

## 謝 辞

本研究は、2011年6月から4年と1ヶ月にわたり担当した白竜湖軟弱地盤での高速道路建設について、その工事計画の立案と設計方針の妥当性確認のために行ったものです。

白竜湖軟弱地盤は、山形県の米沢盆地北東端に位置する、深さ100mを超える軟弱地盤です。これまでの高速道路建設では経験したことがない深さで、すべて手探り状態で試験工事に着手しました。このような軟弱地盤の上に高速道路の盛土を構築した場合、残留沈下がどの程度になるのか誰にもわかりませんでした。本稿は、試験工事の結果から高速道路本体盛土の設計方針の決定に至るまでの過程を振り返るとともに、疑似過圧密特性という観点から設計方針と残留沈下量の予測に関する妥当性を確認した結果までを取りまとめたものです。本研究は、中央大学研究開発機構教授太田秀樹先生のご指導の下、進めました。太田先生には大変ご多忙であるにもかかわらず、現場での試験工事へのご指導に始まり、非常に多くのお時間を本研究のためにお使い頂くこととなりました。また、職場環境の変化など、研究の中断や挫折に直面しそうな場面で、大変心強いご支援を賜りました。長きにわたるご厚情、ご指導、ご鞭撻に「感謝」という一言では表現しきれませんが、他に言葉が思い浮かびません。心より感謝申し上げます。

中央大学教授理工学部都市環境学科齋藤邦夫先生には、論文審査における主査をお引き受けいただきました。研究の全般にわたり齋藤先生より貴重なご意見とご助言を頂きながら学位論文を取りまとめました。研究の進捗が遅く、ご心配をお掛けいたしました。齋藤先生の温かいご指導のおかげで、ようやく本稿をまとめることができました。誠に感謝申し上げます。

中央大学教授理工学部都市環境学科佐藤尚次先生には、論文審査における副査をお引き受けいただきました。特に、異常値の取り扱いについて慎重を期すようご指導いただき、一部を改める機会を得ることができました。研究成果のとりまとめに当たり、ご専門と異なる分野であるにもかかわらず、論点の整理などにおいても温かいご指導とご助言を賜りましたこと、心から御礼申し上げます。

中央大学准教授理工学部都市環境学科平川大貴先生には、論文審査における副査をお引き受けいただきました。研究成果をとりまとめるうえで論点の整理や強調すべき点などについて、具体的かつ大変貴重なご指導とご助言を賜りました。また、本研究の重要な要素の一つである「二次圧密係数」について、本研究で論じた点とは異なる見方があることをご教示いただきました。大変ご多忙であるにもかかわらず、時間をかけてご指導いただきましたこと、心から御礼申し上げます。

中央大学教授理工学部経営システム工学科鎌倉稔成先生には、論文審査における副査をお引き受けいただきました。統計学をご専門とされている鎌倉先生には、土木工学とは異なる観点からのご助言を多数賜り、認識を新たにすることになりました。研究者の端くれに加えて頂こうとしている身にとって、勉強不足を痛感させられる次第でしたが、大変に貴重な

お時間を頂戴いたしましたこと、心から御礼申し上げます。

北海道大学大学院工学研究院環境フィールド工学部門教授渡部要一先生には、論文審査における副査をお引き受けいただきました。本研究の後半部分における大きな目的である「地質学と地盤工学の間にある溝を少しでも埋めてみたい」という趣旨についてご理解いただいたうえ、一時圧密と二次圧密の関係におけるアイソタック概念と他の概念との違いなど、大変丁寧で多岐にわたる内容のご助言とご示唆を賜りました。また、アイソタック概念に基づくデータの整理方法については、詳細なご指導を頂くことができました。貴重なお時間を頂戴いたしましたこと、心から御礼申し上げます。

神戸大学教授都市安全研究センター飯塚敦先生には、地盤施工学現場事例研究会におきまして、たくさんのご指導を賜りました。第5章の地盤の堆積年代の推定式は、太田先生と飯塚先生のご指導によるものです。このご指導を頂かなければ、本研究の後半部分は成しえませんでした。心より感謝申し上げます。

同じく神戸大学の橘伸也先生と竹山智英先生には、数式の誘導について大変親切なご指導を賜りました。深く感謝申し上げます。

山形大学名誉教授の山野井徹先生には、白竜湖軟弱地盤の成り立ちについて、研究初期の段階でご指導を頂きました。静岡大学教授理学部地球科学科北村晃寿先生には、地盤の体積年代の測定と堆積環境についてご指導を頂きました。首都大学東京教授都市環境学部鈴木毅彦先生には、火山灰の採取と同定について、ご指導、ご協力を頂きました。地盤の堆積環境と堆積年代が分からなければ、やはり本研究の後半部分は成り立ちませんでした。大変感謝申し上げます。

株式会社ダイヤコンサルタント東北支社高坂敏明氏、山田満秀博士には放射性炭素年代測定などのデータの提供のほか、土質試験のデータ整理の方法等、多くの助言を頂きました。大変感謝いたしております。

特に試験工事については、白竜湖軟弱地盤対策検討委員会（委員長 太田秀樹教授）での検討結果を反映したものです。委員会の設立にご尽力された先輩諸氏に敬意を表するとともに、委員会の歴代関係者各位と長期沈下解析WGに参加頂いた方々に感謝申し上げます。

特に、基礎地盤コンサルタンツ株式会社の佐藤修二氏との議論は大変刺激的なものでした。たくさんのご助言と参考にすべき資料をご教示頂きました。中でも、現場近くの蕎麦屋にご案内したときに頂いた土木工学大系は大変に参考になる一冊でした。本当にありがとうございます。

また、八千代エンジニアリング株式会社の後藤雄一氏には、委員会資料のとりまとめにご尽力頂いた他、本体工の設計方針の立案においても大変有益なご助言を頂きました。本当に感謝しております。

本研究は、半ば社命により取り組みを始めたものです。「高速道路の建設現場が少なくなっていく中で、技術的に直面した課題とその対応の過程を整理して後代に残す。」という、序論で述べた研究目的とは別の側面を有しています。東日本高速道路株式会社東北支社山

形工事事務所に在籍中は、周囲の方々に支えられながら課題に取り組みました。日常業務の負担の軽減に皆が配慮してくれました。本当に感謝しております。

試験工事から、本体工事までを一貫して担当した株式会社大林組、中でも佐々木徹氏、株式会社ネクスコ・エンジニアリング東北の澤野幸喜氏には、現場の状況や動態観測の状況等を何度も確認させて頂きました。ご迷惑をお掛けしたかと思えます。ありがとうございます。

東北中央自動車道の建設工事は、地元の方々に支えられながら進めています。代々引き継がれた大切な土地をご提供頂きました方々、本当にありがとうございます。深謝申し上げます。また、水田の補修を余儀なくされた方々には、農作業に支障が出ているにもかかわらず工事を続けさせて頂けたこと深く感謝いたします。

本研究の後半部分は、一般財団法人国土技術研究センター（JICE）に出向中の1年9ヶ月の間に、プライベートな時間を使って取りまとめたものです。また、本稿の大半はこの時期に書き上げました。本研究はJICEの業務内容とは全く関わりのないものですが、何度も地盤施工学現場事例研究会への参加を認めて頂きました。心より御礼申し上げます。

また、本稿執筆の最終段階では、仙台にある株式会社ネクスコ・エンジニアリング東北に出向しておりました。ここでも、本研究は業務内容と直接的な関わりがありませんでしたが、度重なる東京への出張を認めて頂きました。深く感謝しております。

