中央大学博士論文

非圧縮性流体解析法の音速法による開発

内山　一郎

博士（工学）

中央大学大学院
理工学研究科
都市環境学専攻

平成２８年度
２０１７年3月

目　　次

第１章　序論

１．研究の背景・動機

港湾施設や海岸保全施設の耐波設計や耐津波設計では、国土交通が監修している「港湾の施設の技術上の基準・同解説（以降、港湾基準と称す）」や「海岸保全施設の技術上の基準・同解説（以降、海岸基準と称す）」を用いて、実務的な設計を行っている。現行の港湾基準は、平成１９年に改訂されており、性能設計がその基本コンセプトとなっている。例えば重力式防波堤のような標準的な港湾構造物では、現行の港湾基準を参照すれば、所要の耐波性能・耐津波性能・耐震性能を満足する構造物を設計することは可能である。しかし、最近では、耐津波性能や耐震性能の向上等を目的とした構造物の改良を行う場合や、標準的な構造から逸れる構造物の設計を行う場合も増えてきており、現行の港湾基準のみでは適切な設計ができないこともある。このような場合、水理模型実験や高精度の数値シミュレーション技術を駆使して、設計を行うことになる。

水理模型実験の歴史は古く、これまで数多くの実験が行われており、様々な技術的な課題を解決してきた。最近では、構造物の性能を総合的に把握することを目的に、時間的・費用的な制約も考慮の上、水理模型実験と高精度の数値シミュレーションを併用することが多くなってきている。

水の流体を対象とした数値シミュレーションに関しても、港湾・海岸分野で様々な数値シミュレーションが開発されているため、目的に応じて適切なシミュレーション手法を適用することとなる。耐波性能・耐津波性能の検討に際しては、３次元モデルも実務的に使われるようになりつつあり、流体の挙動をかなり高精度にシミュレートすることが可能となってきている。

一方、空気の流体を対象とした航空分野の設計に目を転じると、例えば翼の耐風設計に際しては、水を流体とした場合と同様の基礎方程式を用いた数値シミュレーションが精力的に行われており、翼の最適設計も相当に高度化され、実用化されている。しかしながら、港湾・海洋分野では構造物の最適設計の事例はほとんどないのが実情と言える。

本研究の動機は、まずは、港湾・海岸分野で様々な形状を有する構造物の耐波設計・耐津波設計にも適用できる流体解析手法を開発することである。

２．既往の流体解析手法の概要と研究の独自性

２．１．既往の解析手法の概要

本章では、これまでに適用されている流体解析手法の概要について述べる。流体解析は、以下の式(1.1)から式(1.3)に示すように、密度変化を考慮した流体の連続式と運動方程式を用いる。

$$\dot{\rho} + (\rho u_i)_{,i} = 0 \tag{1.1}$$

$$\rho \dot{u}_i + (\rho u_j u_i)_{,j} + p_{,i} - \tau_{ji,j} = \rho f_i \tag{1.2}$$

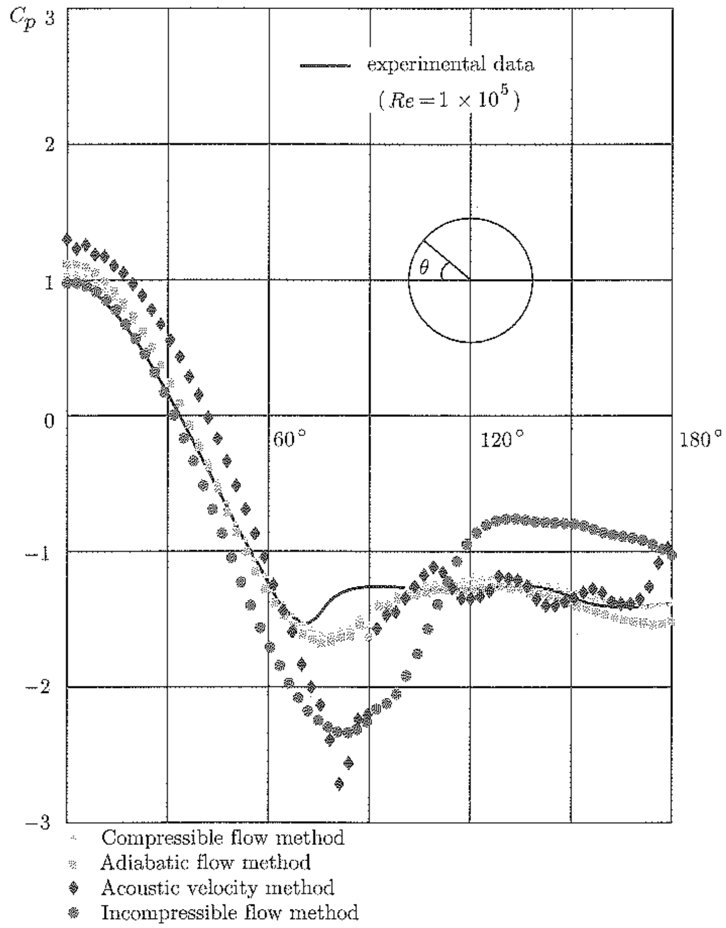
$$\tau_{ij} = \mu\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) - \frac{2}{3}\mu u_{k,k}\delta_{ij} \tag{1.3}$$

ここに、ρ：密度、u_i：流速、p：圧力、f：抗力、τ：全応力、δ_{ij}：クロネッカーのデルタ関数である。この式で、密度の時間変化・空間変化を無視できると考えると、以下の式(2.4)から式(2.5)ような Navier-Stokes 方程式が得られる。

$$u_{i,i} = 0 \tag{1.4}$$

$$\dot{u}_i + (u_j u_i)_{,j} + \frac{1}{\rho}p_{,i} - \frac{1}{\rho}\tau_{ji,j} = f_i \tag{1.5}$$

Navier-Stokes 方程式は、流体解析手法として広く使われており、様々な現象を適確に説明できる。流体の連続式・運動方程式は、ρ，u_i, u_j, p という 4 つの変数を有しており一意的には変数が求まらない。Navier-Stokes 方程式に基づく解法では、密度 ρ を一定として、u_i, u_j, p の 3 つの変数とし、数値計算的に解を求めている。しかしながら、後述するように、Navier-Stokes 方程式は音速が無限大という仮定を設けたことになり、極めて特殊な条件下では成り立たないこともありうる。例えば、図-1.2.1 は、空気流体中におかれた円柱の圧力係数を、各種の流体モデルを用いて算定した事例であるが、非圧縮モデル（imcompressible flow method）と圧縮性モデル(Compressible flow model, Adiabatic flow model, Acoustic velocity method)では、算定結果に差異があり、実験値との整合性は圧縮性モデルの方が良い。



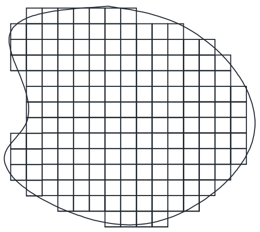
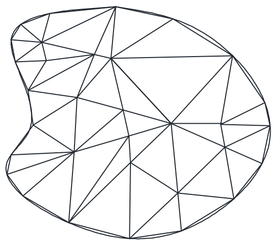
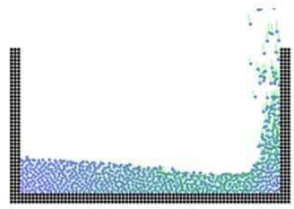
$$C_p = \frac{p - p_0}{\frac{1}{2}\rho_0 \gamma^2 D}$$

図-1.2.1　円柱の圧力係数 Cp の算定結果比較（出典：Nasu et al.(2013)）

２．２．既往の解析手法の特徴および長所・短所

流体の連続式・運動方程式は、一意的には解が求まらないので、数値計算的に解を求めることになる。数値計算の解法としては、これまで、差分法、有限要素法、粒子法などが適用されている。それぞれの解法の特徴と長所・短所は、次の表-1.2.1 のように考えられる。本研究では、様々な形状を有する港湾施設・海岸施設を対象とした検討を視野におき、空間表現に柔軟性があり、計算効率を向上させる安定化手法が確立されている有限要素法を用いることにした。

表-1.2.1　各解法の特徴と長所・短所について

解法	差分法	有限要素法	粒子法
イメージ図			
特徴	・差分法は、計算領域を直方体の格子または面で区切り、隣り合う格子や面に出入りする物質量の収支を計算する手法である。	・有限要素法は、領域内に任意の節点を設定し、節点で囲まれた要素内の物質量およびその分布を計算する手法である。	・粒子法は、流体を粒子で近似し、物質量およびその分布を計算する手法である。
長所	・構造が比較的単純であり、基礎方程式を直接プログラミング化することができる。 ・計算のロバスト性が高い。	・節点と要素により構造を決定するため空間表現に柔軟性があり、複雑な形状を対象とした解析でも適用できる。 ・計算メッシュを変形させるラグランジェ的な手法も適用可能である。 ・計算を高速化させるため数値粘性を制御する安定化手法が確立されている。	・流体を粒子としてラグランジェ的な扱いをするため、差分メッシュや有限要素メッシュは不要となる。 ・計算のロバスト性が高い。
短所	・空間表現に柔軟性がないため、複雑な形状を対象とした解析には向かない。 ・計算メッシュを変形させるラグランジェ的な手法を適用することが困難である。	・データ容量が大きく、計算量が多いため、コンピューターへの負荷が大きい。 ・ラグランジェ的なアプローチでは、計算のロバスト性に課題があり、リメッシュ手法の導入が重要である。	・計算精度を確保するため、粒子を小さく、かつ個数を多く設定する必要があり、計算負荷は大きい。

なお、計算の高速化の観点では、いずれの手法でも並列計算や GPU を用いた高速計算などを取り込む方がよい。

２．３．非圧縮性流体解析法の有限要素法の基本概念による分類

非圧縮性流体の有限要素法を用いた解析法については、1970 年代から様々な研究機関で開発が進められている。最近、主に適用されている有限要素法を用いた解析法を基本概念により分類すると、以下のような解法が挙げられる。

