

第5章 一般化された音速法モデル

1. 基礎方程式

従来の音速法では、適切な計算結果を得るためには、基準流速やマッハ数を慎重に設定しなければならない。変数を無次元化処理に伴いマッハ数の設定が必要となるので、変数の無次元化が不要となるような定式化を検討した。

密度変化を考慮した流体の連続式と運動方程式は、再掲すれば、以下のとおりである。

$$\dot{\rho} + v_i \rho_{,i} + \rho v_{i,i} = 0 \quad (5.1)$$

$$\rho(\dot{v}_i + v_j v_{i,j}) + p_{,i} - \tau_{j,i} - \rho f_i = 0 \quad (5.2)$$

また、音速 c は以下のように定義される。

$$c^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho} \quad (5.3)$$

したがって、音速 c を用いると、連続式は以下のように表すことができる。

$$\dot{p} + v_i p_{,i} + \rho c^2 v_{i,i} = 0 \quad (5.4)$$

さらに、 ϕ を以下のように定義する。

$$\phi = 1/\rho c^2 \quad (5.5)$$

結局、連続式は以下のように表すことができる。

$$\phi(\dot{p} + v_i p_{,i}) + v_{i,i} = 0 \quad (5.6)$$

運動方程式と共に整理すると、以下のように表すことができる。音速 c は水の場合では 1500m/sec 程度となるため、 ϕ は微小な値となる。この定式化であれば、マッハ数の設定や変数の無次元化は不要であり、音速法を一般化したものと解釈してもよい。

$$A = \phi(\dot{p} + v_i p_{,i}) + v_{i,i} = 0 \quad (5.7)$$

$$B_i = \rho(\dot{v}_i + v_j v_{i,j}) + p_{,i} - \tau_{j,i} - \rho f_i = 0 \quad (5.8)$$

なお、音速を無限大と仮定すると、式(5.7)では、 ϕ が 0 に漸近するため、Navier-Stokes 方程式と一致する。しかし、従来から用いていた式(5.4)では、音速が他の変数と比べると非常に大きいため直接計算できなくなる。そのため、変数の無次元化処理を適用していた。

2. 安定化手法

流体の解析手法として、有限要素法を適用する場合、移流に伴う数値不安定性や圧力振動に伴う数値不安定性を解消するため、例えば、SUPG 項(Streamline Upwind Petrov-Galerkin) や PSPG 項(Pressure Stabilizing Petrov-Galerkin)を含む安定化計算手法等を用いることが不可欠である。本研究では、Adiabatic Flow モデルへの安定化有限要素法として、SUPG 項、PSPG 項、LSIC 項(Least Squares on Incompressibility Constant)を考慮した安定化有限要素法を適用する。さらに、メッシュ移動による不安定性を解消するため ALE 法(Arbitrary Lagrange Eulerian methods)を適用する。以下に、SUPG 項等の安定化項、ALE 法の概要について記述する。

流体解析手法として有限要素法を用いる場合、移流に伴う数値不安定性を回避するため、流線方向に適切な量の人工粘性を加える SUPG 法が広く使われている。また、非圧縮性に伴う圧力振動を緩和するため、PSPG 法や LSIC 法も多く使われている。SUPG 法では、有限要素法の重み関数を以下のように表す。右辺第 1 項の u_i^* は Galerkin 法の重み関数に対応し、第 2 項は SUPG 法の重み関数に対応する。

$$\widetilde{v}_i^* = v_i^* + \delta_i = v_i^* + \tau_m \bar{v}_j \frac{\partial v_i^*}{\partial x_j} \quad (5.9)$$

重み関数の効果を 1 次元の場合に、模式的に示せば、図-5.2.1 の通りとなる。重み関数は風上側に δ だけ大きくなり、風下側に δ だけ小さくなる。

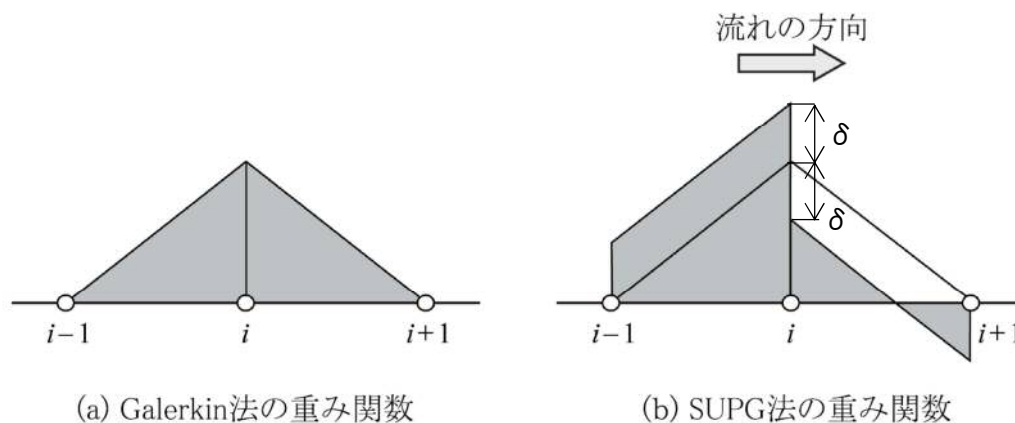


図-5.2.1 重み関数

PSPG 法や LSIC 法も、SUPG 法と同様の手法である。これらの安定化手法を包括的に組み込めるよう \widetilde{p}^* と \widetilde{v}_i^* をマトリックス表示で以下のように表す。

$$(\widetilde{p}^* \quad \widetilde{v}_i^*) = (p^* \quad v_i^*) + \tau_M (p^* \quad v_i^*)_{,k} \begin{pmatrix} \phi v_k & \delta_{ik} \\ \delta_{jk} & \rho v_k \delta_{ij} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho \|v\|^2 \\ 1/\rho \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

3. 有限要素方程式の導出

有限要素方程式としては、重み関数を上記のように設定すると、以下の式を満たさねばならない。

$$\int_v (\widetilde{p}^* A + \widetilde{v}_i^* B_i) dv = 0 \quad (5.11)$$

この式に連続式 A と運動方程式 B_i を代入すると、式 (5.12) のように、SUPG・PSPG・LSICに相当する安定化項も含めた包括的な定式化が可能となる。

$$\begin{aligned} & \int_v (p^* A) dv + \int_v (v_i^* B_i) dv + \nu_A \int_v (p_{,i}^* \phi_0 v_i A) dv + \tau_p \int_v (p_{,i}^* A) dv + \\ & \nu_C \int_v (u_{,i,i}^* B_i) dv + \tau_m \int_v (v_{i,j}^* v_j B_i) dv = 0 \end{aligned} \quad (5.12)$$

ここに、

$$\tau_M = \left[\left(\frac{2}{\Delta t} \right)^2 + \left(\frac{2 \|v_i^e\|}{h_e} \right)^2 + \left(\frac{4}{Re h_e^2} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (5.13)$$

$$\nu_A = \rho \|v\|^2 \tau_M \quad (5.14)$$

$$\nu_C = \rho \|v\|^2 \tau_M \quad (5.15)$$

$$\tau_p = \frac{1}{\rho} \tau_M \quad (5.16)$$

である。ここに、 Δt は時間刻み、 u_i^e は要素移流速度、 h_e は要素長であり、Tezduyarら (1991,1992)と同様の算出方法を採用している。以上の定式化により導き出された手法を一般化された音速法モデルと呼ぶことにする。

上の式を整理すると、以下のような有限要素方程式が得られる。パラメター τ_M がかかっている項はSUPG項に相当し、 τ_p がかかっている項はPSPG項に相当し、 $\nu_A \cdot \nu_C$ がかかっている項はLSIC項に相当する。これらの安定化項は、Tezduyarらが提案している安定化項と一致する。

$$\begin{aligned} & \phi \int_v (p^* \dot{p}) dv + \phi \int_v (p^* v_i p_{,i}) dv + \int_v (p^* v_{i,i}) dv + \\ & \nu_A \phi^2 \int_v (p_{,i}^* v_i \dot{p}) dv + \nu_A \phi^2 \int_v (p_{,i}^* v_i v_j p_{,j}) dv + \nu_A \phi \int_v (p_{,i}^* v_i v_{j,j}) dv + \tau_p \rho \int_v (p_{,i}^* \dot{v}_i) dv + \\ & \tau_p \rho \int_v (p_{,i}^* v_i v_{i,j}) dv + \tau_p \int_v (p_{,i}^* p_{,i}) dv = 0 \end{aligned} \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned} & \rho \int_v (v_i^* \dot{v}_i) dv + \rho \int_v (v_i^* v_j v_{i,j}) dv - \int_v (v_{i,i}^* p) dv + \int_v (v_{i,j}^* \tau_{ij}) dv + \nu_C \phi \int_v (v_{i,i}^* \dot{p}) dv + \\ & \nu_C \phi \int_v (v_{i,i}^* v_j p_{,j}) dv + \nu_C \phi \int_v (v_{i,i}^* v_{i,j}) dv + \tau_M \rho \int_v (v_{i,j}^* v_j \dot{v}_i) dv + \\ & \tau_M \rho \int_v (v_{i,j}^* v_j v_k v_{i,k}) dv + \tau_M \int_v (v_{i,j}^* v_j p_{,j}) dv = \int_s (v_i^* t_i) ds + \rho \int_v (v_i^* f_i) ds \end{aligned} \quad (5.18)$$

変数 p , v_i , p^* , v_i^* は有限要素法の形状関数を用い、以下のように表す。

$$p = \Phi_\alpha p_\alpha \quad (5.19)$$

$$v_i = \Phi_\alpha v_{\alpha i} \quad (5.20)$$

$$p^* = \Phi_\alpha p_\alpha^* \quad (5.21)$$

$$v_i^* = \Phi_\alpha v_{\alpha i}^* \quad (5.22)$$

これらの形状関数を用いると、以下のような有限要素方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & \phi_0 M_{\alpha\beta} \dot{p}_\beta + \phi_0 K_{\alpha\beta\gamma j} v_{\beta j} p_\gamma + H_{\alpha i\beta} v_{\beta i} + v_A [\phi_0^2 A_{\alpha i\beta\gamma} v_{\beta i} \dot{p}_\gamma + \phi_0^2 B_{\alpha i\beta\gamma\delta k} v_{\beta i} v_{\gamma k} p_\delta + \\ & \phi_0 C_{\alpha i\beta\gamma\delta k} v_{\beta i} v_{\gamma k}] + \tau_p [\rho_0 H_{\alpha i\beta} v_{\beta i} + \rho_0 D_{\alpha i\beta\gamma j} v_{\beta j} v_{\gamma i} + E_{\alpha\beta} p_\beta] = 0 \end{aligned} \quad (5.23)$$

$$\begin{aligned} & \rho_0 M_{\alpha i\beta j} \dot{v}_{\beta j} + \rho_0 K_{\alpha\beta\gamma j} v_{\beta j} v_{\gamma i} - H_{\beta i\alpha} p_\beta + S_{\alpha i\beta j} v_{\beta j} + v_c [\phi_0 H_{\alpha i\beta} \dot{p}_\beta + \phi_0 D_{\alpha i\beta\gamma j} v_{\beta j} p_\gamma + \\ & F_{\alpha i\beta j} v_{\alpha i} v_{\beta j}] + \tau_M [\rho_0 A_{\alpha j\beta\gamma} v_{\beta j} \dot{v}_{\gamma i} + \rho_0 B_{\alpha j\beta\gamma\delta k} v_{\beta j} v_{\gamma k} v_{\delta i} + C_{\alpha j\beta\gamma i} v_{\beta j} p_\gamma] = \Omega_{\alpha i} \end{aligned} \quad (5.24)$$

