付属資料-1 流体解析手法の形状最適化問題への応用例

付属資料-1では、本編で述べた一般化された音速法を用いて、海岸護岸の形状最適化に関 する試計算を行った。海岸護岸を対象に本格的な形状最適化を行うためには、数値解析モデル で越波や砕波を正確に予測できるアルゴリズムを追加する必要がある。また、水理模型実験結 果との比較・検証も必要である。

1. 形状最適化の研究事例

最初に、形状最適化に関する研究成果の概要を整理し、その長所・短所を整理する。

1. 1. 空気流体を対象とした研究事例

空気流体を対象とした研究事例は、数多くある。例えば、航空機本体や自動車本体の分野では、実用的に用いられている。図-1.1 は、航空機に作用する抗力に対して最適形状を求めた事例であり、図-1.2 は一様流中においた円柱に作用する水平力を最小化できるように最適形状を求めた事例である。本研究でも、水を対象とした流体中における形状決定問題を取り合扱う。計算法については、次章にて詳述する。





(出典:宇宙航空研究開発機構研究開発報告 JAXA-RR-07-049)





(1) 初期形状

- (2) 最終形状
- 図-1.2 円柱に作用する水平力に対する最適形状の計算事例 (出典:寺地和樹、中央大学大学院学位論文)

1. 2. 港湾・海岸関係での形状最適化の事例

次に、港湾・海岸関係における形状最適化の事例を紹介する。港湾・海岸関係では、構造物の形状最適化を行った事例はほとんどない。形状最適化があまり適用されない理由については、後述する。事例として、フレア式護岸と呼ばれる海岸護岸の事例を示す。通常の海岸護岸と比べ、上部がせり出た形状となっているが、越波流量を低減し、景観にも配慮して低天端構造とすることを目標としている。図-1.3 にフレア式護岸の適用事例を示す。また、図-1.4 には、越波流量の算定フローを示す。フローの中段に、越波流量の算定図表があるが、系統的な水理模型実験の結果を踏まえて作成されたものである。

なお、この護岸構造の場合、越波流量の低減は図れるが、護岸に作用する水平力は通常の護 岸構造よりも衝撃波力の影響もあり大きくなる二律相反の問題を抱えている。そのため、本体 構造は、コンクリートと鋼材のハイブリッド構造を採用している。また、フレア式護岸に関す る最新の論文では、風の影響を受けると、越波に対する防護性能が低下すると報告されている。





図-1.3 海岸護岸の最適設計事例(出典:神戸製鋼技報)



図-1.4 フレア式護岸の越波流量の算定フロー(出典:神戸製鋼技報)

1.3.形状最適化の長所・短所

以上、数例について最適設計の事例を取集整理した。まず、港湾・海岸関係で形状最適化の 事例が少ない理由としては、以下の点が挙げられる。

<港湾・海岸関係で形状最適化の事例が少ない理由>

- 形状最適化は、港湾・海岸分野で標準的な設計手法として確立されておらず、現状では設計者の知識・技量に大きく左右されることなり、設計費用・検討期間ともに膨れ上がることになり、実務では採用されにくい。
- 2) 形状最適化の結果として得られる流線的な形状は、施工上、構築することは容易では なく、フレア式護岸の例のようにメーカーの特殊技術が必要である。
- 3) 航空機や自動車は一度最適設計を行うと、その結果に基づき量産体制を構築することが可能ではある。しかし、土木構造物の場合、現場条件に合わせて設計を行うことになり、全て注文生産である。したがって、形状最適化のプロセスも毎回必要となり、設計コストの省力化の面で敬遠される。
- また、形状最適化の長所・短所としては、以下の点が挙げられる。

<形状最適化の長所>

- 1) 任意の初期形状に対して形状最適化が可能なので、水理模型実験や風洞実験にかかる 労力や費用を抑えることができる。
- 2) 対象となる施設の標準的な計算プログラムが確立できれば、設計コストの省力化も可 能となる。

<形状最適化の短所>

- 1) 計算メッシュにより、計算の安定性や精度も変わるため、メッシュ作成のノウハウが 必要である。
- 2) 初期形状の設定により、アウトプットとなる最適形状が変わりうる。
- 3) 計算時間が膨大となるため、ハイスペックのコンピューターが必要である。
- 4) 計算時間を短縮化するため、プログラムの高速化を意識したプログラミングが必要で ある。

2. 護岸の形状最適化

2. 1. 計算手法

(1) 概要

海岸護岸を例にあげると、形状最適化計の観点では、構造物に作用する水平力(Σ Fx)と鉛 直力(Σ Fy)の和を時間方向にも積分し、最小化する方法が考えられる。評価関数(Performance function)は、以下のように表すことができる。

Performance Function



図-2.1 海岸護岸に作用する水平力・鉛直力

(2) 基礎方程式の導出

流体の中では、前章で記述した流体の連続式と運動方程式も満たすため、前述の評価関数 (Performance function)に流体の連続式・運動法手式を加味すれば、以下のような拡張評価 関数(Extended performance function)が得られる。 Extended performance function

$$J^{*} = \frac{1}{2} \int_{t_{0}}^{t_{f}} (F_{i}Q_{ij}F_{j}) dt + \int_{t_{0}}^{t_{f}} p_{\alpha}^{*} (\phi_{0}M_{\alpha\beta}\dot{p}_{\beta} + K_{\alpha\beta\gamma j}u_{\beta j}p_{\gamma} + H_{\alpha\beta i}u_{\beta i}) dt + \int_{t_{0}}^{t_{f}} u_{\alpha i}^{*} (\rho_{0}M_{\alpha\beta}\dot{u}_{\beta i} + K_{\alpha\beta\gamma j}u_{\beta j}u_{\beta j}u_{\gamma i} - H_{\beta i\alpha}p_{\beta} - S_{\alpha i\beta j}u_{\beta j} - T_{\alpha i}) dt$$
(A.1)

この拡張評価関数を最小化できる海岸護岸の断面形状を求めることになるが、最小点では、以下のイメージ図に示すように、各変数で微分した値がゼロになる条件を探していけばよい。



$$DJ^* = \frac{\partial J^*}{\partial p^*_{\alpha}} \delta p^*_{\alpha} + \frac{\partial J^*}{\partial u^*_{\alpha i}} \delta u^*_{\alpha i} + \cdots$$

図-2.2 拡張評価関数の最小化イメージ

$$DJ^{*} =$$

$$\int_{t_{0}}^{t_{f}} \delta p_{\alpha}^{*} (\phi_{0} M_{\alpha\beta} \dot{p}_{\beta} + K_{\alpha\beta\gamma j} u_{\beta j} p_{\gamma} + H_{\alpha\beta i} u_{\beta i}) dt + \int_{t_{0}}^{t_{f}} \delta u_{\alpha i}^{*} (\rho_{0} M_{\alpha\beta} \dot{u}_{\beta i} + K_{\alpha\beta\gamma j} u_{\beta j} u_{\gamma i} - H_{\beta i \alpha} p_{\beta} - S_{\alpha i \beta j} u_{\beta j} - T_{\alpha i}) dt + \int_{t_{0}}^{t_{f}} \delta p_{\beta} (-\phi_{0} M_{\alpha\beta} \dot{p}_{\alpha}^{*} + \phi_{0} K_{\alpha\beta\gamma j} u_{\beta j} p_{\alpha}^{*} - H_{\beta i \alpha} u_{\alpha i}^{*}) dt +$$

$$\int_{t_{0}}^{t_{f}} \delta u_{\beta i} (-\rho_{0} M_{\alpha\beta} \dot{u}_{\beta i}^{*} + \phi_{0} K_{\alpha\beta\gamma i} p_{\beta} p_{\alpha}^{*} + \rho_{0} K_{\alpha\beta\gamma j} u_{\beta j} u_{\alpha j}^{*} + \rho_{0} K_{\alpha\beta\gamma j} u_{\beta j} u_{\alpha i}^{*} - S_{\alpha i\beta j} u_{\alpha j}^{*}) dt +$$

$$\int_{t_{0}}^{t_{f}} \delta T_{\alpha i} (-u_{\alpha i}^{*} - Q_{i j} F_{j}) dt + M_{\alpha\beta} p_{\alpha}^{*} (t_{f}) \delta p_{\beta} (t_{f}) - M_{\alpha\beta} p_{\alpha}^{*} (t_{0}) \delta p_{\beta} (t_{0}) +$$

$$M_{\alpha\beta} u_{\alpha i}^{*} (t_{f}) \delta u_{\beta i} (t_{f}) - M_{\alpha\beta} u_{\alpha i}^{*} (t_{0}) \delta u_{\beta i} (t_{0}) + G_{\delta k} X_{\delta k} = 0 \qquad (A.2)$$

 $DJ^* = 0$ となるためには、上の式(A.2)の各項がそれぞれゼロにならなければならない。した がって、以下の式が得られる。ここに、式(A.3)と式(A.4)は、流体の連続式と運動方程式である。 また、式(A.5)と式(A.6)は Adjoint の変数に関する連続式と運動方程式である。Adjoint の変数 は、第5式の通り、流体の水平力・鉛直力と等価となる。式(A.7)と式(A.8)は、Adjoint の変数 が満たすべき時間的な境界条件となる。また、最後の式(A.9)は、メッシュ移動に関する評価式 である。

$$\phi_0 M_{\alpha\beta} \dot{p_\beta} + K_{\alpha\beta\gamma j} u_{\beta j} p_\gamma + H_{\alpha\beta i} u_{\beta i} = 0 \tag{A.3}$$

$$\rho_0 M_{\alpha\beta} u_{\beta_i} + K_{\alpha\beta\gamma j} u_{\beta j} u_{\gamma i} - H_{\beta i\alpha} p_\beta - S_{\alpha i\beta j} u_{\beta j} - T_{\alpha i} = 0$$
(A.4)

$$-\phi_0 M_{\alpha\beta} \dot{p}^*_{\alpha} + \phi_0 K_{\alpha\beta\gamma j} u_{\beta j} p^*_{\alpha} - H_{\beta i\alpha} u^*_{\alpha i} = 0$$
(A.5)

 $-\rho_0 M_{\alpha\beta} \dot{u}_{\beta i}^* + \phi_0 K_{\alpha\beta\gamma i} p_\beta p_\alpha^* + \rho_0 K_{\alpha\beta\gamma j} u_{\beta j} u_{\alpha j}^* + \rho_0 K_{\alpha\beta\gamma j} u_{\beta j} u_{\alpha i}^* - S_{\alpha i\beta j} u_{\alpha j}^* = 0$

$$-u_{\alpha i}^* = Q_{ij}F_j \tag{A.6}$$

$$M_{\alpha\beta}p_{\alpha}^{*}(t_{f})\delta p_{\beta}(t_{f}) = M_{\alpha\beta}p_{\alpha}^{*}(t_{0})\delta p_{\beta}(t_{0})$$
(A.7)

$$M_{\alpha\beta}u_{\alpha i}^{*}(t_{f})\delta u_{\beta i}(t_{f}) = M_{\alpha\beta}u_{\alpha i}^{*}(t_{0})\delta u_{\beta i}(t_{0})$$
(A.8)

$$G_{\delta k} X_{\delta k} = 0 \tag{A.9}$$

結局、 $\delta J^* = 0$ となるためには、以下の式(A.10)によりメッシュを移動させながら、評価関数 を最小化できる条件を繰り返し計算により求めていくことになる。

$$DJ^* = G_{\delta k} X_{\delta k} = 0 \tag{A.10}$$

付録-1-9

$$G_{\delta k} = \int_{t_0}^{t_f} p_{\alpha}^* \left(\phi_0 \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial X_{\delta k}} \dot{p_{\beta}} + \frac{\partial K_{\alpha\beta\gamma j}}{\partial X_{\delta k}} u_{\beta j} p_{\gamma} + \frac{\partial H_{\alpha\beta i}}{\partial X_{\delta k}} u_{\beta i} \right) dt + \int_{t_0}^{t_f} u_{\alpha i}^* \left(\rho_0 \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial X_{\delta k}} \dot{u_{\beta}}_i + \frac{\partial K_{\alpha\beta\gamma j}}{\partial X_{\delta k}} u_{\beta j} u_{\gamma i} - \frac{\partial H_{\beta i\alpha}}{\partial X_{\delta k}} p_{\beta} - \frac{\partial S_{\alpha i\beta j}}{\partial X_{\delta k}} u_{\beta j} \right) dt$$
(A.11)

上の式(A.10)を差分化して、メッシュ移動を調整する重み関数 Wと長さの制約条件を考慮すると、以下の式(A.12)が得られる。メッシュを移動すると、対象となる構造物の長さが変化して、初期の長さ*l*₀から逸れてくることになるので、繰り返し計算により、長さが一定となるような係数*A**を求めている。

$$W_{\xi i\delta k}^{(l)} X_{\delta k}^{(l+1)} = W_{\xi i\delta k}^{(l)} X_{\delta k}^{(l)} - grad(J^*)_{\xi i}^{(l)} - A^* \sum_{e=1}^{m} \frac{\left(l_e(X_{\delta k}^{(l)})\right)}{\partial X_{\xi i}}$$
(A.12)

$$grad(J^*)_{\delta k} = G_{\delta k} \tag{A.13}$$

<長さの制約条件>

$$\sum_{e=1}^{m} (l_e(X_{\delta k})) - l_0 = 0 \tag{A.14}$$

(3)計算フロー

最適形状推定の主要な計算手続きをフローとして示せば、以下のようになる。各ステップ毎 に評価関数Jを求めていき、評価関数が一定となれば、形状が収束したと判断し、計算を打ち 切る。評価関数が一定になっていない段階では、繰り返し計算により形状を変えながら、通常 変数に関する基礎方程式、Adjoint 変数に関する基礎方程式を解いていく。