表-1.2.2　非圧縮性流体解析法の有限要素法の基本概念による分類

解析法	概要	研究論文の例
ペナルティ関数法	圧力と流速の空間微分（連続式）を関連付けるペナルティ関数（以下の式）を導入する方法である。 $p = -\lambda u_{i,i}$ ペナルティ関数を用いることで運動方程式から圧力を排除することができるが、パラメーター λ を慎重に設定する必要がある。	Hughes et al.(1979) Bercovier-Engleman(1979) Sani(1982)
圧力ポアソン方程式による解法	圧力に関するポアソン方程式と流体の基礎方程式を連立させながら解く解法である。現在、主流な解法の一つである。	Tuan-Olson(1978) Schneider-Raithby(1980) Washizu(1982)
音速法	圧力 p を密度 ρ のみの関数とみなし、密度変化を考慮した連続式の時間項を、圧力の時間項として表す方法である。速度と圧力を同時に計算することができる。	Kawahara-Hirano(1983) Kawahara-Miwa(1984) Terachi-Kawahara(2010)

圧力ポアソン方程式による解法は、主流な解法の一つである。以下に、ポアソン方程式を用いた解法の概要について示し、その課題点について述べる。

２．４．圧力ポアソン方程式を用いた解法

Navier-Stokes 方程式で用いている運動方程式を改めて示すと、以下の式(1.6)の通りである。

$$\frac{v_i^{n+1}-v_i^n}{\Delta t}+v_j^n v_{i,j}^n+p_{,i}^{n+1}-\mu\left(v_{i,j}^n+v_{j,i}^n\right)_{,j}=0 \tag{1.6}$$

式(1.6)の両辺を x_i で微分すると、以下の式（1.7）が得られる。

$$\frac{v_{i,i}^{n+1}-v_{i,i}^n}{\Delta t}+(v_j^n v_{i,j}^n)_{,i}+p_{,ii}^{n+1}-V_{ij,ji}^n=0 \tag{1.7}$$

ここに、

$$V_{ij}^n=(v_{i,j}^n+v_{j,i}^n) \tag{1.8}$$

また、流体の連続式は以下の通りである。

$$v_{i,i}^{n+1}=0 \tag{1.9}$$

式（1.9）を式（1.7）に代入すると、式(1.7)の第 1 項はゼロとなり、以下のポアソン方程式が得られる。

$$p_{,ii}^{n+1}=\frac{v_{i,i}^n}{\Delta t}-(v_j^n v_{i,j}^n)_{,i} \tag{1.10}$$

式(1.10)で、右辺第 1 項は連続式に相当するのであり、式(1.9)の表記によれば本来はゼロであるが、計算が安定しなくなるので、ここではゼロではないものとする。式(1.6)の圧力項・粘性項を部分積分し、弱形式の有限要素方程式を導くと以下の式(1.11)が得られる。

$$\int_V v_i^*\left(\frac{v_i^{n+1}-v_i^n}{\Delta t}\right)dV+\int_V\left(v_i^* v_j^n v_{i,j}^n\right)dV-\int_V\left(v_{i,i}^* p_i^{n+1}\right)dV+\mu\int_V\left(v_{i,j}^* v_{i,j}^n\right)dV+$$
$$\mu\int_V\left(v_{i,j}^* v_{j,i}^n\right)dV=\int_S (v_i^* t_i^n)dS \tag{1.11}$$

ここに、

$$t_i^n=\left\{-p_i^{n+1}\delta_{ij}+\mu\left(v_{i,j}^n+v_{j,i}^n\right)\right\}n_j \tag{1.12}$$

また、式(1.10)から弱形式の有限要素方程式を導出すると、以下の式(1.13)の通りとなる。

$$\int_V\left(p_{,i}^* p_{,i}^{n+1}\right)dV=-\frac{1}{\Delta t}\int_V\left(p_i^* v_{i,i}^n\right)dV-U_j^n\int_V\left(p_{,i}^* v_{i,j}^n\right)dV+U_j^n\int_V\left(p_i^* v_{i,j}^n n_i\right)dS+$$
$$\int_V\left(p_i^* p_{,i}^{n+1} n_i\right)dS \tag{1.13}$$

式(1.13)で、U_j^nは、要素の平均流速である。式(1.13)には右辺第 4 項が含まれているため非対称行列が現れることになる。式(1.13)で第 4 項をゼロとすることができれば取り扱いは容易であるが、一般的には、共役勾配法（Bi-Conjugate Gradient Method：Bi-CG 法）等、非対称行列にも適用できるソルバーを用いる必要があり、解の収束性は低下する。IBTD(Improved Balancing Tensor Diffusivity)法では、非対称行列を解くことを回避するため、式(1.10)を変形して、圧力に関して式(1.14)のような有限要素方程式を導き出しているが、繰り返し計算も必要で、計算アルゴリズムは複雑となる。

$$\int_V \left(p_i^* v_{i,i}^n\right) dV + \Delta t \int_V \; p_{,i}^* \left(v_j^n v_{i,j}^{n+1/2} + p_{,i}^{n+1/2}\right) dV = -\int_S \; p_i^* \left(v_i^{n+1} - v_i^n\right) n_i dS \tag{1.14}$$

また、BTD 法による数値粘性の効果は、SUPG(Streamline Upstream Petrov-Garelkin）法よりも劣る。

２．５．本研究の独自性

前節までに述べたように、ポアソン方程式による解法は計算アルゴリズムが複雑となり、計算負荷も大きくなる。また、ペナルティ関数を用いる方法もパラメーターλを慎重に設定しなければならない。そこで、本研究で開発する流体解析モデルでは、ポアソン方程式による解法やペナルティ関数を用いずに、音速法をベースに流速・圧力を同時に直接法で計算できるモデルを構築した。

また、安定化手法としては、SUPG 法あるいは混合補間法の 1 種であるバブル関数法を適用する方法等の適用が考えられが、Tezduyar らの研究グループで広く使われている SUPG 法をベースとした安定化手法を用いることとした。

音速法を用いた流体解析法は、川原らにより 1980 年代から開発されているが、第 4 章で後述するように、従来の音速法の計算では安定性の面で課題がある。そこで、本研究では、第 5 章で後述するように、従来の音速法をその定式化から見直し、Tezduyar らが非圧縮流体を対象に開発した SUPG 項等の安定化項を本来の形で包括的に組み込むこととした。このようなモデルの改良を行うことにより、キャビティ流れや孤立波の事例計算を通じて、計算の精度・安定性が大幅に改良されたことを確認した。この点は、研究の独自性と言える。

３．研究の概要

港湾施設や海岸保全施設の耐波設計や耐津波設計では、国土交通省が監修している「港湾の施設の技術上の基準・同解説」や「海岸保全施設の技術上の基準・同解説」等を用いて、実務的な設計を行っている。しかし、最近では、耐津波性能や耐震性能の向上等を目的とした構造物の改良を行う場合や、標準的な構造から逸れる構造物の設計を行う場合も増えてきており、現行の設計基準のみでは適切な設計ができないこともある。このような場合には、水理模型実験や高精度の数値シミュレーション技術を駆使して、設計を行うことになる。この論文では、港湾・海岸分野で様々な形状を有する構造物の耐波設計・耐津波設計にも適用できる流体解析手法を開発することに主眼をおいている。

第１章から第６章までの成果の要旨は、以下の通りである。

第１章では、研究の背景・目的、既往の研究成果の概要、研究の独自性をまとめており、本研究の社会的必要性を示している。

第２章では、Adiabatic Flow モデルの概要・長所を示している。Adiabatic Flow モデルとしては、圧力と密度の関数形を考慮したモデルと音速を一定とした音速法によるモデルの２種類に大別される。非圧縮性流体を対象とした Navier-Stokes 方程式を解く従来の方法では、例えば Poisson 方程式を解く手続等を必要とするが、その計算負荷は非常に大きい。本研究で提案する Adiabatic Flow モデルでは、流速・圧力を同様の変数として扱うため、直接法で計算でき、計算のアルゴリズムも単純で計算効率にも優れている。また、流体の密度を考慮することで、空気と水が混合される問題や水と土砂が混合される問題にも将来的に応用可能である。

第３章では、Adiabatic Flow モデルのうち、圧力と密度の関数形を考慮したモデルの基本的な計算概念と計算事例を示している。モデルの問題点を明らかにしている。

第4章では、従来の音速法モデルの基本的な計算概念と計算事例を示している。従来の音速法では、孤立波の伝搬・反射を扱う場合、マッハ数や無次元化の基準流速の設定を慎重に行う必要があった。また、孤立波が壁から反射後に減衰する現象がみられた。

第5章では、従来の音速法の問題点を踏まえ、従来の音速法を一般化させ、無次元化の手続きが不要となる定式化を独自に開発した。さらに、計算の安定性を向上させることを目的とし、SUPG 法（Streamline Upwind Petrov-Galerkin）、PSPG 法（Pressure Stabilizing Petrov-Galerkin）、LSIC 法（Least Squares on Incompressibility Constant）、ALE 法（Arbitary Lagrange Eulerian）等の安定化手法を本来の形で包括的に扱える計算モデルを開発した。このように改良した計算モデルを用いて、空気流体を対象としたキャビテイの計算を行った結果、Giha の結果や従来の非圧縮モデルとの整合性は非常に良好であった。また、水の流体を対象とした２次元孤立波の伝搬・反射計算においても、孤立波が安定的に伝搬・反射することを確認

した。また、リーフ地形を対象とした３次元の孤立波の伝搬計算においては、計算結果が Street らの水理模型実験結果ときわめて良好に整合していることを確認した。

第６章では結論と将来的な展望を述べている。

最後に、付録として、壁面に波が作用する護岸の形状決定問題を応用例として扱っている。

第２章　Adiabatic Flow モデル

１．流体解析手法の概要

一般的に、流体を対象とした数値計算では、非圧縮性または圧縮性を仮定している。非圧縮の仮定は、後述するように、流体の音速を無限大と仮定している。流体の音速は、他の変数と比べると桁違いに大きいが有限である。そこで、本研究では、流体の僅かな圧縮性を考慮したAdiabatic Flow モデルを流体モデルとして採用する。Adiabatic Flow モデルでは、流体の断熱状態（Adiabatic State）を仮定しており、密度を圧力のみの関数として表すことができる。また、Adiabatic Flow モデルは、川原らの研究で適用されているが、大きくは２つのアプローチがある。

