

## 付属資料-1 流体解析手法の形状最適化問題への応用例

付属資料-1 では、本編で述べた一般化された音速法を用いて、海岸護岸の形状最適化に関する試計算を行った。海岸護岸を対象に本格的な形状最適化を行うためには、数値解析モデルで越波や碎波を正確に予測できるアルゴリズムを追加する必要がある。また、水理模型実験結果との比較・検証も必要である。

## 1. 形状最適化の研究事例

最初に、形状最適化に関する研究成果の概要を整理し、その長所・短所を整理する。

### 1. 1. 空気流体を対象とした研究事例

空気流体を対象とした研究事例は、数多くある。例えば、航空機本体や自動車本体の分野では、実用的に用いられている。図-1.1は、航空機に作用する抗力に対して最適形状を求めた事例であり、図-1.2は一様流中においた円柱に作用する水平力を最小化できるように最適形状を求めた事例である。本研究でも、水を対象とした流体中における形状決定問題を取り合扱う。計算法については、次章にて詳述する。

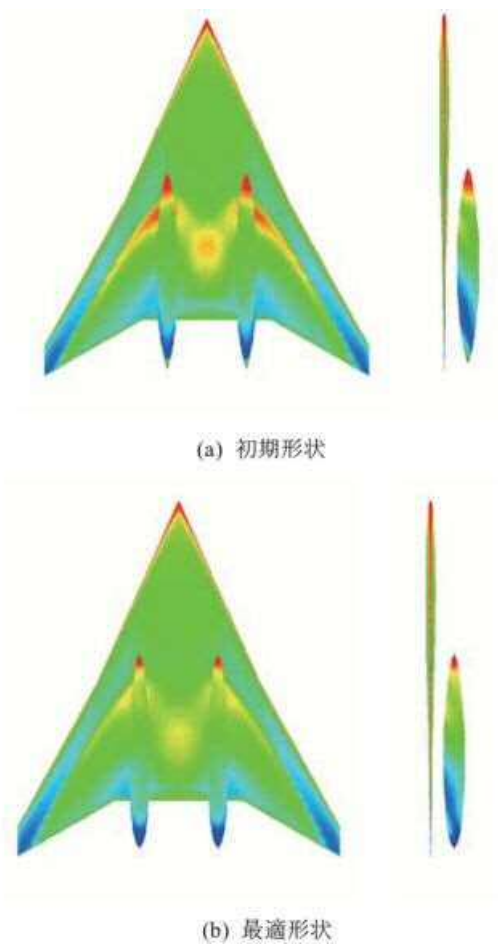
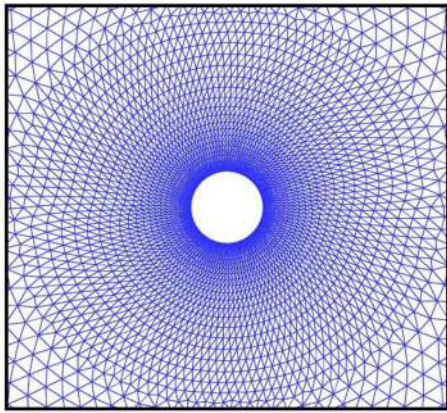
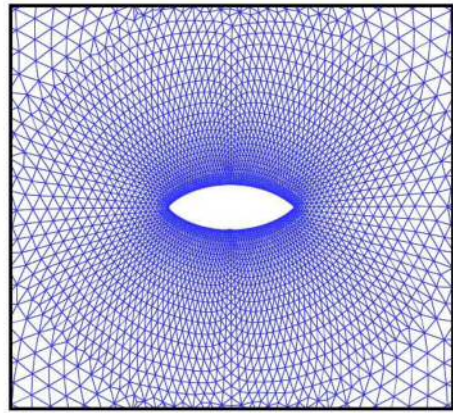


図-1.1 航空機に作用する抗力に対する最適形状の計算事例

(出典：宇宙航空研究開発機構研究開発報告 JAXA-RR-07-049)



(1) 初期形状



(2) 最終形状

図-1.2 円柱に作用する水平力に対する最適形状の計算事例

(出典：寺地和樹、中央大学大学院学位論文)

## 1. 2. 港湾・海岸関係での形状最適化の事例

次に、港湾・海岸関係における形状最適化の事例を紹介する。港湾・海岸関係では、構造物の形状最適化を行った事例はほとんどない。形状最適化があまり適用されない理由については、後述する。事例として、フレア式護岸と呼ばれる海岸護岸の事例を示す。通常の海岸護岸と比べ、上部がせり出た形状となっているが、越波流量を低減し、景観にも配慮して低天端構造とすることを目標としている。図-1.3 にフレア式護岸の適用事例を示す。また、図-1.4 には、越波流量の算定フローを示す。フローの中段に、越波流量の算定図表があるが、系統的な水理模型実験の結果を踏まえて作成されたものである。

なお、この護岸構造の場合、越波流量の低減は図れるが、護岸に作用する水平力は通常の護岸構造よりも衝撃波力の影響もあり大きくなる二律相反の問題を抱えている。そのため、本体構造は、コンクリートと鋼材のハイブリッド構造を採用している。また、フレア式護岸に関する最新の論文では、風の影響を受けると、越波に対する防護性能が低下すると報告されている。

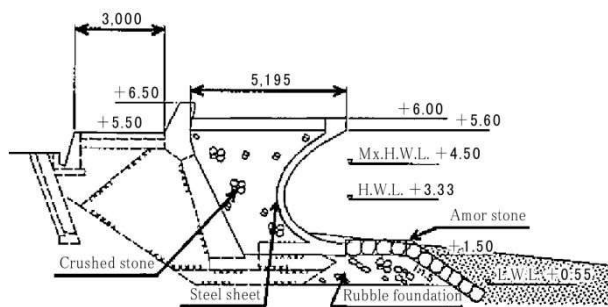


図-1.3 海岸護岸の最適設計事例（出典：神戸製鋼技報）

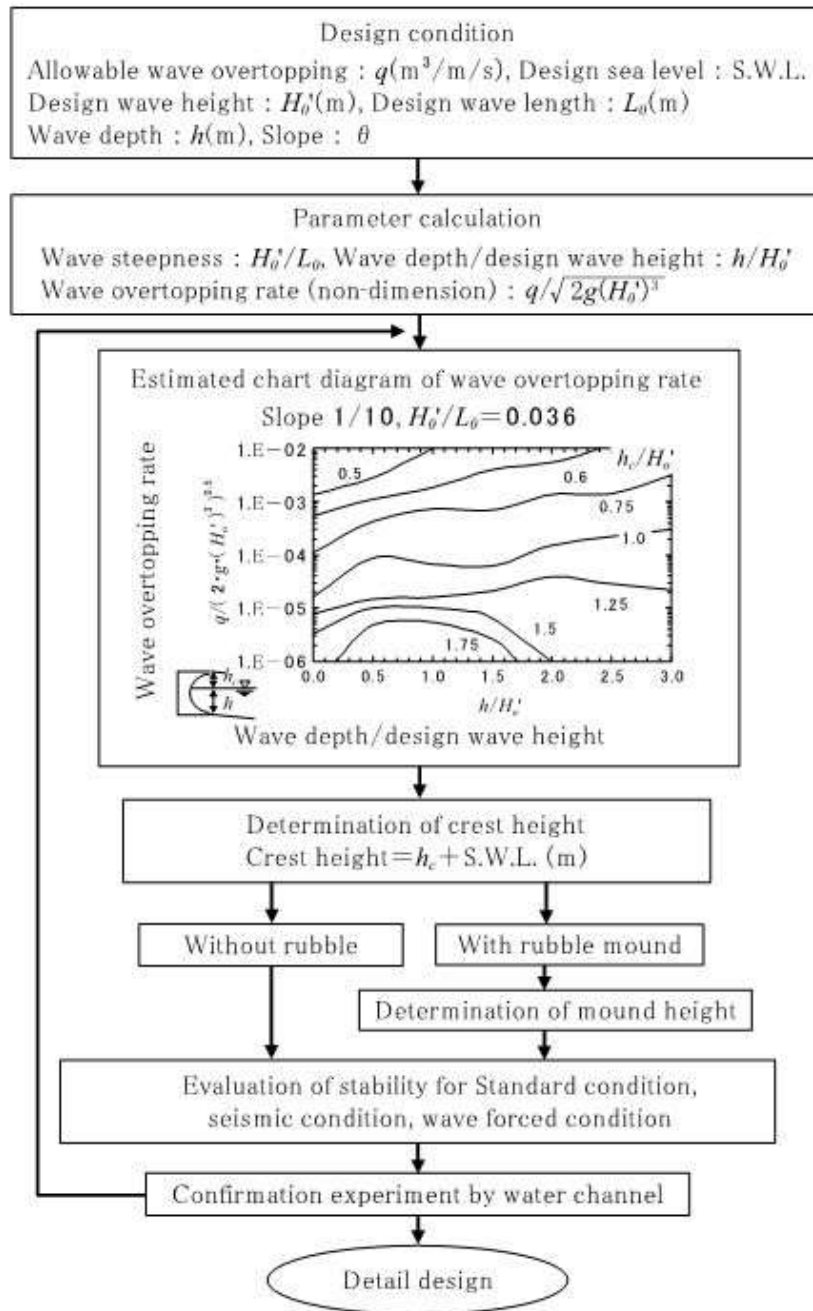


図2 フレア護岸の設計フロー  
**Fig. 2** Design flow chart

図-1.4 フレア式護岸の越波流量の算定フロー (出典：神戸製鋼技報)