図-2.3 最適形状推定の計算フロー

(4) $G_{\delta k}$ の係数行列

 $G_{\delta k}$ の計算を行うためには、式(A.15)のように、各係数行列を微分しておく必要がある。

 $G_{\delta k} =$

$$\int_{t_0}^{t_f} p_{\alpha}^* \left(\phi_0 \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial X_{\delta k}} \dot{p_{\beta}} + \frac{\partial K_{\alpha\beta\gammaj}}{\partial X_{\delta k}} u_{\beta j} p_{\gamma} + \frac{\partial H_{\alpha\beta i}}{\partial X_{\delta k}} u_{\beta i} \right) dt + \int_{t_0}^{t_f} u_{\alpha i}^* \left(\rho_0 \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial X_{\delta k}} \dot{u_{\beta}}_i + \frac{\partial K_{\alpha\beta\gammaj}}{\partial X_{\delta k}} u_{\beta j} u_{\gamma i} - \frac{\partial H_{\beta i\alpha}}{\partial X_{\delta k}} p_{\beta} - \frac{\partial S_{\alpha i\beta j}}{\partial X_{\delta k}} u_{\beta j} \right) dt$$
(A.15)

例えば、質量行列 $M_{\alpha\beta}$ は、以下の式(A.16)ように表すことができる。

$$M_{\alpha\beta} = \Delta_e \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$
(A.16)

また、 Δ_e は有限要素の面積であり、三角形要素の座標(x, y)により、以下の式(A.17)のように表すことができる。

$$\Delta_e = \frac{1}{2} \{ (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) \}$$
(A.17)

これをX1で微分すると、以下の式(A.18)が得られる。

$$\frac{\partial \Delta_e}{\partial X_1} = \frac{\partial}{\partial X_1} \Big[\frac{1}{2} \{ (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) \} \Big] = \frac{1}{2} \{ -(y_3 - y_1) + (y_2 - y_1) \} = \Delta_e \frac{1}{2\Delta_e} (y_2 - y_3) = \Delta_e b_1$$
(A.18)

したがって、質量行列M_{αβ}の X_iによる微分は、以下の式(A.19)のようになる。

$$\frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial X_1} = \Delta_e b_1 \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$
(A.19)

このような計算を $G_{\delta k}$ の他の係数行列に関して全て手計算で実施するのは煩雑であり、計算 ミスも招くことになる。本研究では、wxMaximaというフリーソフトを使用して、他の係数行 列の微分を計算した。計算結果は、付属資料-2に示す。

(5)長さ一定の制約条件の考慮

 $G_{\delta k}$ の計算を行いメッシュを変化させていくが、計算が安定するためには、何らかの制約条件を設ける必要がある。本検討では、海岸護岸に模した壁を変化させるため、長さ一定の条件を課した。

長さ一定の制約条件を課すと、拡張評価関数は、以下の式(A.20)のように表すことができる。

$$J^{*} = J + A^{*}[\sum_{e=1}^{m} (l_{e}(X_{\delta k})) - l_{0}]$$
(A.20)
これを各変数で偏微分すると、
$$\delta J^{*} = \delta J + \delta A^{*}[\sum_{e=1}^{m} (l_{e}(X_{\delta k})) - l_{0}] + A^{*}[\sum_{e=1}^{m} (l_{e}(X_{\delta k})) / \delta X_{\delta k}] \delta X_{\delta k}$$
(A.21)
となる。また、

$$l_{\delta k} = \sum_{e=1}^{m} (l_e(X_{\delta k})) / \delta X_{\delta k}$$
(A.22)

と定義すると、

$$\delta J^{*} = G_{\delta k} \delta X_{\delta k} + A^{*} l_{\delta k} \, \delta X_{\delta k} = (G_{\delta k} + A^{*} l_{\delta k}) \delta X_{\delta k} = G_{\delta k}^{'} \, \delta X_{\delta k} \tag{A.23}$$

表すことができる。

さらに、重み関数wを考慮すると、メッシュの変化は以下の式(A.24)のように表すことができる。

$$X_{\delta k}(n+1) = X_{\delta k}(n) + W(n)G'_{\delta k}(n) = X_{\delta k}(n) + W(n)(G_{\delta k}(n) + A^*l_{\delta k}(n))$$
(A.24)
式(A.20)の長さ一定の条件は、n+1 ステップでも成り立つので、

$$\sum_{e=1}^{m} (l_e(X_{\delta k}(n) + W(n)(G_{\delta k}(n) + A^* l_{\delta k}(n))) - l_0 = 0$$
(A.25)

となるはずである。この条件を満たすA*をSOR法などの繰り返し計算により求める。

また、長さは、以下の式(A.26)のように定義される。

$$\Sigma_{e=1}^{m} l_e = \Sigma_{e=2}^{m} [(x_e - x_{e-1})^2 + (y_e - y_{e-1})^2]^{1/2}$$
(A.26)
一方、長さの偏微分は、

$$l_{\delta k} = \sum_{e=1}^{m} (l_e(X_{\delta k})) / \delta X_{\delta k} =$$

$$\sum_{e=1}^{m} \left(\frac{\partial l_e}{\partial X_1} + \frac{\partial l_e}{\partial X_2} + \dots + \frac{\partial l_e}{\partial X_m} + \frac{\partial l_e}{\partial Y_1} + \frac{\partial l_e}{\partial Y_2} + \dots + \frac{\partial l_e}{\partial Y_m} \right) = \sum_{e=1}^{m} \left(0 + \dots + \frac{\partial l_e}{\partial X_e} + \frac{\partial l_e}{\partial X_{e-1}} + \dots + 0 + 0 + \dots + \frac{\partial l_e}{\partial Y_e} + \frac{\partial l_e}{\partial Y_{e-1}} + \dots + 0 \right)$$
(A.27)

となる。ここに、 $l_e O x_e, x_{e-1}, y_e, y_{e-1}$ に関する微分は、以下のように表すことができる。 $\sum_{e=1}^{m} \frac{\partial l_e}{\partial x_e} = \sum_{e=2}^{m} [(x_e - x_{e-1})^2 + (y_e - y_{e-1})^2]^{-1/2} \cdot x_e$ (A.28)

$$\sum_{e=1}^{m} \frac{\partial l_e}{\partial x_{e-1}} = \sum_{e=2}^{m} [(x_e - x_{e-1})^2 + (y_e - y_{e-1})^2]^{-1/2} \cdot (-x_{e-1})$$
(A.29)

$$\sum_{e=1}^{m} \frac{\partial l_e}{\partial y_e} = \sum_{e=2}^{m} [(x_e - x_{e-1})^2 + (y_e - y_{e-1})^2]^{-1/2} \cdot y_e$$
(A.30)

$$\sum_{e=1}^{m} \frac{\partial l_e}{\partial y_{e-1}} = \sum_{e=2}^{m} [(x_e - x_{e-1})^2 + (y_e - y_{e-1})^2]^{-1/2} \cdot (-y_{e-1})$$
(A.31)

結局、

$$l_{\delta k} = \sum_{e=1}^{m} (l_e(X_{\delta k})) / \delta X_{\delta k} = \sum_{e=1}^{m} \left[\frac{x_e - x_{e-1}}{l_e} + \frac{y_e - y_{e-1}}{l_e} \right]$$
(A.32)

と表すことができる。

2.2.形状最適化の計算事例

最適形状決定の計算として、前出の図-2.1 に示したもたれ式護岸を模擬したコンクリート壁 を、孤立波の計算メッシュの中に据えて計算を行った。なお、この計算事例は非砕波・非越流 の条件で行ったものである。コンクリート壁としては高さ 2.5m の円弧状の壁として設定した。



図-2.4 最適断面の計算メッシュ

計算結果を以下の図-2.5 と図-2.6 に示す。なお、この計算では長さ一定の制約条件の他、壁の下端は固定条件とした。計算結果より評価関数 J がほぼ一定となっており、最適形状が得られていると判断できる。この計算結果により、最適形状では壁の形状がほぼ直線状になることがわかる。



図-2.5 最適断面の計算結果



図-2.6 評価関数Jの推移

2.3.課題と今後の展望

この事例計算結果より、以下のような港湾・海岸分野での応用が考えられる。ただし、砕波 変形や越波・越流を評価するためには、リメシングのアルゴリズムを強化することや、バック グランドメッシュを採用する等、更なる工夫が必要である。

- 1)事例計算では、構造物に作用する水平力(Σ Fx)と鉛直力(Σ Fy)の和を最小化すること にしたが、水平力(Σ Fx)のみを最小化すれば波による滑動や転倒に対して有利な断面を 求めることも可能である。鉛直力(Σ Fy)のみを最小化すれば、越波・越流に対して有利 となる断面を求めることも可能である。
- 2) 事例計算では時間積分の時間帯を孤立派が壁の前面で遡上する時間帯をターゲットとした が、引き波作用の時間帯をターゲットとすれば、引き波作用に対する最適断面を求めるこ とが可能である。なお、事例として示したもたれ式護岸では、台風時の引き波の作用によ り被災した事例もある。



3)防波堤の上部工の形状に関する最適形状を求める際にも応用可能である。

図-2.7 上部斜面式防波堤の例(出典:国土交通省HP)

4) 人工リーフなどの没水型の構造物の最適断面形状や平面配置を求める際にも応用可能である。



図-2.8 人工リーフの例(出典:国土交通省HP)

付録-2 G_{δk}の計算を行うための係数行列の微分計算結果

付録資料-1の計算では、 $G_{\delta k}$ の計算を行うための係数行列を wxMaxima というフリーソフトを用いて計算した。次ページに wxMaxima による係数行列の算定結果を示す。

質量行列

δ M_{αβ}/δ x1=

$\left[\frac{y^2 - y^3}{12}\right]$	$\frac{y2 - y3}{24}$	$\frac{y^2 - y^3}{24}$
$\frac{y^2 - y^3}{24}$	<u>y2 - y3</u> 12	$\frac{y2 - y3}{24}$
$\left\lfloor \frac{y^2 - y^3}{24} \right\rfloor$	$\frac{y2 - y3}{24}$	$\frac{y^2 - y^3}{12}$

δ M_{α β} / δ x2=

$\left[\frac{y3-y1}{12}\right]$	$\frac{y3 - y1}{24}$	$\frac{y3 - y1}{24}$
$\frac{y3 - y1}{24}$	<u>y3 - y1</u> 12	$\frac{y3 - y1}{24}$
$\frac{y3 - y1}{24}$	<u>y3 - y1</u> 24	<u>y3-y1</u> 12

δ M_{α β} / δ x2=

$\left[\frac{y1-y2}{12}\right]$	$\frac{y1-y2}{24}$	$\frac{y1-y2}{24}$
$\frac{y1 - y2}{24}$	<u>y1 - y2</u> 12	<u>y1 - y2</u> 24
$\frac{y1 - y2}{24}$	$\frac{y1 - y2}{24}$	<u>y1 - y2</u> 12

δ M_{α β} / δ y1=

$\left[\frac{x3 - x2}{12}\right]$	$\frac{x3 - x2}{24}$	$\frac{x3 - x2}{24}$
$\frac{x3 - x2}{24}$	<u>x3 - x2</u> 12	<u>x3 - x2</u> 24
$\left\lfloor \frac{x3 - x2}{24} \right\rfloor$	<u>x3 - x2</u> 24	$\frac{x3 - x2}{12}$

δ M_{α β} / δ y2=

$\left\lceil \frac{x1 - x3}{12} \right\rceil$	$\frac{x1 - x3}{24}$	$\frac{x1-x3}{24}$
$\frac{x1 - x3}{24}$	<u>x1 - x3</u> 12	$\frac{x1 - x3}{24}$
$\frac{x1 - x3}{24}$	$\frac{x1 - x3}{24}$	$\frac{x1-x3}{12}$

δ M_{αβ}/δ y3=

$\left[\frac{x^2 - x^1}{12}\right]$	$\frac{x2-x1}{24}$	$\frac{x^2 - x^2}{24}$
$\frac{x^2 - x^1}{24}$	$\frac{x^2 - x^1}{12}$	$\frac{x2-x1}{24}$
$\left\lfloor \frac{x^2 - x^4}{24} \right\rfloor$	<u>x2 - x1</u> 24	$\frac{x^2 - x^1}{12}$

移流行列

δ A_{α β γ},x/ δ x1= δ A_{α β γ},x/ δ x2= δ A_{α β γ},x/ δ x3= [0 0 0] 0 0 0 0 0 0

δ A_{α β γ},x ∕ δ y1=

Γο	0	0]
$-\frac{1}{24}$	$-\frac{1}{24}$	$-\frac{1}{24}$
$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$

δ A_{α β γ},x/δ y2=

$\left[\frac{1}{24}\right]$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$
0	0	0
$-\frac{1}{24}$	$-\frac{1}{24}$	$-\frac{1}{24}$

$\left[-\frac{1}{24}\right]$	$-\frac{1}{24}$	$-\frac{1}{24}$
$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$
L o	0	ο

δ Α_{α β γ},γ / δ x1=

Γο	0	0]
$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$
$\left[-\frac{1}{24}\right]$	$-\frac{1}{24}$	$-\frac{1}{24}$

$-\frac{1}{24}$	$-\frac{1}{24}$	$-\frac{1}{24}$
0	0	0
$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$

δ A_{αβγ},y ⁄ δ x3=

$\left[\frac{1}{24}\right]$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$
$-\frac{1}{24}$	$-\frac{1}{24}$	$-\frac{1}{24}$
L O	0	0

δ A_{α β γ},y δ y1= δ A_{α β γ},y δ y2= δ A_{α β γ},y δ y3=

 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

圧力行列

δ H_{α β,x}/ δ x1= δ H_{α β,x}/ δ x2= δ H_{α β,x}/ δ x3=

 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

δ H_{α β,x} \checkmark δ y1=

$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

δ H_{α β,x} ⁄ δ y2=

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b} & \mathbf{b} \end{bmatrix}$$

$$\delta \mathbf{H}_{\alpha \beta, \mathbf{x}} / \delta \mathbf{y} \mathbf{3} =$$
$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \end{bmatrix}$$