ここに、

$$M_{\alpha\beta} = \int_V (\Phi_\alpha \Phi_\beta) dV \quad (5.25)$$

$$M_{\alpha i\beta j} = \int_V (\Phi_\alpha \Phi_\beta) \delta_{ij} dV \quad (5.26)$$

$$K_{\alpha\beta\gamma j} = \int_V (\Phi_\alpha \Phi_\beta \Phi_{\gamma,j}) dV \quad (5.27)$$

$$H_{\alpha i\beta} = \int_V (\Phi_{\alpha,i} \Phi_\beta) dV \quad (5.28)$$

$$S_{\alpha i\beta j} = \lambda \int_V (\Phi_{\alpha,i} \Phi_{\beta,j}) dV + \mu \int_V (\Phi_{\alpha,k} \Phi_{\beta,k}) dV + \mu \int_V (\Phi_{\alpha,j} \Phi_{\beta,i}) dV \quad (5.29)$$

$$A_{\alpha i\beta\gamma} = \int_V (\Phi_{\alpha,i} \Phi_\beta \Phi_\gamma) dV \quad (5.30)$$

$$B_{\alpha i\beta\gamma\delta k} = \int_V (\Phi_{\alpha,i} \Phi_\beta \Phi_\gamma \Phi_{\delta,k}) dV \quad (5.31)$$

$$C_{\alpha i\beta\gamma k} = \int_V (\Phi_{\alpha,i} \Phi_\beta \Phi_{\gamma,k}) dV \quad (5.32)$$

$$D_{\alpha i \beta \gamma j} = \int_V (\Phi_{\alpha, i} \Phi_{\beta} \Phi_{\gamma, j}) dV \quad (5.33)$$

$$E_{\alpha \beta} = \int_V (\Phi_{\alpha, i} \Phi_{\beta, i}) dV \quad (5.34)$$

$$F_{\alpha i \beta j} = \int_V (\Phi_{\alpha, i} \Phi_{\beta, j}) dV \quad (5.35)$$

$$\Omega_{\alpha i} = \int (\Phi_{\alpha} t_i) dS + \rho_0 \int_V (\Phi_{\alpha} f_i) dV \quad (5.36)$$

である。

4. 従来型の音速法基礎式による定式化

式(5.4)と式(5.6)に示した連続式は、数学的には同義である。式(5.6)の連続式を用いた理由について、以下に整理する。従来型の音速法の基礎式を改めて示すと、以下の式(5.37)と式(5.38)の通りである。

$$\dot{p} + v_i p_{,i} + \rho c^2 v_{i,i} = 0 \quad (5.37)$$

$$\rho(\dot{v}_i + v_j v_{i,j}) + p_{,i} - \lambda v_{k,ki} - \mu(v_{i,j} + v_{j,i})_{,j} = \rho f_i \quad (5.38)$$

式(5.37)の第3項は非常に大きくなるため、以下のように変数の無次元化を行う。

$$v_i = \frac{v_i}{V}, \quad p = \frac{p}{\rho c V}, \quad c = \frac{c}{V} = \frac{1}{M_c}, \quad f_i = \frac{f_i}{V^2}, \quad \mu = \frac{\mu}{Re} \quad (5.39)$$

無次元化変数を用いると、式(5.37)と式(5.38)は、以下のように表すことができる。

$$\dot{p} + v_i p_{,i} + C v_{i,i} = 0 \quad (5.40)$$

$$\dot{v}_i + v_j v_{i,j} + C p_{,i} - \lambda v_{k,ki} - \mu(v_{i,j} + v_{j,i})_{,j} = \rho f_i \quad (5.41)$$

上の式(5.40)と式(5.41)を行列式で示すと、以下のように表すことができる。

$$\begin{bmatrix} A \\ B_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{v}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_i & C \delta_l^i \\ C \delta_k^i & v_i \delta_{kl} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ v_l \end{bmatrix}_{,i} + \begin{bmatrix} \tau_{kjj} + f_k \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

また、重み関数は、式(5.42)に基づき、SUPG法を考慮し以下のように表す。

$$[\widetilde{p}^* \quad \widetilde{v}^*_k] = [p^* \quad v_k^*] + [\tau_p p_{,i}^* \quad \tau_v v_{l,i}^*] \begin{bmatrix} v_i & C \delta_k^i \\ C \delta_l^i & v_i \delta_{lk} \end{bmatrix} \quad (5.43)$$

式(5.42)と式(5.43)を用いると、有限要素方程式は以下のように表すことができる。

$$\int_V [\widetilde{p}^* \quad \widetilde{v}^*_k] \begin{bmatrix} A \\ B_i \end{bmatrix} dV = 0 \quad (5.44)$$

式(5.44)に式(5.42)と式(5.43)を代入して整理すると以下のようになる。

$$\int_V (p^* A) dV + \tau_p \int_V (p_{,i}^* v_i A) dV + \tau_p \int_V (p_{,k}^* C B_k) dV = 0 \quad (5.45)$$

$$\int_V (v_k^* B_k) dV + \tau_v \int_V (v_{i,i}^* C A) dV + \tau_v \int_V (v_{k,i}^* v_i B_k) dV = 0 \quad (5.46)$$

さらに、上の式(5.45)と式(5.46)に、式(5.42)を代入して整理すると、連続式と運動方程式に関して、以下の有限要素方程式が得られる。

$$\begin{aligned}
& \int_V (p^* \dot{p}) dV + \int_V (p^* v_i p_{,i}) dV + \int_V (p^* C v_{i,i}) dV \\
& + \tau_p \int_V (p_{,i}^* v_i \dot{p}) dV + \tau_p \int_V (p_{,i}^* v_i v_k p_{,k}) dV + \tau_p \int_V (p_{,i}^* v_i C v_{k,k}) dV \\
& + \tau_p \int_V (p_{,i}^* C \dot{v}_i) dV + \tau_p \int_V (p_{,i}^* C v_k v_{i,k}) dV + \tau_p \int_V (p_{,i}^* C^2 p_{,i}) dV = 0 \tag{5.47}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_V (v_k^* \dot{v}_k) dV + \int_V (v_k^* C p_{,k}) dV + \int_V (v_k^* v_i v_{k,i}) dV \\
& + \tau_v \int_V (v_{i,i}^* C \dot{p}) dV + \tau_v \int_V (v_{i,i}^* C v_k p_{,k}) dV + \tau_v \int_V (v_{i,i}^* C^2 v_{k,k}) dV \\
& + \tau_v \int_V (v_{k,i}^* v_i \dot{v}_k) dV + \tau_v \int_V (v_{k,i}^* v_i v_j v_{k,j}) dV + \tau_v \int_V (v_{k,i}^* v_i C p_{,k}) dV = 0 \tag{5.48}
\end{aligned}$$

式(5.48)では、問題を単純化するため、粘性項・外力項を省略している。式(5.47)で赤字はPSPG項に相当し、青字はSUPG項に相当し、緑字はLSIC項に相当する。本研究で採用している式(5.6)の連続式および式(5.8)の運動方程式から定式化した結果を再度示すと、以下の通りである。

$$\begin{aligned}
& \phi \int_V (p^* \dot{p}) dv + \phi \int_V (p^* v_i p_{,i}) dv + \int_V (p^* v_{i,i}) dv \\
& + \nu_A \phi^2 \int_V (p_{,i}^* v_i \dot{p}) dv + \nu_A \phi^2 \int_V (p_{,i}^* v_i v_j p_{,j}) dv + \nu_A \phi \int_V (p_{,i}^* v_i v_{j,j}) dv \\
& + \tau_p \rho \int_V (p_{,i}^* \dot{v}_i) dv + \tau_p \rho \int_V (p_{,i}^* v_i v_{i,j}) dv + \tau_p \int_V (p_{,i}^* p_{,i}) dv = 0 \tag{5.17}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \rho \int_v (v_i^* \dot{v}_i) dv + \rho \int_v (v_i^* v_j v_{i,j}) dv - \int_v (v_{i,i}^* p) dv + \int_v (v_{i,j}^* \tau_{ij}) dv \\
& + v_c \phi \int_v (v_{i,i}^* \dot{p}) dv + v_c \phi \int_v (v_{i,i}^* v_j p_{,j}) dv + v_c \phi \int_v (v_{i,i}^* v_{i,j}) dv \\
& + \tau_M \rho \int_v (v_{i,j}^* v_j \dot{v}_i) dv + \tau_M \rho \int_v (v_{i,j}^* v_j v_k v_{i,k}) dv + \tau_M \int_v (v_{i,j}^* v_j p_{,j}) dv \\
& = \int_s (v_i^* t_i) ds + \rho \int_v (v_i^* f_i) ds \tag{5.18}
\end{aligned}$$

式 (5.17) と式 (5.47) を比較すると、PSPG 項が異なる。式(5.17)は Tezduyar らが提案している定式化と一致するが、式(5.47)は異なる。また、式 (5.47) では、圧力項に \mathcal{O}^2 が含まれてくるため、本来の定式化よりも相対的に圧力項の数値粘性が強く作用し、計算が不安定になることも考えられる。重み関数を基礎方程式と同様に式 (5.43) のように厳密に設定すると、このような問題が生じるので、第 4 章で示した従来型の音速法では、重み関数を簡略化したものを用いた。また、安定化項の有無による違いを把握するため、まだ LSIC 項は含んでいなかった。そこで、本研究で開発する一般化された音速法では、式(5.6)の連続式を用い、Tezduyar らが非圧縮流体で開発した数値粘性の効果をを本来の形で包括的に組み込むこととした。