### 1. 3. 形状最適化の長所・短所

以上、数例について最適設計の事例を取集整理した。まず、港湾・海岸関係で形状最適化の事例が少ない理由としては、以下の点が挙げられる。

<港湾・海岸関係で形状最適化の事例が少ない理由>

- 1) 形状最適化は、港湾・海岸分野で標準的な設計手法として確立されておらず、現状では設計者の知識・技量に大きく左右されることとなり、設計費用・検討期間ともに膨れ上がることになり、実務では採用されにくい。
- 2) 形状最適化の結果として得られる流線的な形状は、施工上、構築することは容易ではなく、フレア式護岸の例のようにメーカーの特殊技術が必要である。
- 3) 航空機や自動車は一度最適設計を行うと、その結果に基づき量産体制を構築することが可能ではある。しかし、土木構造物の場合、現場条件に合わせて設計を行うことになり、全て注文生産である。したがって、形状最適化のプロセスも毎回必要となり、設計コストの省力化の面で敬遠される。

また、形状最適化の長所・短所としては、以下の点が挙げられる。

<形状最適化の長所>

- 1) 任意の初期形状に対して形状最適化が可能なので、水理模型実験や風洞実験にかかる労力や費用を抑えることができる。
- 2) 対象となる施設の標準的な計算プログラムが確立できれば、設計コストの省力化も可能となる。

<形状最適化の短所>

- 1) 計算メッシュにより、計算の安定性や精度も変わるため、メッシュ作成のノウハウが必要である。
- 2) 初期形状の設定により、アウトプットとなる最適形状が変わりうる。
- 3) 計算時間が膨大となるため、ハイスペックのコンピューターが必要である。
- 4) 計算時間を短縮化するため、プログラムの高速化を意識したプログラミングが必要である。

## 2. 護岸の形状最適化

### 2. 1. 計算手法

#### (1) 概要

海岸護岸を例にあげると、形状最適化計の観点では、構造物に作用する水平力 ( $\Sigma F_x$ ) と鉛直力 ( $\Sigma F_y$ ) の和を時間方向にも積分し、最小化する方法が考えられる。評価関数 (Performance function) は、以下のように表すことができる。

#### ■ Performance Function

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (F_i Q_{ij} F_j) dt \rightarrow \text{最小化}$$

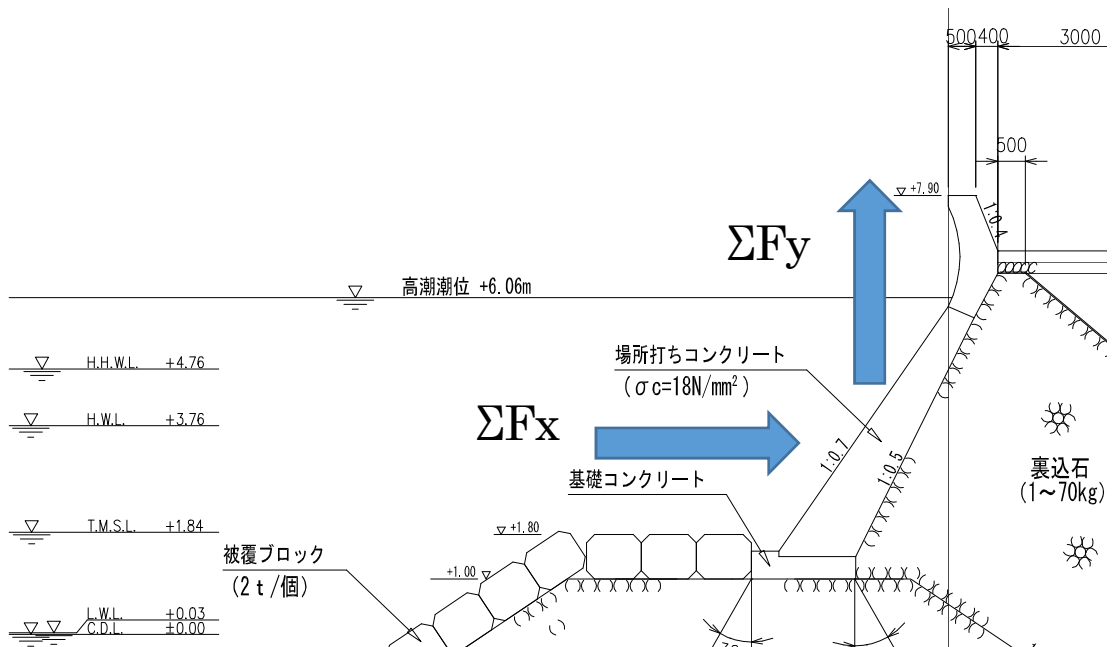


図-2.1 海岸護岸に作用する水平力・鉛直力

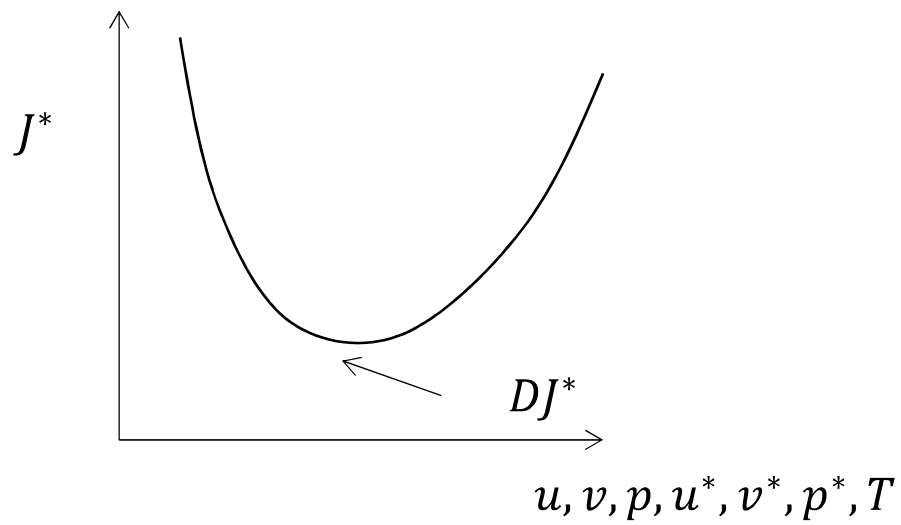
#### (2) 基礎方程式の導出

流体の中では、前章で記述した流体の連続式と運動方程式も満たすため、前述の評価関数 (Performance function) に流体の連続式・運動方程式を加味すれば、以下のような拡張評価関数 (Extended performance function) が得られる。

■ Extended performance function

$$J^* = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (F_i Q_{ij} F_j) dt + \int_{t_0}^{t_f} p_\alpha^* (\phi_0 M_{\alpha\beta} \dot{v}_\beta + K_{\alpha\beta\gamma j} u_{\beta j} p_\gamma + H_{\alpha\beta i} u_{\beta i}) dt + \int_{t_0}^{t_f} u_{\alpha i}^* (\rho_0 M_{\alpha\beta} u_{\beta i} + K_{\alpha\beta\gamma j} u_{\beta j} u_{\gamma i} - H_{\beta i \alpha} p_\beta - S_{\alpha i \beta j} u_{\beta j} - T_{\alpha i}) dt \quad (\text{A.1})$$