 $\delta H_{\alpha \beta, y} / \delta x1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$

δ H_{α β,γ} / δ x2=

 $\begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$

δ H_{α β,γ} / δ x3=

$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	0
$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	0
$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	0

 $\delta H_{\alpha \beta,y} / \delta y 1 = \delta H_{\alpha \beta,y} / \delta y 2 = \delta H_{\alpha \beta,y} / \delta y 3 =$

 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

圧力行列(転置)

δ H_{β,xα} / δ x1= δ H_{β,xα} / δ x2= δ H_{β,xα} / δ x3=

 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

δ Η_{β,xα} ∕δ y1=

О	0	0
$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

δ H_{β,xα} / δ y2=

$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
0	0	0
$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$

δ H_{β,xα} ∕ δ y3=

$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
0	0	0]

δ H_{β,yα} / δ x1=

Γο	0	0]
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$

δ H_{β,yα} / δ x2=

$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$
0	0	0
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

δ Η_{β,yα} / δ x3=

$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$
0	0	0

 δ H_{β,yα} \checkmark δ y1= δ H_{β,yα} \checkmark δ y2= δ H_{β,yα} \checkmark δ y3=

 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

粘性項

δ D_{α,x β,x} / δ x1=

(<i>y</i> 2- <i>y</i> 3) ³	$(y2 - y3)^2 (y3 - y1)$	$(y1 - y2)(y2 - y3)^2$
$-\frac{1}{2((x^2-x^1)(y^3-y^1)-(x^3-x^1)(y^2-y^1))^2}$	$-\frac{1}{2((x^2-x^1)(y^3-y^1)-(x^3-x^1)(y^2-y^1))^2}$	$-\frac{1}{2\left(\left(x^2-x^1\right)\left(y^3-y^1\right)-\left(x^3-x^1\right)\left(y^2-y^1\right)\right)^2}$
$(y2 - y3)^2 (y3 - y1)$	$(y2 - y3)(y3 - y1)^2$	(y1 - y2)(y2 - y3)(y3 - y1)
$\frac{1}{2((x^2-x^1)(y^3-y^1)-(x^3-x^1)(y^2-y^1))^2}$	$\frac{1}{2((x^2-x^1)(y^2-y^1)-(x^2-x^1)(y^2-y^1))^2}$	$-\frac{1}{2((x^2-x^1)(y^3-y^1)-(x^3-x^1)(y^2-y^1))^2}$
$(y1 - y2)(y2 - y3)^2$	(y1 - y2)(y2 - y3)(y3 - y1)	(y1-y2) ² (y2-y3)
$-\frac{1}{2((x^2-x^1)(y^2-y^1)-(x^2-x^1)(y^2-y^1))^2}$	$-\frac{1}{2((x^2-x^1)(y^3-y^1)-(x^3-x^1)(y^2-y^1))^2}$	$-\frac{1}{2\left(\left(x^2-x^{\dagger}\right)\left(y^3-y^{\dagger}\right)-\left(x^3-x^{\dagger}\right)\left(y^2-y^{\dagger}\right)\right)^2}$

δ D_{α,x β,x} / δ x2=

$$\begin{bmatrix} -\frac{(y^2 - y^3)^2 (y^3 - y^1)}{2 ((x^2 - x^1) (y^3 - y^1) - (x^3 - x^1) (y^2 - y^1))^2} & -\frac{(y^2 - y^3) (y^3 - y^1)^2}{2 ((x^2 - x^1) (y^3 - y^1) - (x^3 - x^1) (y^2 - y^1))^2} & -\frac{(y^1 - y^2) (y^2 - y^3) (y^3 - y^1)}{2 ((x^2 - x^1) (y^3 - y^1) - (x^3 - x^1) (y^2 - y^1))^2} \\ -\frac{(y^2 - y^3) (y^3 - y^1)}{2 ((x^2 - x^1) (y^3 - y^1) - (x^3 - x^1) (y^2 - y^1))^2} & -\frac{(y^3 - y^1)^3}{2 ((x^2 - x^1) (y^3 - y^1) - (x^3 - x^1) (y^2 - y^1))^2} \\ -\frac{(y^1 - y^2) (y^2 - y^3) (y^3 - y^1)}{2 ((x^2 - x^1) (y^3 - y^1) - (x^3 - x^1) (y^2 - y^1))^2} & -\frac{(y^1 - y^2) (y^3 - y^1)}{2 ((x^2 - x^1) (y^3 - y^1) - (x^3 - x^1) (y^2 - y^1))^2} \\ -\frac{(y^1 - y^2) (y^2 - y^3) (y^3 - y^1)}{2 ((x^2 - x^1) (y^3 - y^1) - (x^3 - x^1) (y^2 - y^1))^2} & -\frac{(y^1 - y^2)^2 (y^3 - y^1)}{2 ((x^2 - x^1) (y^3 - y^1) - (x^3 - x^1) (y^2 - y^1))^2} \\ -\frac{(y^1 - y^2) (y^2 - y^3) (y^3 - y^1)}{2 ((x^2 - x^1) (y^2 - y^1))^2} & -\frac{(y^1 - y^2) (y^3 - y^1) - (x^3 - x^1) (y^2 - y^1)^2}{2 ((x^2 - x^1) (y^3 - y^1) - (x^3 - x^1) (y^2 - y^1))^2} \\ -\frac{(y^1 - y^2) (y^2 - y^3) (y^2 - y^1) (y^2 - y^1)}{2 ((x^2 - x^1) (y^2 - y^1) - (x^3 - x^1) (y^2 - y^1))^2} & -\frac{(y^1 - y^2) (y^2 - y^1) (y^2 - y^1)}{2 ((x^2 - x^1) (y^2 - y^1) - (x^3 - x^1) (y^2 - y^1))^2} \\ -\frac{(y^1 - y^2) (y^2 - y^1) (y^2 - y^1) (y^2 - y^1)}{2 ((x^2 - x^1) (y^2 - y^1) - (x^3 - x^1) (y^2 - y^1))^2} & -\frac{(y^1 - y^2) (y^2 - y^1) (y^2 - y^1)}{2 ((x^2 - x^1) (y^2 - y^1) - (x^3 - x^1) (y^2 - y^1))^2} \\ -\frac{(y^1 - y^2) (y^2 - y^1) (y^2 - y^1) (y^2 - y^1)}{2 ((x^2 - x^1) (y^2 - y^1) - (x^2 - x^1) (y^2 - y^1))^2} & -\frac{(y^1 - y^2) (y^2 - y^1)}{2 ((x^2 - x^1) (y^2 - y^1) - (x^2 - x^1) (y^2 - y^1))^2} \\ -\frac{(y^1 - y^2) (y^2 - y^1) (y^2 - y^1) (y^2 - y^1)}{2 ((x^2 - x^1) (y^2 - y^1) - (x^2 - x^1) (y^2 - y^1))^2} & -\frac{(y^1 - y^2) (y^2 - y^1)}{2 ((x^2 - x^1) (y^2 - y^1) - (x^2 - x^1) (y^2 - y^1))^2} \\ -\frac{(y^1 - y^2) (y^2 - y^1) (y^2 - y^1) (y^2 - y^1) (y^2 - y^1) (y^2 - y^1)}{2 ((x^2 - x^1) (y^2 - y^1) - (x^2 - x^1) (y^2 - y^1))^2} \\ -\frac{(y^1 - y^2) (y^1 - y^1) (y^2 - y^1) (y^2 - y^1)}{2 ((x^2 - x^1) (y^2 - y^1) - (x^2 -$$

δ D_{α,x β,x} / δ x3=

$$\begin{bmatrix} -\frac{(y_1^2 - y_2^2)(y_2^2 - y_3^2)^2}{2((x_2^2 - x_1^2)(y_3^2 - y_1^2) - (x_3^2 - x_1^2)(y_2^2 - y_3^2)(y_3^2 - y_1^2)} & -\frac{(y_1^2 - y_2^2)(y_2^2 - y_3^2)(y_3^2 - y_1^2)}{2((x_2^2 - x_1^2)(y_3^2 - y_1^2) - (x_3^2 - x_1^2)(y_3^2 - y_1^2)^2} & -\frac{(y_1^2 - y_2^2)^2(y_3^2 - y_1^2)}{2((x_2^2 - x_1^2)(y_3^2 - y_1^2) - (x_3^2 - x_1^2)(y_3^2 - y_1^2) - (x_3^2 - x_1^2)(y_3^2 - y_1^2)^2} & -\frac{(y_1^2 - y_2^2)^2(y_3^2 - y_1^2)}{2((x_2^2 - x_1^2)(y_3^2 - y_1^2) - (x_3^2 - x_1^2)(y_3^2 - y_1^2) - (x_3^2 - x_1^2)(y_3^2 - y_1^2)^2} & -\frac{(y_1^2 - y_2^2)^2(y_3^2 - y_1^2)}{2((x_2^2 - x_1^2)(y_3^2 - y_1^2) - (x_3^2 - x_1^2)(y_3^2 - y_1^2) - (x_3^2 - x_1^2)(y_3^2 - y_1^2)^2} & -\frac{(y_1^2 - y_2^2)^2(y_3^2 - y_1^2)}{2((x_2^2 - x_1^2)(y_3^2 - y_1^2) - (x_3^2 - x_1^2)(y_3^2 - y_1^2) - (x_3^2 - x_1^2)(y_3^2 - y_1^2)^2} & -\frac{(y_1^2 - y_2^2)^2(y_3^2 - y_1^2)}{2((x_2^2 - x_1^2)(y_3^2 - y_1^2) - (x_3^2 - x_1^2)(y_3^2 - y_1^2) - (x_3^2 - x_1^2)(y_3^2 - y_1^2)^2} & -\frac{(y_1^2 - y_2^2)^2(y_3^2 - y_1^2)}{2((x_2^2 - x_1^2)(y_3^2 - y_1^2) - (x_3^2 - x_1^2)(y_3^2 - y_1^2) - (x_3^2 - x_1^2)(y_3^2 - y_1^2)^2} & -\frac{(y_1^2 - y_2^2)^2(y_3^2 - y_1^2)}{2((x_2^2 - x_1^2)(y_3^2 - y_1^2) - (x_3^2 - x_1^2)(y_3^2 - y_1^2) - (x_3^2 - x_1^2)(y_3^2 - y_1^2)^2} & -\frac{(y_1^2 - y_2^2)^2(y_3^2 - y_1^2)}{2((x_2^2 - x_1^2)(y_3^2 - y_1^2) - (x_3^2 - x_1^2)(y_3^2 - y_1^2) - (x_3^2 - x_1^2)(y_3^2 - y_1^2)^2} & -\frac{(y_1^2 - y_2^2)^2(y_3^2 - y_1^2)}{2((x_2^2 - x_1^2)(y_3^2 - y_1^2) - (x_3^2 - x_1^2)(y_3^2 - y_1^2) - (x_3^2 - x_1^2)(y_3^2 - y_1^2)^2} & -\frac{(y_1^2 - y_2^2)^2(y_3^2 - y_1^2)}{2((x_2^2 - x_1^2)(y_3^2 - y_1^2) - (x_3^2 - x_1^2)(y_3^2 - y_1^2)^2} & -\frac{(y_1^2 - y_1^2)^2}{2((x_2^2 - x_1^2)(y_3^2 - y_1^2) - (x_3^2 - x_1^2)(y_3^2 - y_1^2) - (x_3^2 - x_1^2)(y_3^2 - y_1^2) - (x_3^2 - x_1^2)(y_3^2 - y_1^2) - \frac{(y_1^2 - y_1^2)^2}{2((x_2^2 - x_1^2)(y_3^2 - y_1^2) - (x_3^2 - x_1^2)(y_3^2 - y_1^2) - (x_3^2 - x_1^2)(y_3^2 - y_1^2) - (x_3^2 - x_1^$$

δ D_{α,x β,x} δ y1=

$-\frac{(x^{2}-x^{2})^{2}}{2((x^{2}-x^{2})(y^{2}-y^{2})^{2})^{2}}$	$\frac{(y^2 - y^3)^2}{(1) - (x^3 - x^1)(y^2 - y^1))^2}$	$-\frac{y^2}{2\left(\left(x^2-x^2\right)\left(y^2-y^2\right)\right)}$	$\frac{-y3}{2((x2-x1)(y2-y1))} - \frac{(x3-x2)}{2((x2-x1)(y2-y1))} = \frac{(x3-x2)}{2((x2-x1)(y2-y1))}$	$\frac{x^2}{y^2 - y^3} \frac{(y^2 - y^3)(y^2 - y^1)}{(y^2 - y^1) - (x^2 - x^1)(y^2 - y^1)^2}$	$\frac{y^2 - y^3}{2((x^2 - x^1)(y^3 - y^1) - (x^3 - x^1)(y^2 - y^3))}$
$-\frac{y^2 - y^3}{2((x^2 - x^1)(y^3 - y^1) - (x^3 - x^1)(y^2 - y^1))}$	$\frac{(x3-x2)(y2-y3)(y3-y1)}{2((x2-x1)(y3-y1)-(x3-x1)(y2-y1))^2}$	$-\frac{y\overline{J}}{(x\overline{J}-x\overline{I})(y\overline{J}-y\overline{I})}$	$\frac{-y1}{-(x3-x1)(y2-y1)} - \frac{(x3-x1)(x3-x1)(y3-y1)}{2((x2-x1)(y3-y1))(y3-y1)} = \frac{(x3-x1)(x3-x1)(y3-y1)}{2(x3-x1)(y3-y1)$	$ - x2) (y3 - y1)^{2} - y1) - (x3 - x1) (y2 - y1)^{2} $	$\frac{y\overline{s}-y\overline{t}}{2\left(\left(x\overline{z}-x\overline{t}\right)\left(y\overline{s}-y\overline{t}\right)-\left(x\overline{s}-x\overline{t}\right)\left(y\overline{z}-y\overline{t}\right)\right)}-\frac{2\left(\left(x\overline{z}-x\overline{t}\right)\left(y\overline{s}-y\overline{t}\right)-\overline{t}\right)}{2\left(\left(x\overline{z}-x\overline{t}\right)\left(y\overline{s}-y\overline{t}\right)-\overline{t}\right)}$
$\left[\frac{y^2-y^3}{2\left((x^2-x^1)\left(y^2-y^1\right)-(x^2-x^1)\left(y^2-y^1\right)\right)}\right]$	$-\frac{(x3-x2)(y1-y2)(y2-y3)}{2((x2-x1)(y3-y1)-(x3-x1)(y2-y1))^2} = \frac{1}{2}$	$\frac{y3-y1}{\left(\left(x2-x1\right)\left(y3-y1\right)-\left(x3-x1\right)\left(y2-y1\right)\right)}$	$-\frac{y1-y2}{2((x2-x1)(y3-y1)-(x3-x1)(y2-x1)(y2-x1))(y2-x1)$	$\frac{(x3 - x2)(y1 - y2)(y3 - y1)}{2((x2 - x1)(y3 - y1) - (x3 - x1)(y2 - y1))}$	$\frac{y_1 - y_2}{(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)}$