なお、式(5.47)では、圧力の時間項 (第 1 項) と移流項 (第 2 項) は微小な値となっており、ほぼ非圧縮状態となっている。しかし、これらの項を含めることで、厳密な非圧縮条件がわずかに緩和され、逆行列計算ソルバーの収束性も向上していると言える。

従来法と本研究で開発した改良モデルでは、7 節の事例計算で後述するように、変数の無次元化処理の有無や安定化項の数値粘性の効果が影響し、計算結果に明確な違いが見られる。本研究で開発した改良モデルにより、計算の精度・安定性が大幅に改良された。

5. 有限要素方程式の離散化

3. で得られた有限要素方程式に Crank-Nicolson 法を適用し、離散化すると、以下のようになる。

$$\begin{aligned} & \phi_0 M \frac{p^{n+1}-p^n}{\Delta t} + \phi_0 K_x p^{n+1/2} + \phi_0 K_y p^{n+1/2} + \phi_0 H_x u^{n+1/2} + \phi_0 H_y v^{n+1/2} + \\ & \nu_A \left[\phi_0 M_{\nu A} \frac{p^{n+1}-p^n}{\Delta t} + \phi_0^2 B_{\nu A}^x p^{n+1/2} + \phi_0^2 B_{\nu A}^y p^{n+1/2} + \phi_0 C_{\nu A}^x u^{n+1/2} + \phi_0 C_{\nu A}^y v^{n+1/2} \right] + \\ & \tau_p \left[M_p^x \frac{u^{n+1}-u^n}{\Delta t} + M_p^y \frac{v^{n+1}-v^n}{\Delta t} + D_p^x u^{n+1/2} + D_p^y v^{n+1/2} + E_p^x p^{n+1/2} + E_p^y p^{n+1/2} \right] = 0 \end{aligned} \quad (5.49)$$

$$\begin{aligned} & \rho_0 M \frac{u^{n+1}-u^n}{\Delta t} + \rho_0 K_x u^{n+1/2} + \rho_0 K_y u^{n+1/2} - H_x^t p^{n+1/2} + S_{xx} u^{n+1/2} + S_{xy} v^{n+1/2} + \\ & \nu_C \left[\phi_0 M_{\nu C1} \frac{p^{n+1}-p^n}{\Delta t} + \phi_0 D_{\nu C1}^x p^{n+1/2} + \phi_0 D_{\nu C1}^y p^{n+1/2} + F_{\nu C1}^x u^{n+1/2} + F_{\nu C1}^y v^{n+1/2} \right] + \\ & \tau_M \left[M_{s1} \frac{u^{n+1}-u^n}{\Delta t} + B_{s1}^x u^{n+1/2} + B_{s1}^y u^{n+1/2} + C_{s1}^x p^{n+1/2} \right] = F_x \end{aligned} \quad (5.50)$$

$$\begin{aligned} & \rho_0 M \frac{v^{n+1}-v^n}{\Delta t} + \rho_0 K_x v^{n+1/2} + \rho_0 K_y v^{n+1/2} - H_y^t p^{n+1/2} + S_{yx} u^{n+1/2} + S_{yy} v^{n+1/2} + \\ & \nu_C \left[\phi_0 M_{\nu C2} \frac{p^{n+1}-p^n}{\Delta t} + \phi_0 D_{\nu C2}^x p^{n+1/2} + \phi_0 D_{\nu C2}^y p^{n+1/2} + F_{\nu C2}^x u^{n+1/2} + F_{\nu C2}^y v^{n+1/2} \right] + \\ & \tau_M \left[M_{s2} \frac{v^{n+1}-v^n}{\Delta t} + B_{s2}^x v^{n+1/2} + B_{s2}^y v^{n+1/2} + C_{s2}^y p^{n+1/2} \right] = F_y \end{aligned} \quad (5.51)$$

これらを行列表で整理すると、以下のようになる。

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^{n+1} \\ u^{n+1} \\ v^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} \quad (5.52)$$

ここに、

$$A_{11} = \frac{\phi_0 M}{\Delta t} + \frac{\phi_0 K_x}{2} + \frac{\phi_0 K_y}{2} + \frac{\nu_A \phi_0 M_{\nu A}}{\Delta t} + \frac{\nu_A \phi_0^2 B_{\nu A}^x}{2} + \frac{\nu_A \phi_0^2 B_{\nu A}^y}{2} + \frac{E_p^x}{2} + \frac{E_p^y}{2} \quad (5.53)$$

$$A_{12} = \frac{\phi_0 H_x}{2} + \frac{\nu_A \phi_0 C_{\nu A}^x}{2} + \tau_p \frac{M_p^x}{\Delta t} + \frac{\tau_p D_p^x}{2} \quad (5.54)$$

$$A_{13} = \frac{\phi_0 H_y}{2} + \frac{\nu_A \phi_0 C_{\nu A}^y}{2} + \tau_p \frac{M_p^y}{\Delta t} + \frac{\tau_p D_p^y}{2} \quad (5.55)$$

$$A_{21} = -\frac{H_x^t}{2} + \frac{\nu_C \phi_0 M_{\nu C1}}{\Delta t} + \frac{\nu_C \phi_0 D_{\nu C1}^x}{2} + \frac{\nu_C \phi_0 D_{\nu C1}^y}{2} + \frac{\tau_M C_{s1}^x}{2} \quad (5.56)$$

$$A_{22} = \frac{\rho_0 M}{\Delta t} + \frac{\rho_0 K_x}{2} + \frac{\rho_0 K_y}{2} + \frac{S_{xx}}{2} + \frac{\nu_C F_{vc1}^x}{2} + \frac{\tau_M M_{s1}}{\Delta t} + \frac{\tau_M B_{s1}^x}{2} + \frac{\tau_M B_{s1}^y}{2} \quad (5.57)$$

$$A_{22} = \frac{S_{xy}}{2} + \frac{\nu_C F_{vc1}^y}{2} \quad (5.58)$$

$$A_{31} = -\frac{H_y^t}{2} + \frac{\nu_C \phi_0 M_{vc2}}{\Delta t} + \frac{\nu_C \phi_0 D_{vc2}^x}{2} + \frac{\nu_C \phi_0 D_{vc2}^y}{2} + \frac{\tau_M C_{s2}^y}{2} \quad (5.59)$$

$$A_{32} = \frac{S_{yx}}{2} + \frac{\nu_C F_{vc2}^x}{2} \quad (5.60)$$

$$A_{33} = \frac{\rho_0 M}{\Delta t} + \frac{\rho_0 K_x}{2} + \frac{\rho_0 K_y}{2} + \frac{S_{yy}}{2} + \frac{\nu_C F_{vc2}^y}{2} + \frac{\tau_M M_{s2}}{\Delta t} + \frac{\tau_M B_{s2}^x}{2} + \frac{\tau_M B_{s2}^y}{2} \quad (5.61)$$

$$B_1 = \frac{\phi_0 M p^n}{\Delta t} + \frac{\phi_0 K_x p^n}{2} + \frac{\phi_0 K_y p^n}{2} + \frac{\phi_0 H_x u^n}{2} + \frac{\phi_0 H_y v^n}{2} + \frac{\nu_A \phi_0 M_{vA} p^n}{\Delta t} + \frac{\nu_A \phi_0^2 B_{vA}^x p^n}{2} + \frac{\nu_A \phi_0^2 B_{vA}^y p^n}{2} + \frac{\nu_A \phi_0 C_{vA}^x u^n}{2} + \frac{\nu_A \phi_0 C_{vA}^y v^n}{2} + \frac{\tau_p M_p^x u^n}{\Delta t} + \frac{\tau_p M_p^y v^n}{\Delta t} + \frac{\tau_p D_p^x u^n}{2} + \frac{\tau_p D_p^y v^n}{2} + \frac{\tau_p E_p^x p^n}{2} + \frac{\tau_p E_p^y p^n}{2} \quad (5.62)$$

$$B_2 = \frac{\rho_0 M u^n}{\Delta t} + \frac{\rho_0 K_x u^n}{2} + \frac{\rho_0 K_y u^n}{2} - \frac{H_x^t p^n}{2} + \frac{S_{xx} u^n}{2} + \frac{S_{xy} v^n}{2} + \frac{\nu_C \phi_0 M_{vc1} p^n}{\Delta t} + \frac{\nu_C \phi_0 D_{vc1}^x p^n}{2} + \frac{\nu_C \phi_0 D_{vc1}^y p^n}{2} + \frac{\nu_C F_{vc1}^x u^n}{2} + \frac{\nu_C F_{vc1}^y v^n}{2} + \frac{\tau_M M_{s1} u^n}{\Delta t} + \frac{\tau_M B_{s1}^x u^n}{2} + \frac{\tau_M B_{s1}^y u^n}{2} + \frac{\tau_M C_{s1}^x p^n}{2} + F_x \quad (5.63)$$

$$B_3 = \frac{\rho_0 M v^n}{\Delta t} + \frac{\rho_0 K_x v^n}{2} + \frac{\rho_0 K_y v^n}{2} - \frac{H_y^t p^n}{2} + \frac{S_{yx} u^n}{2} + \frac{S_{yy} v^n}{2} + \frac{\nu_C \phi_0 M_{vc2} p^n}{\Delta t} + \frac{\nu_C \phi_0 D_{vc2}^x p^n}{2} + \frac{\nu_C \phi_0 D_{vc2}^y p^n}{2} + \frac{\nu_C F_{vc2}^x u^n}{2} + \frac{\nu_C F_{vc2}^y v^n}{2} + \frac{\tau_M M_{s2} v u^n}{\Delta t} + \frac{\tau_M B_{s2}^x v^n}{2} + \frac{\tau_M B_{s2}^y v^n}{2} + \frac{\tau_M C_{s2}^y p^n}{2} + F_y \quad (5.64)$$

である。なお、各係数行列については、算出結果を次ページから示す。また、本検討では、逆行列の計算法として、非対称行列にも適用できる GPBi-CG 法 (Generalized Product-type method based on Bi-CG) を用いた。