この拡張評価関数を最小化できる海岸護岸の断面形状を求めることになるが、最小点では、以下のイメージ図に示すように、各変数で微分した値がゼロになる条件を探していけばよい。



$$DJ^* = \frac{\partial J^*}{\partial p_\alpha^*} \delta p_\alpha^* + \frac{\partial J^*}{\partial u_{\alpha i}^*} \delta u_{\alpha i}^* + \dots$$

図-2.2 拡張評価関数の最小化イメージ



そこで、拡張評価関数を各変数で微分すると、以下の式が得られる。

$$\begin{aligned}
DJ^* = & \int_{t_0}^{t_f} \delta p_\alpha^* (\phi_0 M_{\alpha\beta} \dot{p}_\beta + K_{\alpha\beta\gamma j} u_{\beta j} p_\gamma + H_{\alpha\beta i} u_{\beta i}) dt + \int_{t_0}^{t_f} \delta u_{\alpha i}^* (\rho_0 M_{\alpha\beta} \dot{u}_{\beta i} + K_{\alpha\beta\gamma j} u_{\beta j} u_{\gamma i} - \\
& H_{\beta i \alpha} p_\beta - S_{\alpha i \beta j} u_{\beta j} - T_{\alpha i}) dt + \int_{t_0}^{t_f} \delta p_\beta (-\phi_0 M_{\alpha\beta} \dot{p}_\alpha + \phi_0 K_{\alpha\beta\gamma j} u_{\beta j} p_\alpha^* - H_{\beta i \alpha} u_{\alpha i}^*) dt + \\
& \int_{t_0}^{t_f} \delta u_{\beta i} (-\rho_0 M_{\alpha\beta} \dot{u}_{\beta i} + \phi_0 K_{\alpha\beta\gamma i} p_\beta p_\alpha^* + \rho_0 K_{\alpha\beta\gamma j} u_{\beta j} u_{\alpha j}^* + \rho_0 K_{\alpha\beta\gamma j} u_{\beta j} u_{\alpha i}^* - S_{\alpha i \beta j} u_{\alpha j}^*) dt + \\
& \int_{t_0}^{t_f} \delta T_{\alpha i} (-u_{\alpha i}^* - Q_{ij} F_j) dt + M_{\alpha\beta} p_\alpha^*(t_f) \delta p_\beta(t_f) - M_{\alpha\beta} p_\alpha^*(t_0) \delta p_\beta(t_0) + \\
& M_{\alpha\beta} u_{\alpha i}^*(t_f) \delta u_{\beta i}(t_f) - M_{\alpha\beta} u_{\alpha i}^*(t_0) \delta u_{\beta i}(t_0) + G_{\delta k} X_{\delta k} = 0
\end{aligned} \tag{A.2}$$

$DJ^* = 0$ となるためには、上の式(A.2)の各項がそれぞれゼロにならなければならない。したがって、以下の式が得られる。ここに、式(A.3)と式(A.4)は、流体の連続式と運動方程式である。また、式(A.5)と式(A.6)は Adjoint の変数に関する連続式と運動方程式である。Adjoint の変数は、第5式の通り、流体の水平力・鉛直力と等価となる。式(A.7)と式(A.8)は、Adjoint の変数が満たすべき時間的な境界条件となる。また、最後の式(A.9)は、メッシュ移動に関する評価式である。

$$\phi_0 M_{\alpha\beta} \dot{p}_\beta + K_{\alpha\beta\gamma j} u_{\beta j} p_\gamma + H_{\alpha\beta i} u_{\beta i} = 0 \tag{A.3}$$

$$\rho_0 M_{\alpha\beta} \dot{u}_{\beta i} + K_{\alpha\beta\gamma j} u_{\beta j} u_{\gamma i} - H_{\beta i \alpha} p_\beta - S_{\alpha i \beta j} u_{\beta j} - T_{\alpha i} = 0 \tag{A.4}$$

$$-\phi_0 M_{\alpha\beta} \dot{p}_\alpha + \phi_0 K_{\alpha\beta\gamma j} u_{\beta j} p_\alpha^* - H_{\beta i \alpha} u_{\alpha i}^* = 0 \tag{A.5}$$

$$-\rho_0 M_{\alpha\beta} \dot{u}_{\beta i} + \phi_0 K_{\alpha\beta\gamma i} p_\beta p_\alpha^* + \rho_0 K_{\alpha\beta\gamma j} u_{\beta j} u_{\alpha j}^* + \rho_0 K_{\alpha\beta\gamma j} u_{\beta j} u_{\alpha i}^* - S_{\alpha i \beta j} u_{\alpha j}^* = 0$$

$$-u_{\alpha i}^* = Q_{ij} F_j \tag{A.6}$$

$$M_{\alpha\beta} p_\alpha^*(t_f) \delta p_\beta(t_f) = M_{\alpha\beta} p_\alpha^*(t_0) \delta p_\beta(t_0) \tag{A.7}$$

$$M_{\alpha\beta} u_{\alpha i}^*(t_f) \delta u_{\beta i}(t_f) = M_{\alpha\beta} u_{\alpha i}^*(t_0) \delta u_{\beta i}(t_0) \tag{A.8}$$

$$G_{\delta k} X_{\delta k} = 0 \tag{A.9}$$

結局、 $\delta J^* = 0$ となるためには、以下の式(A.10)によりメッシュを移動させながら、評価関数を最小化できる条件を繰り返し計算により求めていくことになる。

$$DJ^* = G_{\delta k} X_{\delta k} = 0 \tag{A.10}$$

$$\begin{aligned}
G_{\delta k} = & \int_{t_0}^{t_f} p_{\alpha}^* \left( \phi_0 \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial X_{\delta k}} \dot{p}_{\beta} + \frac{\partial K_{\alpha\beta\gamma j}}{\partial X_{\delta k}} u_{\beta j} p_{\gamma} + \frac{\partial H_{\alpha\beta i}}{\partial X_{\delta k}} u_{\beta i} \right) dt + \int_{t_0}^{t_f} u_{\alpha i}^* \left( \rho_0 \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial X_{\delta k}} \dot{u}_{\beta i} + \frac{\partial K_{\alpha\beta\gamma j}}{\partial X_{\delta k}} u_{\beta j} u_{\gamma i} - \right. \\
& \left. \frac{\partial H_{\beta i \alpha}}{\partial X_{\delta k}} p_{\beta} - \frac{\partial S_{\alpha i \beta j}}{\partial X_{\delta k}} u_{\beta j} \right) dt \tag{A.11}
\end{aligned}$$

上の式(A.10)を差分化して、メッシュ移動を調整する重み関数  $W$  と長さの制約条件を考慮すると、以下の式(A.12)が得られる。メッシュを移動すると、対象となる構造物の長さが増加して、初期の長さ  $l_0$  から逸れてくることになるので、繰り返し計算により、長さが一定となるような係数  $A^*$  を求めている。

$$W_{\xi i \delta k}^{(l)} X_{\delta k}^{(l+1)} = W_{\xi i \delta k}^{(l)} X_{\delta k}^{(l)} - \text{grad}(J^*)_{\xi i}^{(l)} - A^* \sum_{e=1}^m \frac{(l_e(X_{\delta k}^{(l)}))}{\partial X_{\xi i}} \tag{A.12}$$

$$\text{grad}(J^*)_{\delta k} = G_{\delta k} \tag{A.13}$$

<長さの制約条件>

$$\sum_{e=1}^m (l_e(X_{\delta k})) - l_0 = 0 \tag{A.14}$$

### (3) 計算フロー

最適形状推定の主要な計算手続きをフローとして示せば、以下のようになる。各ステップ毎に評価関数  $J$  を求めていき、評価関数が一定となれば、形状が収束したと判断し、計算を打ち切る。評価関数が一定になっていない段階では、繰り返し計算により形状を変えながら、通常変数に関する基礎方程式、Adjoint 変数に関する基礎方程式を解いていく。