δ D_{α,x β,x} ⁄ δ y2=

	y2 - y3	(x1-x3) (y	2-y3) ²	y3 - y1	(x1-x3)(y2-y3)(y3-y1)	y2 - y3	т
	$\overline{(x^2 - x^1)(y^2 - y^1) - (x^2 - x^1)(y^2 - y^1)}$	$-\frac{1}{2((x^2-x^1)(y^3-y^1)-(x^2-y^2))}$	$(x^{2} - x^{1})(y^{2} - y^{1}))^{2}$	$\overline{2\left(\left(x^2-x^1\right)\left(y^3-y^1\right)-\left(x^3-x^1\right)\left(y^2-y^1\right)\right)}$	$\frac{1}{2\left(\left(x^2-x^{\dagger}\right)\left(y^3-y^{\dagger}\right)-\left(x^3-x^{\dagger}\right)\left(y^2-y^{\dagger}\right)\right)^2}$	$-\frac{1}{2((x^2-x^1)(y^3-y^1)-(x^3-x^1)(y^2-y^1))}$	² 2 ((x2 - x1) (y3
	y3 - y1	(x1 - x3) (y2 -	- <i>y3</i>) (<i>y3</i> - <i>y1</i>)	(x1 = x3	$(y\mathcal{J}-y\mathcal{I})^2$	y3	- y1
	$\frac{2((x^2 - x^1)(y^2 - y^1) - (x^2 - x^1)(y^2 - y^1))}{(x^2 - y^1)}$	$\overline{)} = \frac{1}{2((x^2 - x^1)(y^3 - y^1))}$	$-(x3-x1)(y2-y1))^2$	$-\frac{1}{2}\left(\left(x^{2}-x^{2}\right)\left(y^{3}-y^{2}\right)\right)$	$(x3-x1)(y2-y1)^2$	$-\frac{1}{2\left(\left(x^2-x^2\right)\left(y^3-y^2\right)\right)}$	- <mark>(</mark> x3-x1)(y2-,
	2-y3 +	y1 - y2	(x1-x3)(y1-y2)(y2-y3)		(x1-x3)(y1-y2)(y3-y1)	y1·	- y2
2 ((x2-x1) (y3-y	$(1) - (x^{2} - x^{1})(y^{2} - y^{1})) + 2((x^{2} - x^{1})(y^{2} - y^{1}))$	(y1) - (x3 - x1)(y2 - y1))	$2\left(\left(x2-x1\right)\left(y3-y1\right)-\left(x3-x1\right)\left(y2-y1\right)\right)^{2}$	$2 \left((x^2 - x^1) (y^3 - y^1) - (x^3 - x^1) (y^2 - y^1) \right)$	$2\left(\left(x2-x1\right)\left(y3-y1\right)-\left(x3-x1\right)\left(y2-y1\right)\right)^{2}$	(x2-x1)(y3-y1)	-(x3 - x1)(y2 - y

δ D_{α,x β,x} ⁄ δ y3=

[y2 - y3	$(x^2 - x^1)($	y2-y3) ²	y3 - y1	y2 - y3	(x2 - x1)(y2 - y3)(y3 - y1)	
$\overline{(x^2-x^1)}(y)$	$(x^3 - y^1) - (x^3 - x^1)(y^2 - y^1)$	$\frac{1}{2}(x^2-x^1)(y^3-y^1)-$	$-(x3-x1)(y2-y1))^2$	$-\frac{1}{2((x^2-x^1)(y^2-y^1)-(x^2-x^1)(y^2-y^1))}$	$\frac{1}{2} \left((x^2 - x^1) (y^3 - y^1) - (x^3 - x^1) (y^2 - y^1) \right)$	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2 \left((x^2 - x^1) (y^2 - y^1) - (x^2 - x^1) (y^2 - y^1) \right)^2}$	$\frac{1}{2} (x^2 - x^1) (y^2 - x^2)$
y3 - y1	yź.	? — y3	$(x^2 - x^1)(y^2 - y^2)(y^3 - y^1)$	y3 -	- y1 (x2-x1)	$y\mathcal{J} - y\mathcal{I})^2$	
$-\frac{1}{2((x^2-x^1)(y^2-y^1)-(x^2-x^1)(y^2-y^2))}$	$(-y1)) + \frac{1}{2((x2-x1)(y3-y))}$	$(1) - (x^2 - x^1)(y^2 - y^1))$	$-\frac{1}{2((x^2-x^1)(y^3-y^1)-(x^3-x^1)(y^2-y^1))^2}$	$\overline{(x^2 - x^1)(y^3 - y^1)} -$	$\frac{-(x^2-x^1)(y^2-y^1)}{2((x^2-x^1)(y^2-y^1))}$	$-(x3-x1)(y2-y1))^2$	2 <mark>((x2 - x1) (</mark> y3
	y1 - y2	(x2 - x1) (y1	- y2) (y2 - y3)	y1-	- y2 (x2-x1) (y	1 - y2) (y3 - y1)	
$\frac{1}{2((xZ-x1))}$	y3-y1)-(x3-x1)(y2-y1))	$\frac{1}{2((x^2-x^1)(y^3-y^1))}$	$(x_3 - x_1)(y_2 - y_1))^2$	$2((x^2-x^1)(y^3-y^1))$	-(x3-x1)(y2-y1)) - 2((x2-x1)(y3-y1))	$(x_{3}-x_{1})(y_{2}-y_{1}))^{2}$	

$$\frac{(x3-x2)(y1-y2)(y2-y3)}{2((x2-x1)(y3-y1)-(x3-x1)(y2-y3))^2}$$

$$\frac{y1-y2}{2((x2-x1)(y2-y1))} - \frac{(x3-x2)(y1-y2)(y3-y1)}{2((x2-x1)(y3-y1)-(x3-x1)(y2-y1))^2}$$

$$\frac{(x3-x2)(y1-y2)(y3-y1)-(x3-x1)(y2-y1))^2}{2((x2-x1)(y3-y1)-(x3-x1)(y2-y1))^2}$$

$$\frac{y_{1}-y_{2}}{(x_{1}-x_{1})(y_{2}^{2}-y_{1}^{2})} - \frac{(x_{1}-x_{3})(y_{1}-y_{2}^{2})(y_{2}^{2}-y_{3}^{2})}{2((x_{2}^{2}-x_{1})(y_{3}^{2}-y_{1})(y_{3}^{2}-y_{1}^{2})(y_{3}^{2}-y_{1}^{2})}$$

$$\frac{(x_{1}^{2}-x_{3})(y_{1}^{2}-y_{2}^{2})(y_{3}^{2}-y_{1}^{2})}{2((x_{2}^{2}-x_{1})(y_{3}^{2}-y_{1})-(x_{3}^{2}-x_{1})(y_{2}^{2}-y_{1}^{2}))^{2}}$$

$$\frac{(x_{1}^{2}-x_{3}^{2})(y_{1}^{2}-y_{2}^{2})}{2((x_{2}^{2}-x_{1})(y_{3}^{2}-y_{1})-(x_{3}^{2}-x_{1})(y_{2}^{2}-y_{1}))^{2}}$$

$$\frac{yi - y2}{(x^2 - yi) - (x^3 - xi)(y^2 - yi)} - \frac{(x^2 - xi)(y^2 - y^2)(y^2 - y^3)}{2((x^2 - xi)(y^3 - yi) - (x^3 - xi)(y^2 - yi))^2}$$

$$\frac{yi - y2}{(x^2 - xi)(x^3 - xi)(y^2 - yi)} - \frac{(x^2 - xi)(y^3 - yi)(y^3 - yi)}{2((x^2 - xi)(y^3 - yi) - (x^3 - xi)(y^2 - yi))^2}$$

$$- \frac{(x^2 - xi)(y^1 - y^2)^2}{2((x^2 - xi)(y^3 - yi) - (x^3 - xi)(y^2 - yi))^2}$$

δ D_{α,x β,y} δ x1=

$(x3 - x2)(y2 - y3)^2$	y2 - y3	$(x1 - x3)(y2 - y3)^2$	y2 - y3	
$-\frac{1}{2\left(\left(x^2-x^{\prime}\right)\left(y^3-y^{\prime}\right)-\left(x^3-x^{\prime}\right)\left(y^2-y^{\prime}\right)\right)^2}$	$\frac{1}{2\left(\left(x^2-x^1\right)\left(y^3-y^1\right)-\left(x^3-x^1\right)\left(y^2-y^1\right)\right)}$	$\frac{1}{2\left(\left(x^2-x^1\right)\left(y^2-y^1\right)-\left(x^2-x^1\right)\left(y^2-y^1\right)\right)^2}$	$-\frac{1}{2\left(\left(x^2-x^1\right)\left(y^2-y^1\right)-\left(x^2-x^1\right)\left(y^2-y^1\right)\right)}$	2 ((
(x3 - x2)(y2 - y3)(y3 - y1)	y3 - y1	(x1 - x3)(y2 - y3)(y3 - y1)	y3 - y1	
$-\frac{1}{2\left(\left(x^2-x^1\right)\left(y^3-y^1\right)-\left(x^3-x^1\right)\left(y^2-y^1\right)\right)^2}$	$\frac{1}{2((x^2-x^1)(y^3-y^1)-(x^3-x^1)(y^2-y^1))}$	$\frac{1}{2\left(\left(x^2-x^1\right)\left(y^3-y^1\right)-\left(x^3-x^1\right)\left(y^2-y^1\right)\right)^2}$	$-\frac{1}{2((x^2-x^1)(y^2-y^1)-(x^2-x^1)(y^2-y^1))}$	2 ((
(x3 - x2)(y1 - y2)(y2 - y3)	y1 - y2	(x1 - x3)(y1 - y2)(y2 - y3)	y1 - y2	
$-\frac{1}{2((x^2-x^1)(y^3-y^1)-(x^3-x^1)(y^2-y^1))^2}$	$\frac{1}{2((x^2-x^1)(y^2-y^1)-(x^2-x^1)(y^2-y^1))}$	$\frac{1}{2\left(\left(x^2-x^1\right)\left(y^3-y^1\right)-\left(x^3-x^1\right)\left(y^2-y^1\right)\right)^2}$	$-\frac{1}{2\left(\left(x^2-x^1\right)\left(y^2-y^1\right)-\left(x^2-x^1\right)\left(y^2-y^1\right)\right)}$	2 ((

δ D_{α,x β,y} / δ x2=

$$-\frac{y^2 - y^3}{2\left((x^2 - xi)(y^2 - yi)(y^2 - yi)(y^2 - yi)\right)} - \frac{(x^3 - x^2)(y^2 - y^3)(y^3 - yi)}{2\left((x^2 - xi)(y^2 - yi)(y^2 - yi)(y^2 - yi)\right)^2} - \frac{(x^1 - x^3)(y^2 - y^3)(y^3 - yi)}{2\left((x^2 - xi)(y^2 - yi)(y^2 - yi)(y^2 - yi)\right)^2} - \frac{(x^2 - xi)(y^2 - y^3)(y^2 - yi)}{2\left((x^2 - xi)(y^2 - yi)(y^2 - yi)(y^2 - yi)\right)^2} - \frac{(x^2 - xi)(y^2 - y^3)(y^2 - yi)}{2\left((x^2 - xi)(y^2 - yi)(y^2 - yi)(y^2 - yi)\right)^2} - \frac{(x^2 - xi)(y^2 - y^3)(y^2 - yi)(y^2 - yi)^2}{2\left((x^2 - xi)(y^2 - yi)(y^2 - yi)(y^2 - yi)\right)^2} - \frac{(x^2 - xi)(y^2 - yi)(y^2 - yi)(y^2 - yi)^2}{2\left((x^2 - xi)(y^2 - yi)(y^2 - yi)(y^2 - yi)\right)^2} - \frac{(x^2 - xi)(y^2 - yi)(y^2 - yi)(y^2 - yi)^2}{2\left((x^2 - xi)(y^2 - yi)(y^2 - yi)(y^2 - yi)\right)^2} - \frac{(x^2 - xi)(y^2 - yi)(y^2 - yi)(y^2 - yi)^2}{2\left((x^2 - xi)(y^2 - yi)(y^2 - yi)(y^2 - yi)\right)^2} - \frac{(x^2 - xi)(y^2 - yi)(y^2 - yi)^2}{2\left((x^2 - xi)(y^2 - yi)(y^2 - yi)(y^2 - yi)(y^2 - yi)\right)^2} - \frac{(x^2 - xi)(y^2 - yi)(y^2 - yi)(y^2 - yi)^2}{2\left((x^2 - xi)(y^2 - yi)(y^2 - yi)(y^2 - yi)(y^2 - yi)\right)^2} - \frac{(x^2 - xi)(y^2 - yi)(y^2 - yi)(y^2 - yi)^2}{2\left((x^2 - xi)(y^2 - yi)(y^2 - yi)(y^2 - yi)(y^2 - yi)\right)^2} - \frac{(x^2 - xi)(y^2 - yi)(y^2 - yi)(y^2 - yi)(y^2 - yi)^2}{2\left((x^2 - xi)(y^2 - yi)(y^2 - yi)(y^2 - yi)(y^2 - yi)(y^2 - yi)(y^2 - yi)\right)^2} - \frac{(x^2 - xi)(y^2 - yi)(y^2 - yi)(y^2 - yi)^2}{2\left((x^2 - xi)(y^2 - yi)(y^2 - yi$$