最後に、妻は、週末ごとに引きこもりになる夫を温かく見守ってくれました。口にはできませんが、本当にありがとう。

平成29年 7月 30日

加藤 真 司

**【付録 1】**

土質試験結果一覧









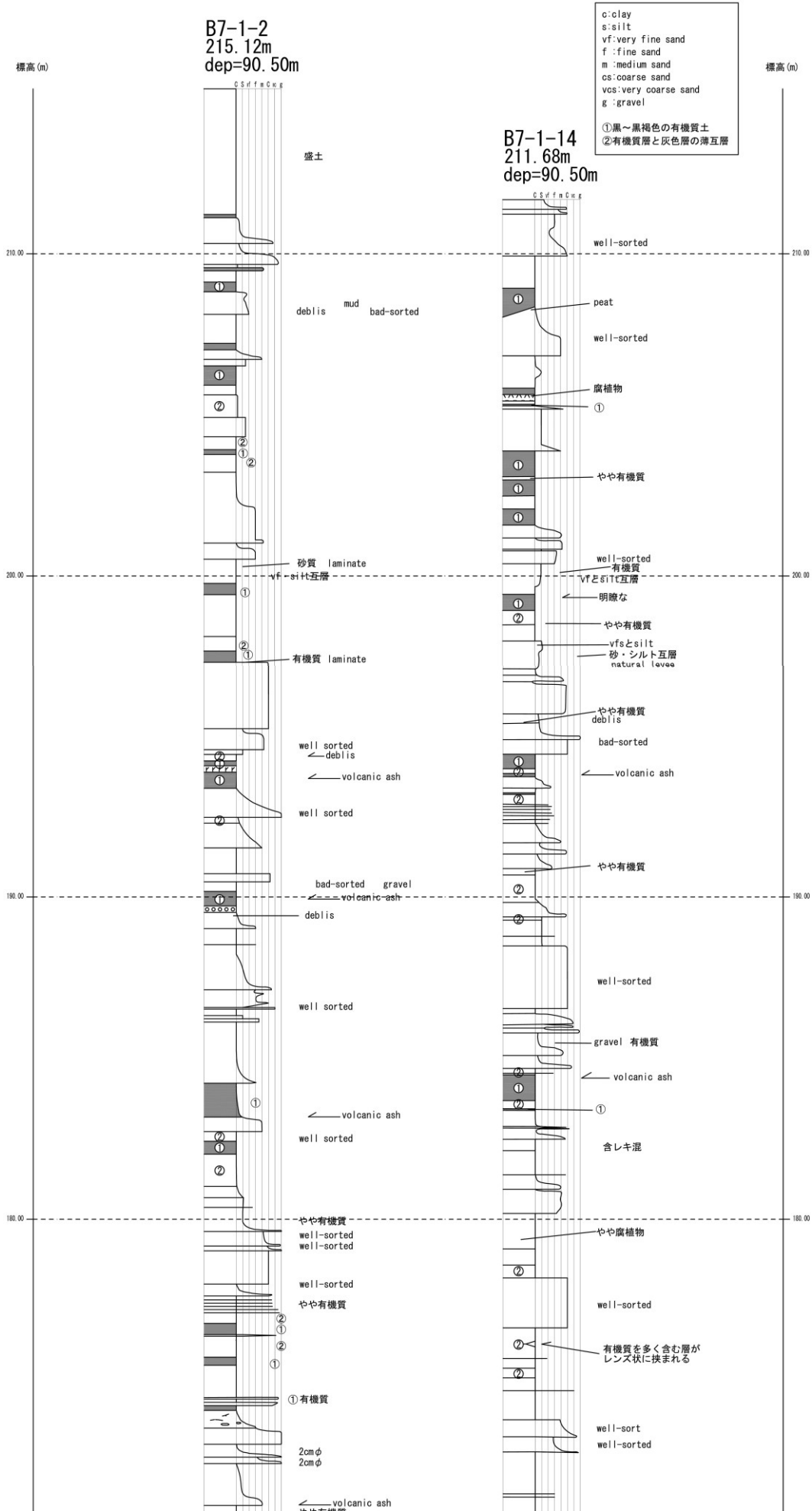


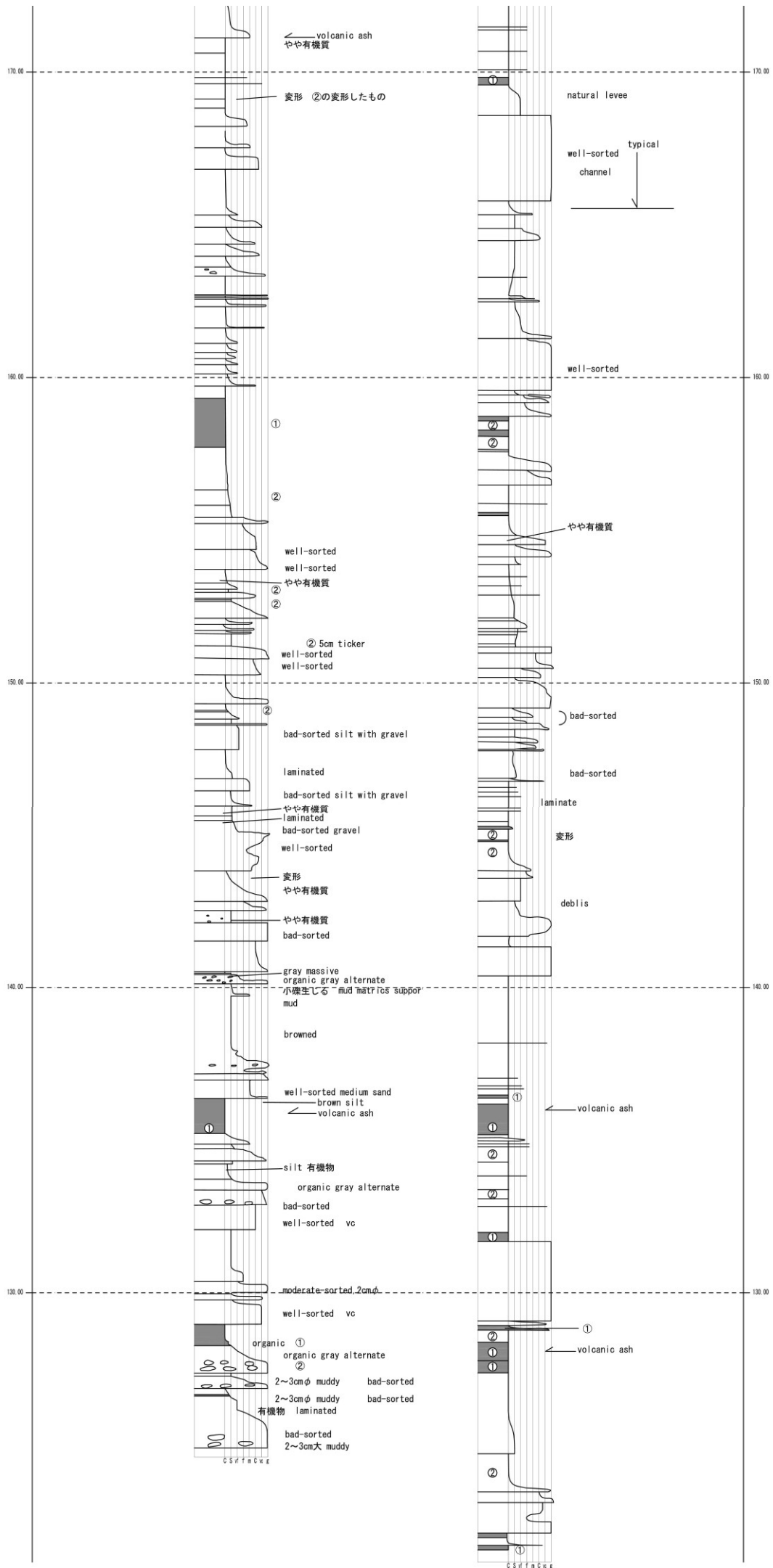


【付録 2】

調査孔 B7-1-2, B7-1-14 の柱状図

静岡大学 北村晃寿教授 (2013)





**【付録 3】**

調査孔 B7-1-2, B7-1-14 で採取した火山ガラスの主成分化学組成分析結果  
首都大学東京 鈴木毅彦教授 (2013)

表・付録 3-1 に、ボーリング調査孔 B7-1-2 および B7-1-14 のコアから採取した火山ガラスについて、主成分化学組成分析の結果を示す。

表・付録 3-1 火山ガラス主成分化学組成 (重量%)