一つは、流速、圧力、密度を変数として扱う方法である。流体の密度 ρ は、一般的に、圧力 p と温度 T の関数として表すことができる。

$$\rho = f(p, T) \tag{2.1}$$

ここで、流体の断熱状態（Adiabatic State）を考えると、温度変化を無視できることになるため、流体の密度は、圧力のみの関数として表すことができる。このような流体を Adiabatic Fluid と呼んでる。

$$\rho = f(p) \tag{2.2}$$

密度と圧力の関係は、空気の場合は Poisson 則を用い、水の場合は Birtch-Murnaghan の式を用いることができる。なお、Poisson 則で、γ は通常 1.4 程度である。

＜空気－Poisson 則＞

$$\Delta p = p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma} \tag{2.3}$$

＜水－Birtch-Murnaghan の式＞

$$\Delta p = p_0 \left[\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{7/3} - \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{5/3}\right] \tag{2.4}$$

ここに、p_0 : 基準圧力、ρ_0 : 基準密度、ρ : 密度、Δp : 基準圧力からの変動量である。

もう一つの方法は、音速を一定と仮定して、流速と圧力を変数として扱う方法であり、音速法と呼ばれている。音速法は、川原らの研究では1980年代から用いられている手法であるが、音速が他の変数と比べ、桁違いに大きいため、従来は基準流速Vで変数を無次元化する手続きが必要であった。本研究では、これを一般化し、無次元化の手続きなしに計算できる手法を開発した。

最初に、圧力・密度の関数形を考慮した解析方法について述べる。次に、従来の音速法と音速法を一般化させた方法について述べる。

また、流体の解析手法として、有限要素法を適用する場合、移流に伴う数値不安定性や圧力振動に伴う数値不安定性を解消するため、SUPG項(Streamline Upwind Petrov-Galerkin)やPSPG項(Pressure Stabilizing Petrov-Galerkin)を含む安定化計算手法やバブル関数法等を用いることが不可欠である．本研究では、一般化された音速法に関して、安定化有限要素法として、SUPG項、PSPG項、LSIC項(Least Squares on Incompressibility Constant)を考慮した安定化有限要素法を適用する。さらに、メッシュ移動による不安定性を回避するため、ALE法(Arbitary Lagrange Eulerian methods)を適用した。これらの安定化計算手法を用いることにより、２次元のCavityの事例計算、孤立波の事例計算において、計算の安定性・精度は大幅に改善されることが明らかとなった。

２．Adiabatic Flow モデルの長所

本研究では、有限要素法を用いて Adiabatic Flow モデルをベースとした流体解析法を開発した。従来から適用されている非圧縮性の流体モデルは Navier-Stokes 方程式をベースとしており、音速が無限大という仮定を設けたことになる。Adiabatic Flow モデルを従来から適用されている非圧縮性の流体モデルと比較すると、以下のような数値計算上の長所が挙げられる。

１）計算の安定性

非圧縮性の流体モデルでは、Navier-Stokes 方程式を基礎方程式として解いていくことになる。しかし、連続式では流速のみが変数となるので、例えば Poisson 方程式から圧力値を求める等の数値計算上のテクニックが必要となる。非圧縮性の流体モデルでは、Poisson 方程式の計算量が計算全体の大半を占めるとも言われている（例えば、奥村・有川（2013，2014）、吉田（2008））。Adiabatic Flow モデルでは、流体の圧縮性を考慮することより、連続式の中で圧力も流速と同様の変数として扱うことが可能となり、直接法で求めることができる。また、流速と圧力を同一の node 上で定義することができ、混合補完法等も用いる必要がなく、数値計算アルゴリズムも複雑ではない。

さらに、Adiabatic Flow モデルの１種である音速法を定式化から見直し、SUPG 法等の安定化手法を包括的に組み込むことができるようにモデルを改良した。このモデル改良により、Adiabatic Flow モデルの計算精度および安定性が大幅に向上した。

２）数値モデルの発展性

例えば、水塊が鉛直壁に衝突する際には、瞬間的・局所的に流体の密度も変化し、衝撃的な作用が発生していると推察される。流体の密度を考慮することにより、このような瞬間的・局所的な現象にも、将来的には応用可能である。

また、流体の密度を考慮することにより、空気と水が混合される現象、水と土砂が混合される現象にも将来的には応用可能である。

例えば、水と土砂が混合される現象では、水中に含まれる浮遊砂濃度を考慮する必要があり、密度変化を考慮した流体の連続式・運動方程式、底質の連続式、浮遊砂濃度の生成項を考慮した移流拡散方程式を連成して解くアプローチが考えられる。密度変化を考慮した Adiabatic Flow モデルは、数値モデルとしての発展性が見込める。

第３章　圧力と密度の関数形を考慮したモデル

１．基礎方程式

圧力と密度の関数形を考慮した Adiabatic Flow モデルについて以下に記す。基礎方程式は、以下の式(3.1)から式(3.3)に示すように、密度変化を考慮した流体の連続式と運動方程式である。

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+(\rho u_i)_{,i}=0 \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i)+(\rho u_j u_i)_{,j}+p_{,i}-\tau_{ji,j}=\rho f_i \tag{3.2}$$

$$\tau_{ij}=\mu\left(u_{i,j}+u_{j,i}\right)-\frac{2}{3}\mu u_{k,k}\delta_{ij} \tag{3.3}$$

ここに, ρ, u, p は、それぞれ密度・流速・圧力であり、断面２次元モデルでは、流体力は $f_i=(0,-g)$ となる。また、圧力 p は、基準圧力 p_0 からの変動量⊿p について、圧力・密度の関数形を考慮する。

$$p=p_0+\Delta p \tag{3.4}$$

＜空気－Poisson 則＞

$$\Delta p=p_0\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma} \tag{3.5}$$

＜水－Birtch-Murnaghan の式＞

$$\Delta p=p_0\left[\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{7/3}-\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{5/3}\right] \tag{3.6}$$

２．有限要素法の導出

前出の基礎方程式の式(3.1)と式(3.2)を、Galerkin 法により陽的に離散化すと、以下の式（3.7）から式（3.9）ような有限要素方程式が導出される。

$$\widetilde{M}_{\alpha\beta}\frac{\rho_\beta^{n+1}-\rho_\beta^n}{\Delta t}+B_{\alpha\beta}^x\rho_\beta^n+B_{\alpha\beta}^y\rho_\beta^n=0 \tag{3.7}$$

$$\rho_\beta^n\widetilde{M}_{\alpha\beta}\frac{u_\beta^{n+1}-u_\beta^n}{\Delta t}-H_{\alpha\beta}^x p_\beta^n+\lambda D_{\alpha\beta}^{xx}u_\beta^n+\lambda D_{\alpha\beta}^{xy}v_\beta^n+2\mu D_{\alpha\beta}^{xx}u_\beta^n+\mu D_{\alpha\beta}^{yy}u_\beta^n+\mu D_{\alpha\beta}^{yx}v_\beta^n=f_x \tag{3.8}$$

$$\rho_\beta^n\widetilde{M}_{\alpha\beta}\frac{v_\beta^{n+1}-v_\beta^n}{\Delta t}-H_{\alpha\beta}^y p_\beta^n+\lambda D_{\alpha\beta}^{yx}u_\beta^n+\lambda D_{\alpha\beta}^{yy}v_\beta^n+\mu D_{\alpha\beta}^{xx}v_\beta^n+\mu D_{\alpha\beta}^{xy}u_\beta^n+2\mu D_{\alpha\beta}^{yy}v_\beta^n=f_y \tag{3.9}$$

また、形状関数として三角形要素を想定し、有限要素法の形状関数を Φ_α とし、以下のように定義する。

$$\phi_\alpha=a_\alpha+b_\alpha x_\alpha+c_\alpha y_\alpha \quad （\alpha＝１～３） \tag{3.10}$$

各係数行列は、以下の通り、算出することができる。なお、式(3.12)の e はランピング・パラメターと呼ばれる係数であり、数値粘性の効果を調整している。陽解法では、混合行列$\widetilde{M}_{\alpha\beta}$を用いることにより、逆行列の計算をせずに解を得ることができる。

$$M_{\alpha\beta}=\int_V(\Phi_\alpha\Phi_\beta)\,dV=\frac{\Delta_e}{12}\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix} \tag{3.11}$$

$$\widetilde{M}_{\alpha\beta}=e\overline{M}_{\alpha\beta}+(1-e)M_{\alpha\beta}=e\frac{\Delta_e}{12}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+(1-e)\frac{\Delta_e}{12}\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix} \tag{3.12}$$

$$B_{\alpha\beta}^x=\int_V(\Phi_\alpha\Phi_\beta(\Phi_{\gamma,x}u_\gamma))dV=\frac{\Delta_e}{12}\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1&b_2&b_3\end{pmatrix} \tag{3.13}$$

$$B_{\alpha\beta}^y=\int_V(\Phi_\alpha\Phi_\beta(\Phi_{\gamma,y}v_\gamma))dV=\frac{\Delta_e}{12}\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1&c_2&c_3\end{pmatrix} \tag{3.14}$$

$$H_{\alpha\beta}^x=\int_V(\Phi_{\alpha,x}\Phi_\beta)dV=\frac{\Delta_e}{3}\begin{pmatrix}b_1&b_2&b_3\\b_1&b_2&b_3\\b_1&b_2&b_3\end{pmatrix} \tag{3.15}$$

$$H_{\alpha\beta}^{y} = \int_V (\Phi_{\alpha,y}\Phi_{\beta})dV = \frac{\Delta_e}{3}\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \tag{3.16}$$

$$D_{\alpha\beta}^{xx} = \int_V (\Phi_{\alpha,x}\Phi_{\beta,x})dV = \Delta_e\begin{pmatrix} b_1b_1 & b_1b_2 & b_1b_3 \\ b_2b_1 & b_2b_2 & b_2b_3 \\ b_3b_1 & b_3b_2 & b_3b_3 \end{pmatrix} \tag{3.17}$$

$$D_{\alpha\beta}^{xy} = \int_V (\Phi_{\alpha,x}\Phi_{\beta,y})dV = \Delta_e\begin{pmatrix} b_1c_1 & b_1c_2 & b_1c_3 \\ b_2c_1 & b_2c_2 & b_2c_3 \\ b_3c_1 & b_3c_2 & b_3c_3 \end{pmatrix} \tag{3.18}$$

$$D_{\alpha\beta}^{yx} = \int_V (\Phi_{\alpha,y}\Phi_{\beta,x})dV = \Delta_e\begin{pmatrix} c_1b_1 & c_1b_2 & c_1b_3 \\ c_2b_1 & c_2b_2 & c_2b_3 \\ c_3b_1 & c_3b_2 & c_3b_3 \end{pmatrix} \tag{3.19}$$

$$D_{\alpha\beta}^{yy} = \int_V (\Phi_{\alpha,y}\Phi_{\beta,y})dV = \Delta_e\begin{pmatrix} c_1c_1 & c_1c_2 & c_1c_3 \\ c_2c_1 & c_2c_2 & c_2c_3 \\ c_3c_1 & c_3c_2 & c_3c_3 \end{pmatrix} \tag{3.20}$$