三角形要素を想定した場合において、前ページまでに示した各係数行列の具体的な算出結果を以下に示す。

(1) Galerkin 項

$$M = \int (\phi_\alpha \phi_\beta) dv = \frac{\Delta_e}{12} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (5.65)$$

$$K_x = \int (\phi_\alpha \phi_\beta u_\beta \phi_{\gamma,x}) dv = \frac{\Delta_e}{12} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} (b_1 \quad b_2 \quad b_3) \quad (5.66)$$

$$K_y = \int (\phi_\alpha \phi_\beta v_\beta \phi_{\gamma,y}) dv = \frac{\Delta_e}{12} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} (c_1 \quad c_2 \quad c_3) \quad (5.67)$$

$$H_x = \int (\phi_\alpha \phi_{\beta,x}) dv = \frac{\Delta_e}{3} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \quad (5.68)$$

$$H_y = \int (\phi_\alpha \phi_{\beta,y}) dv = \frac{\Delta_e}{3} \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \quad (5.69)$$

$$H_x^T = \int (\phi_{\alpha,x} \phi_\beta) dv = \frac{\Delta_e}{3} \begin{pmatrix} b_1 & b_1 & b_1 \\ b_2 & b_2 & b_2 \\ b_3 & b_3 & b_3 \end{pmatrix} \quad (5.70)$$

$$H_y^T = \int (\phi_{\alpha,y} \phi_\beta) dv = \frac{\Delta_e}{3} \begin{pmatrix} c_1 & c_1 & c_1 \\ c_2 & c_2 & c_2 \\ c_3 & c_3 & c_3 \end{pmatrix} \quad (5.71)$$

$$S_{xx} = \frac{2}{Re} \int (\phi_{\alpha,x} \phi_{\beta,x}) dv + \frac{1}{Re} \int (\phi_{\alpha,y} \phi_{\beta,y}) dv = \frac{\Delta_e}{Re} \left[2 \begin{pmatrix} b_1 b_1 & b_1 b_2 & b_1 b_3 \\ b_2 b_1 & b_2 b_2 & b_2 b_3 \\ b_3 b_1 & b_3 b_2 & b_3 b_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 c_1 & c_1 c_2 & c_1 c_3 \\ c_2 c_1 & c_2 c_2 & c_2 c_3 \\ c_3 c_1 & c_3 c_2 & c_3 c_3 \end{pmatrix} \right] \quad (5.72)$$

$$S_{yx} = \frac{1}{Re} \int (\phi_{\alpha,y} \phi_{\beta,x}) dv = \frac{\Delta_e}{Re} \begin{pmatrix} c_1 b_1 & c_1 b_2 & c_1 b_3 \\ c_2 b_1 & c_2 b_2 & c_2 b_3 \\ c_3 b_1 & c_3 b_2 & c_3 b_3 \end{pmatrix} \quad (5.73)$$

$$S_{xy} = \frac{1}{Re} \int (\phi_{\alpha,x} \phi_{\beta,y}) dv = \frac{\Delta_e}{Re} \begin{pmatrix} b_1 c_1 & b_1 c_2 & b_1 c_3 \\ b_2 c_1 & b_2 c_2 & b_2 c_3 \\ b_3 c_1 & b_3 c_2 & b_3 c_3 \end{pmatrix} \quad (5.74)$$

$$S_{yy} = \frac{1}{Re} \int (\phi_{\alpha,x} \phi_{\beta,x}) dv + \frac{2}{Re} \int (\phi_{\alpha,y} \phi_{\beta,y}) dv =$$

$$\frac{\Delta_e}{Re} \left[\begin{pmatrix} b_1 b_1 & b_1 b_2 & b_1 b_3 \\ b_2 b_1 & b_2 b_2 & b_2 b_3 \\ b_3 b_1 & b_3 b_2 & b_3 b_3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} c_1 c_1 & c_1 c_2 & c_1 c_3 \\ c_2 c_1 & c_2 c_2 & c_2 c_3 \\ c_3 c_1 & c_3 c_2 & c_3 c_3 \end{pmatrix} \right] \quad (5.75)$$

(2) SUPG 項

$$M_{s1} = M_{s2} = \int (\phi_{\alpha,x} \phi_{\beta} u_{\beta} \phi_{\gamma} + \phi_{\alpha,y} \phi_{\beta} v_{\beta} \phi_{\gamma}) dv =$$

$$\frac{\Delta_e}{12} \left[\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} (u_1 \quad u_2 \quad u_3) + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} (v_1 \quad v_2 \quad v_3) \right] \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (5.76)$$

$$B_{s1}^x + B_{s1}^y =$$

$$B_{s2}^x + B_{s2}^y = \int (\phi_{\alpha,x} \phi_{\beta} u_{\beta} \phi_{\gamma} u_{\gamma} \phi_{\delta,x} + \phi_{\alpha,y} \phi_{\beta} v_{\beta} \phi_{\gamma} u_{\gamma} \phi_{\delta,x}) dv + \int (\phi_{\alpha,x} \phi_{\beta} u_{\beta} \phi_{\gamma} v_{\gamma} \phi_{\delta,y} +$$

$$\phi_{\alpha,x} \phi_{\beta} v_{\beta} \phi_{\gamma} v_{\gamma} \phi_{\delta,y}) dv$$

$$= \left[\begin{pmatrix} b_1 u_1 & b_1 u_2 & b_1 u_3 \\ b_2 u_1 & b_2 u_2 & b_2 u_3 \\ b_3 u_1 & b_3 u_2 & b_3 u_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 v_1 & c_1 v_2 & c_1 v_3 \\ c_2 v_1 & c_2 v_2 & c_2 v_3 \\ c_3 v_1 & c_3 v_2 & c_3 v_3 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} u_1 b_1 & u_1 b_2 & u_1 b_3 \\ u_2 b_1 & u_2 b_2 & u_2 b_3 \\ u_3 b_1 & u_3 b_2 & u_3 b_3 \end{pmatrix} + \right.$$

$$\left. \begin{pmatrix} v_1 c_1 & v_1 c_2 & v_1 c_3 \\ v_2 c_1 & v_2 c_2 & v_2 c_3 \\ v_3 c_1 & v_3 c_2 & v_3 c_3 \end{pmatrix} \right] \quad (5.77)$$

$$C_{s1}^x = \int (\phi_{\alpha,x} \phi_{\beta} u_{\beta} \phi_{\gamma,x} + \phi_{\alpha,y} \phi_{\beta} v_{\beta} \phi_{\gamma,x}) dv =$$

$$\frac{\Delta_e}{3} \left[\begin{pmatrix} b_1 u_1 & b_1 u_2 & b_1 u_3 \\ b_2 u_1 & b_2 u_2 & b_2 u_3 \\ b_3 u_1 & b_3 u_2 & b_3 u_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 v_1 & c_1 v_2 & c_1 v_3 \\ c_2 v_1 & c_2 v_2 & c_2 v_3 \\ c_3 v_1 & c_3 v_2 & c_3 v_3 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \quad (5.78)$$

$$C_{s2}^y = \int (\phi_{\alpha,x} \phi_{\beta} u_{\beta} \phi_{\gamma,y} + \phi_{\alpha,y} \phi_{\beta} v_{\beta} \phi_{\gamma,y}) dv =$$

$$\frac{\Delta_e}{3} \left[\begin{pmatrix} b_1 u_1 & b_1 u_2 & b_1 u_3 \\ b_2 u_1 & b_2 u_2 & b_2 u_3 \\ b_3 u_1 & b_3 u_2 & b_3 u_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 v_1 & c_1 v_2 & c_1 v_3 \\ c_2 v_1 & c_2 v_2 & c_2 v_3 \\ c_3 v_1 & c_3 v_2 & c_3 v_3 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \quad (5.79)$$

(3) PSPG 項

$$M_p^x = \int (\phi_{\alpha,x} \phi_{\beta}) dv = \frac{\Delta_e}{3} \begin{pmatrix} b_1 & b_1 & b_1 \\ b_2 & b_2 & b_2 \\ b_3 & b_3 & b_3 \end{pmatrix} \quad (5.80)$$

$$M_p^y = \int(\phi_{\alpha,y}\phi_\beta) = \frac{\Delta_e}{3} \begin{pmatrix} c_1 & c_1 & c_1 \\ c_2 & c_2 & c_2 \\ c_3 & c_3 & c_3 \end{pmatrix} \quad (5.81)$$

$$D_p^x = \int(\phi_{\alpha,x}\phi_\beta u_\beta \phi_{\gamma,x}) dv + \int(\phi_{\alpha,x}\phi_\beta v_\beta \phi_{\gamma,y}) dv =$$

$$\frac{\Delta_e}{3} \begin{pmatrix} b_1 & b_1 & b_1 \\ b_2 & b_2 & b_2 \\ b_3 & b_3 & b_3 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} u_1 b_1 & u_1 b_2 & u_1 b_3 \\ u_2 b_1 & u_2 b_2 & u_2 b_3 \\ u_3 b_1 & u_3 b_2 & u_3 b_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 c_1 & v_1 c_2 & v_1 c_3 \\ v_2 c_1 & v_2 c_2 & v_2 c_3 \\ v_3 c_1 & v_3 c_2 & v_3 c_3 \end{pmatrix} \right] \quad (5.82)$$

$$D_p^y = \int(\phi_{\alpha,y}\phi_\beta u_\beta \phi_{\gamma,x}) dv + \int(\phi_{\alpha,y}\phi_\beta v_\beta \phi_{\gamma,y}) dv =$$

$$\frac{\Delta_e}{3} \begin{pmatrix} c_1 & c_1 & c_1 \\ c_2 & c_2 & c_2 \\ c_3 & c_3 & c_3 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} u_1 b_1 & u_1 b_2 & u_1 b_3 \\ u_2 b_1 & u_2 b_2 & u_2 b_3 \\ u_3 b_1 & u_3 b_2 & u_3 b_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 c_1 & v_1 c_2 & v_1 c_3 \\ v_2 c_1 & v_2 c_2 & v_2 c_3 \\ v_3 c_1 & v_3 c_2 & v_3 c_3 \end{pmatrix} \right] \quad (5.83)$$

$$E_p^x + E_p^y =$$

$$\int(\phi_{\alpha,x}\phi_{\beta,x}) dv + \int(\phi_{\alpha,y}\phi_{\beta,y}) dv = \Delta_e \left[\begin{pmatrix} b_1 b_1 & b_1 b_2 & b_1 b_3 \\ b_2 b_1 & b_2 b_2 & b_2 b_3 \\ b_3 b_1 & b_3 b_2 & b_3 b_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 c_1 & c_1 c_2 & c_1 c_3 \\ c_2 c_1 & c_2 c_2 & c_2 c_3 \\ c_3 c_1 & c_3 c_2 & c_3 c_3 \end{pmatrix} \right] \quad (5.84)$$