		SiO <sub>2</sub>	TiO <sub>2</sub>	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	FeO	MnO	MgO	CaO	K <sub>2</sub> O	Na <sub>2</sub> O	Total Analytical total	測定数	
始良Tnテフラ(AT)													
B7-1-2	平均値	77.95	0.16	12.42	1.33	0.11	0.22	1.11	3.34	3.37	100.00	94.55	13
21.62-21.63 m	標準偏差	0.28	0.06	0.11	0.10	0.07	0.04	0.04	0.12	0.09	0.00	0.85	
標準試料	平均値	77.87	0.20	12.43	1.34	0.11	0.22	1.14	3.25	3.44	100.00	96.65	710
	標準偏差	0.27	0.06	0.11	0.10	0.06	0.03	0.05	0.11	0.14	0.00	2.17	
沼沢金山テフラ(Nm-KN)													
B7-1-2	平均値	77.81	0.23	12.62	1.04	0.14	0.29	1.12	3.43	3.33	100.00	97.28	16
31.59-31.66 m	標準偏差	0.22	0.05	0.11	0.10	0.04	0.05	0.09	0.14	0.08	0.00	0.60	
B7-1-14	平均値	77.63	0.23	12.68	1.05	0.13	0.31	1.17	3.42	3.39	100.00	97.23	16
27.33-27.34 m	標準偏差	0.13	0.05	0.07	0.06	0.05	0.04	0.06	0.07	0.06	0.00	0.68	
鈴木・早田(1994) による模式地	平均値	77.85	0.21	12.61	0.95	0.10	0.29	1.14	3.59	3.26	100.00	98.09	16
	標準偏差	0.16	0.06	0.05	0.07	0.06	0.04	0.05	0.11	0.07	0.00	0.77	
御岳奈川テフラ(On-NG)?													
B7-1-14	平均値	75.37	0.26	13.73	1.53	0.12	0.41	1.66	3.49	3.42	100.00	93.26	14
39.39 m	標準偏差	0.36	0.07	0.07	0.13	0.06	0.03	0.05	0.07	0.19	0.00	0.83	
阿蘇4テフラ(Aso-4)													
B7-1-2	平均値	71.81	0.50	15.07	1.79	0.15	0.51	1.30	4.34	4.53	100.00	97.75	17
44.16-44.23 m	標準偏差	0.83	0.08	0.28	0.20	0.10	0.11	0.26	0.14	0.13	0.00	1.10	
北海道道東地域	平均値	72.09	0.48	14.92	1.67	0.17	0.47	1.21	4.46	4.53	100.00	95.70	20
	標準偏差	0.62	0.05	0.30	0.15	0.06	0.08	0.22	0.22	0.11	0.00	0.96	

首都大学東京都市環境学部地理学教室所蔵の日本電子製走査型電子顕微鏡JSM-6390およびEDAX社製エネルギー分散型X線分析装置EDAX-Genesis APEX2を用いた測定。測定条件は、加速電圧15 kV、試料電流0.6 nA。

**【付録 4】**

平均有効応力を用いた場合の堆積年代の試算

関口・太田の弾粘塑性構成モデルでは、本編第 5 章で示したとおり、下式が導出される。

$$\frac{t_i}{t_c} = \left( \frac{p'_c}{p'_i} \right)^{\frac{\lambda-\kappa}{\alpha}} \quad (1)$$

ここに、 $t_i$ は堆積後の時間、 $t_c$ は段階载荷圧密試験の 1 载荷段階における試験時間、 $p'_i$ と  $p'_c$ は有効土被り圧と圧密降伏応力(平均有効応力)、 $\lambda, \kappa$  はひずみと圧密圧力の関係  $e \sim \ln p$  における圧縮指数と膨潤指数、 $\alpha$  は同様にひずみと载荷時間の関係  $e \sim \ln t$  における二次圧密係数である。(  $\lambda = 0.4343C_c$ ,  $\kappa = 0.4343C_s$ ,  $\alpha = 0.4343C_\alpha$  )

一方、Bjerrum の概念図では、式 ( 2 ) のとおりとなる。

$$\frac{t_i}{t_c} = \left( \frac{\sigma'_{vc}}{\sigma'_{vi}} \right)^{\frac{C_c - C_s}{C_\alpha}} \quad (2)$$

式 (1) と式 ( 2 ) は、過圧密比を平均有効応力で求めているか、鉛直有効応力で求めているかの違いしかない。第 5 章では、式 ( 2 ) を用いているが、ここでは式 ( 1 ) による計算結果と比較してみる。

まず、 $p'$ と $\sigma'$ の関係は以下のとおりである。

$$p'_i = \frac{(1 + 2K_i)}{3} \sigma'_{vi} \quad (3)$$

$$p'_c = \frac{(1 + 2K_0)}{3} \sigma'_{vc} \quad (4)$$

ここに、 $K_0$ と $K_i$ はそれぞれ正規圧密状態と過圧密状態における静止土圧係数である。粘性土の場合、塑性指数 $I_p$ と静止土圧係数の関係が以下のとおり整理されている<sup>[1], [2]</sup>。

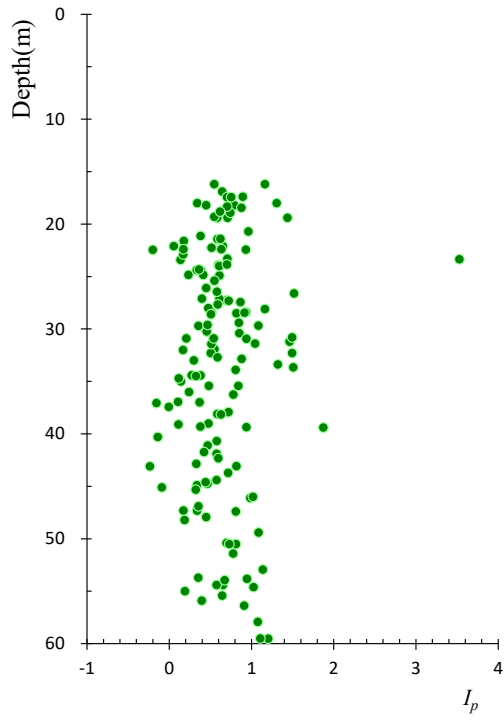
$$K_0 = 0.44 + 0.0042 \cdot I_p \quad (5)$$

$$K_i = K_0 \left( \frac{\sigma'_{vc}}{\sigma'_{vi}} \right)^m \quad (6)$$

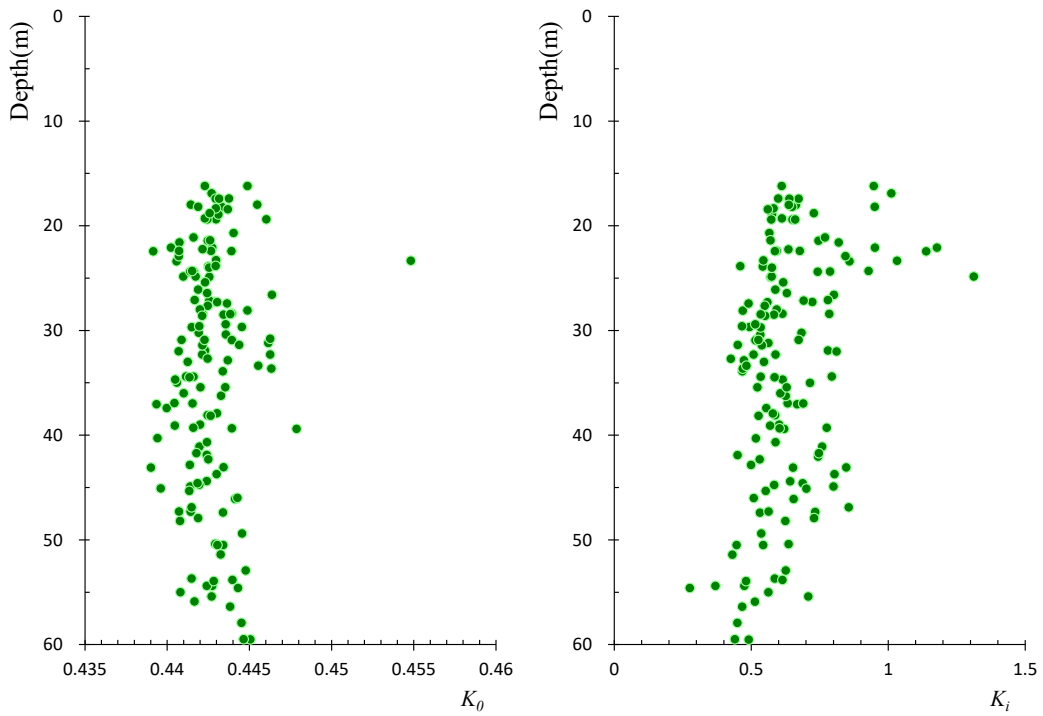
$$m = 0.54 \exp \left( -\frac{I_p}{122} \right) \quad (7)$$