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu \tag{3.21}$$

３．計算事例

３．１．キャビティの流れ

最初に、キャビティの計算事例を示す。計算に用いたメッシュおよび計算の境界条件は、図-3.3.1.および図-3.3.2 に示すとおりである。計算メッシュのノード数は 1089 個、メッシュ数は 2048 であり、縦・横の長さは１ｍである。境界条件として、上方境界に水平方向に u=1.0m/s の流速を与えている。

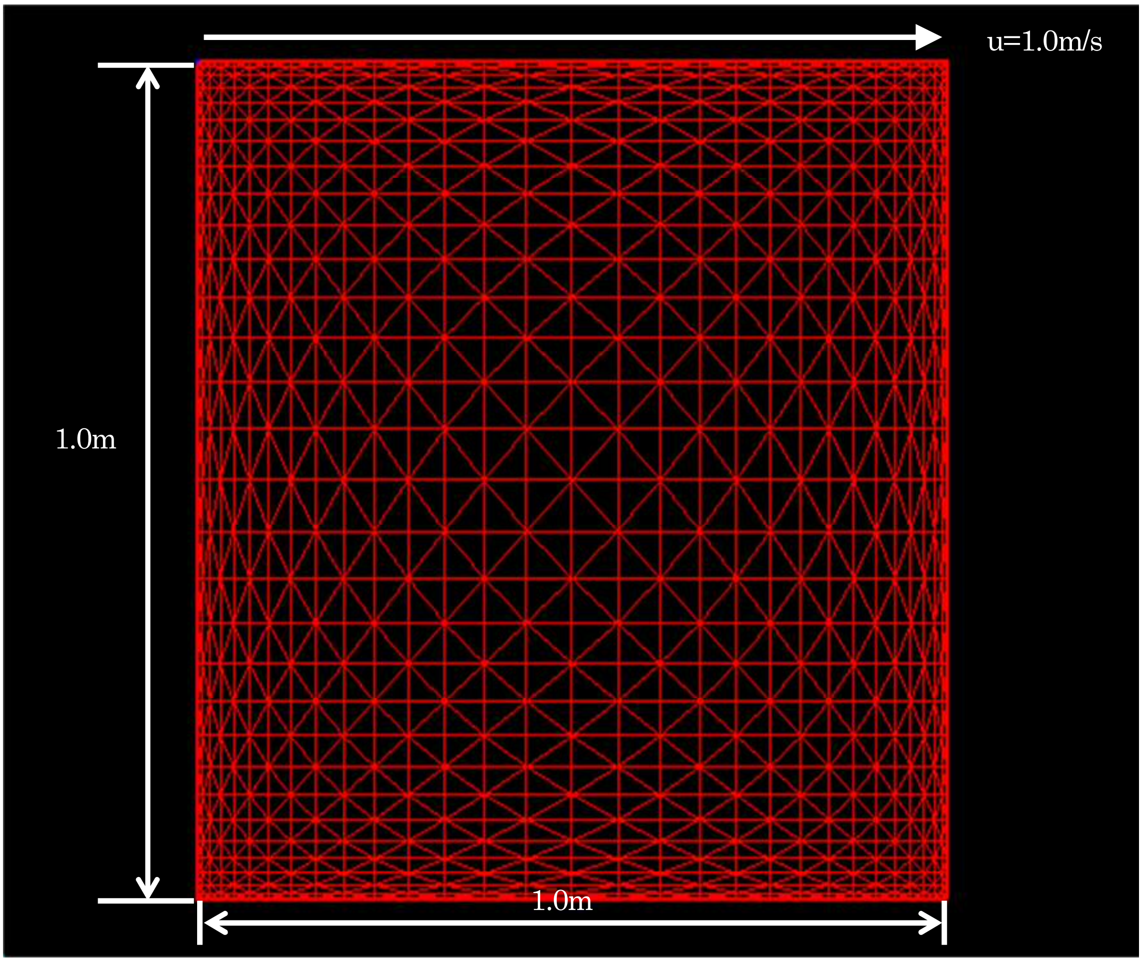


図-3.3.1　計算メッシュ

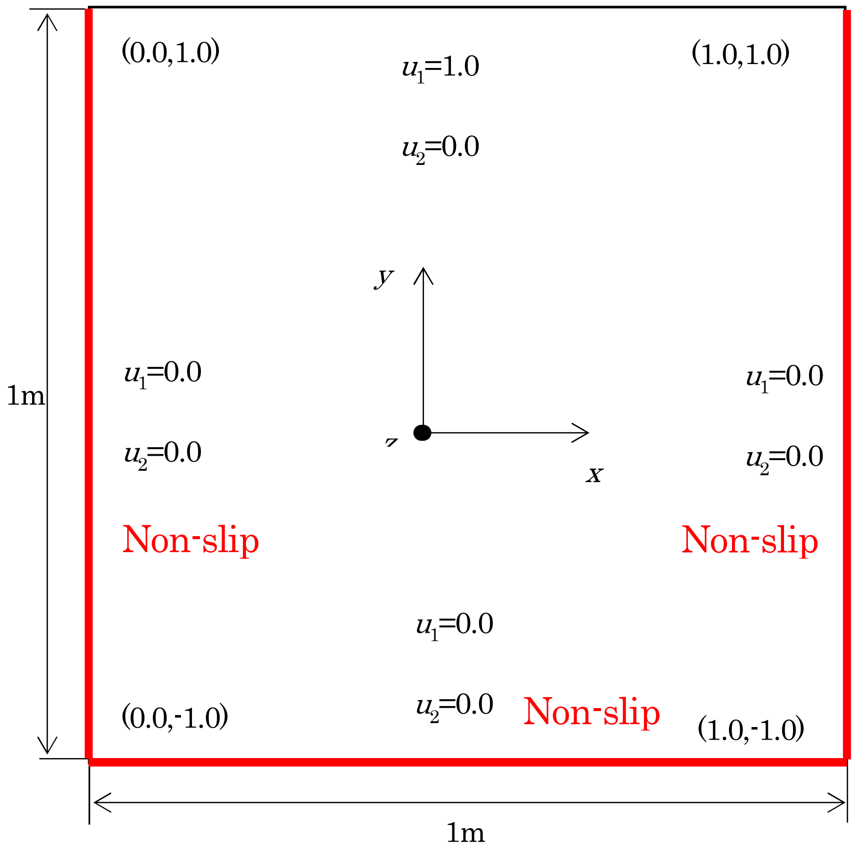
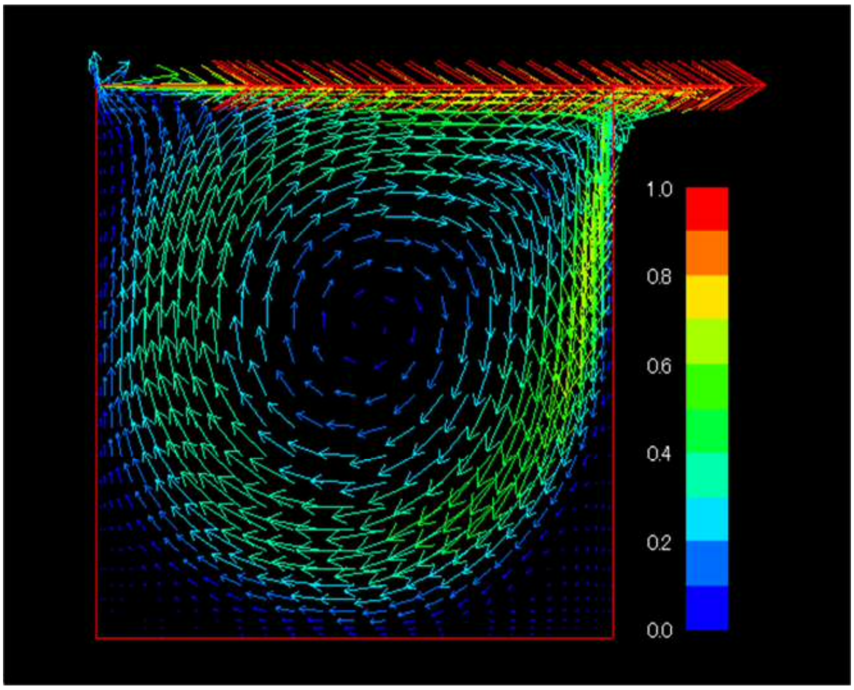