(4)LSIC 項

$$M_{vA} = \int(\phi_\alpha u_\alpha \phi_{\beta,x} \phi_\gamma + \phi_\alpha v_\alpha \phi_{\beta,y} \phi_\gamma) dv =$$

$$\frac{\Delta_e}{12} \left[\begin{pmatrix} u_1 b_1 & u_1 b_2 & u_1 b_3 \\ u_2 b_1 & u_2 b_2 & u_2 b_3 \\ u_3 b_1 & u_3 b_2 & u_3 b_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 c_1 & v_1 c_2 & v_1 c_3 \\ v_2 c_1 & v_2 c_2 & v_2 c_3 \\ v_3 c_1 & v_3 c_2 & v_3 c_3 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (5.85)$$

$$B_{vA}^x + B_{vA}^y = \int(\phi_\alpha u_\alpha \phi_{\beta,x} + \phi_\alpha v_\alpha \phi_{\beta,y})(\phi_\gamma u_\gamma \phi_{\delta,x} + \phi_\gamma v_\gamma \phi_{\delta,y}) dv =$$

$$\left[\begin{pmatrix} u_1 b_1 & u_1 b_2 & u_1 b_3 \\ u_2 b_1 & u_2 b_2 & u_2 b_3 \\ u_3 b_1 & u_3 b_2 & u_3 b_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 c_1 & v_1 c_2 & v_1 c_3 \\ v_2 c_1 & v_2 c_2 & v_2 c_3 \\ v_3 c_1 & v_3 c_2 & v_3 c_3 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} u_1 b_1 & u_1 b_2 & u_1 b_3 \\ u_2 b_1 & u_2 b_2 & u_2 b_3 \\ u_3 b_1 & u_3 b_2 & u_3 b_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 c_1 & v_1 c_2 & v_1 c_3 \\ v_2 c_1 & v_2 c_2 & v_2 c_3 \\ v_3 c_1 & v_3 c_2 & v_3 c_3 \end{pmatrix} \right] \quad (5.86)$$

$$\begin{aligned}
C_{vA}^x = & \\
\int (\phi_\alpha u_\alpha \phi_{\beta,x} + \phi_\alpha v_\alpha \phi_{\beta,y}) (\phi_{\gamma,x}) dv = & \frac{\Delta_e}{3} \left[\begin{pmatrix} u_1 b_1 & u_1 b_2 & u_1 b_3 \\ u_2 b_1 & u_2 b_2 & u_2 b_3 \\ u_3 b_1 & u_3 b_2 & u_3 b_3 \end{pmatrix} + \right. \\
& \left. \begin{pmatrix} v_1 c_1 & v_1 c_2 & v_1 c_3 \\ v_2 c_1 & v_2 c_2 & v_2 c_3 \\ v_3 c_1 & v_3 c_2 & v_3 c_3 \end{pmatrix} \right] (b_1 \quad b_2 \quad b_3) \quad (5.87)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{vA}^y = & \\
\int (\phi_\alpha u_\alpha \phi_{\beta,x} + \phi_\alpha v_\alpha \phi_{\beta,y}) (\phi_{\gamma,y}) dv = & \frac{\Delta_e}{3} \left[\begin{pmatrix} u_1 b_1 & u_1 b_2 & u_1 b_3 \\ u_2 b_1 & u_2 b_2 & u_2 b_3 \\ u_3 b_1 & u_3 b_2 & u_3 b_3 \end{pmatrix} + \right. \\
& \left. \begin{pmatrix} v_1 c_1 & v_1 c_2 & v_1 c_3 \\ v_2 c_1 & v_2 c_2 & v_2 c_3 \\ v_3 c_1 & v_3 c_2 & v_3 c_3 \end{pmatrix} \right] (c_1 \quad c_2 \quad c_3) \quad (5.88)
\end{aligned}$$

$$M_{vc1} = M_{vc2} = \int (\phi_{\alpha,x} \phi_\beta + \phi_{\alpha,y} \phi_\beta) dv = \frac{\Delta_e}{3} \left[\begin{pmatrix} b_1 & b_1 & b_1 \\ b_2 & b_2 & b_2 \\ b_3 & b_3 & b_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 & c_1 & c_1 \\ c_2 & c_2 & c_2 \\ c_3 & c_3 & c_3 \end{pmatrix} \right] \quad (5.89)$$

$$\begin{aligned}
D_{vc1}^x = D_{vc2}^x = \int (\phi_{\alpha,x} \phi_\beta u_\beta \phi_{\gamma,x} + \phi_{\alpha,y} \phi_\beta u_\beta \phi_{\gamma,x}) dv = & \frac{\Delta_e}{3} \left[\begin{pmatrix} b_1 u_1 & b_1 u_2 & b_1 u_3 \\ b_2 u_1 & b_2 u_2 & b_2 u_3 \\ b_3 u_1 & b_3 u_2 & b_3 u_3 \end{pmatrix} + \right. \\
& \left. \begin{pmatrix} c_1 u_1 & c_1 u_2 & c_1 u_3 \\ c_2 u_1 & c_2 u_2 & c_2 u_3 \\ c_3 u_1 & c_3 u_2 & c_3 u_3 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad (5.90)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{vc1}^y = D_{vc2}^y = \int (\phi_{\alpha,x} \phi_\beta u_\beta \phi_{\gamma,y} + \phi_{\alpha,y} \phi_\beta u_\beta \phi_{\gamma,y}) dv = & \frac{\Delta_e}{3} \left[\begin{pmatrix} b_1 v_1 & b_1 v_2 & b_1 v_3 \\ b_2 v_1 & b_2 v_2 & b_2 v_3 \\ b_3 v_1 & b_3 v_2 & b_3 v_3 \end{pmatrix} + \right. \\
& \left. \begin{pmatrix} c_1 v_1 & c_1 v_2 & c_1 v_3 \\ c_2 v_1 & c_2 v_2 & c_2 v_3 \\ c_3 v_1 & c_3 v_2 & c_3 v_3 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \quad (5.91)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{vc1}^x = F_{vc2}^x = \int (\phi_{\alpha,x} \phi_{\beta,x} + \phi_{\alpha,y} \phi_{\beta,x}) dv = & \left[\begin{pmatrix} b_1 b_1 & b_1 b_2 & b_1 b_3 \\ b_2 b_1 & b_2 b_2 & b_2 b_3 \\ b_3 b_1 & b_3 b_2 & b_3 b_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 b_1 & c_1 b_2 & c_1 b_3 \\ c_2 b_1 & c_2 b_2 & c_2 b_3 \\ c_3 b_1 & c_3 b_2 & c_3 b_3 \end{pmatrix} \right] \\
& (5.92)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{vc1}^y = F_{vc2}^y = \int (\phi_{\alpha,x} \phi_{\beta,y} + \phi_{\alpha,y} \phi_{\beta,y}) dv = & \left[\begin{pmatrix} b_1 c_1 & b_1 c_2 & b_1 c_3 \\ b_2 c_1 & b_2 c_2 & b_2 c_3 \\ b_3 c_1 & b_3 c_2 & b_3 c_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 c_1 & c_1 c_2 & c_1 c_3 \\ c_2 c_1 & c_2 c_2 & c_2 c_3 \\ c_3 c_1 & c_3 c_2 & c_3 c_3 \end{pmatrix} \right] \\
& (5.93)
\end{aligned}$$

6. ALE 法

有限要素法を用いた流体解析では、メッシュ移動による不安定性を回避するため、ALE 法 (Arbitrary Lagrangian-Eulerian) が用いられている。Lagrange 法では、メッシュの移動量は移流速度と同様となる。ALE 法では、メッシュの移動速度を任意に設定し、移流速度からメッシュの移動速度を差し引いた相対速度を用いればよい。基礎方程式を ALE 表記で表すと以下の通りとなる。

$$A = \phi(\dot{p} + (v_i - w_i)p_{,i}) + v_{,i,i} = 0 \quad (5.94)$$

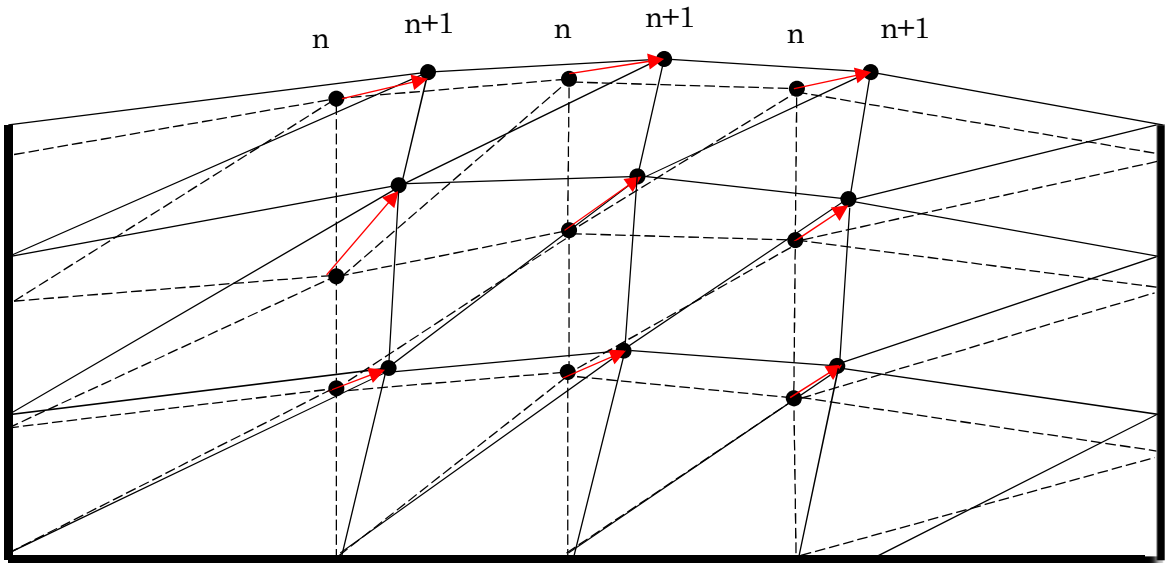
$$B_i = \rho(\dot{v}_i + (v_j - w_j)v_{i,j}) + p_{,i} - \tau_{j,i,j} - \rho f_i = 0 \quad (5.95)$$

例えば、孤立波の計算を行う際の節点移動のイメージ図を次ページの図-5.6.1 に示す。ALE 法では、水表面の節点移動は Lagrange 法により行うこととし、流体内部の節点は、 \mathbf{x} の位置が常に水表面と同じとなるように、ALE 法により節点の移動速度を設定した。このような処理を行うことにより、節点移動によりメッシュ自体が破綻することを回避することができる。