δ D_{α,x β,y} / δ x3=

$$\frac{y_{2}-y_{3}}{2\left((x_{2}^{2}-x_{1}^{2})(y_{3}^{2}-y_{1}^{2})-(x_{3}^{2}-x_{1}^{2})(y_{2}^{2}-y_{3}^{2})\right)}{2\left((x_{2}^{2}-x_{1}^{2})(y_{3}^{2}-y_{1}^{2})-(x_{3}^{2}-x_{1}^{2})(y_{2}^{2}-y_{3}^{2})\right)} - \frac{(x_{1}-x_{3}^{2})(y_{1}-y_{2}^{2})(y_{2}^{2}-y_{3}^{2})}{2\left((x_{2}^{2}-x_{1}^{2})(y_{3}^{2}-y_{1}^{2})-(x_{3}^{2}-x_{1}^{2})(y_{2}^{2}-y_{1}^{2})\right)} - \frac{(x_{1}-x_{3}^{2})(y_{1}-y_{2}^{2})(y_{2}^{2}-y_{1}^{2})}{2\left((x_{2}^{2}-x_{1}^{2})(y_{3}^{2}-y_{1}^{2})-(x_{3}^{2}-x_{1}^{2})(y_{2}^{2}-y_{1}^{2})\right)} - \frac{(x_{1}-x_{3}^{2})(y_{1}-y_{2}^{2})(y_{2}^{2}-y_{1}^{2})}{2\left((x_{2}^{2}-x_{1}^{2})(y_{3}^{2}-y_{1}^{2})-(x_{3}^{2}-x_{1}^{2})(y_{2}^{2}-y_{1}^{2})\right)} - \frac{(x_{1}-x_{3}^{2})(y_{1}-y_{2}^{2})(y_{3}^{2}-y_{1}^{2})}{2\left((x_{2}^{2}-x_{1}^{2})(y_{3}^{2}-y_{1}^{2})-(x_{3}^{2}-x_{1}^{2})(y_{2}^{2}-y_{1}^{2})\right)} - \frac{(x_{1}-x_{3}^{2})(y_{1}-y_{2}^{2})(y_{2}^{2}-y_{1}^{2})}{2\left((x_{2}^{2}-x_{1}^{2})(y_{3}^{2}-y_{1}^{2})-(x_{3}^{2}-x_{1}^{2})(y_{2}^{2}-y_{1}^{2})\right)} - \frac{(x_{1}-x_{3}^{2})(y_{1}-y_{2}^{2})(y_{2}^{2}-y_{1}^{2})}{2\left((x_{2}^{2}-x_{1}^{2})(y_{3}^{2}-y_{1}^{2})-(x_{3}^{2}-x_{1}^{2})(y_{2}^{2}-y_{1}^{2})\right)} - \frac{(x_{2}^{2}-x_{1}^{2})(y_{3}^{2}-y_{1}^{2})-(x_{3}^{2}-x_{1}^{2})(y_{2}^{2}-y_{1}^{2})}{2\left((x_{2}^{2}-x_{1}^{2})(y_{3}^{2}-y_{1}^{2})-(x_{3}^{2}-x_{1}^{2})(y_{2}^{2}-y_{1}^{2})\right)} - \frac{(x_{2}^{2}-x_{1}^{2})(y_{2}^{2}-y_{1}^{2})}{2\left((x_{2}^{2}-x_{1}^{2})(y_{3}^{2}-y_{1}^{2})-(x_{3}^{2}-x_{1}^{2})(y_{2}^{2}-y_{1}^{2})\right)} - \frac{(x_{2}^{2}-x_{1}^{2})(y_{3}^{2}-y_{1}^{2})-(x_{3}^{2}-x_{1}^{2})(y_{3}^{2}-y_{1}^{2})-(x_{3}^{2}-x_{1}^{2})(y_{3}^{2}-y_{1}^{2})\right)}{2\left((x_{2}^{2}-x_{1}^{2})(y_{3}^{2}-y_{1}^{2})-(x_{3}^{2}-x_{1}^{2})(y_{3}^{2}-y_{1}^{2})-(x_{3}^{2}-x_{1}^{2})(y_{3}^{2}-y_{1}^{2})\right)} - \frac{(x_{2}^{2}-x_{1}^{2})(y_{3}^{2}-y_{1}^{2})(y_{3}^{2}-y_{1}^{2})-(x_{3}^{2}-x_{1}^{2})(y_{3}^{2}-y_{1}^{2})}{2\left((x_{2}^{2}-x_{1}^{2})(y_{3}^{2}-y_{1}^{2})-(x_{3}^{2}-x_{1}^{2})(y_{3}^{2}-y_{1}^{2})-(x_{3}^{2}-x_{1}^{2})(y_{3}^{2}-y_{1}^{2})\right)} - \frac{(x_{2}^{2}-x_{1}^{2})(y_{3}^{2}-y_{1}^{2})-(x_{3}^{2}-x_{1}^{2})(y_{3}^{2}-y_{1}^$$

$$\frac{(x^2 - x^1)(y^2 - y^3)^2}{(x^2 - x^1)(y^3 - y^1) - (x^3 - x^1)(y^2 - y^1))^2} \\ \frac{(x^2 - x^1)(y^2 - y^3)(y^3 - y^1)}{(x^2 - x^1)(y^3 - y^1) - (x^3 - x^1)(y^2 - y^1))^2} \\ \frac{(x^2 - x^1)(y^1 - y^2)(y^2 - y^3)}{(x^2 - x^1)(y^3 - y^1) - (x^3 - x^1)(y^2 - y^1))^2} \\ \end{bmatrix}$$

δ D_{α,x β,y} δ y1=

- (<i>x3 - x2</i>)	$)^{2}(y^{2}-y^{3})$	(x1-x3)(x3	(x2	
$-\frac{1}{2((x^2-x^1)(y^3-y^1)-(x^3-x^1)(y^2-y^1))^2}$		$-\frac{1}{2\left(\left(x^2-x^1\right)\left(y^2-y^2\right)\right)}$	$-\frac{1}{2(x^2-x^1)}$	
x3 - x2	$(x3 - x2)^2 (y3 - y1)$	x1 - x3	(x1 - x3)(x3 - x2)(y3 - y1)	x2 - x1
$-\frac{1}{2\left((x^{2}-x^{1})(y^{3}-y^{1})-(x^{3}-x^{1})(y^{2}-y^{1})\right)}$	$-\frac{1}{2\left(\left(x^2-x^1\right)\left(y^3-y^1\right)-\left(x^3-x^1\right)\left(y^2-y^1\right)\right)^2}$	$-\frac{1}{2\left(\left(x^2-x^1\right)\left(y^3-y^1\right)-\left(x^3-x^1\right)\left(y^2-y^1\right)\right)}$	$-\frac{1}{2((x^2-x^1)(y^2-y^1)-(x^2-x^1)(y^2-y^1))^2}$	$-\frac{1}{2\left(\left(x^{2}-x^{1}\right)\left(y^{3}-y^{1}\right)-\left(x^{3}-x^{1}\right)\left(y^{2}-y^{2}\right)\right)}$
x3 - x2	$(x_{i}^{2} - x_{i}^{2})^{2} (y_{i}^{2} - y_{i}^{2})$	x1 - x3	(x1 - x3)(x3 - x2)(y1 - y2)	x2 - x1
$\frac{1}{2\left(\left(x^2-x^1\right)\left(y^3-y^1\right)-\left(x^3-x^1\right)\left(y^2-y^1\right)\right)}$	$\frac{1}{2\left(\left(x^2-x^{i}\right)\left(y^3-y^{i}\right)-\left(x^3-x^{i}\right)\left(y^2-y^{i}\right)\right)^2}$	$\frac{1}{2\left(\left(x^2-x^1\right)\left(y^3-y^1\right)-\left(x^3-x^1\right)\left(y^2-y^1\right)\right)}$	$\frac{1}{2\left(\left(x^2-x^{\dagger}\right)\left(y^3-y^{\dagger}\right)-\left(x^3-x^{\dagger}\right)\left(y^2-y^{\dagger}\right)\right)^2}$	$\frac{2((x^2-x^1)(y^3-y^1)-(x^3-x^1)(y^2-y^2))}{2(x^2-x^2)(y^2-y^2)}$

δ D_{α,x β,y} δ y2=

x3 - x2	(x1-x3)(x3-x2)(y2-y3)	x1 - x3	$(x1 - x3)^2 (y2 - y3)$	x2 - x1
$\overline{2\left(\left(x2-x1\right)\left(y3-y1\right)-\left(x3-x1\right)\left(y2-y1\right)\right)}$	$-\frac{1}{2((x^2-x^1)(y^2-y^1)-(x^2-x^1)(y^2-y^1))^2}$	$\overline{2((x^2 - x^1)(y^3 - y^1) - (x^3 - x^1)(y^2 - y^1))}$	$\frac{1}{2\left(\left(x^2-x^1\right)\left(y^2-y^1\right)-\left(x^2-x^1\right)\left(y^2-y^1\right)\right)^2}$	$\frac{1}{2((x^2-x^1)(y^3-y^1)-(x^3-x^1)(y^2-y^2))}$
(x1-x3)(xx	3 - x2) (y3 - y1)	(x1-x3) ² (y3 - y1)	(<i>x</i> 2
$-\frac{1}{2((x^2-x^1)(y^3-y))}$	$(1) - (x3 - x1)(y2 - y1))^2$	$-\frac{1}{2\left(\left(x^2-x^2\right)\left(y^3-y^2\right)\right)}$	$(y_{2} - (x_{3} - x_{1})(y_{2} - y_{1}))^{2}$	$-\frac{1}{2((x^2-x^1))}$
x3 - x2	(x1-x3) (x3-x2) (y1-y2)	x1 - x3	$(x1 - x3)^2 (y1 - y2)$	x2 - x1
$-\frac{1}{2((x^2-x^1)(y^3-y^1)-(x^3-x^1)(y^2-y^1))}$	$-\frac{1}{2\left(\left(x^2-x^1\right)\left(y^3-y^1\right)-\left(x^3-x^1\right)\left(y^2-y^1\right)\right)^2}$	$-\frac{1}{2\left(\left(x^2-x^1\right)\left(y^2-y^1\right)-\left(x^2-x^1\right)\left(y^2-y^1\right)\right)}$	$-\frac{1}{2\left(\left(x^2-x^1\right)\left(y^3-y^1\right)-\left(x^3-x^1\right)\left(y^2-y^1\right)\right)^2}$	$-\frac{1}{2\left(\left(x^{2}-x^{2}\right)\left(y^{3}-y^{2}\right)-\left(x^{3}-x^{2}\right)\right)\left(y^{3}-y^{2}\right)}$