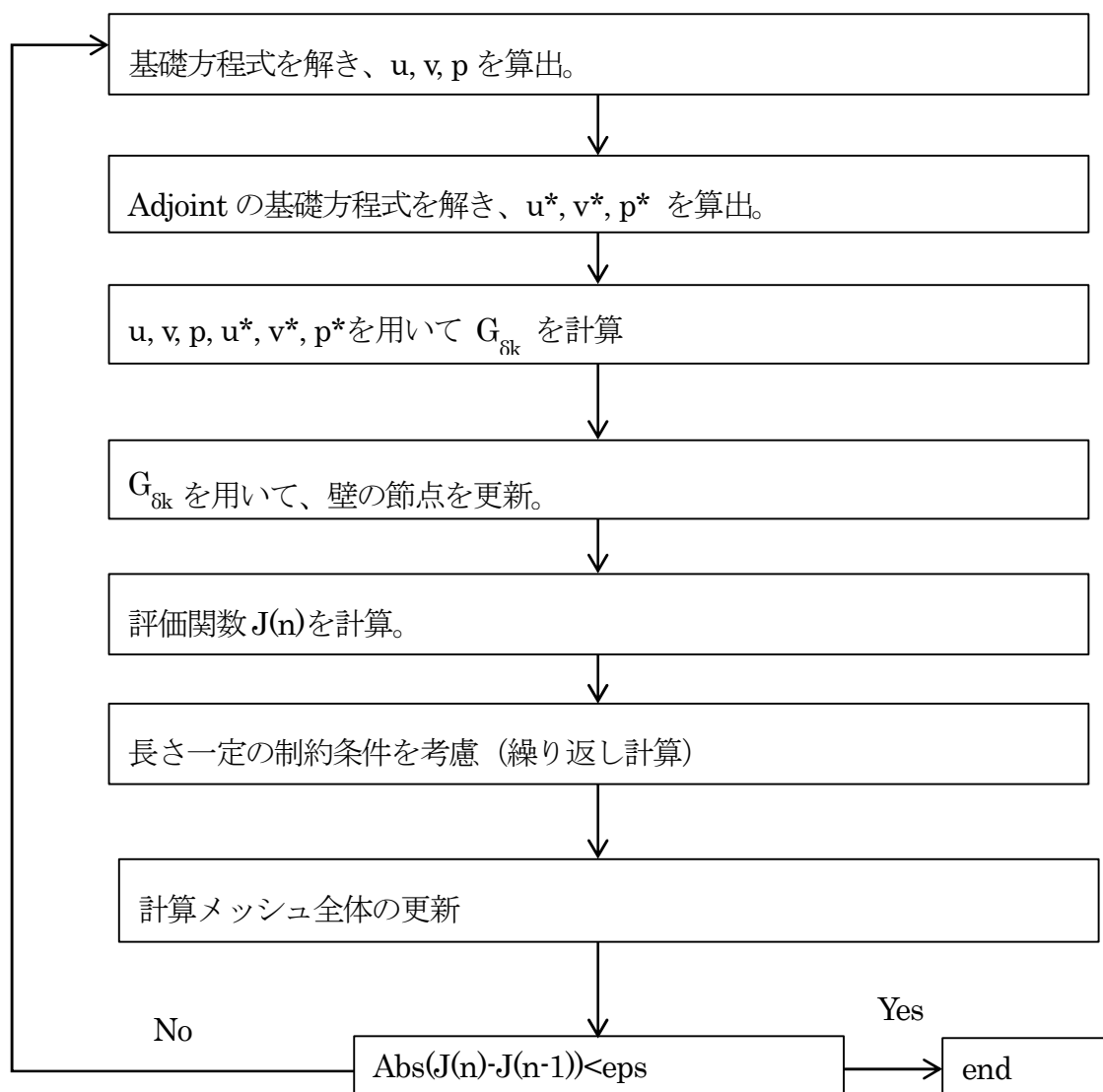


図-2.3 最適形状推定の計算フロー

#### (4) $G_{\delta k}$ の係数行列

$G_{\delta k}$ の計算を行うためには、式(A.15)のように、各係数行列を微分しておく必要がある。

$$G_{\delta k} = \int_{t_0}^{t_f} p_{\alpha}^* \left( \phi_0 \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial X_{\delta k}} \dot{p}_{\beta} + \frac{\partial K_{\alpha\beta\gamma j}}{\partial X_{\delta k}} u_{\beta j} p_{\gamma} + \frac{\partial H_{\alpha\beta i}}{\partial X_{\delta k}} u_{\beta i} \right) dt + \int_{t_0}^{t_f} u_{\alpha i}^* \left( \rho_0 \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial X_{\delta k}} \dot{u}_{\beta i} + \frac{\partial K_{\alpha\beta\gamma j}}{\partial X_{\delta k}} u_{\beta j} u_{\gamma i} - \frac{\partial H_{\beta i \alpha}}{\partial X_{\delta k}} p_{\beta} - \frac{\partial S_{\alpha i \beta j}}{\partial X_{\delta k}} u_{\beta j} \right) dt \quad (\text{A.15})$$

例えば、質量行列 $M_{\alpha\beta}$ は、以下の式(A.16)のように表すことができる。

$$M_{\alpha\beta} = \Delta_e \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \quad (\text{A.16})$$

また、 $\Delta_e$ は有限要素の面積であり、三角形要素の座標  $(x, y)$  により、以下の式(A.17)のように表すことができる。

$$\Delta_e = \frac{1}{2} \{ (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) \} \quad (\text{A.17})$$

これを  $X_1$  で微分すると、以下の式(A.18)が得られる。

$$\frac{\partial \Delta_e}{\partial X_1} = \frac{\partial}{\partial X_1} \left[ \frac{1}{2} \{ (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) \} \right] = \frac{1}{2} \{ -(y_3 - y_1) + (y_2 - y_1) \} = \Delta_e \frac{1}{2\Delta_e} (y_2 - y_3) = \Delta_e b_1 \quad (\text{A.18})$$

したがって、質量行列 $M_{\alpha\beta}$ の  $X_1$  による微分は、以下の式(A.19)のようになる。

$$\frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial X_1} = \Delta_e b_1 \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \quad (\text{A.19})$$

このような計算を $G_{\delta k}$ の他の係数行列に関して全て手計算で実施するのは煩雑であり、計算ミスも招くことになる。本研究では、**wxMaxima** というフリーソフトを使用して、他の係数行列の微分を計算した。計算結果は、付属資料-2に示す。

### (5) 長さ一定の制約条件の考慮

$G_{\delta k}$  の計算を行いメッシュを変化させていくが、計算が安定するためには、何らかの制約条件を設ける必要がある。本検討では、海岸護岸に模した壁を変化させるため、長さ一定の条件を課した。

長さ一定の制約条件を課すと、拡張評価関数は、以下の式(A.20)のように表すことができる。

$$J^* = J + A^*[\sum_{e=1}^m(l_e(X_{\delta k})) - l_0] \quad (\text{A.20})$$

これを各変数で偏微分すると、

$$\delta J^* = \delta J + \delta A^*[\sum_{e=1}^m(l_e(X_{\delta k})) - l_0] + A^*[\sum_{e=1}^m(l_e(X_{\delta k}))/\delta X_{\delta k}]\delta X_{\delta k} \quad (\text{A.21})$$

となる。また、

$$l_{\delta k} = \sum_{e=1}^m(l_e(X_{\delta k}))/\delta X_{\delta k} \quad (\text{A.22})$$

と定義すると、

$$\delta J^* = G_{\delta k}\delta X_{\delta k} + A^*l_{\delta k}\delta X_{\delta k} = (G_{\delta k} + A^*l_{\delta k})\delta X_{\delta k} = G'_{\delta k}\delta X_{\delta k} \quad (\text{A.23})$$

表すことができる。

さらに、重み関数  $w$  を考慮すると、メッシュの変化は以下の式(A.24)のように表すことができる。

$$X_{\delta k}(n+1) = X_{\delta k}(n) + W(n)G'_{\delta k}(n) = X_{\delta k}(n) + W(n)(G_{\delta k}(n) + A^*l_{\delta k}(n)) \quad (\text{A.24})$$

式(A.20)の長さ一定の条件は、 $n+1$  ステップでも成り立つので、

$$\sum_{e=1}^m(l_e(X_{\delta k}(n) + W(n)(G_{\delta k}(n) + A^*l_{\delta k}(n)))) - l_0 = 0 \quad (\text{A.25})$$

となるはずである。この条件を満たす  $A^*$  を SOR 法などの繰り返し計算により求める。

また、長さは、以下の式(A.26)のように定義される。

$$\sum_{e=1}^m l_e = \sum_{e=2}^m [(x_e - x_{e-1})^2 + (y_e - y_{e-1})^2]^{1/2} \quad (\text{A.26})$$

一方、長さの偏微分は、

$$\begin{aligned} l_{\delta k} &= \sum_{e=1}^m (l_e(X_{\delta k})) / \delta X_{\delta k} = \\ \sum_{e=1}^m \left( \frac{\partial l_e}{\partial x_1} + \frac{\partial l_e}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial l_e}{\partial x_m} + \frac{\partial l_e}{\partial y_1} + \frac{\partial l_e}{\partial y_2} + \dots + \frac{\partial l_e}{\partial y_m} \right) &= \sum_{e=1}^m \left( 0 + \dots + \frac{\partial l_e}{\partial x_e} + \frac{\partial l_e}{\partial x_{e-1}} + \dots + 0 + \right. \\ \left. 0 + \dots + \frac{\partial l_e}{\partial y_e} + \frac{\partial l_e}{\partial y_{e-1}} + \dots + 0 \right) & \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