図-3.3.2　境界条件

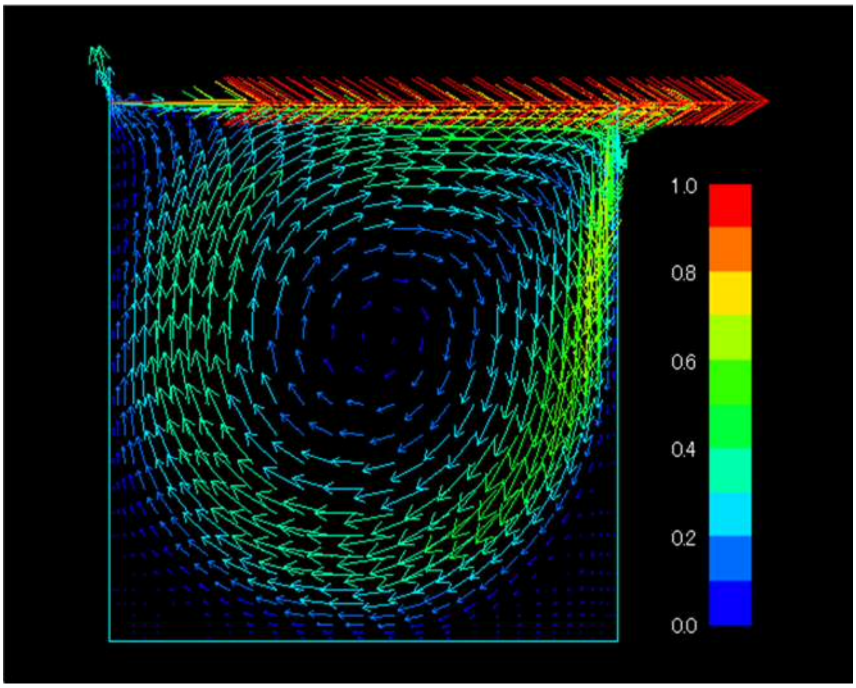
次ページの図-3.3.3 に、流速分布がほぼ定常となっている T=200sec 後の流速分布を示す。上段の図は非圧縮モデルにより計算した結果であり、下段の図が前述の方法により計算した結果である。また、図-3.3.4 は Ghia（1982）との計算結果の比較を行ったものである。これらの結果からわかるように、両方の計算結果はほとんど一致しており、Ghia との整合性も高い。また、圧縮性を考慮した Adiabatic Flow モデルでも、非圧縮モデルとほぼ同じような計算結果が得られることから、状態はほとんど非圧縮状態とみなせる。

しかしながら、この Adiabatic Flow モデルでは、まだ SUPG 項や PSPG 項のような安定化項を考慮していないので、計算の時間間隔 dt を極端に小さく設定しなければならない。また、ランピング・パラメターの e は、川原ら（1983）の従来型の音速法モデルでは、e=0.7～0.95 を提案しているが、本研究では連続式に関しては e=1.0 とし、運動方程式に関しては e=0.99 とした。これは、ランピング・パラメターによる数値粘性の効果を極力排除しないと、適切な計算結果が得られなかったためである。なお、ランピング・パラメターによる数値粘性の効果も極端に小さく抑えているため、時間間隔 dt も 10^{-6}sec と小さく設定しなければならない。



T= 200 sec
dt= 0.01 sec
Re= 1000

(1) Incompressible Model with SUPG/PSPG term



lumping parameter
momentum 1
mas 0.99
T= 200 sec
dt= 0.00001 sec
Re= 1000

(2)Adiabatic Flow Model

図-3.3.3　キャビティの計算事例

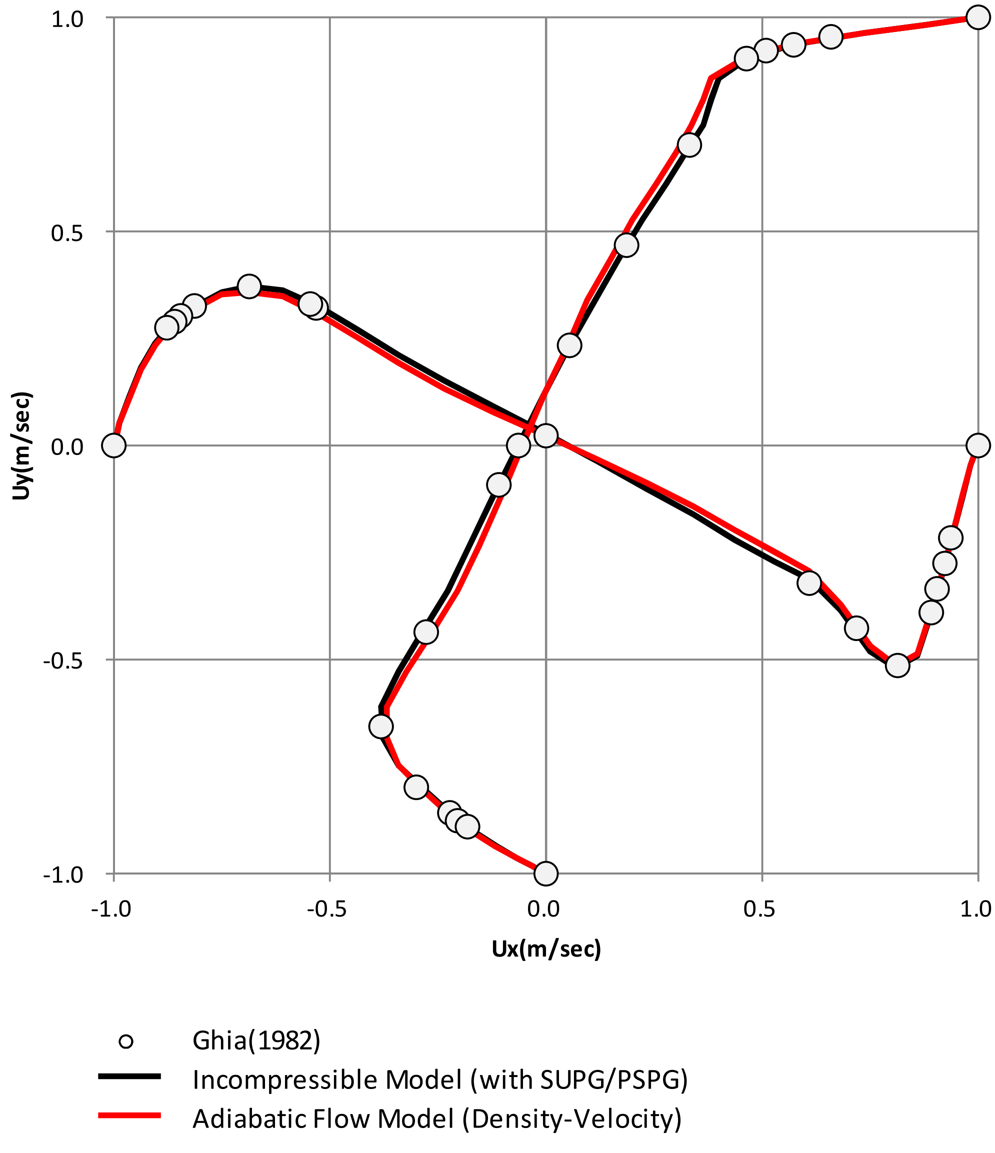


図-3.3.4　Ghia（1982）との計算結果の比較

３．２．円柱周りの流れ

次に、円柱周りのカルマン渦の計算事例を示す。計算メッシュは図-3.3.5 に示すとおりである。計算のノード数は 9031、計算メッシュ数は 17782 である。境界条件として、入り口から u=1.0m/sec の一様流速を与え、出口では $\rho=\rho_0$ として常に初期条件と同じになるように設定した。レイノルズ数は Re=1000 である。また、ランピングパラメターの e は、前述のキャビティと同様に、連続式に関しては e=1.0 とし、運動方程式に関しては e=0.99 とした。

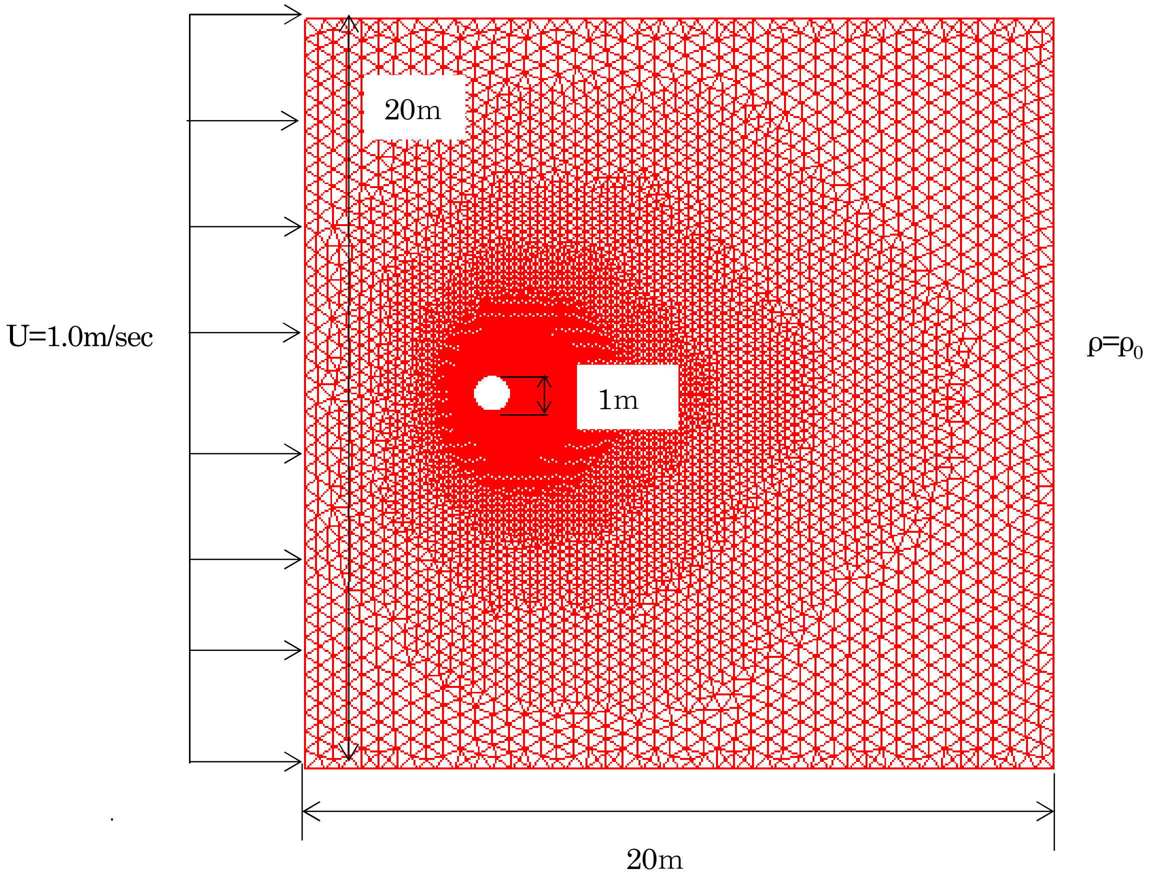
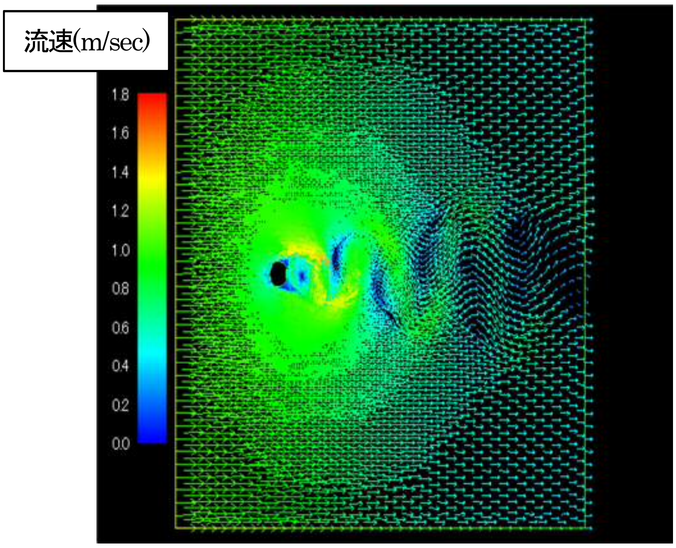
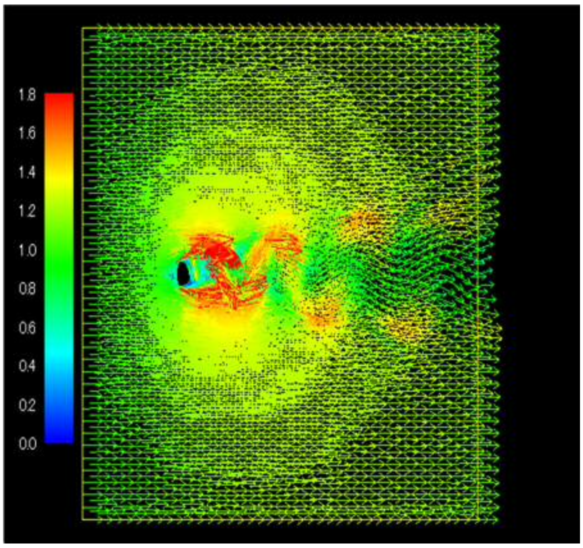