δ D_{α,x β,y} / δ y3=

x3 - x2	(x2 - x1)(x3 - x2)(y2 - y3)	x1 - x3	$(x^2 - x^1)(x^1 - x^3)(y^2 - y^3)$	x2 - x1
$-\frac{1}{2\left(\left(x^2-x^1\right)\left(y^3-y^1\right)-\left(x^3-x^1\right)\left(y^2-y^1\right)\right)}$	$-\frac{1}{2\left(\left(x^2-x^1\right)\left(y^3-y^1\right)-\left(x^3-x^1\right)\left(y^2-y^1\right)\right)^2}$	$-\frac{1}{2\left(\left(x^2-x^{\dagger}\right)\left(y^3-y^{\dagger}\right)-\left(x^3-x^{\dagger}\right)\left(y^2-y^{\dagger}\right)\right)}$	$-\frac{1}{2\left(\left(x^2-x^1\right)\left(y^2-y^1\right)-\left(x^2-x^1\right)\left(y^2-y^1\right)\right)^2}$	$-\frac{1}{2((x^2-x^1)(y^3-y^1)-(x^3-x^1)(y^3-y^2))}$
x3 - x2	(x2 - x1)(x3 - x2)(y3 - y1)	x1 - x3	(x2 - x1)(x1 - x3)(y3 - y1)	x2 - x1
$\frac{1}{2((x^2-x^1)(y^3-y^1)-(x^3-x^1)(y^2-y^1))}$	$\frac{1}{2\left(\left(x^2-x^1\right)\left(y^3-y^1\right)-\left(x^3-x^1\right)\left(y^2-y^1\right)\right)^2}$	$\frac{1}{2\left(\left(x^2-x^1\right)\left(y^2-y^1\right)-\left(x^2-x^1\right)\left(y^2-y^1\right)\right)}$	$\frac{1}{2\left(\left(x^2-x^1\right)\left(y^2-y^1\right)-\left(x^2-x^1\right)\left(y^2-y^1\right)\right)^2}$	$\frac{2((x^2-x^1)(y^2-y^1)-(x^2-x^1)(y^2-y^2))}{2(x^2-x^2)(y^2-y^2)}$
(<i>x</i> 2 - <i>x</i> 1)(<i>x</i> 3	(-x2) (y1-y2)	(x2-xi)(xi	(-x3) (y1-y2)	(
2 ((<i>x</i> 2 - <i>x</i> 1) (<i>y</i> 3 - <i>y</i> 1	$(x3-x1)(y2-y1)^2$	2 ((<i>x</i> 2 - <i>x</i> 1) (<i>y</i> 3 - <i>y</i> 1	$(x^{2} - x^{1})(y^{2} - y^{1})^{2}$	$2((x^2 - x^1))$

$$\frac{(2-xi)(x3-x2)(y2-y3)}{(y3-yi)-(x3-xi)(y2-yi))^2} = \frac{(x2-xi)(x3-x2)(y3-yi)}{(x2-yi)(x3-x2)(y3-yi)} = \frac{(x2-xi)(x3-x2)(y3-yi)}{((x2-xi)(y3-yi)-(x3-xi)(y2-yi))^2} = \frac{(x2-xi)(x3-x2)(yi-y2)}{((x2-xi)(y3-yi)-(x3-xi)(y2-yi))^2}$$

$$\frac{(x^2 - x^1)(x^1 - x^3)(y^2 - y^3)}{2((x^2 - x^1)(y^3 - y^1) - (x^3 - x^1)(y^2 - y^1))^2}$$

$$\frac{(x^2 - x^1)(x^1 - x^3)(y^3 - y^1)}{(y^3 - y^1) - (x^3 - x^1)(y^2 - y^1)^2}$$

$$\frac{(x^2 - x^1)(x^1 - x^3)(y^1 - y^2)}{2((x^2 - x^1)(y^3 - y^1) - (x^3 - x^1)(y^2 - y^1))^2}$$

$$\frac{(x^2 - x^2)^2 (y^2 - y^3)}{2 ((x^2 - x^2) (y^2 - y^2) - (x^3 - x^2) (y^2 - y^2))^2} - \frac{(x^2 - x^2)^2 (y^3 - y^2)}{2 ((x^2 - x^2) (y^3 - y^2) - (x^3 - x^2) (y^2 - y^2))^2} - \frac{(x^2 - x^2)^2 (y^2 - y^2)}{2 (y^2 - y^2) - (x^3 - x^2) (y^2 - y^2)} - \frac{(x^2 - x^2)^2 (y^2 - y^2)}{(y^2 - y^2) - (x^3 - x^2) (y^2 - y^2))^2}$$

δ D_{α,y β,x}/δ x1=

- (x3 - x2	?) $(y^2 - y^3)^2$	$(x3 - x2)(y_{2})$	(x3-x	
$-\frac{1}{2((x^2-x^1)(y^3-y^1)-(x^3-x^1)(y^2-y^1))^2}$		$-\frac{1}{2\left(\left(x^2-x^1\right)\left(y^3-y^1\right)\right)}$	$-\frac{1}{2\left(\left(x^{2}-x^{2}\right)\right)\left(y\right)}$	
y2 - y3	$(x1 - x3)(y2 - y3)^2$	y3 - y1	(x1 - x3)(y2 - y3)(y3 - y1)	y1 - y2
$\overline{2\left(\left(x2-x1\right)\left(y3-y1\right)-\left(x3-x1\right)\left(y2-y1\right)\right)}$	$-\frac{1}{2((x^2-x^1)(y^3-y^1)-(x^3-x^1)(y^2-y^1))^2}$	$\frac{1}{2\left((x^2 - x^1)(y^2 - y^1) - (x^2 - x^1)(y^2 - y^1)\right)}$	$\frac{1}{2\left(\left(x\mathcal{Z}-x1\right)\left(y\mathcal{Z}-y1\right)-\left(x\mathcal{Z}-x1\right)\left(y\mathcal{Z}-y1\right)\right)^{2}}$	$\frac{2((x^2-x^1)(y^3-y^1)-(x^3-x^1)(y^2-y^2)-(x^3-x^2)(y^2-y^2)}{2(x^2-x^2)(y^2-y^2)-(x^3-x^2)(y^2-y^2)}$
y2 - y3	$(x2 - x1)(y2 - y3)^2$	y3 - y1	(x2 - x1)(y2 - y3)(y3 - y1)	y1 - y2
$-\frac{1}{2((x^2-x^1)(y^2-y^1)-(x^2-x^1)(y^2-y^1))}$	$\frac{1}{2((x^2-x^1)(y^2-y^1)-(x^2-x^1)(y^2-y^1))^2}$	$-\frac{1}{2((x^2-x^1)(y^3-y^1)-(x^3-x^1)(y^2-y^1))}$	$-\frac{1}{2((x^2-x^1)(y^2-y^1)-(x^2-x^1)(y^2-y^1))^2}$	$-\frac{1}{2((x^2-x^1)(y^3-y^1)-(x^3-x^1)(y^2-x^2))}$

δ D_{α,y β,x}/δ x2=

- y2 - y3	(x3 - x2)(y2 - y3)(y3 - y1)	y3 - y1	$(x3 - x2)(y3 - y1)^2$	y1 - y2
$-\frac{1}{2\left(\left(x^2-x^1\right)\left(y^3-y^1\right)-\left(x^3-x^1\right)\left(y^2-y^1\right)\right)}$	$-\frac{1}{2((x^2-x^1)(y^2-y^1)-(x^2-x^1)(y^2-y^1))^2}$	$-\frac{1}{2\left(\left(x^2-x^1\right)\left(y^3-y^1\right)-\left(x^3-x^1\right)\left(y^2-y^1\right)\right)}$	$-\frac{1}{2((x^2-x^1)(y^2-y^1)-(x^2-x^1)(y^2-y^1))^2}$	$-\frac{1}{2((x^2-x^1)(y^3-y^1)-(x^3-x^1)(y^3-y^2))}$
(x1-x3)(y2	(-y3) (y3-y1)	(x1-x3)	$(y\mathcal{J}-y\mathcal{I})^2$	(x1)
$\frac{1}{2}((x^2-x^1)(y^3-y^1)$	$(x_3 - x_1)(y_2 - y_1))^2$	$2((x^2-x^1)(y^3-y^1))$	$(x_3 - x_1)(y_2 - y_1))^2$	$-\frac{1}{2((x^2-x^1))}$
y2 - y3	$(x^2 - x^1)(y^2 - y^3)(y^3 - y^1)$	y3 - y1	$(x^2 - x^1)(y^3 - y^1)^2$	y1 - y2
$\frac{1}{2((x^2-x^1)(y^3-y^1)-(x^3-x^1)(y^2-y^1))}$	$\frac{1}{2\left(\left(x^2-x^{\dagger}\right)\left(y^3-y^{\dagger}\right)-\left(x^3-x^{\dagger}\right)\left(y^2-y^{\dagger}\right)\right)^2}$	$\frac{1}{2\left(\left(x^2-x^1\right)\left(y^3-y^1\right)-\left(x^3-x^1\right)\left(y^2-y^1\right)\right)}$	$\frac{1}{2\left(\left(x\mathcal{Z}-x\mathcal{I}\right)\left(y\mathcal{Z}-y\mathcal{I}\right)-\left(x\mathcal{Z}-x\mathcal{I}\right)\left(y\mathcal{Z}-y\mathcal{I}\right)\right)^{2}}$	$\frac{1}{2((x^2-x^1)(y^3-y^1)-(x^3-x^1)(y^2-y^2))}$

δ D_{α,y β,x} / δ x3=

y2 - y3	(x3 - x2)(y1 - y2)(y2 - y3)	y3 - y1	(x3 - x2)(y1 - y2)(y3 - y1)	y1 - y2
$\frac{1}{2\left(\left(x^2-x^1\right)\left(y^3-y^1\right)-\left(x^3-x^1\right)\left(y^2-y^1\right)\right)}$	$\frac{1}{2\left(\left(x^2-x^1\right)\left(y^3-y^1\right)-\left(x^3-x^1\right)\left(y^2-y^1\right)\right)^2}$	$\frac{1}{2\left(\left(x^2-x^1\right)\left(y^2-y^1\right)-\left(x^2-x^1\right)\left(y^2-y^1\right)\right)}$	$\frac{1}{2\left(\left(x^2-x^1\right)\left(y^2-y^1\right)-\left(x^2-x^1\right)\left(y^2-y^1\right)\right)^2}$	$\frac{2((x^2-x^1)(y^3-y^1)-(x^3-x^1)(y^2-y^2))}{2(x^2-x^2)(y^2-y^2)}$
y2 - y3	(x1 - x3)(y1 - y2)(y2 - y3)	y3 – y1	(x1 - x3)(y1 - y2)(y3 - y1)	y1 - y2
$-\frac{1}{2\left(\left(x^2-x^1\right)\left(y^2-y^1\right)-\left(x^2-x^1\right)\left(y^2-y^1\right)\right)}$	$-\frac{1}{2\left(\left(x^2-x^1\right)\left(y^3-y^1\right)-\left(x^3-x^1\right)\left(y^2-y^1\right)\right)^2}$	$-\frac{1}{2((x^2-x^1)(y^2-y^1)-(x^2-x^1)(y^2-y^1))}$	$-\frac{1}{2((x^2-x^1)(y^3-y^1)-(x^3-x^1)(y^2-y^1))^2}$	$-\frac{1}{2((x^2-x^1)(y^2-y^1)-(x^2-x^1)(y^2-y^2))}$
(x2-x1)(y)	(-y2)(y2-y3)	(x2-x1) (y	$(-y^2)(y^3-y^1)$	
2((xZ-x1)(yZ-y1))	$(x^{3}-x^{1})(y^{2}-y^{1}))^{2}$	$2((x^2-x^1)(y^3-y^1)$	$(y^2 - y^2) - (x^2 - x^2) (y^2 - y^2)^2$	$\frac{1}{2}\left(\left(xZ-x1\right)\right)$

$$\frac{-x^{2}(y^{1}-y^{2})(y^{2}-y^{3})}{(y^{3}-y^{1})-(x^{3}-x^{1})(y^{2}-y^{1}))^{2}} = \frac{(x^{1}-x^{3})(y^{1}-y^{2})(y^{2}-y^{3})}{2((x^{2}-x^{1})(y^{3}-y^{1})-(x^{3}-x^{1})(y^{2}-y^{1}))^{2}} = \frac{(x^{2}-x^{1})(y^{3}-y^{1})-(x^{3}-x^{1})(y^{2}-y^{1}))^{2}}{2((x^{2}-x^{1})(y^{3}-y^{1})-(x^{3}-x^{1})(y^{2}-y^{1}))^{2}}$$

$$\frac{(x3 - x2)(y1 - y2)(y3 - y1)}{2((x2 - x1)(y3 - y1) - (x3 - x1)(y2 - y1))^2}$$

$$\frac{(x3 - x3)(y1 - y2)(y3 - y1)}{(y3 - y1) - (x3 - x1)(y2 - y1))^2}$$

$$\frac{(x2 - x1)(y1 - y2)(y3 - y1)}{2((x2 - x1)(y2 - y1) - (x3 - x1)(y2 - y1))^2}$$

$$\frac{(x3 - x2)(y1 - y2)^2}{2((x2 - x1)(y3 - y1) - (x3 - x1)(y2 - y1))^2} - \frac{(x1 - x3)(y1 - y2)^2}{2((x2 - x1)(y3 - y1) - (x3 - x1)(y2 - y1))^2} - \frac{(x1 - x3)(y1 - y2)^2}{2((x2 - x1)(y3 - y1) - (x3 - x1)(y2 - y1))^2}$$

δ D_{α,y β,x} δ y1=

$(x3 - x2)^2 (y2 - y3)$	x3 - x2	$(x3 - x2)^2 (y3 - y1)$	x3 - x2	
$-\frac{1}{2((x^2-x^1)(y^3-y^1)-(x^3-x^1)(y^2-y^1))^2}$	$-\frac{1}{2((x^2-x^1)(y^2-y^1)-(x^2-x^1)(y^2-y^1))}$	$\frac{1}{2((x^2-x^1)(y^2-y^1)-(x^2-x^1)(y^2-y^1))^2}$	$\frac{1}{2((x^2-x^1)(y^3-y^1)-(x^3-x^1)(y^2-y^1))}$	2 (
(x1 - x3)(x3 - x2)(y2 - y3)	x1 - x3	(x1 - x3)(x3 - x2)(y3 - y1)	x1 - x3	
$-\frac{1}{2\left(\left(x^2-x^1\right)\left(y^3-y^1\right)-\left(x^3-x^1\right)\left(y^2-y^1\right)\right)^2}$	$-\frac{1}{2((x^2-x^1)(y^2-y^1)-(x^2-x^1)(y^2-y^1))}$	$\frac{1}{2((x^2-x^1)(y^2-y^1)-(x^2-x^1)(y^2-y^1))^2}$	$\frac{1}{2((x^2-x^1)(y^3-y^1)-(x^3-x^1)(y^2-y^1))}$	2 (
(x2 - x1)(x3 - x2)(y2 - y3)	x2 - x1	$(x^2 - x^1)(x^3 - x^2)(y^3 - y^1)$	x2 - x1	
$-\frac{1}{2\left(\left(x^2-x^1\right)\left(y^3-y^1\right)-\left(x^3-x^1\right)\left(y^2-y^1\right)\right)^2}$	$-\frac{1}{2((x^2-x^1)(y^2-y^1)-(x^2-x^1)(y^2-y^1))}$	$\frac{1}{2((x^2-x^1)(y^2-y^1)-(x^2-x^1)(y^2-y^1))^2}$	$\frac{1}{2((x^2-x^1)(y^3-y^1)-(x^3-x^1)(y^2-y^1))}$	2 (