塑性指数および静止土圧係数の深度分布を、図・付録 4-1 および図・付録 4-2 に示す。

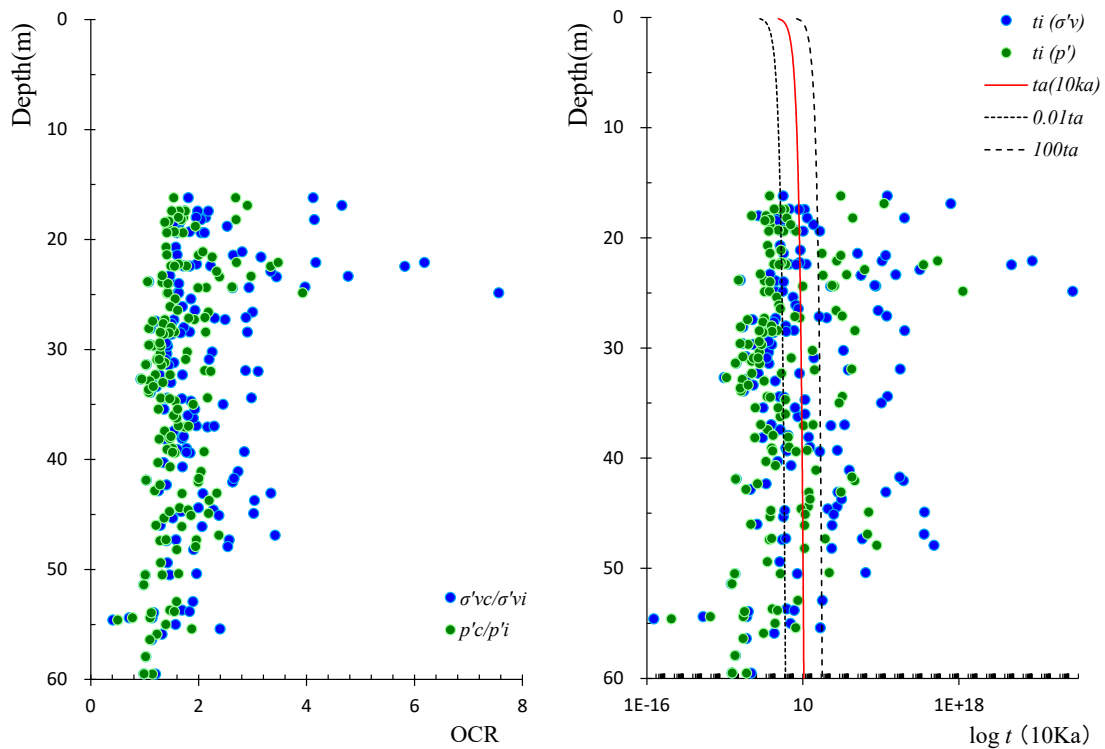




図・付録 4- 1 塑性指数の深度分布(更新統粘性土)



図・付録 4- 2 静止土圧係数の深度分布(更新統粘性土)



図・付録 4-3 過圧密比(左)と堆積年代の計算値(右)の深度分布

図・付録 4-3 (左図) に、過圧密比の深度分布について平均有効応力で求めた場合と鉛直有効応力で求めた場合を比較して示す。平均有効応力で求めた場合の方がバラつきが小さくなるが、過圧密比自体も小さく ( $\sigma'_{vc}/\sigma'_{vi}$  の中央値 1.70 に対し、 $p'_c/p'_i$  の中央値 1.47) なっている。

図・付録 4-3 (右図) は、左図の過圧密比で求めた堆積年代  $t_i$  の深度分布である。平均有効応力を用いた方が、計算結果のバラつきが数桁小さくなるが、計算結果が極端に小さくなる例も増えてしまう。

静止土圧係数を求めるうえで、式 ( 5 ) ~ ( 7 ) の適用性が確認できず、不確定な要素が増えてしまうことや、Bjerrum の概念図や第 6 章のアイソタック概念も 1 次元で考えられていることなどを勘案し、本編では一貫して鉛直有効応力を用いて論じるものとした。

- [1] R. K. Massarsch, "Lateral Earth Pressure in Normally Consolidated Clay," *7th European Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*, vol. 2, pp. 245-249, 1979.
- [2] I. Alpan, "The Empirical Evaluation of the Coefficient  $K_0$  and  $K_{0R}$ ," *Soil and Foundations*, vol. 7, no. 1, pp. 31-40, 1967.
- [3] H. Sekiguchi and H. Ohta, "Induced anisotropy and time dependency in clays," *Proceeding of Specialty Session 9,9th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*, pp. 229-238, 1977.

【付録 5】

試験結果の補正をした場合の堆積年代の試算

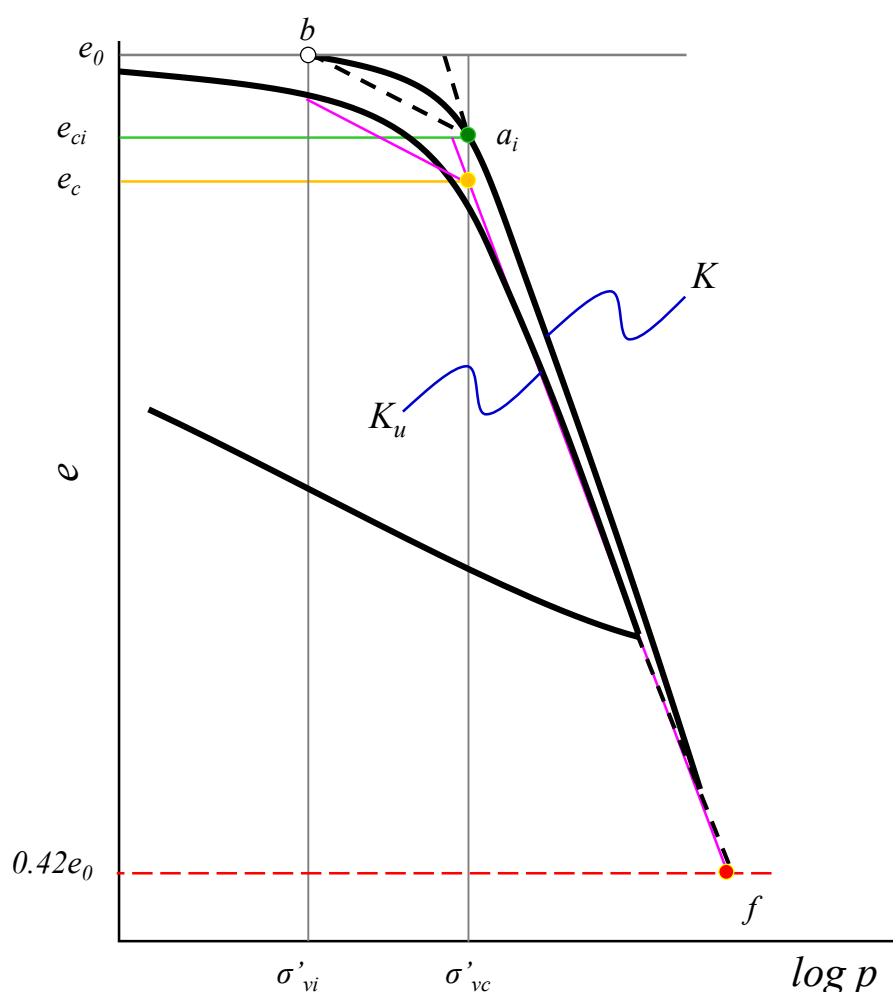
第5章及び第8章で述べたとおり、本研究で用いた様々な指標については、堆積年代の計算結果や過圧密比の大きさと関連が認められるものがなかった。

ここでは、更新統粘性土のすべてのデータを対象に、試験結果を補正した場合に堆積年代の計算値がどのようになるか試算してみる。

【付録 5-A】 Schmertmann の図解法による補正

Schmertmann の図解法<sup>[1]</sup>は、先行圧縮を受けた粘土の原地盤における間隙比と圧密圧力の関係を近似的に求める方法として知られる<sup>[2]</sup>。