となる。ここに、 $l_e$ の  $x_e, x_{e-1}, y_e, y_{e-1}$ に関する微分は、以下のように表すことができる。

$$\sum_{e=1}^m \frac{\partial l_e}{\partial x_e} = \sum_{e=2}^m [(x_e - x_{e-1})^2 + (y_e - y_{e-1})^2]^{-1/2} \cdot x_e \quad (\text{A.28})$$

$$\sum_{e=1}^m \frac{\partial l_e}{\partial x_{e-1}} = \sum_{e=2}^m [(x_e - x_{e-1})^2 + (y_e - y_{e-1})^2]^{-1/2} \cdot (-x_{e-1}) \quad (\text{A.29})$$

$$\sum_{e=1}^m \frac{\partial l_e}{\partial y_e} = \sum_{e=2}^m [(x_e - x_{e-1})^2 + (y_e - y_{e-1})^2]^{-1/2} \cdot y_e \quad (\text{A.30})$$

$$\sum_{e=1}^m \frac{\partial l_e}{\partial y_{e-1}} = \sum_{e=2}^m [(x_e - x_{e-1})^2 + (y_e - y_{e-1})^2]^{-1/2} \cdot (-y_{e-1}) \quad (\text{A.31})$$

結局、

$$l_{\delta k} = \sum_{e=1}^m (l_e(X_{\delta k})) / \delta X_{\delta k} = \sum_{e=1}^m \left[ \frac{x_e - x_{e-1}}{l_e} + \frac{y_e - y_{e-1}}{l_e} \right] \quad (\text{A.32})$$

と表すことができる。

## 2. 2. 形状最適化の計算事例

最適形状決定の計算として、前出の図-2.1 に示したもたれ式護岸を模擬したコンクリート壁を、孤立波の計算メッシュの中に据えて計算を行った。なお、この計算事例は非碎波・非越流の条件で行ったものである。コンクリート壁としては高さ 2.5m の円弧状の壁として設定した。

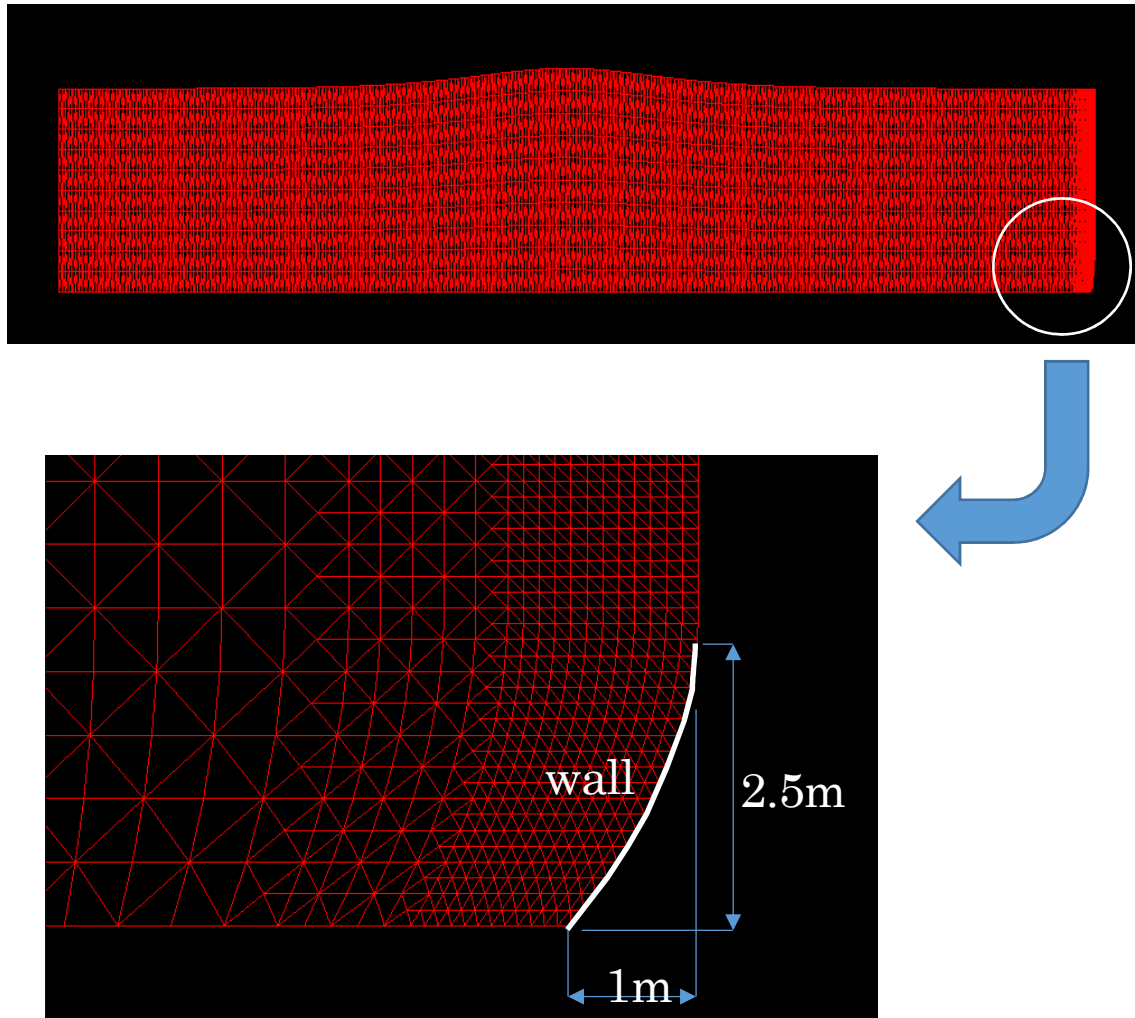


図-2.4 最適断面の計算メッシュ

計算結果を以下の図-2.5と図-2.6に示す。なお、この計算では長さ一定の制約条件の他、壁の下端は固定条件とした。計算結果より評価関数  $J$  がほぼ一定となっており、最適形状が得られていると判断できる。この計算結果により、最適形状では壁の形状がほぼ直線状になることがわかる。