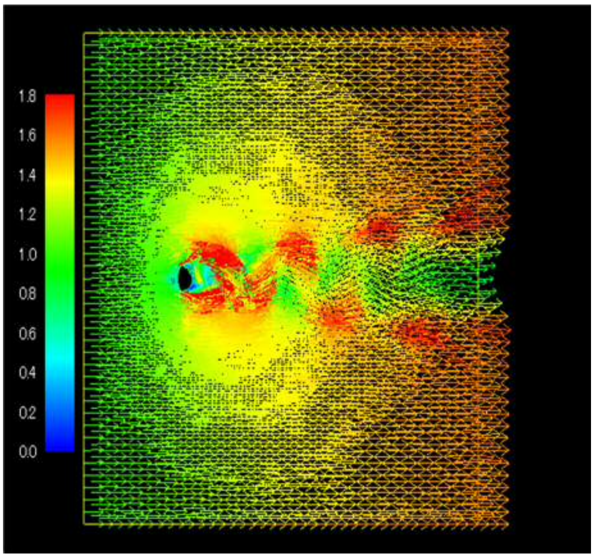
図-3.3.5　計算メッシュ

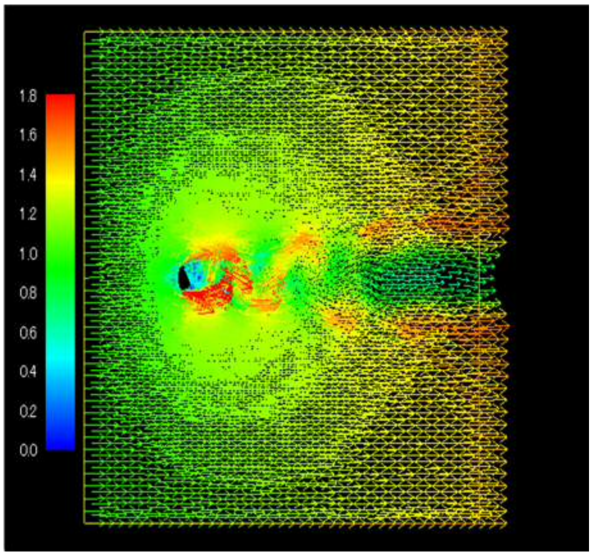




T=25sec

T=50sec





T=75sec

T=100sec

図-3.3.6　カルマン渦の計算結果

計算結果に示すように、カルマン渦が規則的に発生している状況が再現されている。しかしながら、この計算では、計算領域全体で数値振動がみられる。

３．３．計算モデルの問題点

以上、時間方向に陽形式とし、密度・圧力の関数形を考慮した Adiabatic Flow モデルによる計算事例を示した。計算事例より以下のような課題と対応方策が考えられる。なお、SUPG 項・PSPG 項・LSIC 項や ALE 法等の安定化手法については、後述する。

表-3.3.1　事例計算で得られた課題と対応策

	課題	対応策
①	ランピングパラメターを用いる陽形式の計算法では、運動方程式のランピングパラメターを e=0.99 程度に設定する必要があり、計算時間間隔⊿t も極めて小さくする必要がある。	ランピング・パラメターによる数値粘性は効果的ではないので、時間方向には陰解法を適用し、計算の安定性を確保するため、SUPG 項を考慮する。
②	計算空間全体で、数値振動がみられる。	圧力振動を回避するため、PSPG 項と LSIC 項を考慮する。また、流体の状態は、ほぼ非圧縮状態であり、密度の時間変化・空間変化も極めて小さいと判断されるため、音速法を適用する。
③	波の伝搬計算を行う際には、自由表面の取り扱いは必要で、メッシュ移動を考慮しなければならない。メッシュ移動に伴う不安定性が懸念される。	メッシュ移動に ALE 法を適用し、計算の安定性を高める。

第４章　従来型の音速法モデル

１．基礎方程式

ここからは、まずは従来の音速法について述べる。川原ら（1983）の音速法は、以下の式(4.1)および式（4.2）ような連続式と運動方程式を用いる。

$$\dot{p} + u_i p_{,i} + c u_{i,i} = 0 \tag{4.1}$$

$$\dot{u}_i + u_j u_{i,j} + c p_{,i} - \mu(u_{i,j} + u_{j,i})_{,j} = f_i \tag{4.2}$$

ここに、u : 流速、p : 圧力、f: 抗力、c : 音速である。音速 c は水の場合は約 1500m/s となり、空気の場合は約 350m/s となり、他の変数と比べて、桁違いに大きい。計算の安定性を確保するため、以下ののような無次元パラメターを導入している。

$$u_i = \frac{U_i}{V},\ p = \frac{P}{\rho c V},\ c = \frac{C}{V} = \frac{1}{M_c},\ \ f_i = \frac{F_i}{V^2},\ \mu = \frac{1}{Re} \tag{4.3}$$

ここに、 V : 基準流速、Mc : マッハ数、Re : レイノルズ数である。基準流速 Vは任意に設定してもよいが､現象として想定される代表流速 Vとマッハ数 Mcを適切に設定する方がよい。また、実験データ等の検証材料がある場合には、実験データを再現できるように、基準流速 Vやマッハ数 Mcを正確に設定しなければならない。

２．有限要素法による離散化

上記の音速法の基礎式を Galerkin 法により離散化すると、以下のような有限要素方程式が得られる。連続式の第 4 項から第 6 項は PSPG 項に相当し、運動方程式の第 6 項から第 8 項は SUPG 項に相当する。これらの安定化手法については後述する。また、q^*と w^*は重み関数である。

$$\int_\Omega q\left(\frac{\partial p}{\partial t} + u_i\frac{\partial p}{\partial x_i} + c\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)d\Omega + \sum_{e=1}^{N_e}\int_{\Omega_e}\left(\tau_p\frac{\partial q_i}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + \bar{u}_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + c\frac{\partial p}{\partial x_i}\right)d\Omega_e = 0 \tag{4.4}$$

$$\int_\Omega w_i\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + \bar{u}_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)d\Omega - \mathrm{c}\int_\Omega \frac{\partial w_i}{\partial x_i}p d\Omega + \mu\int_\Omega \frac{\partial w_i}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)d\Omega +$$

$$\sum_{e=1}^{N_e}\int_{\Omega_e}\left(\tau_s\bar{u}_j\frac{\partial w_i}{\partial x_j}\right)\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + \bar{u}_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + c\frac{\partial p}{\partial x_i}\right)d\Omega_e = \int_{\Gamma_h} w_i h_i d\Gamma \tag{4.5}$$