図・付録 5-1 では、圧密試験で得られた圧縮曲線を  $K_u$  とし、これを  $K$  に補正する方法を示している。図の  $b$  点は、有効土被り圧  $\sigma'_{vi}$  において、原位置の間隙比が  $e_0$  であることを表す。現地盤の圧縮曲線はこの点を通過するものとする。



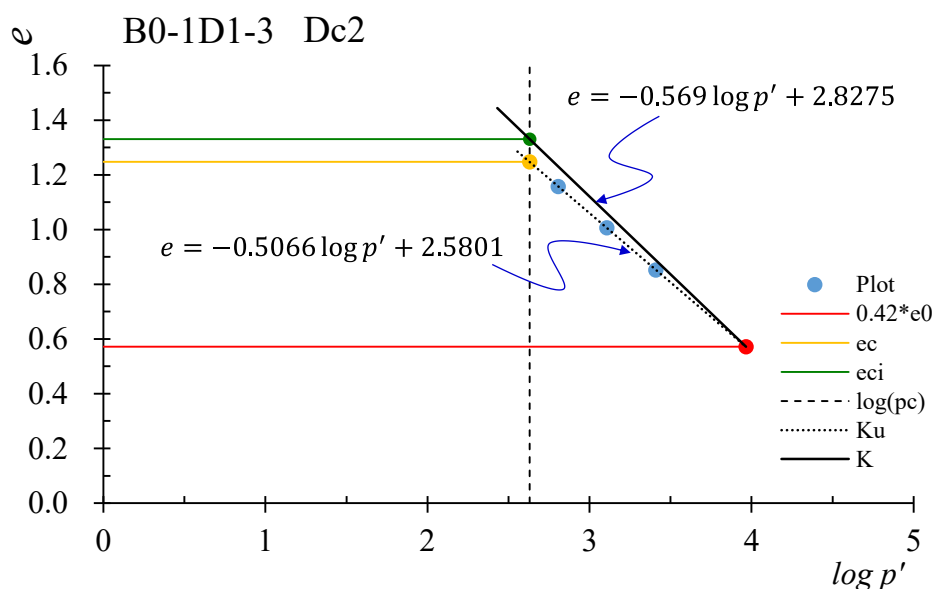
図・付録 5-1 Schmertmann の図解法

Schmertmann は実験結果として、同じ試料の圧縮曲線は乱れの程度によらず  $0.42e_0$  でほぼ一点に会するとしている<sup>[3]</sup>。これは、圧密による骨格破壊に伴い、変形に抵抗する土粒子の反発力と圧密応力のつり合いの位置が、乱れの影響を受けずに等しくなるような粒子間平均距離に達したことを意味する<sup>[4]</sup>。図・付録 5-1 では、この点を  $f$  としている。

線分  $b - a_i$  の傾きを膨潤指数  $C_s$ 、 $e_0$  を初期間隙比とすれば、 $e_{ci}$  と  $e_c$  を求めることができる。この、 $e_{ci}$  と  $e_c$  の差は、時間の差としてとらえることができる (式 (1))。

$$\log \Delta t = \frac{e_{ci} - e_c}{C_s} \quad (1)$$

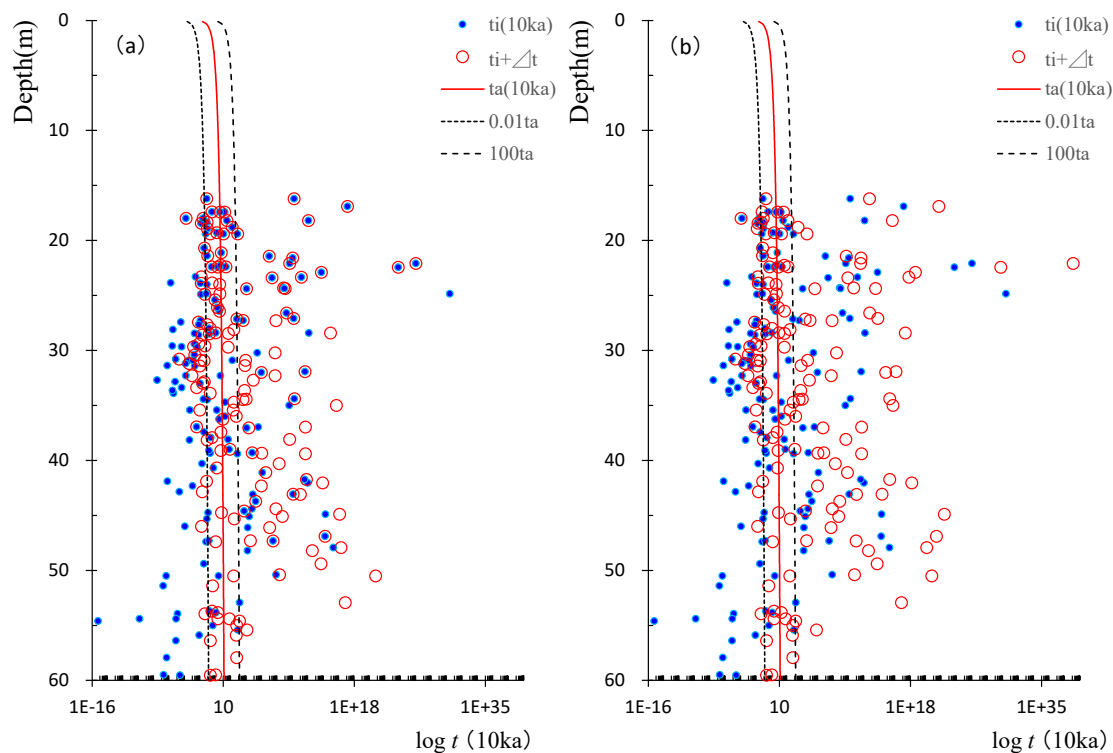
図・付録 5-2 は、実際に図・付録 5-1 の方法で圧縮曲線を補正した例である。この例の場合、 $\Delta t = 83366$  日となった。なお、図・付録 5-2 では、横軸を Liner Scale としたうえ入力値を対数としている。



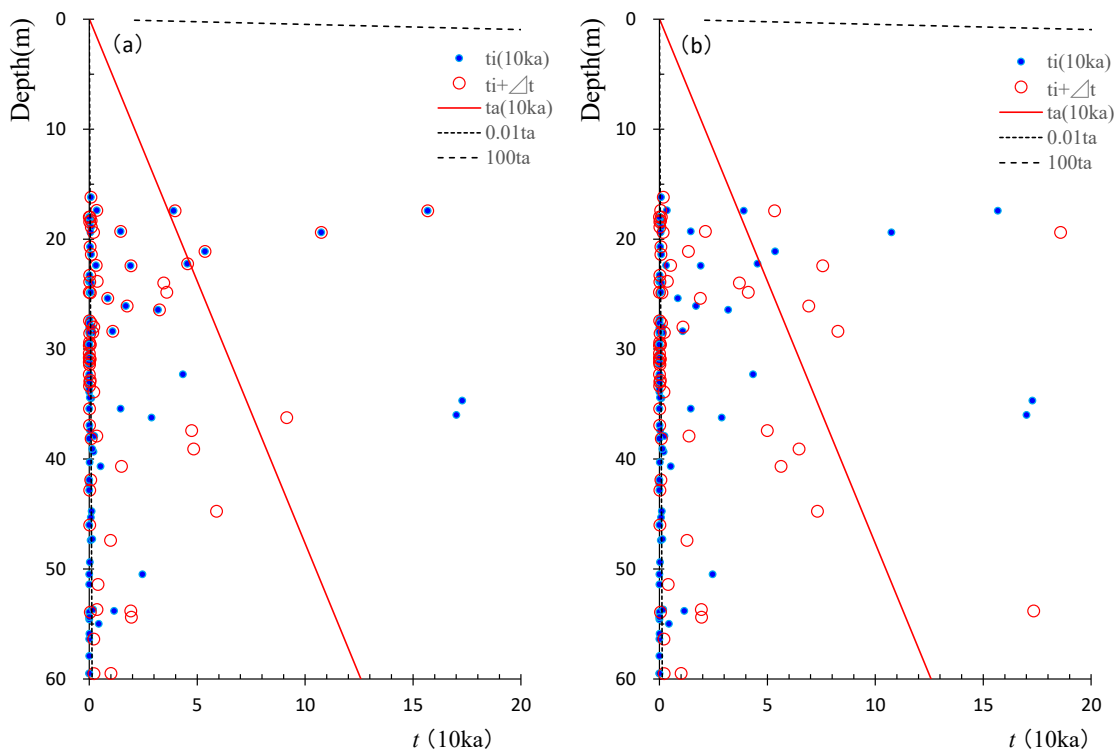
図・付録 5-2 図解法による補正の例

図・付録 5-3 に、 $\Delta t$  を加算して堆積年代の計算値  $t_i$  を補正した結果を示す。図 (a) では、 $\Delta t$  を加算するのみの補正としているが、図 (b) では、圧縮指数  $C_c$  を図・付録 5-1 の曲線  $K$  の傾きに修正したうえで  $t_i$  を求め、 $\Delta t$  を加算している。図 (b) ではバラつきが増幅されており、図 (a) の方が良好に見える。