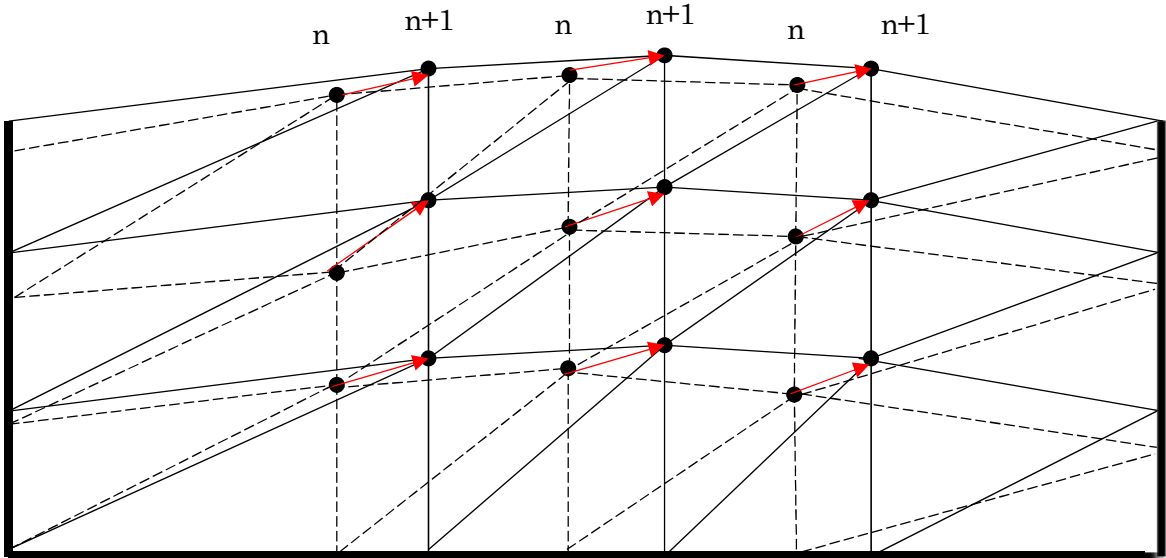
ALE 法は界面追跡法とも言われており、界面捕捉法と比較し、長所・短所を整理すると、以下の表-5.6.1 の通りとなる。

表-5.6.1 界面追跡法と界面捕捉法の長所・短所

移動境界の記述	長所	短所
界面追跡法 (ラグランジュ的方法)	<ul style="list-style-type: none"> ・比較的粗いメッシュでも精度よく計算できる。 ・計算時間が短い 	<ul style="list-style-type: none"> ・計算のロバスト性に課題 ・適切なリメッシュ手法の導入が重要
界面捕捉法 (オイラー的方法)	<ul style="list-style-type: none"> ・計算のロバスト性が高い。 	<ul style="list-style-type: none"> ・比較的細かいメッシュが必要 ・高精度の移流スキームの導入が必要



(1)Lagrange 法



(2)ALE 法

図-5.6.1 Lagrange 法と ALE 法における節点移動のイメージ図

7. 計算事例

7. 1. キャビティ流れ

一般化された音速法を用いた計算事例を以降に示す。最初に、前出のキャビティの事例を示す。使用したメッシュや境界条件は、前出の図-4.3.1と図-4.3.2と同じである。

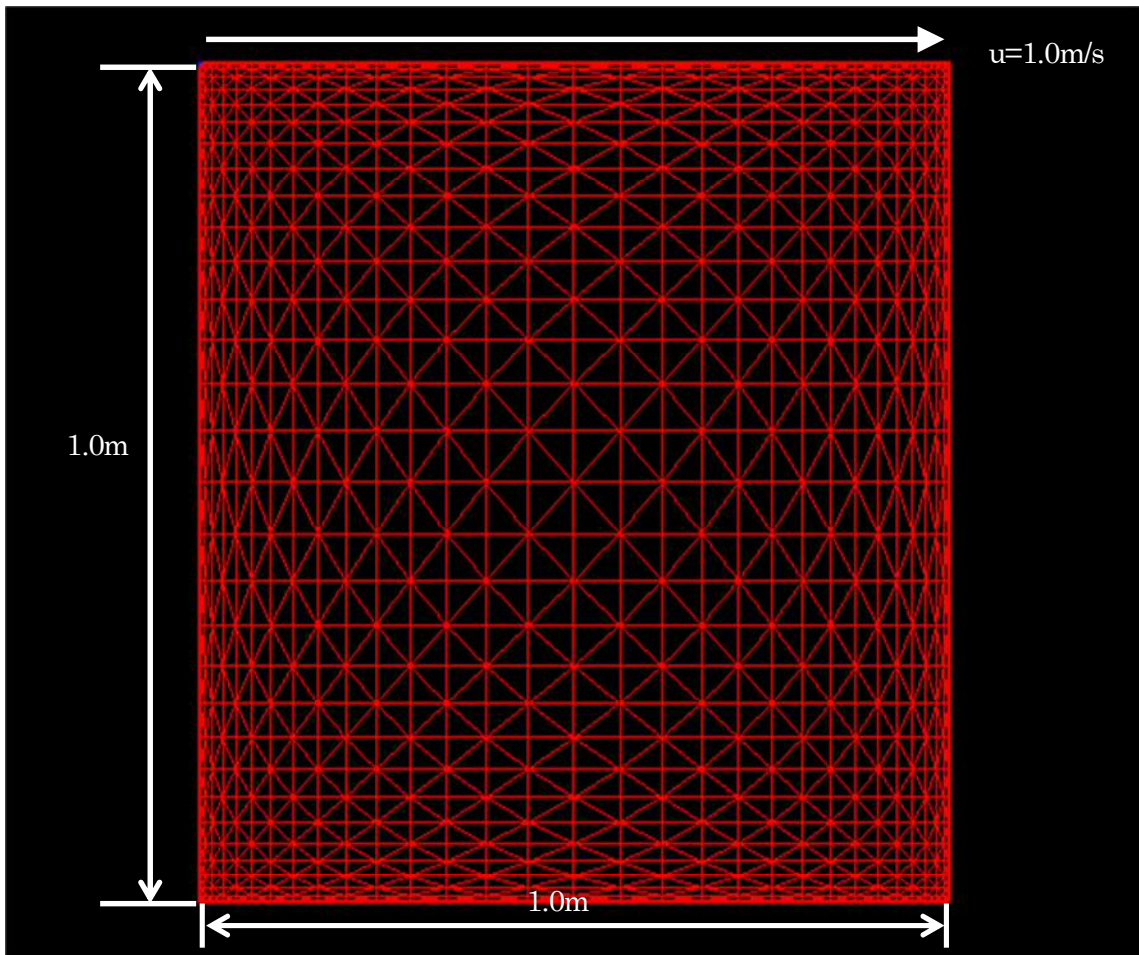


図-5.7.1 キャビティ計算に用いたメッシュ (再掲)

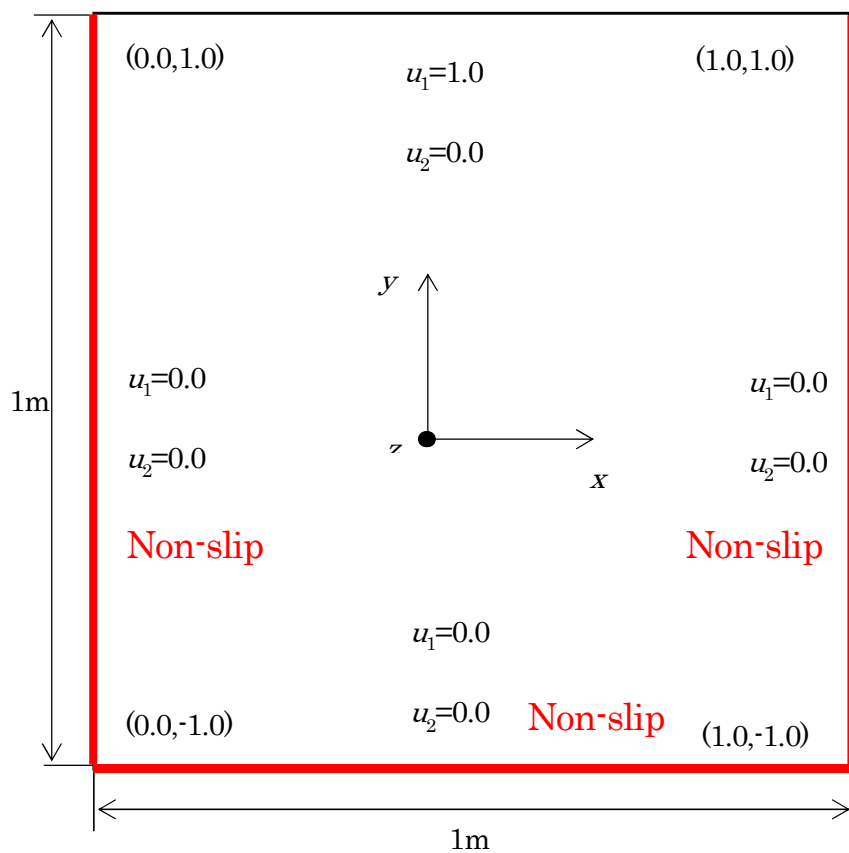


図-5.7.2 キャビティ計算に用いた境界条件 (再掲)

計算結果として、Ghia (1982) との比較、他の計算モデルとの比較を行った結果を図-5.7.3に示す。本研究で開発した一般化された音速法モデルの結果は、非圧縮モデルの結果とほぼ一致している。このことから、連続式における圧力の時間項・移流項は微小な値であることがわかる。また、従来の音速法モデルと一般化された音速法モデルでは、計算結果に差異が見られる。これは、4節にて前述したように、変数の無次元化処理の有無、安定化項の数値粘性の効果が影響しているものと考えられる。なお、安定化項を考慮することで、計算の時間刻み dt は 10^{-6}sec から 10^{-3}sec のオーダーまで大きくとることが可能となり、計算効率が大幅に改善された。また、図-5.7.4 や図-5.7.5 に示すように、流速分布・圧力分布共に、安定した計算結果が得られている。