δ D_{α,y β,x} / δ y2=

$$\frac{x3 - x2}{2\left((x2 - x1)(y3 - y1) - (x3 - x1)(y2 - y1)\right)} - \frac{(x1 - x3)(x3 - x2)(y2 - y3)}{2\left((x2 - x1)(y3 - y1) - (x3 - x1)(y2 - y1)\right)^2} - \frac{(x1 - x3)(x3 - x2)(y3 - y1)}{2\left((x2 - x1)(y3 - y1) - (x3 - x1)(y2 - y1)\right)^2} - \frac{(x1 - x3)(x3 - x2)(y1 - y2)}{2\left((x2 - x1)(y3 - y1) - (x3 - x1)(y2 - y1)\right)^2} - \frac{(x1 - x3)(x3 - x2)(y1 - y2)}{2\left((x2 - x1)(y3 - y1) - (x3 - x1)(y2 - y1)\right)^2} - \frac{(x1 - x3)^2(y2 - y3)}{2\left((x2 - x1)(y3 - y1) - (x3 - x1)(y2 - y1)\right)^2} - \frac{(x1 - x3)^2(y2 - y3)}{2\left((x2 - x1)(y3 - y1) - (x3 - x1)(y2 - y1)\right)^2} - \frac{(x1 - x3)^2(y3 - y1)}{2\left((x2 - x1)(y3 - y1) - (x3 - x1)(y2 - y1)\right)^2} - \frac{(x1 - x3)^2(y3 - y1)}{2\left((x2 - x1)(y3 - y1) - (x3 - x1)(y2 - y1)\right)^2} - \frac{(x1 - x3)^2(y1 - y2)}{2\left((x2 - x1)(y3 - y1) - (x3 - x1)(y2 - y1)\right)^2} - \frac{(x2 - x1)(x1 - x3)(y2 - y1)^2}{2\left((x2 - x1)(y3 - y1) - (x3 - x1)(y2 - y1)\right)^2} - \frac{(x2 - x1)(x1 - x3)(y3 - y1)}{2\left((x2 - x1)(y3 - y1) - (x3 - x1)(y2 - y1)\right)^2} - \frac{(x2 - x1)(x1 - x3)(y1 - y2)}{2\left((x2 - x1)(y3 - y1) - (x3 - x1)(y2 - y1)\right)^2} - \frac{(x2 - x1)(x1 - x3)(y1 - y2)}{2\left((x2 - x1)(y3 - y1) - (x3 - x1)(y2 - y1)\right)^2} - \frac{(x2 - x1)(x1 - x3)(y1 - y2)}{2\left((x2 - x1)(y3 - y1) - (x3 - x1)(y2 - y1)\right)^2} - \frac{(x2 - x1)(x1 - x3)(y1 - y2)}{2\left((x2 - x1)(y3 - y1) - (x3 - x1)(y2 - y1)\right)^2} - \frac{(x2 - x1)(x1 - x3)(y1 - y2)}{2\left((x2 - x1)(y3 - y1) - (x3 - x1)(y2 - y1)\right)^2} - \frac{(x2 - x1)(x1 - x3)(y2 - y1)^2}{2\left((x2 - x1)(y3 - y1) - (x3 - x1)(y2 - y1)\right)^2} - \frac{(x2 - x1)(x1 - x3)(y2 - y1)^2}{2\left((x2 - x1)(y3 - y1) - (x3 - x1)(y2 - y1)\right)^2} - \frac{(x2 - x1)(x1 - x3)(y2 - y1)^2}{2\left((x2 - x1)(y3 - y1) - (x3 - x1)(y2 - y1)\right)^2} - \frac{(x2 - x1)(x1 - x3)(y2 - y1)^2}{2\left((x2 - x1)(y3 - y1) - (x3 - x1)(y2 - y1)\right)^2} - \frac{(x2 - x1)(x1 - x3)(y2 - y1)^2}{2\left((x2 - x1)(y3 - y1) - (x3 - x1)(y2 - y1)\right)^2} - \frac{(x2 - x1)(x1 - x3)(y2 - y1)^2}{2\left((x2 - x1)(y3 - y1) - (x3 - x1)(y2 - y1)\right)^2} - \frac{(x2 - x1)(x1 - x3)(y2 - y1)^2}{2\left((x2 - x1)(y3 - y1) - (x3 - x1)(y2 - y1)\right)^2}$$

δ D_{α,y β,x} ⁄ δ y3=

$$-\frac{x3-x2}{2((x2-x1)(y3-y1)-(x3-x1)(y2-y1))} - \frac{(x2-x1)(x3-x2)(y2-y3)}{2((x2-x1)(y3-y1)-(x3-x1)(y2-y1))^2} - \frac{x3-x2}{2((x2-x1)(y3-y1)-(x3-x1)(y2-y1))} - \frac{(x2-x1)(x3-x2)(y3-y1)}{2((x2-x1)(y3-y1)-(x3-x1)(y2-y1))^2} - \frac{(x2-x1)(x3-x2)(y3-y1)}{2((x2-x1)(y3-y1)-(x3-x1)(y2-y1))^2}$$

$$\frac{(x3-x2)^{2}(y1-y2)}{2((x2-x1)(y3-y1)-(x3-x1)(y2-y1))^{2}}$$

$$\frac{(x1-x3)(x3-x2)(y1-y2)}{2((x2-x1)(y3-y1)-(x3-x1)(y2-y1))^{2}}$$

$$\frac{(x2-x1)(x3-x2)(y1-y2)}{2((x2-x1)(y3-y1)-(x3-x1)(y2-y1))^{2}}$$

$$-\frac{(x^2 - x^1)(x^3 - x^2)(y^1 - y^2)}{2((x^2 - x^1)(y^3 - y^1) - (x^3 - x^1)(y^2 - y^1))^2} -\frac{(x^2 - x^1)(x^3 - y^3)(y^1 - y^2)}{2((x^2 - x^1)(y^3 - y^1) - (x^3 - x^1)(y^2 - y^1))^2} -\frac{(x^2 - x^1)^2(y^1 - y^2)}{2((x^2 - x^1)(y^3 - y^1) - (x^3 - x^1)(y^2 - y^1))^2}$$

δ D_{α,y β,y} δ x1=

$-\frac{(x3 - x_0)^2}{2((x2 - x_0)(y3 - y_0)^2)}$	$\frac{(y^2 - y^3)}{(y^2 - y^3)(y^2 - y^3))^2}$	$\frac{x3-x}{2\left((x2-x1)\left(y3-y1\right)-x\right)}$	$\frac{x^2}{(x^3 - x^1)(y^2 - y^1)} - \frac{(x^1 - x^3)}{2((x^2 - x^1)(y^3 - y^2))} = \frac{(x^2 - x^3)}{y^3}$	$(x_3 - x_2)(y_2 - y_3)$ $(y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1))^2$	$-\frac{x}{2\left(\left(x^2-x^1\right)\left(y^3-y^2\right)\right)}$	$\frac{3 - x^2}{(1) - (x^2 - x^1)(y^2 - y^1))}$
$\frac{x3 - x2}{2((x2 - x1)(y3 - y1) - (x3 - x1)(y2 - y1))}$	$-\frac{(x1-x3)(x3-x2)(y2-y3)}{2((x2-x1)(y3-y1)-(x3-x1)(y2-y1))^2}$	$\frac{x1 - x}{(x2 - x1)(y3 - y1) - (x-x)(y3 - y1)}$	$\frac{3}{x^3 - x^1} \frac{(x^1 - x^2)}{(x^2 - x^2)} = \frac{(x^2 - x^2)}{2((x^2 - x^2))(x^2 - x^2)}$	$\frac{x3^{2}(y2-y3)}{y1)-(x3-x1)(y2-y1)^{2}}$	$-\frac{x^{2}-x^{3}}{2((x^{2}-x^{2})(y^{3}-y^{2})-(x^{3}-x^{2})(y^{2}-y^{2}))}$	$\frac{x^2}{2(x^2-x^1)(y^2-y^1)}$
$\left[-\frac{x\overline{3}-x\overline{2}}{2\left((x\overline{2}-x\overline{1})(y\overline{3}-y\overline{1})-(x\overline{3}-x\overline{1})(y\overline{2}-y\overline{1})\right)}\right]$	$\int -\frac{(x^2 - x^1)(x^3 - x^2)(y^2 - y^3)}{2((x^2 - x^1)(y^3 - y^1) - (x^3 - x^1)(y^2 - y^1))^2}$	$-\frac{x!-x\vec{\sigma}}{2\left((x\vec{\sigma}-xt)(y\vec{\sigma}-yt)-(x\vec{\sigma}-xt)(y\vec{\sigma}-yt)\right)}+$	$\frac{x^2 - x^1}{2((x^2 - x^1)(y^3 - y^1) - (x^3 - x^1)(y^2 - y^2))}$	$\frac{(x^2 - x_1)(x^1 - x_3)(y^2 - y_3)}{2((x^2 - x_1)(y^2 - y_1) - (x^3 - x_1)(y^2 - y_1))^2}$	$\frac{1}{2} \qquad -\frac{x}{(x^2 - x^1)(y^2 - y^2)}$	2-x1 1)-(x3-x1)(y2-y1)

δ D_{α,y β,y} / δ x2=

	x3 - x2	$(x3 - x2)^2$ (y3 - y1)	x1 - x3	(x1 - x3)(x3 - x2)(y3 - y1)	x3 - x2	x2 ·
	$-\frac{1}{(x^2-x^1)(y^2-y^1)-(x^2-x^1)(y^2-y^1)}$	$\frac{1}{2((x^2-x^1)(y^3-y^1)-(x^2-y^2))}$	$(x3-x1)(y2-y1))^2$	$-\frac{1}{2((x^2-x^1)(y^3-y^1)-(x^3-x^1)(y^2-y^1))}$	$-\frac{1}{2((x^2-x^1)(y^3-y^1)-(x^3-x^1)(y^2-y^1))^2}$	$\frac{1}{2((x^2-x^1)(y^2-y^1)-(x^2-x^1)(y^2-y^1))}$	$-\frac{1}{2((x^2-x^1)(y^3-y^1))}$
	x1 - x3	(x1-x3)(x3-	- x2) (y3 - y1)	(x1-x3)	$)^2 (y - y i)$	xi	- x3
-	$\overline{2((x^2-x^1)(y^2-y^1)-(x^2-x^1)(y^2-y^1)}$	$\overline{)} - \frac{1}{2((x^2 - x^1)(y^3 - y^1))}$	$-(x3-x1)(y2-y1))^2$	$-\frac{1}{2\left(\left(x^2-x^1\right)\left(y^3-y^2\right)\right)}$	$(y_{2}^{2} - y_{1}^{2})(y_{2}^{2} - y_{1}^{2}))^{2}$	$2((x^2-x^1)(y^3-y^1))$	$\overline{()-(x3-x1)(y2-y1))}$
x3 — x	x2 x2	!-x1	$(x^2 - x^1)(x^3 - x^2)(y^3 - y^1)$	x1 - x3	$(x^2 - x^1)(x^1 - x^2)(y^2 - y^1)$	x2	!-x1
((x2-x1)(y3-y1)-	$\frac{1}{(x^3 - x^1)(y^2 - y^1)} - \frac{1}{2((x^2 - x^1)(y^3 - y^2))}$	$(y^2 - y^1)(y^2 - y^1))$	$\frac{1}{2((x^2-x^1)(y^2-y^1)-(x^2-x^1)(y^2-y^1))^2}$	$= \frac{2((x^2 - x^1)(y^2 - y^1) - (x^2 - x^1)(y^2 - y^1))}{2((x^2 - x^1)(y^2 - y^1))}$	$\frac{1}{2\left(\left(x^2-x^1\right)\left(y^2-y^1\right)-\left(x^2-x^1\right)\left(y^2-y^1\right)\right)^2}$	$(x^2 - x^1)(y^3 - y^1)$	-(x3-x1)(y2-y1)