図・付録 5-4 は、図・付録 5-3 の横軸を Liner Scale としたものである。図 (a)、(b) とともに、0 に近いデータが依然多く存在することがわかる。



図・付録 5- 3 堆積年代の補正結果(左;  $C_c$ 補正なし, 右;  $C_c$ 補正あり)



図・付録 5- 4 堆積年代の補正結果(左;  $C_c$ 補正なし, 右;  $C_c$ 補正あり) Liner Scale

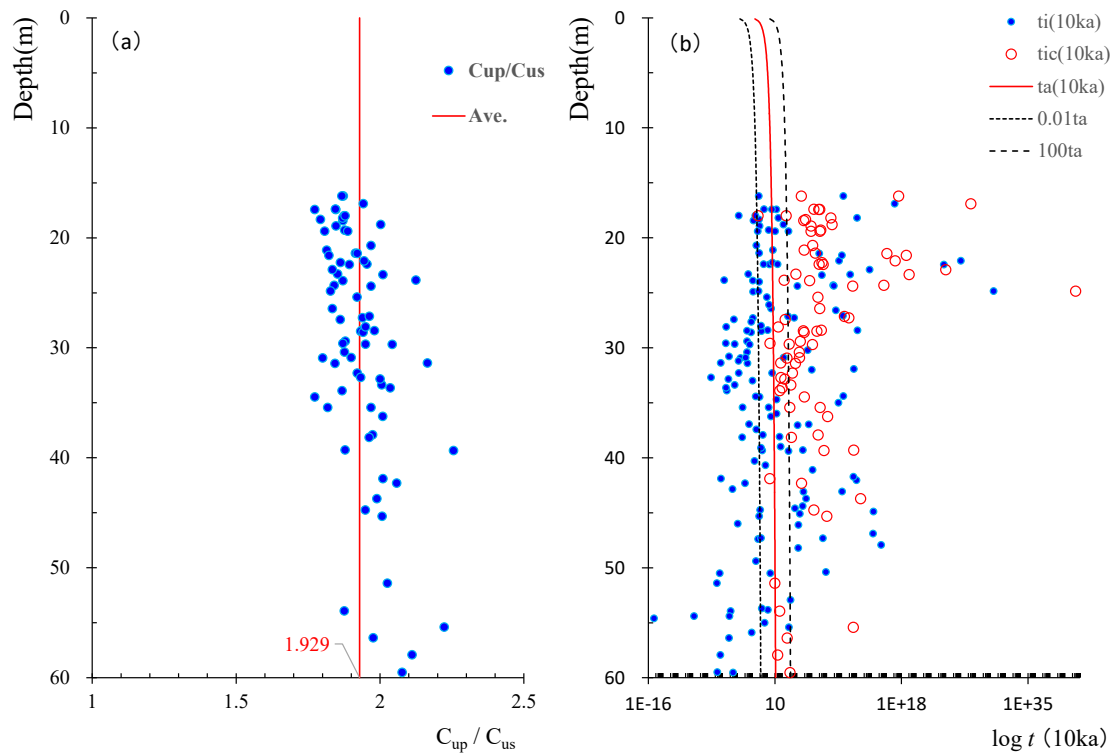
【付録 5-B】 中瀬らの方法による補正

中瀬らは、正規圧密粘土の非排水せん断強度 $q_u/2$ について、下式を提案している [5]、[6]。

$$\frac{C_{up}}{C_{us}} = \left[ \frac{\left\{ \frac{41}{((0.019I_p + 1.017)^2 - 1)} + 91 \right\}^{0.85}}{\frac{E_{50}}{p_0}} \right] \quad (2)$$

- ここに、 $C_{up}$ ：完全試料の強度  
 $C_{us}$ ：採取試料の $q_u/2$   
 $I_p$ ：塑性指数  
 $E_{50}$ ：変形係数  
 $p_0$ ：土被り圧

非排水せん断強度と圧密降伏応力の関係は、一般に一定である（強度増加率）ことが知られる。式（2）は、原位置の強度が非排水せん断強度の試験値の何倍であるかを表すものであるが、圧密降伏応力にもそのまま適用できるはずである。式（2）の計算結果は図・付録 5-5 (a) のとおりで、平均値は 1.929 となった。過圧密比が約 2 倍になることになる。 $t_i$ を求めた結果は、図・付録 5-5 (b) のとおりで、過大な補正となる状況である。



図・付録 5-5 式（2）の計算結果(a)と堆積年代の補正結果(b)



- [1] J. H. Schertmann, "Estimating the true consolidation behavior of clay from laboratory test results," *Proceedings of the American Society of Civil Engineers*, vol. 79, no. 10, pp. 1-26, 1953.
- [2] K. Terzaghi and R. B. Peck, *Soil Mechanics in Engineering Practice* 2nd Edition, John Wiley & Sons, Inc., 1967.
- [3] J. H. Schertmann, "The Undisturbed consolidation behavior of clay," *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, vol. 120, pp. 1201-1233, 1955.
- [4] 最上武雄, 土質力学, 技報堂, 1969.
- [5] A. Nakase, O. Kusakabe and H. Nomura, "A Method for Correcting Undrained Shear Strength for Sample Disturbance," *Soils and Foundations*, vol. 25, no. 1, pp. 52-64, 1985.
- [6] 土田孝, "三軸試験における自然粘性土地盤の強度決定法に関する研究," *港湾技研資料*, vol. 688, no. 12, pp. 1-200, 1990.

**【付録 6】**

関口・太田による弾粘塑性構成モデルの応力ひずみ関係

関口・太田による弾粘塑性構成モデル<sup>[1]</sup>では、弾性ひずみ増分 $\dot{\varepsilon}_{ij}^e$ と粘塑性ひずみ増分 $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$ の和としてひずみの増分 $\dot{\varepsilon}_{ij}$ を表現する (式 (1)).

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^{vp} \quad (1)$$

このうち、粘塑性ひずみ増分 $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$ が、流動関数 (式 (2)) と関連流れ則 (式 (3)) に従うものとする.

$$F = \alpha \ln \left\{ 1 + \frac{t}{t_0} \exp \left( \frac{f}{\alpha} \right) \right\} - \varepsilon_v^{vp} = 0 \quad (2)$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{vp} = d\Lambda \frac{\partial \bar{F}}{\partial \sigma'_{ij}} \quad (3)$$

ただし,

$$f = MD \ln \frac{p'}{p'_0} + D\eta^* \quad (4)$$

ここに、有効応力を $\sigma'_{ij}$ 、平均有効応力を $p'$ 、塑性ひずみを $\varepsilon_{ij}^p$ 、塑性体積ひずみを $\varepsilon_v^{vp}$ 、現在時間を $t$ 、基準時間を $t_0$ とし、二次圧密係数を $\alpha$ 、 $M$ を限界応力比、 $D$ をダイレイタンス係数、 $\eta^*$ を一般化された応力比、 $d\Lambda$ は連続負荷条件 ( $\dot{F} = 0$ ) から決定される定数 ( $d\Lambda > 0$ ) とする<sup>[2]</sup>.