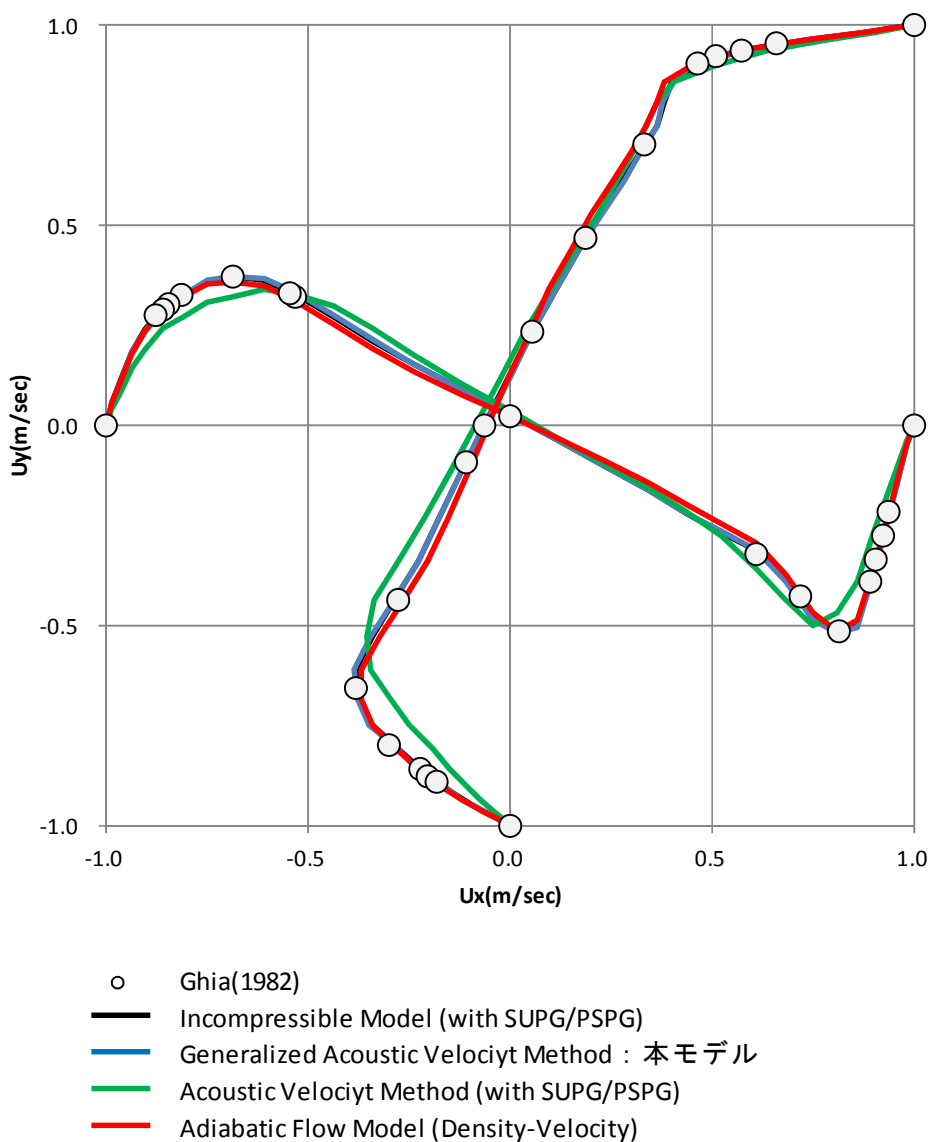


図-5.7.3 各計算モデルのGhia (1982) との比較

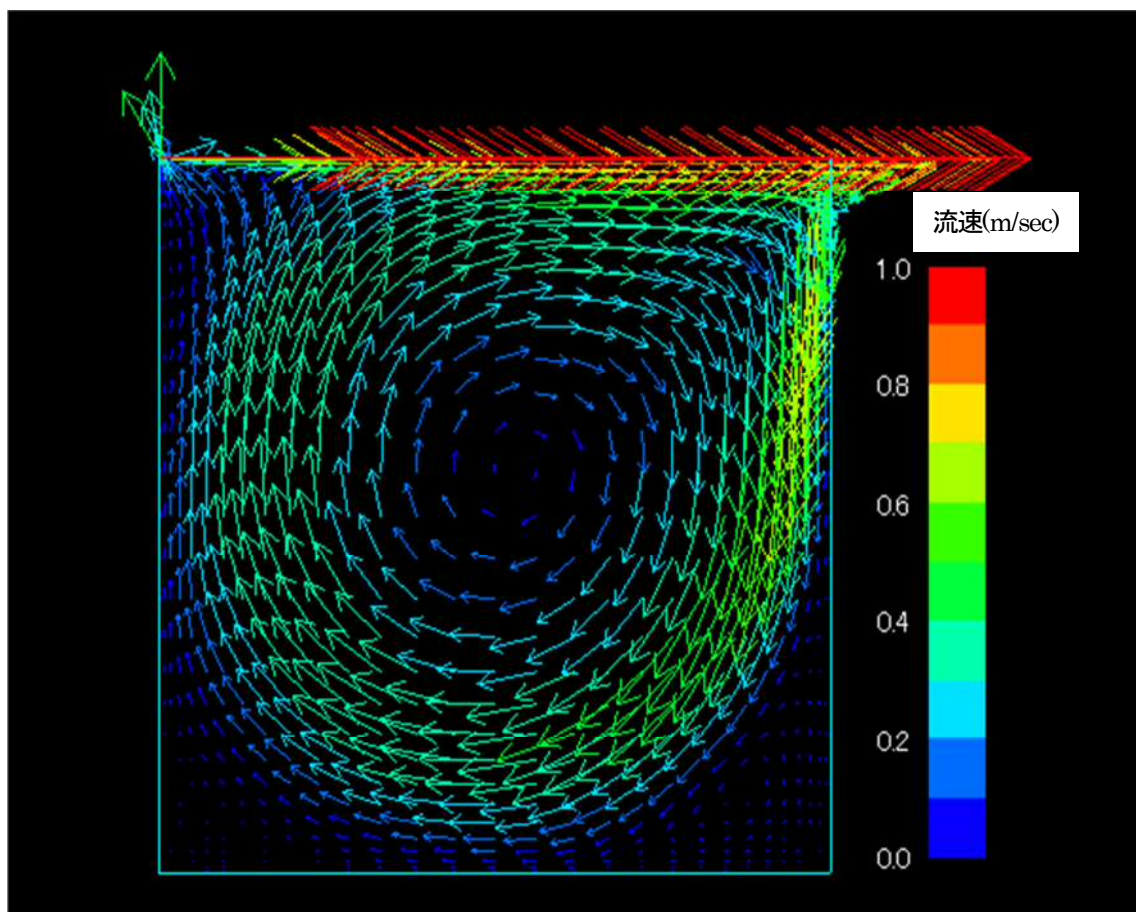


図-5.7.4 一般化された音速法モデルによる流速分布($Re=1000, T=200\text{sec}$)

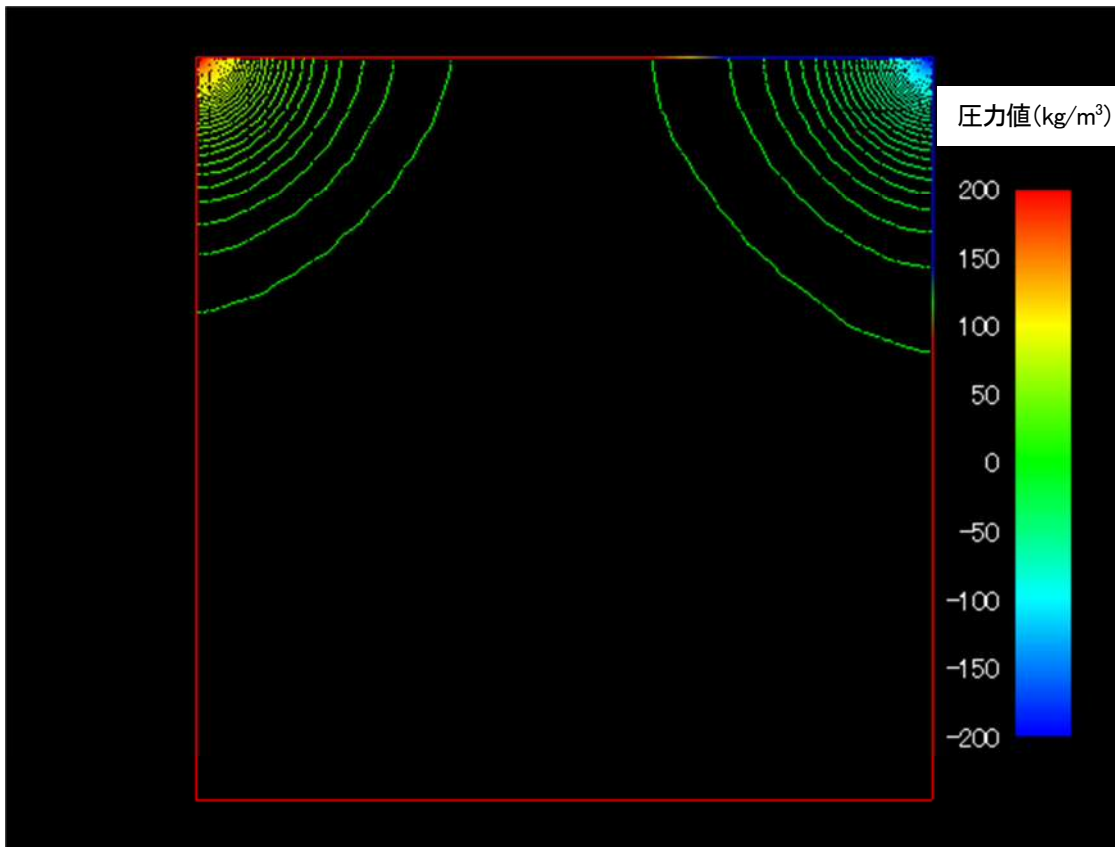


図-5.7.5 一般化された音速法モデルによる圧力分布($Re=1000, T=200\text{sec}$)

参考までに、計算の失敗事例を以下に示す。計算に使用したメッシュは、図-5.7.6 の通りである。境界条件は図-5.7.2 と同じであるが、左右両方の壁の上端を閉じていない結果が、図-5.7.7 であり、閉じている結果が図-5.7.8 である。両方の結果とも Ghia との整合性が必ずしも良好とは言えない。そこで、前出の 5.7.1 のようにメッシュを改良し、左右両方の壁の上端を閉じた境界条件を課した。有限要素法の流体解析では、計算に使用するメッシュと境界条件の設定が、極めて重要であることが、この事例からもわかる。