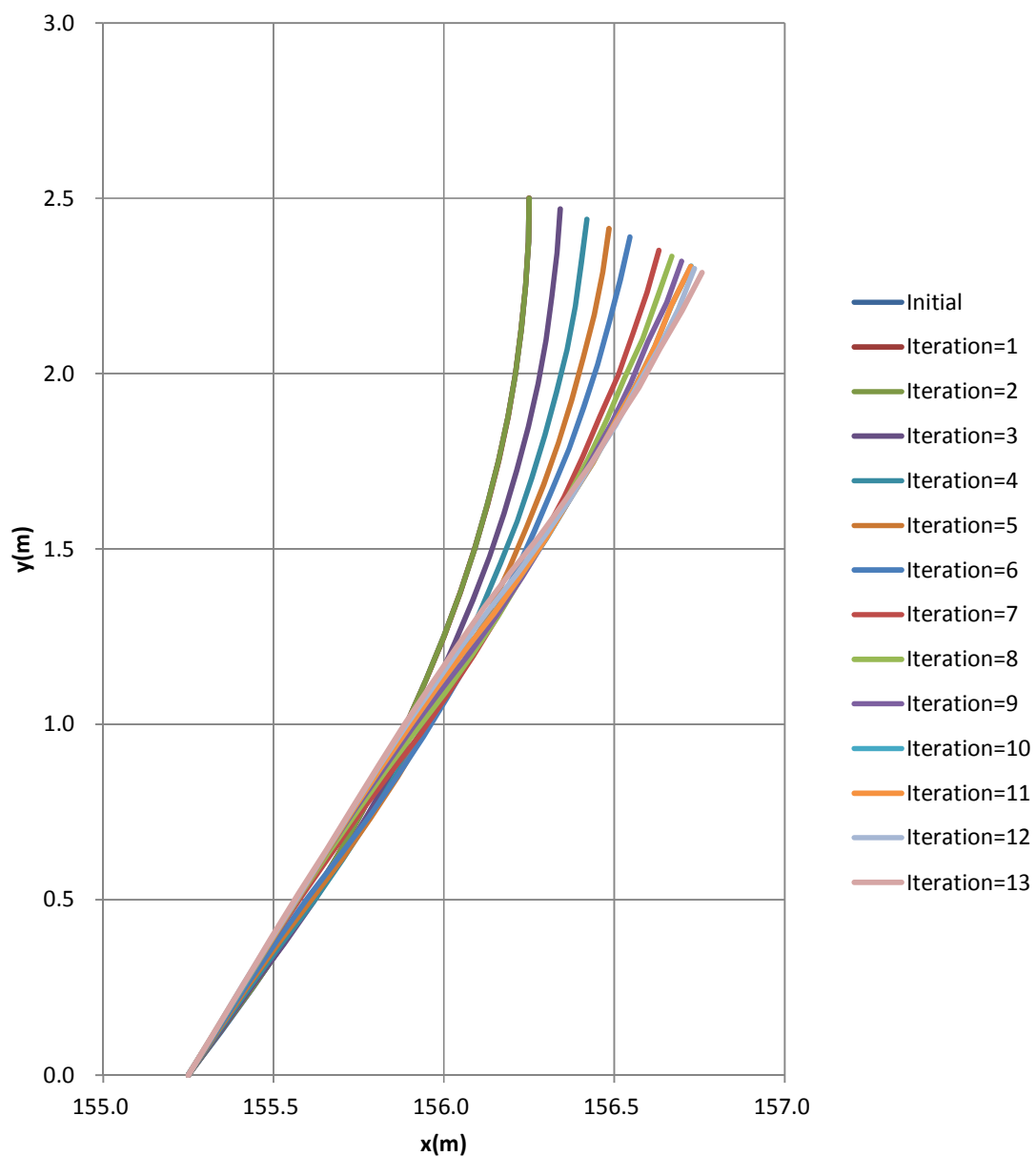


図-2.5 最適断面の計算結果



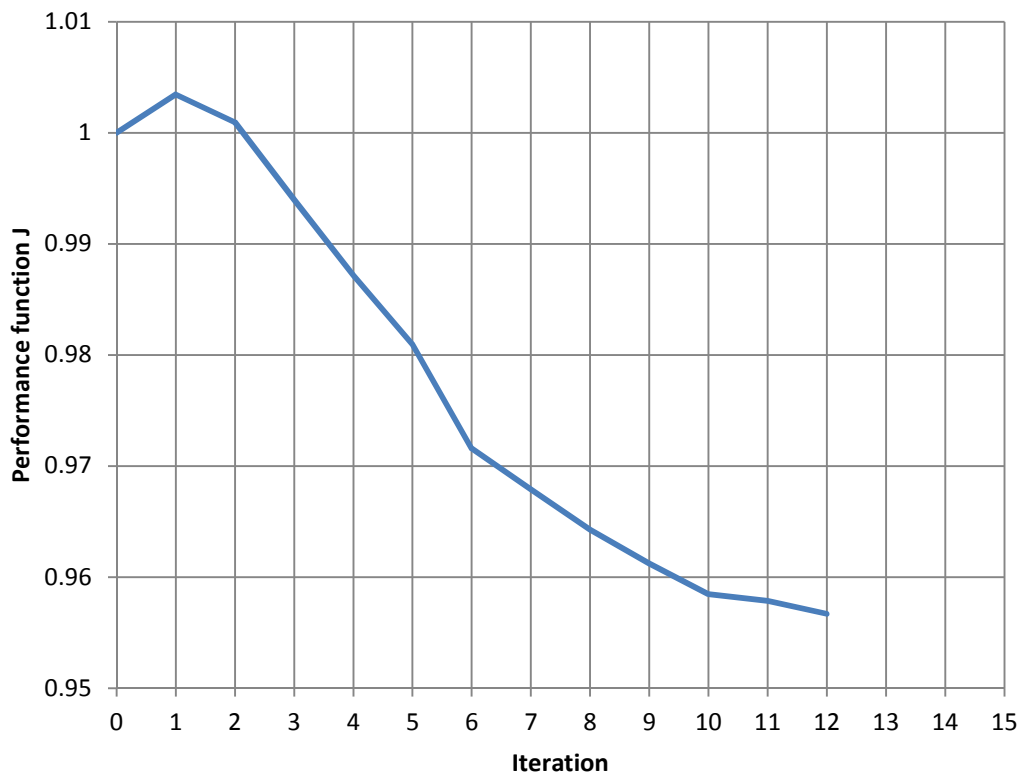


図-2.6 評価関数  $J$  の推移

### 2. 3. 課題と今後の展望

この事例計算結果より、以下のような港湾・海岸分野での応用が考えられる。ただし、碎波変形や越波・越流を評価するためには、リメシングのアルゴリズムを強化することや、バックグラウンドメッシュを採用する等、更なる工夫が必要である。

- 1) 事例計算では、構造物に作用する水平力 ( $\Sigma F_x$ ) と鉛直力 ( $\Sigma F_y$ ) の和を最小化することにしたが、水平力 ( $\Sigma F_x$ ) のみを最小化すれば波による滑動や転倒に対して有利な断面を求めることも可能である。鉛直力 ( $\Sigma F_y$ ) のみを最小化すれば、越波・越流に対して有利となる断面を求めることも可能である。
- 2) 事例計算では時間積分の時間帯を孤立派が壁の前面で遡上する時間帯をターゲットとしたが、引き波作用の時間帯をターゲットとすれば、引き波作用に対する最適断面を求めることが可能である。なお、事例として示したもたれ式護岸では、台風時の引き波の作用により被災した事例もある。
- 3) 防波堤の上部工の形状に関する最適形状を求める際にも応用可能である。

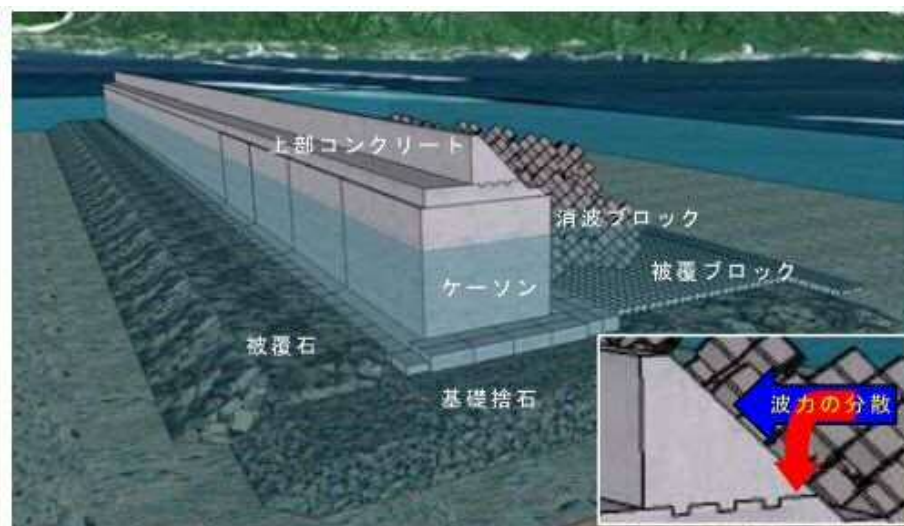


図-2.7 上部斜面式防波堤の例 (出典：国土交通省HP)

- 4) 人工リーフなどの没水型の構造物の最適断面形状や平面配置を求める際にも応用可能である。



図-2.8 人工リーフの例（出典：国土交通省HP）

## 付録－ 2 $G_{\delta k}$ の計算を行うための係数行列の微分計算結果

付録資料－ 1 の計算では、 $G_{\delta k}$  の計算を行うための係数行列を **wxMaxima** というフリーソフトを用いて計算した。次ページに **wxMaxima** による係数行列の算定結果を示す。