式 (2) より、降伏関数は式 (5) のとおりとなる<sup>[3]</sup>.

$$\alpha \ln \left\{ 1 + \frac{t}{t_0} \exp \left( \frac{f}{\alpha} \right) \right\} = \varepsilon_v^{vp}$$

$$1 + \frac{t}{t_0} \exp \left( \frac{f}{\alpha} \right) = \exp \left( \frac{\varepsilon_v^{vp}}{\alpha} \right)$$

$$\exp \left( \frac{f}{\alpha} \right) = \frac{t_0}{t} \left\{ \exp \left( \frac{\varepsilon_v^{vp}}{\alpha} \right) - 1 \right\}$$

$$\frac{\exp \left( \frac{f}{\alpha} \right)}{\exp \left( \frac{\varepsilon_v^{vp}}{\alpha} \right)} = \frac{t_0}{t} \left\{ 1 - \frac{1}{\exp \left( \frac{\varepsilon_v^{vp}}{\alpha} \right)} \right\}$$

$$\exp \left( \frac{f - \varepsilon_v^{vp}}{\alpha} \right) = \frac{t_0}{t} \left\{ 1 - \exp \left( -\frac{\varepsilon_v^{vp}}{\alpha} \right) \right\}$$

$$f - \varepsilon_v^{vp} = \alpha \ln \left[ \frac{t_0}{t} \left\{ 1 - \exp \left( -\frac{\varepsilon_v^{vp}}{\alpha} \right) \right\} \right]$$

$$\bar{F} = f - \alpha \ln \left[ \frac{t_0}{t} \left\{ 1 - \exp \left( -\frac{\varepsilon_v^{vp}}{\alpha} \right) \right\} \right] - \varepsilon_v^{vp} \quad (5)$$

ここで、コンシステンシー条件  $\dot{\bar{F}} = 0$  より、

$$\begin{aligned} \dot{\bar{F}} &= \frac{\partial \bar{F}}{\partial \sigma'_{ij}} \dot{\sigma}'_{ij} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial \varepsilon_v^{vp}} \dot{\varepsilon}_v^{vp} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial t} \\ &= \frac{\partial \bar{F}}{\partial \sigma'_{ij}} \dot{\sigma}'_{ij} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial \varepsilon_v^{vp}} \frac{\partial \varepsilon_v^{vp}}{\partial \varepsilon_{ij}^{vp}} \dot{\varepsilon}_{ij}^{vp} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial t} \\ &= \frac{\partial \bar{F}}{\partial \sigma'_{ij}} \dot{\sigma}'_{ij} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial \varepsilon_v^{vp}} \delta_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^{vp} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial t} = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

$$\left( \because \frac{\partial \varepsilon_v^{vp}}{\partial \varepsilon_{ij}^{vp}} = \delta_{ij} \right)$$

$\delta_{ij}$  は、クロネッカーのデルタである。

弾性成分を線形弾性体とすると、応力増分は以下のとおり表される。（ $D_{ijkl}^e$  は弾性剛性テンソル。）

$$\dot{\sigma}'_{ij} = D_{ijkl}^e \dot{\varepsilon}_{kl}^e \quad (7)$$

式 (1)、式 (7) より

$$\dot{\sigma}'_{ij} = D_{ijkl}^e (\dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{\varepsilon}_{kl}^{vp})$$

式 (3) を代入して

$$\dot{\sigma}'_{ij} = D_{ijkl}^e \left( \dot{\varepsilon}_{kl} - d\Lambda \frac{\partial \bar{F}}{\partial \sigma'_{kl}} \right) \quad (8)$$

式 (6)、式 (8) より

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial \sigma'_{ij}} D_{ijkl}^e \left( \dot{\varepsilon}_{kl} - d\Lambda \frac{\partial \bar{F}}{\partial \sigma'_{kl}} \right) + \frac{\partial \bar{F}}{\partial \varepsilon_v^{vp}} \delta_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^{vp} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial t} = 0 \quad (9)$$

式 (3) を代入して

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial \sigma'_{ij}} D_{ijkl}^e \left( \dot{\varepsilon}_{kl} - d\Lambda \frac{\partial \bar{F}}{\partial \sigma'_{kl}} \right) + d\Lambda \frac{\partial \bar{F}}{\partial \varepsilon_v^{vp}} \delta_{ij} \frac{\partial \bar{F}}{\partial \sigma'_{ij}} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial t} = 0$$

$d\Lambda$  について整理すると

$$d\Lambda = \frac{\frac{\partial \bar{F}}{\partial \sigma'_{ij}} D_{ijkl}^e \dot{\varepsilon}_{kl} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial t}}{\frac{\partial \bar{F}}{\partial \sigma'_{ij}} D_{ijkl}^e \frac{\partial \bar{F}}{\partial \sigma'_{kl}} - \frac{\partial \bar{F}}{\partial \varepsilon_v^{vp}} \delta_{ij} \frac{\partial \bar{F}}{\partial \sigma'_{ij}}} \quad (10)$$

式 (8), 式 (10) より, 応力ひずみ関係は, 式 (11) のとおりとなる.

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}'_{ij} &= D_{ijkl}^e \left( \dot{\varepsilon}_{kl} - \frac{\frac{\partial \bar{F}}{\partial \sigma'_{pq}} D_{pqmn}^e \dot{\varepsilon}_{mn} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial t}}{\frac{\partial \bar{F}}{\partial \sigma'_{pq}} D_{pqmn}^e \frac{\partial \bar{F}}{\partial \sigma'_{mn}} - \frac{\partial \bar{F}}{\partial \varepsilon_v^{vp}} \delta_{pq} \frac{\partial \bar{F}}{\partial \sigma'_{pq}}} \frac{\partial \bar{F}}{\partial \sigma'_{kl}} \right) \\ &= D_{ijkl}^e \dot{\varepsilon}_{kl} - \frac{D_{ijkl}^e \frac{\partial \bar{F}}{\partial \sigma'_{kl}} \frac{\partial \bar{F}}{\partial \sigma'_{pq}} D_{pqmn}^e \dot{\varepsilon}_{mn} + D_{ijkl}^e \frac{\partial \bar{F}}{\partial \sigma'_{kl}} \frac{\partial \bar{F}}{\partial t}}{\frac{\partial \bar{F}}{\partial \sigma'_{pq}} D_{pqmn}^e \frac{\partial \bar{F}}{\partial \sigma'_{mn}} - \frac{\partial \bar{F}}{\partial \varepsilon_v^{vp}} \delta_{pq} \frac{\partial \bar{F}}{\partial \sigma'_{pq}}} \\ &= \left( D_{ijkl}^e - \frac{D_{ijmn}^e \frac{\partial \bar{F}}{\partial \sigma'_{mn}} \frac{\partial \bar{F}}{\partial \sigma'_{pq}} D_{pqkl}^e}{\frac{\partial \bar{F}}{\partial \sigma'_{pq}} D_{pqmn}^e \frac{\partial \bar{F}}{\partial \sigma'_{mn}} - \frac{\partial \bar{F}}{\partial \varepsilon_v^{vp}} \delta_{pq} \frac{\partial \bar{F}}{\partial \sigma'_{pq}}} \right) \dot{\varepsilon}_{kl} \\ &\quad - \frac{D_{ijkl}^e \frac{\partial \bar{F}}{\partial \sigma'_{kl}} \frac{\partial \bar{F}}{\partial t}}{\frac{\partial \bar{F}}{\partial \sigma'_{pq}} D_{pqmn}^e \frac{\partial \bar{F}}{\partial \sigma'_{mn}} - \frac{\partial \bar{F}}{\partial \varepsilon_v^{vp}} \delta_{pq} \frac{\partial \bar{F}}{\partial \sigma'_{pq}}} \quad (11) \end{aligned}$$

式 (5) より

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{F}}{\partial \varepsilon_v^{vp}} &= -\alpha \frac{1}{\frac{t_0}{t} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{\varepsilon_v^{vp}}{\alpha}\right) \right\}} \left(-\frac{t_0}{t}\right) \left(-\frac{1}{\alpha}\right) \exp\left(-\frac{\varepsilon_v^{vp}}{\alpha}\right) - 1 \\ &= \frac{-\exp\left(-\frac{\varepsilon_v^{vp}}{\alpha}\right)}{1 - \exp\left(-\frac{\varepsilon_v^{vp}}{\alpha}\right)} - 1 \\ &= \frac{-1}{1 - \exp\left(-\frac{\varepsilon_v^{vp}}{\alpha}\right)} \quad (12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{F}}{\partial t} &= -\alpha \frac{1}{\frac{t_0}{t} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{\varepsilon_v^{vp}}{\alpha}\right) \right\}} \frac{t_0}{t} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{\varepsilon_v^{vp}}{\alpha}\right) \right\} \left(-\frac{1}{t}\right) \\ &= \frac{\alpha}{t}\end{aligned}\quad (13)$$

