところは変動成分と流出の応答は線形である。これは摂動法を用いるシステムを線形化することは適当であることを示している。

図5-18は変動係数の分散を変化させている。変動係数が大きくなるほど流量と水位の不確実性が大きいことが予想できるが、ここに注意すべきところは変動成分と流出の応答は線形である。これは摂動法を用いるシステムを線形化することは適当であることを示している。

参考文献

- 吉見和紘, 山田正, 山田朋人: 確率微分方程式の導入による降雨流出過程における降雨の不確実性の評価, 土木学会論文集 B1(水工学), Vol.71, No.4, 259-264, 2015.
- M. von Smoluchowsky, Ann. Physik, 21, 576, 1906.
- K. HASSELMANN: Stochastic climate models. Part I. Theory. Tellus 28, 473-485, 1976.
- Daiwei Cheng, Tadashi Yamada, A Study on uncertainty of discharge in river channel using stochastic partial differential equation, Procedia Engineering(12th International conference on hydroinformatics)Vol.154, pp.595-600 (2016)
- Daiwei Cheng, Yoshimasa Morooka, Tadashi Yamada, Tomohito J. Yamada, A nonlinear filter based on Fokker-Planck equation and its application on rainfall-runoff analysis, ICSAI 2016(2016 3rd International conference on systems and informatics), In press (2016)
- K. Ito, "On a stochastic integral equation," Proc. Imp. Acad. Tokyo, vol. 22, pp. 32-35, 1946.
- R. E. Kalman, "A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems," Journal of Basic Engineering vol.82, 1960
- 成 岱蔚, 山田 正, 確率過程論を導入した降雨流出計算のパラメータ同定に関する研究, 土木学会地球環境シンポジウム講演集 Vol.24, pp.1-4 (2016)
- 成 岱蔚, 山田 正, 山田 朋人, 確率過程論を導入した降雨流出過程における不確実性の評価, 水文・水資源学会 2016 年度研究発表会要旨集, pp.258-259 (2016)
- 立川康人, 2011:粒子フィルタを用いた河川水位の実時間予測手法の開発, 土木学会論文集 B1(水工学)Vol.67, No.4, I_511-I_516
- 日野幹雄, 1984:フィルター分離 AR 法とカルマンフィルターによる洪水予測法に関する研究, 土木学会論文集 第 351 号 II-2
- 立川康人, 2009:バイアス補正カルマンフィルタを用いた実時間分布型流出予測システムの改良, 河川技術論文集, 第 15 巻
- 高棹 琢馬, 1980:状態空間法による流出解析, 京大防災研究所年報第 23 号
- John A. Dracup, 1980: Stochastic Parameter Estimation Procedures for Hydrologic Rainfall-Runoff Models □ Correlated and Heteroscedastic Error Cases
- Robert B. Ash, 1970: Topics in Stochastic Processes Probability and Mathematical Statistics A Series of Monographs and Textbooks
- Konstantine P. Georgakakos, 1986: A Generalized Stochastic Hydrometeorological Model for Flood and Flash-Flood Forecasting Formulation, Water Resources Research, vol.22, No.13, pp.2083-2095
- Konstantine P. Georgakakos, 1989: On Improved Hydrologic Forecasting – Results From a

WHM Real-Time Forecasting Experiment, Journal of Hydrology, 114, pp.17-45

Peter K. Kitanidis, 1980: Real-Time Forecasting with a Conceptual Hydrologic Model, Water Resources Research, vol.16 No6, pp.1025-1033

Y.H.Lee, 1998: Application of the Kalman filter to the Nash model, Hydrological Processes Vol.12, pp.755-767

第6章 結論

6-1 結論

本研究の結論を以下にまとめる.

第1章は研究の背景および問題点について論述した. 近年, 設計基準を超える自然災害がしばしば発生している. しかし, どんな災害が起きても絶対に安全な設計は不可能である. それゆえに, リスク管理の概念が重要になってきた. 本研究は古典力学系の決定論的な考え方には限界があり, エントロピーとリスクを考慮する時には物理システムの有する不確実性を考慮しなければならないことを示した.

第2章は不確実性を有する物理システムの数学的な扱い方を紹介した. 入力と出力の物理量に関数的な関係がある場合は直接的に解を求める解析法を使うことができる. 物理システムが微分方程式に支配されている場合は, 確率過程論を使う. 確率過程論で物理システムを表現する手法は3つある. 1つ目はサンプリングでの表現, 2つ目は確率微分方程式での表現, 3つ目は物理量の確率密度関数の時間発展を支配する方程式, 例えば Fokker-Planck 方程式での表現である.

第3章は流出解析に確率過程論を導入し, 入力データの不確実性を評価するために, 確率過程論の概要を解説した. 具体的には, Brown 運動の数理化である Wiener 過程の定義と確率過程の意味, それを基礎として展開される Ito calculus を解説した. また, Brown 粒子の運動を記述した Langevin 方程式と Ito calculus によって確率解析学的な微積分の規則が導入された確率微分方程式の概念とそれに対応する Fokker-Planck 方程式の存在を示した. 加えて, Fokker-Planck 方程式の導出は, 確率微分方程式から行えることを示した. また, 最もシンプルな確率過程であるドリフトを持たない (時間的に拡散するのみ) Wiener 過程の確率微分方程式と Fokker-Planck 方程式の解を比較して, 両者が同一の確率過程を表現する異なる方程式系であることを示した.

第4章は第3章で導いた Fokker-Planck 方程式が, より複雑な物理システムに応用することが困難であることを指摘した上で, 摂動解析を用いて, Fokker-Planck 方程式

の漸近展開を行い，モーメント方程式を導き，その妥当性を検証した．結論として，サンプリング計算と Fokker-Planck 方程式と本研究が提案したモーメント方程式は同じ結果が得られることが分かった．

第5章は本研究が提案した手法を，実際に草木ダム流域に使い，その効果について検討した．本検討から得られた結論は以下の3つである．1つ目は，流出高の確率分布を得られ，これによって，避難行動の基準が数学的，物理的な根拠により説明できるようになった．2つ目は，カルマンフィルタの結果と比較した結果，本研究が提案した手法が，カルマンフィルタよりも不確実性の物理性を良く反映していることが分かった．3つ目は，本研究で用いる式を偏微分方程式まで拡張し，底面せん断応力が不確実性を持つ場合の1次元不定流に応用した．その結果，サンプリング計算と同様の結果が得られた．

Acknowledgement

Firstly, I would like to express my sincere gratitude to my advisor Prof. Yamada for giving me the chance to study in Japan, for the continuous support of my Ph.D study and related research, for his patience, motivation, and immense knowledge. His guidance helped me in all the time of research and writing of this thesis. And his passion for research always encourage me to dig deeper in the present study. I learned not only how to do a research, but also how to be a researcher from him.

Besides my advisor, I would like to thank the rest of my thesis committee: Prof. Fukuoka, Prof. Sato, Prof. Arikawa, Prof. Kamakura, Prof. Kanae, for their insightful comments and encouragement, but also for the hard question which incented me to widen my research from various perspectives.

I also want to thank my fellow labmates. Especially Dr. Sen, Dr. Yoshimi, Dr. Wang and Dr. Sasaki for giving me so much valuable advices. And every one in Yamada's Lab.

Last but not the least, I would like to thank the Japanese government for setting up the global water-environmental engineering project and support me financially in the past 5 years. Wish I can contribute more to bring Japanese advanced water-related engineering technique to the world and make it a better place from now on.