質量行列

$$\delta M_{\alpha\beta} / \delta x_1 =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{y_2 - y_3}{12} & \frac{y_2 - y_3}{24} & \frac{y_2 - y_3}{24} \\ \frac{y_2 - y_3}{24} & \frac{y_2 - y_3}{12} & \frac{y_2 - y_3}{24} \\ \frac{y_2 - y_3}{24} & \frac{y_2 - y_3}{24} & \frac{y_2 - y_3}{12} \end{bmatrix}$$

$$\delta M_{\alpha\beta} / \delta x_2 =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{y_3 - y_1}{12} & \frac{y_3 - y_1}{24} & \frac{y_3 - y_1}{24} \\ \frac{y_3 - y_1}{24} & \frac{y_3 - y_1}{12} & \frac{y_3 - y_1}{24} \\ \frac{y_3 - y_1}{24} & \frac{y_3 - y_1}{24} & \frac{y_3 - y_1}{12} \end{bmatrix}$$

$$\delta M_{\alpha\beta} / \delta x_3 =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{y_1 - y_2}{12} & \frac{y_1 - y_2}{24} & \frac{y_1 - y_2}{24} \\ \frac{y_1 - y_2}{24} & \frac{y_1 - y_2}{12} & \frac{y_1 - y_2}{24} \\ \frac{y_1 - y_2}{24} & \frac{y_1 - y_2}{24} & \frac{y_1 - y_2}{12} \end{bmatrix}$$

$$\delta M_{\alpha\beta} / \delta y_1 =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{x_3 - x_2}{12} & \frac{x_3 - x_2}{24} & \frac{x_3 - x_2}{24} \\ \frac{x_3 - x_2}{24} & \frac{x_3 - x_2}{12} & \frac{x_3 - x_2}{24} \\ \frac{x_3 - x_2}{24} & \frac{x_3 - x_2}{24} & \frac{x_3 - x_2}{12} \end{bmatrix}$$

$$\delta M_{\alpha\beta} / \delta y_2 =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{x_1 - x_3}{12} & \frac{x_1 - x_3}{24} & \frac{x_1 - x_3}{24} \\ \frac{x_1 - x_3}{24} & \frac{x_1 - x_3}{12} & \frac{x_1 - x_3}{24} \\ \frac{x_1 - x_3}{24} & \frac{x_1 - x_3}{24} & \frac{x_1 - x_3}{12} \end{bmatrix}$$

$$\delta M_{\alpha\beta} / \delta y_3 =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{x_2 - x_1}{12} & \frac{x_2 - x_1}{24} & \frac{x_2 - x_1}{24} \\ \frac{x_2 - x_1}{24} & \frac{x_2 - x_1}{12} & \frac{x_2 - x_1}{24} \\ \frac{x_2 - x_1}{24} & \frac{x_2 - x_1}{24} & \frac{x_2 - x_1}{12} \end{bmatrix}$$

移流行列

$$\delta A_{\alpha \beta \gamma, X} / \delta x_1 = \delta A_{\alpha \beta \gamma, X} / \delta x_2 = \delta A_{\alpha \beta \gamma, X} / \delta x_3 =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\delta A_{\alpha \beta \gamma, X} / \delta y_1 =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{24} & -\frac{1}{24} & -\frac{1}{24} \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{24} & \frac{1}{24} \end{bmatrix}$$

$$\delta A_{\alpha \beta \gamma, X} / \delta y_2 =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{24} & \frac{1}{24} & \frac{1}{24} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{24} & -\frac{1}{24} & -\frac{1}{24} \end{bmatrix}$$

$$\delta A_{\alpha \beta \gamma, X} / \delta y_3 =$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{24} & -\frac{1}{24} & -\frac{1}{24} \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{24} & \frac{1}{24} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\delta A_{\alpha \beta \gamma, \mathcal{N}} / \delta x_1 =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{24} & \frac{1}{24} \\ -\frac{1}{24} & -\frac{1}{24} & -\frac{1}{24} \end{bmatrix}$$

$$\delta A_{\alpha \beta \gamma, \mathcal{N}} / \delta x_2 =$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{24} & -\frac{1}{24} & -\frac{1}{24} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{24} & \frac{1}{24} \end{bmatrix}$$

$$\delta A_{\alpha \beta \gamma, \mathcal{N}} / \delta x_3 =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{24} & \frac{1}{24} & \frac{1}{24} \\ -\frac{1}{24} & -\frac{1}{24} & -\frac{1}{24} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\delta A_{\alpha \beta \gamma, \mathcal{N}} / \delta y_1 = \delta A_{\alpha \beta \gamma, \mathcal{N}} / \delta y_2 = \delta A_{\alpha \beta \gamma, \mathcal{N}} / \delta y_3 =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



压力行列

$$\delta H_{\alpha, \beta, x} / \delta x_1 = \delta H_{\alpha, \beta, x} / \delta x_2 = \delta H_{\alpha, \beta, x} / \delta x_3 =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\delta H_{\alpha, \beta, x} / \delta y_1 =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

$$\delta H_{\alpha, \beta, x} / \delta y_2 =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

$$\delta H_{\alpha, \beta, x} / \delta y_3 =$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\delta H_{\alpha, \beta, \gamma} / \delta x_1 =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

$$\delta H_{\alpha, \beta, \gamma} / \delta x_2 =$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

$$\delta H_{\alpha, \beta, \gamma} / \delta x_3 =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\delta H_{\alpha, \beta, \gamma} / \delta y_1 = \delta H_{\alpha, \beta, \gamma} / \delta y_2 = \delta H_{\alpha, \beta, \gamma} / \delta y_3 =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

压力行列(転置)

$$\delta H_{\beta, x\alpha} / \delta x_1 = \delta H_{\beta, x\alpha} / \delta x_2 = \delta H_{\beta, x\alpha} / \delta x_3 =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\delta H_{\beta, x\alpha} / \delta y_1 =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

$$\delta H_{\beta, x\alpha} / \delta y_2 =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

$$\delta H_{\beta, x\alpha} / \delta y_3 =$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\delta H_{\beta,\gamma\alpha} / \delta x_1 =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

$$\delta H_{\beta,\gamma\alpha} / \delta x_2 =$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

$$\delta H_{\beta,\gamma\alpha} / \delta x_3 =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\delta H_{\beta,\gamma\alpha} / \delta y_1 = \delta H_{\beta,\gamma\alpha} / \delta y_2 = \delta H_{\beta,\gamma\alpha} / \delta y_3 =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

粘性項

$$\delta D_{\alpha, x \beta, x} / \delta x_1 =$$

$$\left[ \begin{array}{ccc} -\frac{(y_2 - y_3)^3}{2((x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1))^2} & -\frac{(y_2 - y_3)^2(y_3 - y_1)}{2((x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1))^2} & -\frac{(y_1 - y_2)(y_2 - y_3)^2}{2((x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1))^2} \\ -\frac{(y_2 - y_3)^2(y_3 - y_1)}{2((x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1))^2} & -\frac{(y_2 - y_3)(y_3 - y_1)^2}{2((x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1))^2} & -\frac{(y_1 - y_2)(y_2 - y_3)(y_3 - y_1)}{2((x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1))^2} \\ -\frac{(y_1 - y_2)(y_2 - y_3)^2}{2((x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1))^2} & -\frac{(y_1 - y_2)(y_2 - y_3)(y_3 - y_1)}{2((x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1))^2} & -\frac{(y_1 - y_2)^2(y_2 - y_3)}{2((x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1))^2} \end{array} \right]$$

$$\delta D_{\alpha, x \beta, x} / \delta x_2 =$$

$$\left[ \begin{array}{ccc} -\frac{(y_2 - y_3)^2(y_3 - y_1)}{2((x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1))^2} & -\frac{(y_2 - y_3)(y_3 - y_1)^2}{2((x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1))^2} & -\frac{(y_1 - y_2)(y_2 - y_3)(y_3 - y_1)}{2((x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1))^2} \\ -\frac{(y_2 - y_3)(y_3 - y_1)^2}{2((x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1))^2} & -\frac{(y_3 - y_1)^3}{2((x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1))^2} & -\frac{(y_1 - y_2)(y_3 - y_1)^2}{2((x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1))^2} \\ -\frac{(y_1 - y_2)(y_2 - y_3)(y_3 - y_1)}{2((x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1))^2} & -\frac{(y_1 - y_2)(y_3 - y_1)^2}{2((x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1))^2} & -\frac{(y_1 - y_2)^2(y_3 - y_1)}{2((x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1))^2} \end{array} \right]$$

$$\delta D_{\alpha, x \beta, x} / \delta x_3 =$$

$$\left[ \begin{array}{ccc} -\frac{(y_1 - y_2)(y_2 - y_3)^2}{2((x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1))^2} & -\frac{(y_1 - y_2)(y_2 - y_3)(y_3 - y_1)}{2((x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1))^2} & -\frac{(y_1 - y_2)^2(y_2 - y_3)}{2((x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1))^2} \\ -\frac{(y_1 - y_2)(y_2 - y_3)(y_3 - y_1)}{2((x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1))^2} & -\frac{(y_1 - y_2)(y_3 - y_1)^2}{2((x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1))^2} & -\frac{(y_1 - y_2)^2(y_3 - y_1)}{2((x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1))^2} \\ -\frac{(y_1 - y_2)^2(y_2 - y_3)}{2((x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1))^2} & -\frac{(y_1 - y_2)^2(y_3 - y_1)}{2((x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1))^2} & -\frac{(y_1 - y_2)^3}{2((x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1))^2} \end{array} \right]$$