δ D_{α,y β,y} ⁄ δ x3=

[x3 - x2	$(x3 - x2)^2$ (y1-y2)	x3 - x2	x1 - x3	(x1 - x3)(x3 - x2)(y1 - y2)	
	$(x^2 - x^1)(y^2 - y^1) - (x^2 - x^1)(y^2 - y^1)$	$\frac{1}{2((x^2-x^1)(y^3-y^1)-(x^2-y^2))}$	$x3 - x1)(y2 - y1))^2$	$-\frac{1}{2\left(\left(x^2-x^1\right)\left(y^2-y^1\right)-\left(x^2-x^1\right)\left(y^2-y^1\right)\right)}$	$^{+}\overline{2\left(\left(x\overline{z}-x\overline{1}\right)\left(y\overline{z}-y\overline{1}\right)-\left(x\overline{z}-x\overline{1}\right)\left(y\overline{z}-y\overline{1}\right)\right)}$	$-\frac{1}{2((x^2-x^1)(y^3-y^1)-(x^3-x^1)(y^2-y^1))^2}$	$2((x^2 - x^1)(y^3 - x^2))$
x3 - x	2 .	x1 – x3	(x1 - x3)(x3 - x2)(y1 - y2)	xi	- x3 (x1-x3) ²	(y1-y2)	
$-\frac{1}{2((x^2-x^1)(y^3-y^1)-(x^2-y^2))}$	$(x^3 - x^1)(y^2 - y^1))^+ \frac{1}{2((x^2 - x^1)(y^3 - y^3))^+}$	$(y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1))$	$\frac{1}{2\left(\left(x^2-x^{\dagger}\right)\left(y^3-y^{\dagger}\right)-\left(x^3-x^{\dagger}\right)\left(y^2-y^{\dagger}\right)\right)^2}$	$-\frac{1}{(x^2-x^1)(y^3-y^1)}$	$\frac{-(x3-x1)(y2-y1)}{2((x2-x1)(y3-y1))} = \frac{-2}{2((x2-x1)(y3-y1))}$	$-(x3-x1)(y2-y1))^2$	$-\frac{1}{2((x^2-x^1)(y^3-x^2))}$
	x2 - x1	(x2 - x1) (x3 -	- x2) (y1 - y2)	х2	$-xi$ $(x^2-xi)(x$	(-x3)(y1-y2)	
2	$((x^2 - x^1)(y^3 - y^1) - (x^3 - x^1)(y^2 - y^1))$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{2(x^2 - x^1)(y^3 - y^1)}$	$-(x3-x1)(y2-y1))^2$	$\frac{1}{2}((x^2-x^1)(y^2-y^1))$	$-(x3-x1)(y2-y1))^{-2}((x2-x1)(y3-y1))^{-2}$	$)-(x3-x1)(y2-y1))^2$	

$$\frac{(x^2 - xi)(x^3 - x^2)(y^2 - y^3)}{2((x^2 - xi)(y^3 - yi) - (x^3 - xi)(y^2 - yi))^2}$$

$$\frac{x^2 - xi}{(x^2 - xi)(y^2 - yi)} - \frac{(x^2 - xi)(xi - x^3)(y^2 - y^3)}{2((x^2 - xi)(y^3 - yi) - (x^3 - xi)(y^2 - yi))^2}$$

$$\frac{x^2 - xi}{(x^2 - xi)(y^2 - yi)(y^2 - yi)(y^2 - yi)(y^2 - yi))^2}$$

$$\frac{x^2 - x^{j}}{(-y^{j}) - (x^3 - x^{j})(y^2 - y^{j}))} - \frac{(x^2 - x^{j})(x^3 - x^2)(y^3 - y^{j})}{2((x^2 - x^{j})(y^3 - y^{j}) - (x^3 - x^{j})(y^2 - y^{j}))^2}$$

$$\frac{(x^2 - x^{j})(x^{j} - x^{j})(y^3 - y^{j}) - (x^3 - x^{j})(y^2 - y^{j})}{2((x^2 - x^{j})(y^3 - y^{j}) - (x^3 - x^{j})(y^2 - y^{j}))^2}$$



δ D_{α,y β,y} δ y1=

$$\begin{bmatrix} -\frac{(x^{3}-x^{2})^{3}}{2\left((x^{2}-x^{1})(y^{3}-y^{1})-(x^{3}-x^{1})(y^{2}-y^{1})\right)^{2}} & -\frac{(x^{1}-x^{3})(x^{3}-x^{2})^{2}}{2\left((x^{2}-x^{1})(y^{3}-y^{1})-(x^{3}-x^{1})(y^{2}-y^{1})\right)^{2}} & -\frac{(x^{2}-x^{1})(x^{3}-x^{2})^{2}}{2\left((x^{2}-x^{1})(y^{3}-y^{1})-(x^{3}-x^{1})(y^{2}-y^{1})\right)^{2}} \\ -\frac{(x^{2}-x^{1})(x^{3}-x^{2})^{2}}{2\left((x^{2}-x^{1})(x^{3}-x^{2})^{2}} & -\frac{(x^{2}-x^{1})(x^{3}-x^{2})}{2\left((x^{2}-x^{1})(x^{3}-x^{2})\right)^{2}} & -\frac{(x^{2}-x^{1})(x^{3}-x^{2})}{2\left((x^{2}-x^{1})(y^{3}-y^{1})-(x^{3}-x^{1})(y^{2}-y^{1})\right)^{2}} \\ -\frac{(x^{2}-x^{1})(x^{3}-x^{2})^{2}}{2\left((x^{2}-x^{1})(x^{3}-x^{2})^{2}} & -\frac{(x^{2}-x^{1})(x^{1}-x^{3})(x^{3}-x^{2})}{2\left((x^{2}-x^{1})(x^{3}-x^{2})(x^{3}-x^{2})\right)^{2}} & -\frac{(x^{2}-x^{1})(x^{2}-x^{1})(y^{2}-y^{1})^{2}}{2\left((x^{2}-x^{1})(y^{3}-y^{1})-(x^{3}-x^{1})(y^{2}-y^{1})\right)^{2}} \\ -\frac{(x^{2}-x^{1})(x^{3}-x^{2})^{2}}{2\left((x^{2}-x^{1})(y^{3}-y^{1})-(x^{3}-x^{1})(y^{2}-y^{1})\right)^{2}} & -\frac{(x^{2}-x^{1})(x^{2}-x^{1})(y^{2}-y^{1})^{2}}{2\left((x^{2}-x^{1})(y^{3}-y^{1})-(x^{3}-x^{1})(y^{2}-y^{1})\right)^{2}} \\ -\frac{(x^{2}-x^{1})(y^{3}-y^{1})-(x^{3}-x^{1})(y^{2}-y^{1})^{2}}{2\left((x^{2}-x^{1})(y^{3}-y^{1})-(x^{3}-x^{1})(y^{2}-y^{1})\right)^{2}} & -\frac{(x^{2}-x^{1})(x^{2}-x^{1})(y^{2}-y^{1})^{2}}{2\left((x^{2}-x^{1})(y^{3}-y^{1})-(x^{3}-x^{1})(y^{2}-y^{1})\right)^{2}} \\ -\frac{(x^{2}-x^{1})(x^{2}-x^{2})^{2}}{2\left((x^{2}-x^{1})(y^{2}-y^{1})\right)^{2}} & -\frac{(x^{2}-x^{1})(x^{2}-x^{2})^{2}}{2\left((x^{2}-x^{1})(y^{2}-y^{1})-(x^{2}-x^{1})(y^{2}-y^{1})\right)^{2}} \\ -\frac{(x^{2}-x^{1})(x^{2}-x^{2})^{2}}{2\left((x^{2}-x^{1})(y^{2}-y^{1})\right)^{2}} & -\frac{(x^{2}-x^{1})(x^{2}-x^{2})^{2}}{2\left((x^{2}-x^{1})(y^{2}-y^{1})-(x^{2}-x^{1})(y^{2}-y^{1})\right)^{2}} \\ -\frac{(x^{2}-x^{1})(x^{2}-x^{2})^{2}}{2\left((x^{2}-x^{1})(y^{2}-y^{1})-(x^{2}-x^{1})(y^{2}-y^{1})\right)^{2}} \\ -\frac{(x^{2}-x^{1})(x^{2}-x^{2})^{2}}{2\left((x^{2}-x^{1})(y^{2}-y^{1})-(x^{2}-x^{1})(y^{2}-y^{1})\right)^{2}} \\ -\frac{(x^{2}-x^{1})(x^{2}-x^{2})^{2}}{2\left((x^{2}-x^{1})(y^{2}-y^{1})-(x^{2}-x^{1})(y^{2}-y^{1})\right)^{2}} \\ -\frac{(x^{2}-x^{1})(x^{2}-x^{2})^{2}}{2\left((x^{2}-x^{1})(y^{2}-y^{1})\right)^{2}} \\ -\frac{(x^{2}-x^{1})(x^{2}-x^{2})^{2}}{2\left((x^{2}-x$$

δ D_{α,y β,y} / δ y2=

$$\begin{bmatrix} -\frac{(x^{1}-x^{2})(x^{2}-x^{2})^{2}}{2((x^{2}-x^{1})(y^{3}-y^{1})-(x^{3}-x^{1})(y^{2}-y^{1}))^{2}} & -\frac{(x^{1}-x^{3})^{2}(x^{3}-x^{2})}{2((x^{2}-x^{1})(y^{3}-y^{1})-(x^{3}-x^{1})(y^{2}-y^{1}))^{2}} & -\frac{(x^{2}-x^{1})(x^{1}-x^{3})(x^{3}-x^{2})}{2((x^{2}-x^{1})(y^{3}-y^{1})-(x^{3}-x^{1})(y^{2}-y^{1}))^{2}} \\ -\frac{(x^{2}-x^{1})(x^{1}-x^{3})(x^{3}-x^{2})}{2((x^{2}-x^{1})(x^{1}-x^{3})(x^{3}-x^{2})} & -\frac{(x^{2}-x^{1})(x^{1}-x^{3})^{2}}{2((x^{2}-x^{1})(x^{1}-x^{3})^{2}} & -\frac{(x^{2}-x^{1})(x^{1}-x^{3})^{2}}{2((x^{2}-x^{1})(x^{3}-y^{1})-(x^{3}-x^{1})(y^{2}-y^{1}))^{2}} \\ -\frac{(x^{2}-x^{1})(x^{1}-x^{3})(x^{3}-x^{2})}{2((x^{2}-x^{1})(x^{3}-x^{1})(y^{2}-y^{1})-(x^{3}-x^{1})(y^{2}-y^{1}))^{2}} & -\frac{(x^{2}-x^{1})(x^{1}-x^{3})^{2}}{2((x^{2}-x^{1})(x^{3}-x^{1})(y^{2}-y^{1}))^{2}} \\ -\frac{(x^{2}-x^{1})(x^{3}-x^{2})}{2((x^{2}-x^{1})(y^{3}-y^{1})-(x^{3}-x^{1})(y^{2}-y^{1}))^{2}} & -\frac{(x^{2}-x^{1})(x^{2}-x^{1})(y^{2}-y^{1})^{2}}{2((x^{2}-x^{1})(y^{3}-y^{1})-(x^{3}-x^{1})(y^{2}-y^{1}))^{2}} \end{bmatrix}$$

δ D_{α,y β,y} δ y3=

$$\begin{bmatrix} -\frac{(x^2 - x^1)(x^3 - x^2)^2}{2((x^2 - x^1)(y^3 - y^1) - (x^3 - x^1)(y^2 - y^1))^2} & -\frac{(x^2 - x^1)(x^1 - x^3)(x^3 - x^2)}{2((x^2 - x^1)(y^3 - y^1) - (x^3 - x^1)(y^2 - y^1))^2} & -\frac{(x^2 - x^1)(x^1 - x^3)^2}{2((x^2 - x^1)(y^3 - y^1) - (x^3 - x^1)(y^2 - y^1))^2} & -\frac{(x^2 - x^1)(x^1 - x^3)^2}{2((x^2 - x^1)(y^3 - y^1) - (x^3 - x^1)(y^2 - y^1))^2} & -\frac{(x^2 - x^1)(x^2 - x^3)}{2((x^2 - x^1)(y^3 - y^1) - (x^3 - x^1)(y^2 - y^1))^2} & -\frac{(x^2 - x^1)(x^2 - x^3)(y^2 - y^1)^2}{2((x^2 - x^1)(y^3 - y^1) - (x^3 - x^1)(y^2 - y^1))^2} & -\frac{(x^2 - x^1)(x^2 - x^3)}{2((x^2 - x^1)(y^3 - y^1) - (x^3 - x^1)(y^2 - y^1))^2} & -\frac{(x^2 - x^1)(x^2 - x^3)}{2((x^2 - x^1)(y^3 - y^1) - (x^3 - x^1)(y^2 - y^1))^2} & -\frac{(x^2 - x^1)^3}{2((x^2 - x^1)(y^3 - y^1) - (x^3 - x^1)(y^2 - y^1))^2} & -\frac{(x^2 - x^1)^3}{2((x^2 - x^1)(y^3 - y^1) - (x^3 - x^1)(y^2 - y^1))^2} & -\frac{(x^2 - x^1)(y^2 - y^1)^2}{2((x^2 - x^1)(y^3 - y^1) - (x^3 - x^1)(y^2 - y^1))^2} & -\frac{(x^2 - x^1)(y^3 - y^1) - (x^3 - x^1)(y^2 - y^1)^2}{2((x^2 - x^1)(y^3 - y^1) - (x^3 - x^1)(y^2 - y^1))^2} & -\frac{(x^2 - x^1)(y^3 - y^1) - (x^3 - x^1)(y^2 - y^1)^2}{2((x^2 - x^1)(y^3 - y^1) - (x^3 - x^1)(y^2 - y^1))^2} & -\frac{(x^2 - x^1)(y^3 - y^1) - (x^3 - x^1)(y^2 - y^1)^2}{2((x^2 - x^1)(y^3 - y^1) - (x^3 - x^1)(y^2 - y^1))^2} & -\frac{(x^2 - x^1)(y^3 - y^1) - (x^3 - x^1)(y^2 - y^1)^2}{2((x^2 - x^1)(y^3 - y^1) - (x^3 - x^1)(y^2 - y^1))^2} & -\frac{(x^2 - x^1)^3}{2((x^2 - x^1)(y^3 - y^1) - (x^2 - x^1)(y^2 - y^1))^2} & -\frac{(x^2 - x^1)^3}{2((x^2 - x^1)(y^3 - y^1) - (x^2 - x^1)(y^2 - y^1))^2} & -\frac{(x^2 - x^1)^3}{2((x^2 - x^1)(y^3 - y^1) - (x^2 - x^1)(y^2 - y^1))^2} & -\frac{(x^2 - x^1)^3}{2((x^2 - x^1)(y^3 - y^1) - (x^2 - x^1)(y^2 - y^1))^2} & -\frac{(x^2 - x^1)^3}{2((x^2 - x^1)(y^3 - y^1) - (x^2 - x^1)(y^2 - y^1))^2} & -\frac{(x^2 - x^1)^3}{2((x^2 - x^1)(y^2 - y^1) - (x^2 - x^1)(y^2 - y^1))^2} & -\frac{(x^2 - x^1)^3}{2((x^2 - x^1)(y^2 - y^1) - (x^2 - x^1)(y^2 - y^1))^2} & -\frac{(x^2 - x^1)^3}{2((x^2 - x^1)(y^2 - y^1) - (x^2 - x^1)(y^2 - y^1))^2} & -\frac{(x^2 - x^1)^3}{2((x^2 - x^1)(y^2 - y^1) - (x^2 - x^1)(y^2 - y^1))^2} & -\frac{(x^2$$