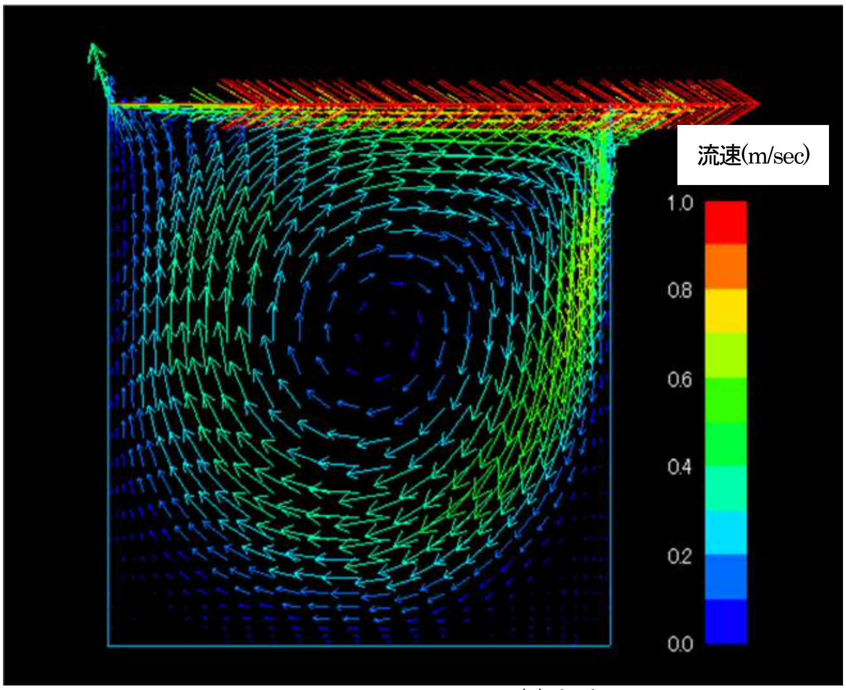
$$q^* = q + \tau_p\frac{\partial q_i}{\partial x_i} \tag{4.6}$$

$$w^* = w_i + \tau_s\bar{u}_j\frac{\partial w_i}{\partial x_j} \tag{4.7}$$

３．計算事例

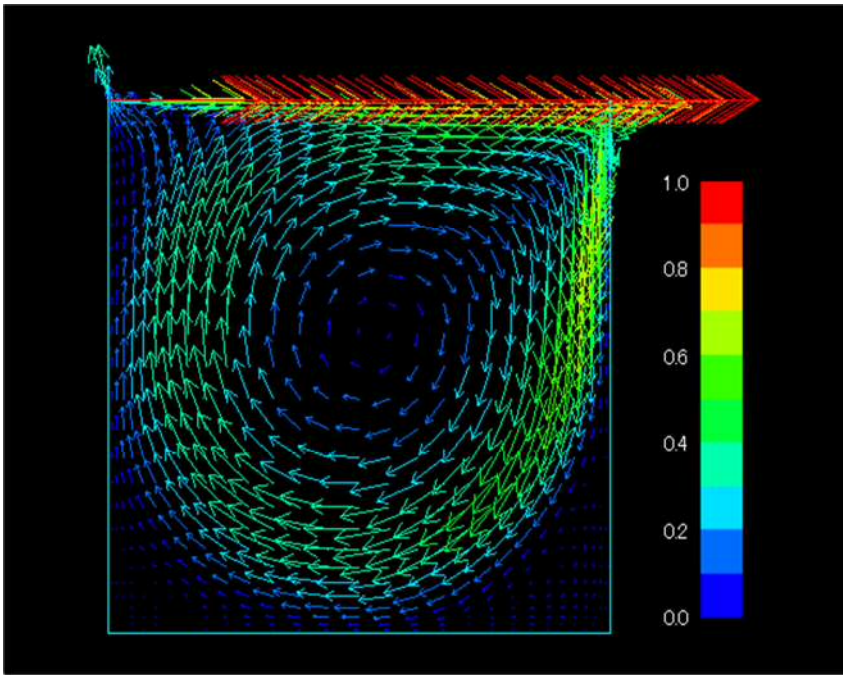
３．１．キャビティ流れ

音速法による計算事例としてキャビティの事例を図-4.3.1 と図-4.3.2 に示す。計算に用いたメッシュおよび計算の境界条件は、前出の図-4.3.1.および図-4.3.2 と同じである。



T= 200 sec
dt= 0.001 sec
Re= 1000
Mc= 0.005

(1)音速法



lumping parameter
momentum 1
mas 0.99
T= 200 sec
dt= 0.00001 sec
Re= 1000

(2)Adiabatic Flow Model(再掲)

図-4.3.1　キャビティの計算事例

図-3.8 には、Ghia（1982）との計算結果の比較を示す。音速法の計算は、時間方向に陰解法を用いており、安定化項として SUPG 項・PSPG 項も含まれている。Adiabatic Flow Model では陽形式を用いているが、時間刻みを⊿t=0.001sec まで大きくとることができ、安定化項の効果が認められる。Giha との比較では、いずれの計算結果も良好な整合性が認められる。

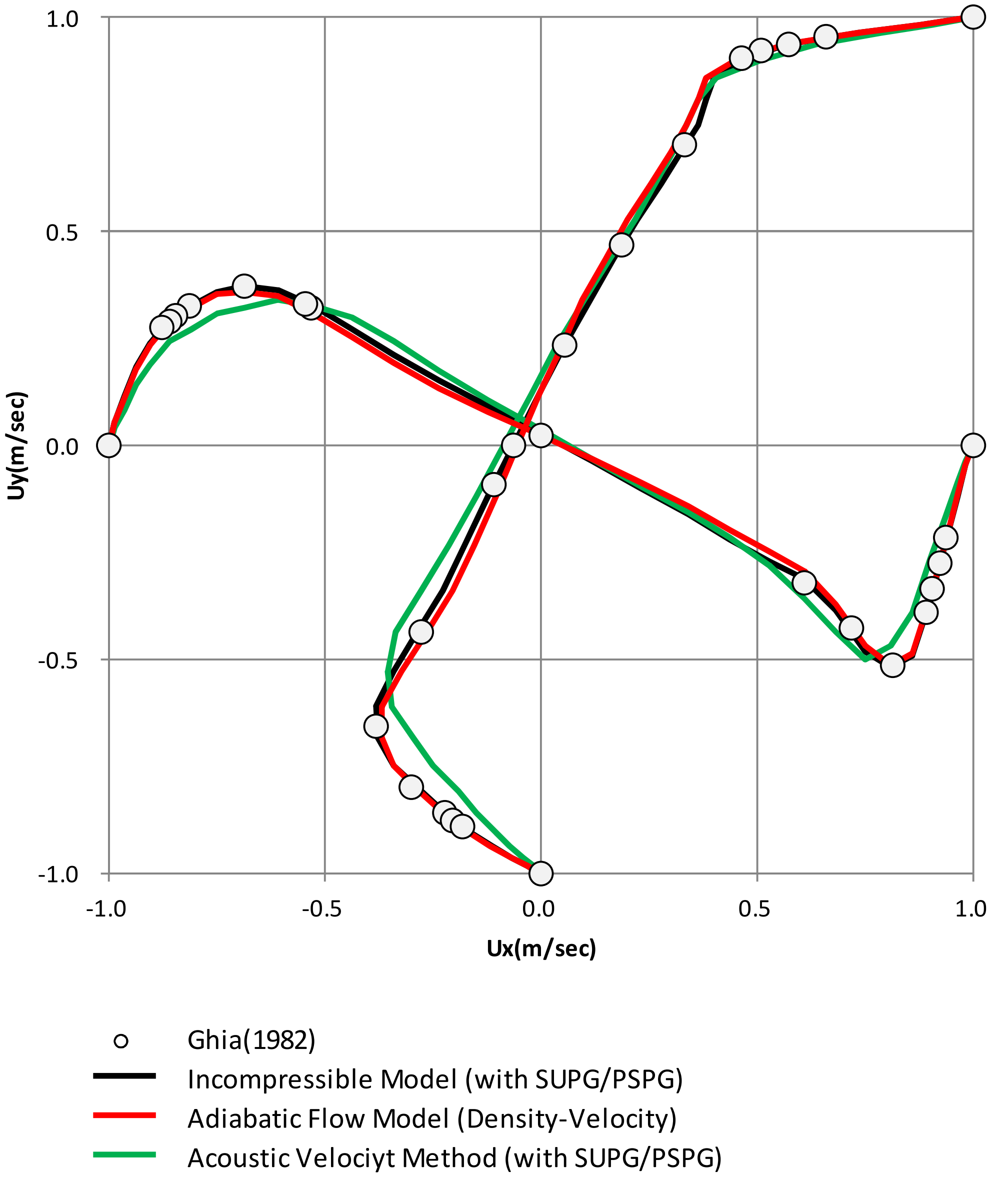
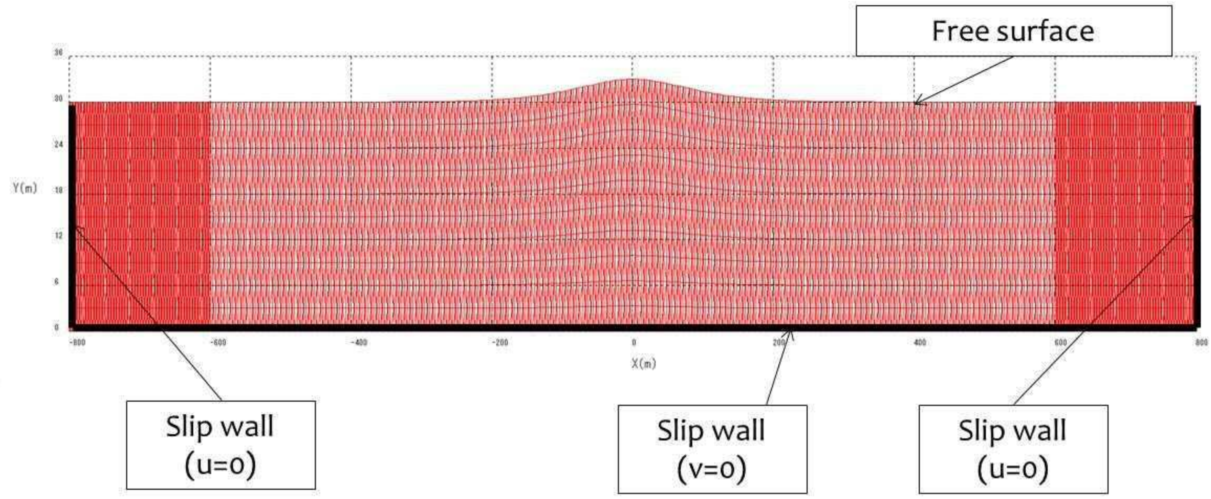


図-4.3.2　Ghia（1982）との計算結果の比較

３．２．孤立波（2 次元）

次に、孤立版の計算事例を示す。計算に用いたメッシュ図は、図-4.3.3 に示すとおりである。計算のノード数は 5511 個、メッシュ数は 10,000 個である。計算の初期条件として、波高水深比（ζ/h）は、孤立波が砕波しないように、ζ/h＝0.1 とした。水路長は L=1,800m である。