$$\delta D_{\alpha, \gamma \beta, \gamma} / \delta x_1 =$$

$$\left[ \begin{array}{ccc} -\frac{(x_3-x_2)^2(y_2-y_3)}{2((x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1))^2} & \frac{x_3-x_2}{2((x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1))} - \frac{(x_1-x_3)(x_3-x_2)(y_2-y_3)}{2((x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1))^2} & -\frac{x_3-x_2}{2((x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1))} - \frac{(x_2-x_1)(x_3-x_2)(y_2-y_3)}{2((x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1))^2} \\ \frac{x_3-x_2}{2((x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1))} - \frac{(x_1-x_3)(x_3-x_2)(y_2-y_3)}{2((x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1))^2} & \frac{x_1-x_3}{(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)} - \frac{(x_1-x_3)^2(y_2-y_3)}{2((x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1))^2} & -\frac{x_1-x_3}{2((x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1))} + \frac{x_2-x_1}{2((x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1))} - \frac{(x_2-x_1)(x_1-x_3)(y_2-y_3)}{2((x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1))^2} \\ \frac{x_3-x_2}{2((x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1))} - \frac{(x_2-x_1)(x_3-x_2)(y_2-y_3)}{2((x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1))^2} & -\frac{x_1-x_3}{2((x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1))} + \frac{x_2-x_1}{2((x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1))} - \frac{(x_2-x_1)(x_1-x_3)(y_2-y_3)}{2((x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1))^2} & -\frac{x_2-x_1}{(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)} - \frac{(x_2-x_1)^2(y_2-y_3)}{2((x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1))^2} \end{array} \right]$$

$$\delta D_{\alpha, \gamma \beta, \gamma} / \delta x_2 =$$

$$\left[ \begin{array}{ccc} -\frac{x_3-x_2}{(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)} - \frac{(x_3-x_2)^2(y_3-y_1)}{2((x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1))^2} & -\frac{x_1-x_3}{2((x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1))} - \frac{(x_1-x_3)(x_3-x_2)(y_3-y_1)}{2((x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1))^2} & \frac{x_3-x_2}{2((x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1))} - \frac{x_2-x_1}{2((x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1))} - \frac{(x_2-x_1)(x_3-x_2)(y_3-y_1)}{2((x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1))^2} \\ -\frac{x_1-x_3}{2((x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1))} - \frac{(x_1-x_3)(x_3-x_2)(y_3-y_1)}{2((x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1))^2} & -\frac{(x_1-x_3)^2(y_3-y_1)}{2((x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1))^2} & \frac{x_1-x_3}{2((x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1))} - \frac{(x_2-x_1)(x_1-x_3)(y_3-y_1)}{2((x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1))^2} \\ \frac{x_3-x_2}{2((x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1))} - \frac{x_2-x_1}{2((x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1))} - \frac{(x_2-x_1)(x_3-x_2)(y_3-y_1)}{2((x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1))^2} & \frac{x_1-x_3}{2((x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1))} - \frac{(x_2-x_1)(x_1-x_3)(y_3-y_1)}{2((x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1))^2} & \frac{x_2-x_1}{(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)} - \frac{(x_2-x_1)^2(y_3-y_1)}{2((x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1))^2} \end{array} \right]$$

$$\delta D_{\alpha, \gamma \beta, \gamma} / \delta x_3 =$$

$$\left[ \begin{array}{ccc} \frac{x_3-x_2}{(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)} - \frac{(x_3-x_2)^2(y_1-y_2)}{2((x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1))^2} & -\frac{x_3-x_2}{2((x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1))} + \frac{x_1-x_3}{2((x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1))} - \frac{(x_1-x_3)(x_3-x_2)(y_1-y_2)}{2((x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1))^2} & \frac{x_2-x_1}{2((x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1))} - \frac{(x_2-x_1)(x_3-x_2)(y_1-y_2)}{2((x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1))^2} \\ \frac{x_3-x_2}{2((x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1))} + \frac{x_1-x_3}{2((x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1))} - \frac{(x_1-x_3)(x_3-x_2)(y_1-y_2)}{2((x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1))^2} & -\frac{x_1-x_3}{(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)} - \frac{(x_1-x_3)^2(y_1-y_2)}{2((x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1))^2} & -\frac{x_2-x_1}{2((x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1))} - \frac{(x_2-x_1)(x_1-x_3)(y_1-y_2)}{2((x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1))^2} \\ \frac{x_2-x_1}{2((x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1))} - \frac{(x_2-x_1)(x_3-x_2)(y_1-y_2)}{2((x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1))^2} & -\frac{x_2-x_1}{2((x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1))} - \frac{(x_2-x_1)(x_1-x_3)(y_1-y_2)}{2((x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1))^2} & -\frac{(x_2-x_1)^2(y_1-y_2)}{2((x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1))^2} \end{array} \right]$$

$$\delta D_{\alpha, \beta, \gamma} / \delta y_1 =$$

$$\left[ \begin{array}{ccc} \frac{(x_3 - x_2)^3}{2 \left( (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) \right)^2} & - \frac{(x_1 - x_3)(x_3 - x_2)^2}{2 \left( (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) \right)^2} & - \frac{(x_2 - x_1)(x_3 - x_2)^2}{2 \left( (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) \right)^2} \\ \frac{(x_1 - x_3)(x_3 - x_2)^2}{2 \left( (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) \right)^2} & - \frac{(x_1 - x_3)^2(x_3 - x_2)}{2 \left( (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) \right)^2} & - \frac{(x_2 - x_1)(x_1 - x_3)(x_3 - x_2)}{2 \left( (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) \right)^2} \\ \frac{(x_2 - x_1)(x_3 - x_2)^2}{2 \left( (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) \right)^2} & - \frac{(x_2 - x_1)(x_1 - x_3)(x_3 - x_2)}{2 \left( (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) \right)^2} & - \frac{(x_2 - x_1)^2(x_3 - x_2)}{2 \left( (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) \right)^2} \end{array} \right]$$

$$\delta D_{\alpha, \beta, \gamma} / \delta y_2 =$$

$$\left[ \begin{array}{ccc} \frac{(x_1 - x_3)(x_3 - x_2)^2}{2 \left( (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) \right)^2} & - \frac{(x_1 - x_3)^2(x_3 - x_2)}{2 \left( (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) \right)^2} & - \frac{(x_2 - x_1)(x_1 - x_3)(x_3 - x_2)}{2 \left( (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) \right)^2} \\ \frac{(x_1 - x_3)^2(x_3 - x_2)}{2 \left( (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) \right)^2} & - \frac{(x_1 - x_3)^3}{2 \left( (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) \right)^2} & - \frac{(x_2 - x_1)(x_1 - x_3)^2}{2 \left( (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) \right)^2} \\ \frac{(x_2 - x_1)(x_1 - x_3)(x_3 - x_2)}{2 \left( (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) \right)^2} & - \frac{(x_2 - x_1)(x_1 - x_3)^2}{2 \left( (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) \right)^2} & - \frac{(x_2 - x_1)^2(x_1 - x_3)}{2 \left( (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) \right)^2} \end{array} \right]$$

$$\delta D_{\alpha, \beta, \gamma} / \delta y_3 =$$

$$\left[ \begin{array}{ccc} \frac{(x_2 - x_1)(x_3 - x_2)^2}{2 \left( (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) \right)^2} & - \frac{(x_2 - x_1)(x_1 - x_3)(x_3 - x_2)}{2 \left( (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) \right)^2} & - \frac{(x_2 - x_1)^2(x_3 - x_2)}{2 \left( (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) \right)^2} \\ \frac{(x_2 - x_1)(x_1 - x_3)(x_3 - x_2)}{2 \left( (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) \right)^2} & - \frac{(x_2 - x_1)(x_1 - x_3)^2}{2 \left( (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) \right)^2} & - \frac{(x_2 - x_1)^2(x_1 - x_3)}{2 \left( (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) \right)^2} \\ \frac{(x_2 - x_1)^2(x_3 - x_2)}{2 \left( (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) \right)^2} & - \frac{(x_2 - x_1)^2(x_1 - x_3)}{2 \left( (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) \right)^2} & - \frac{(x_2 - x_1)^3}{2 \left( (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) \right)^2} \end{array} \right]$$