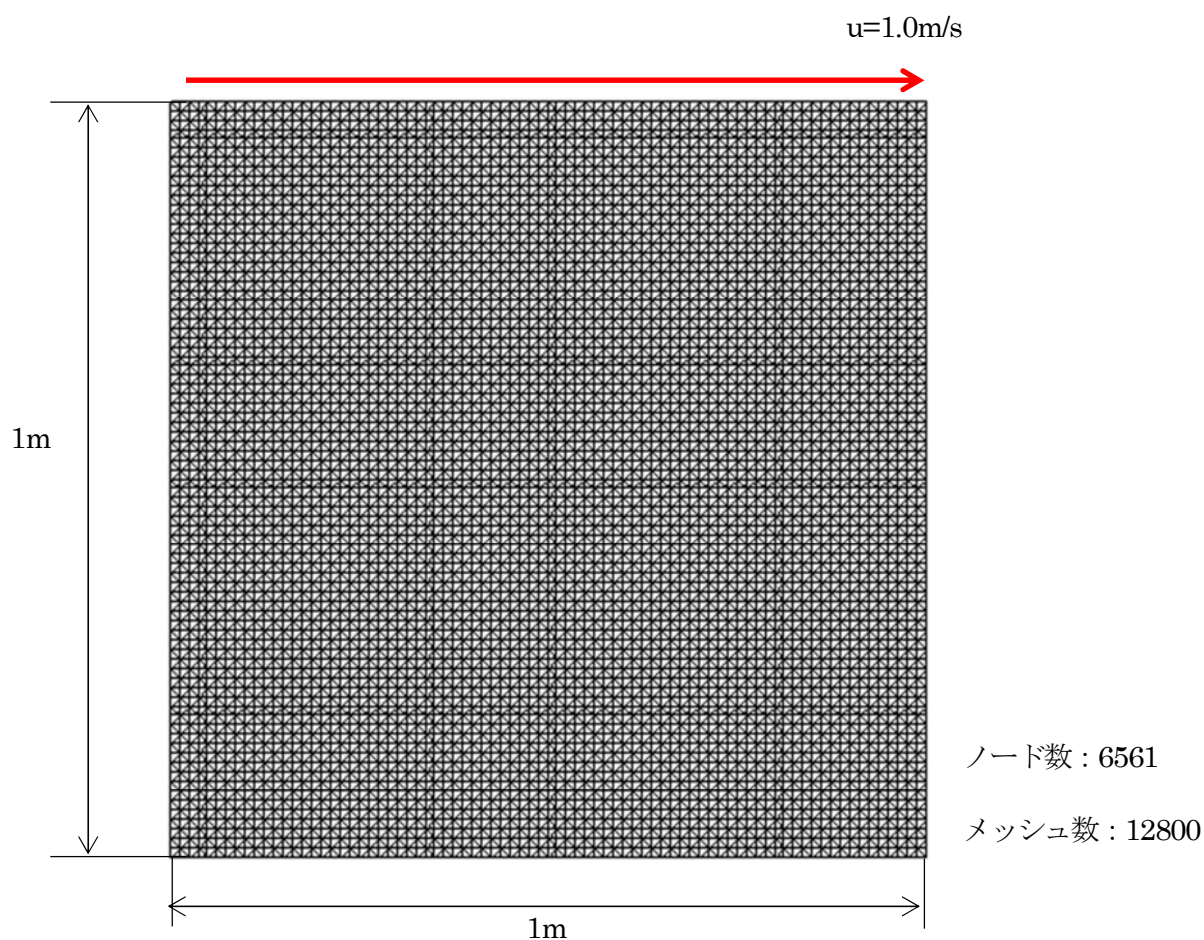


図-5.7.6 キャビティ計算に用いたメッシュ (旧)

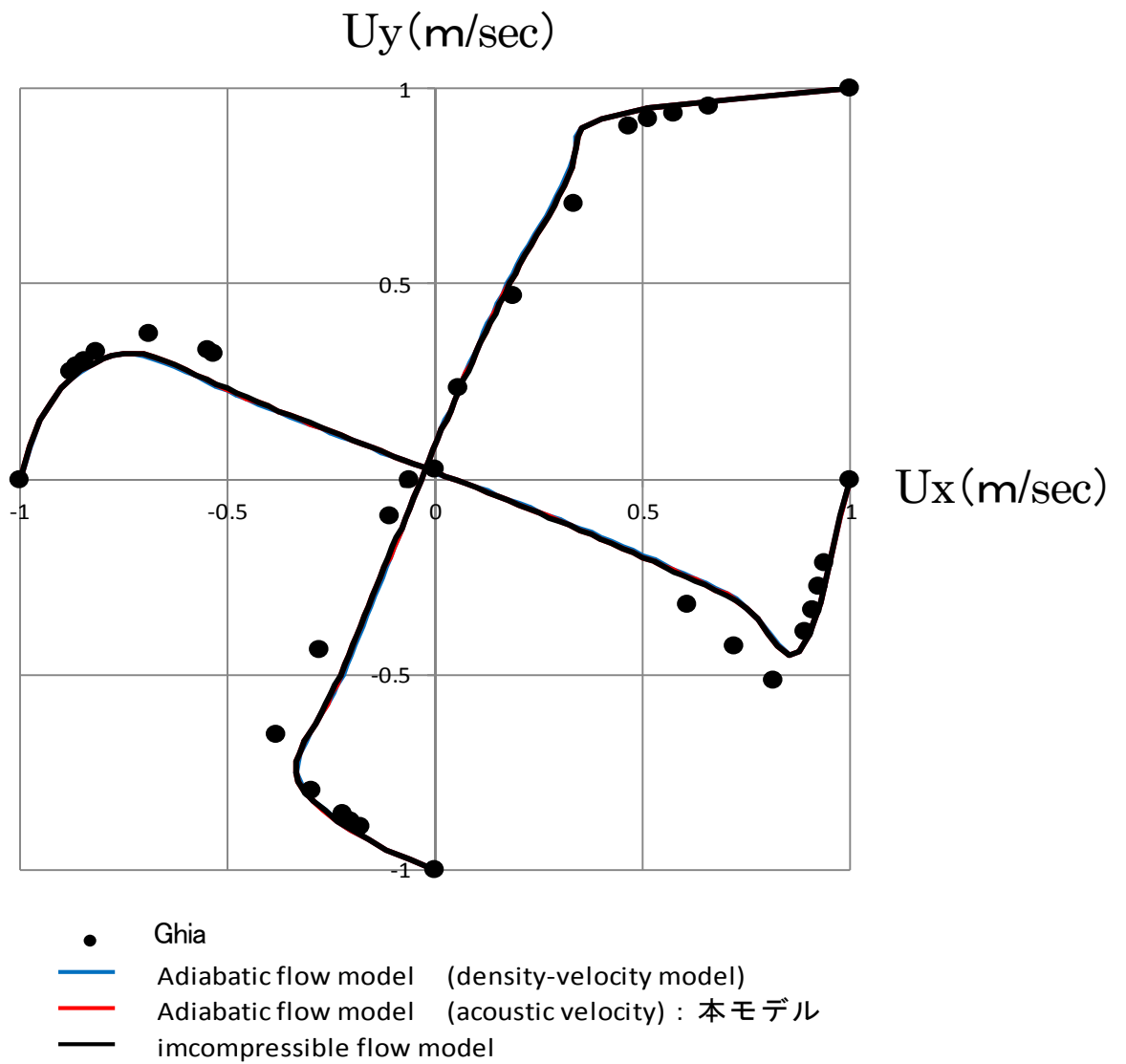


図-5.7.7 各計算モデルの Ghia (1982) との比較 (旧：上端開境界)

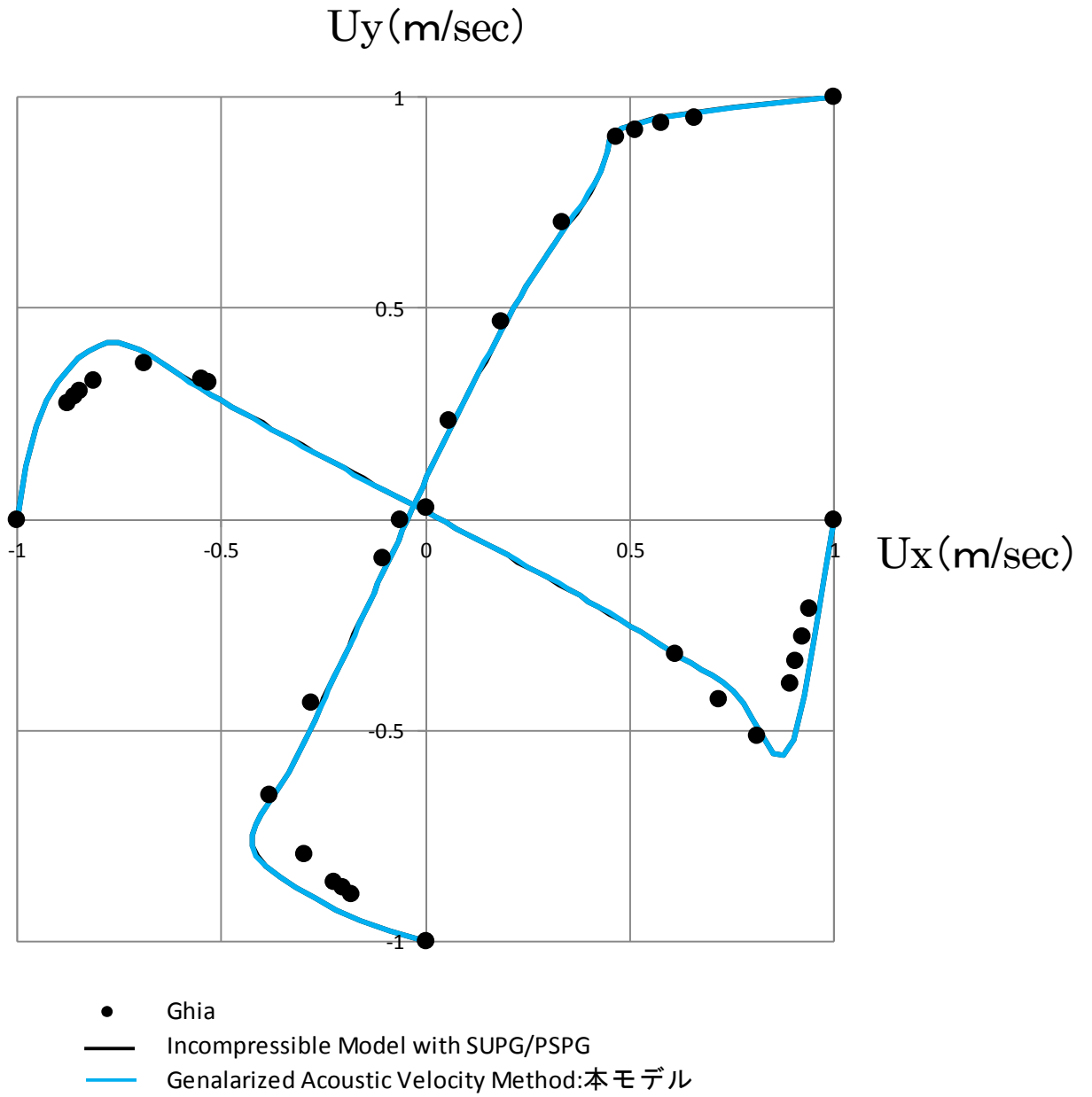


図-5.7.8 各計算モデルの Ghia (1982) との比較 (旧：上端閉境界)