Nodes=5511, Elements=10,000
ζ=3m, h=30m, ζ/h =0.1
L=1,800m

図-4.3.3　孤立波の計算に用いたメッシュ図

また、孤立波の初期水位分布や流速分布については、以下に示す Laitone 式を用いた。

$$c = \sqrt{gd(1+\frac{H}{d})} \tag{4.8}$$

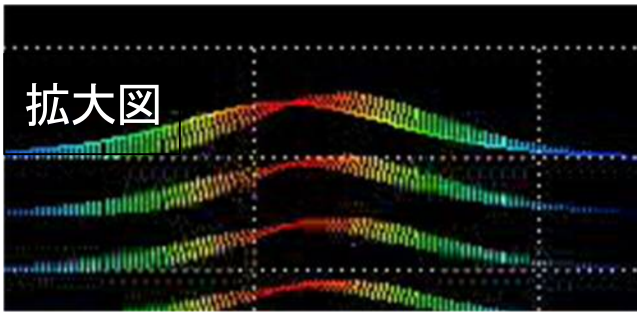
$$u = \sqrt{gd}\,\frac{H}{d}\,\mathrm{sech}^2\left[\sqrt{\frac{3}{4}\frac{H}{d^3}}(x-ct)\right] \tag{4.9}$$

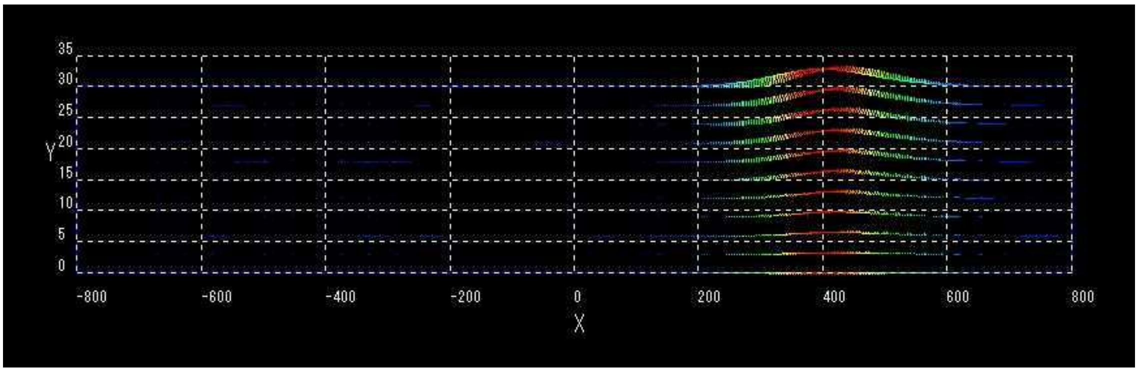
$$v = \sqrt{3gd}\left(\frac{H}{d}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{y}{d}\,\mathrm{sech}^2\left[\sqrt{\frac{3}{4}\frac{H}{d^3}}(x-ct)\right]\tanh\left[\sqrt{\frac{3}{4}\frac{H}{d^3}}(x-ct)\right] \tag{4.10}$$

$$y_s = d + H\mathrm{sech}^2\left[\sqrt{\frac{3}{4}\frac{H}{d^3}}(x-ct)\right] \tag{4.11}$$

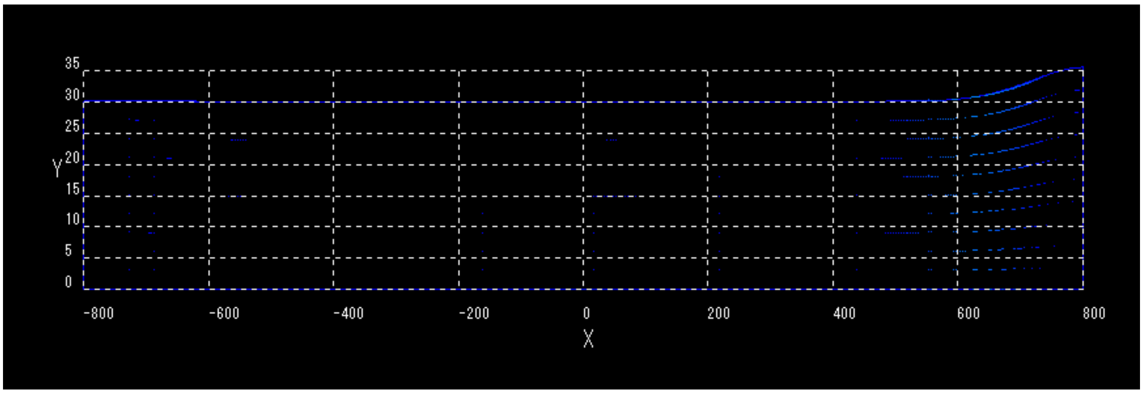
計算結果として、孤立波の伝搬状況を図-4.3.4 に示す。また、図-4.3.5 には、水面形の時刻歴を整理した結果を示す。孤立波の計算では、$Mc=5.87\times10^{-4}$ に設定することにより、孤立波の伝搬速度が Laitone 式とほぼ同程度となり、反斜壁に到達するまでは水面形も保持されている。この手法では、マッハ数 Mc や無次元化の基準流速Ｖをパラメータ・スタディにより設定した。また、この計算では、壁から反射後は波形が崩れて減衰しており、数値計算上、改良の余地がある。

すなわち、従来の音速法では、マッハ数 Mc や無次元化の基準流速Ｖを慎重に設定する必要がある点と孤立波の波形が壁から反射後に減衰する点が課題と考えられる。

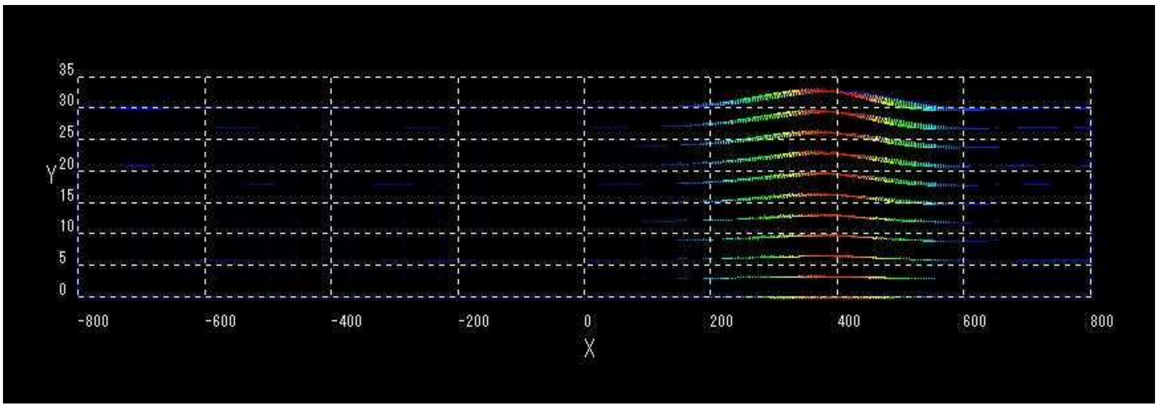




T=20sec

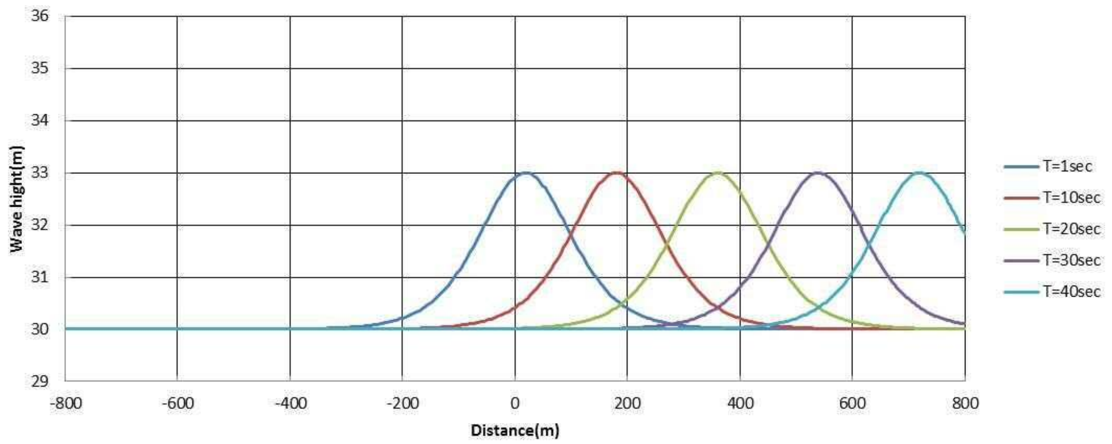


T=40sec

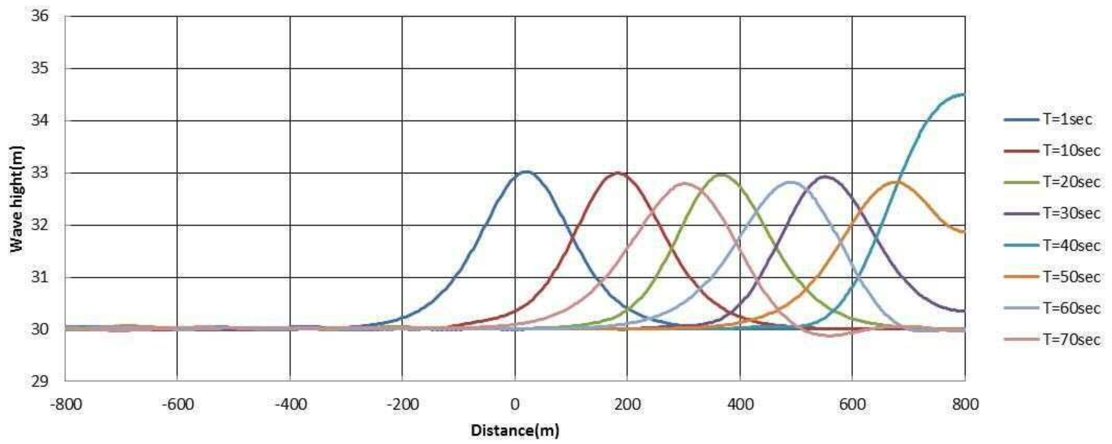


T=60sec

図-4.3.4　孤立波の伝搬状況



（1）Laitone 式



C=1500m/s

$Mc=5.87*10^{-4}$

（2）計算結果

図-4.3.5　孤立波水面形の時刻歴