式 (11), (12), (13) より, 式 (14) を得る.

$$\dot{\sigma}'_{ij} = \left( D_{ijkl}^e - C_1 \frac{D_{ijmn}^e \frac{\partial \bar{F}}{\partial \sigma'_{mn}} \frac{\partial \bar{F}}{\partial \sigma'_{pq}} D_{pqkl}^e}{C_2} \right) \dot{\varepsilon}_{kl} - \frac{D_{ijkl}^e \frac{\partial \bar{F}}{\partial \sigma'_{kl}} \frac{\alpha}{t} C_1}{C_2} \quad (14)$$

ただし,

$$\begin{aligned}C_1 &= 1 - \exp\left(-\frac{\varepsilon_v^{vp}}{\alpha}\right) \\ C_2 &= C_1 \frac{\partial \bar{F}}{\partial \sigma'_{ij}} D_{ijkl}^e \frac{\partial \bar{F}}{\partial \sigma'_{kl}} + \delta_{ij} \frac{\partial \bar{F}}{\partial \sigma'_{ij}}\end{aligned}$$

式 (4) のスカラー関数  $f$  は,

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial \sigma'_{ij}} = \frac{\partial f}{\partial \sigma'_{ij}}$$

が成り立つ.

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma'_{ij}} = \frac{\partial f}{\partial p'} \frac{\partial p'}{\partial \sigma'_{ij}} + \frac{\partial f}{\partial \eta^*} \frac{\partial \eta^*}{\partial \sigma'_{ij}}$$

ここで,  $\frac{\partial f}{\partial p'} = \frac{MD}{p'}$ ,  $\frac{\partial p'}{\partial \sigma'_{ij}} = \frac{1}{3} \delta_{ij}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial \eta^*} = D$  より

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma'_{ij}} = \frac{MD}{3p'} \delta_{ij} + D \frac{\partial \eta^*}{\partial \sigma'_{ij}} \quad (15)$$

一般化された応力比  $\eta^*$  は

$$\eta^* = \sqrt{\frac{3}{2} (\eta_{ij} - \eta_{ijo})(\eta_{ij} - \eta_{ijo})} \quad , \quad \eta_{ij} = \frac{S_{ij}}{p'} \quad , \quad \eta_{ijo} = \frac{S_{ijo}}{p'_0}$$

であるので

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \eta^*}{\partial \sigma'_{ij}} &= \frac{1}{2\eta^*} \frac{\partial \eta^{*2}}{\partial \sigma'_{ij}} = \frac{1}{2\eta^*} \frac{3}{2} \frac{\partial(\eta_{kl} - \eta_{klo})(\eta_{kl} - \eta_{klo})}{\partial \sigma'_{ij}} \\
&= \frac{3}{4\eta^*} \left\{ (\eta_{kl} - \eta_{klo}) \frac{\partial(\eta_{kl} - \eta_{klo})}{\partial \sigma'_{ij}} + \frac{\partial(\eta_{kl} - \eta_{klo})}{\partial \sigma'_{ij}} (\eta_{kl} - \eta_{klo}) \right\} \\
&= \frac{3}{2\eta^*} (\eta_{kl} - \eta_{klo}) \frac{\partial \eta_{kl}}{\partial \sigma'_{ij}} \tag{16}
\end{aligned}$$

$$\left( \because \frac{\partial \eta_{klo}}{\partial \sigma'_{ij}} = 0 \right),$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \eta_{kl}}{\partial \sigma'_{ij}} &= \frac{\partial \left( \frac{S_{kl}}{p'} \right)}{\partial \sigma'_{ij}} \\
&= \frac{\partial \left( \frac{S_{kl}}{p'} \right)}{\partial p'} \frac{\partial p'}{\partial \sigma'_{ij}} + \frac{\partial \left( \frac{S_{kl}}{p'} \right)}{\partial S_{mn}} \frac{\partial S_{mn}}{\partial \sigma'_{ij}} \\
&= -\frac{S_{kl}}{p'^2} \frac{1}{3} \delta_{ij} + \frac{1}{p'} I_{klmn} \frac{\partial S_{mn}}{\partial \sigma'_{ij}} \tag{17}
\end{aligned}$$

ここに,  $I_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$

$\sigma'_{ij} = p'\delta_{ij} + S_{ij}$ より

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S_{mn}}{\partial \sigma'_{ij}} &= \frac{\partial(\sigma'_{mn} - p'\sigma'_{mn})}{\partial \sigma'_{ij}} \\
&= \frac{\partial \sigma'_{mn}}{\partial \sigma'_{ij}} - \frac{\partial p'}{\partial \sigma'_{ij}} \delta_{mn} \\
&= I_{mnij} - \frac{1}{3} \delta_{il} \delta_{mn} \tag{18}
\end{aligned}$$

式(17), (18)より

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \eta_{kl}}{\partial \sigma'_{ij}} &= -\frac{1}{3} \frac{S_{kl}}{p'^2} \delta_{il} + \frac{I_{klmn}}{p'} \left( I_{mnij} - \frac{1}{3} \delta_{il} \delta_{mn} \right) \\
&= -\frac{S_{kl}}{3p'^2} \delta_{il} + \frac{1}{p'} \left( I_{kl ij} - \frac{1}{3} \delta_{il} \delta_{kl} \right) \tag{19}
\end{aligned}$$

式 ( 16), ( 19) より

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \eta^*}{\partial \sigma'_{ij}} &= \frac{3}{2\eta^*}(\eta_{kl} - \eta_{klo}) \left\{ -\frac{S_{kl}}{3p'^2} \delta_{il} + \frac{1}{p'} \left( I_{klij} - \frac{1}{3} \delta_{il} \delta_{kl} \right) \right\} \\
&= -\frac{1}{2\eta^* p'} \frac{S_{kl}}{p'} (\eta_{kl} - \eta_{klo}) \delta_{il} + \frac{3}{2\eta^* p'} (\eta_{kl} - \eta_{klo}) \left( I_{klij} - \frac{1}{3} \delta_{il} \delta_{kl} \right) \\
&= -\frac{1}{2\eta^* p'} \eta_{kl} (\eta_{kl} - \eta_{klo}) \delta_{ij} + \frac{3}{2\eta^* p'} (\eta_{ij} - \eta_{ijo}) \tag{ 20}
\end{aligned}$$

$$\because (\eta_{kl} - \eta_{klo}) I_{klij} = \frac{1}{2} (\eta_{kl} - \eta_{klo}) (\delta_{ki} \delta_{lj} + \delta_{kj} \delta_{li})$$

$$= \frac{1}{2} \{ (\eta_{ij} - \eta_{jio}) + (\eta_{ij} - \eta_{jio}) \}$$

$$= \eta_{ij} - \eta_{ijo}$$

$$(\eta_{kl} - \eta_{klo}) \delta_{ij} \delta_{ki} = (\eta_{kl} \delta_{ki} - \eta_{klo} \delta_{kl}) \delta_{ij} = 0$$

$$\eta_{kl} \delta_{kl} = \frac{S_{kl}}{p'} \delta_{kl} = \frac{1}{p'} (\sigma'_{kl} - p' \delta_{kl}) \delta_{kl}$$

$$= \frac{1}{p'} (\sigma'_{kl} \delta_{kl} - p' \delta_{kl} \delta_{kl})$$

$$= \frac{1}{p'} (3p' - 3p') = 0$$

$$\eta_{klo} \delta_{kl} = \frac{S_{klo}}{p'_0} \delta_{kl} = \frac{1}{p'_0} (\sigma'_{klo} - p'_0 \delta_{kl}) \delta_{kl}$$

$$= \frac{1}{p'_0} (\sigma'_{klo} \delta_{kl} - p'_0 \delta_{kl} \delta_{kl})$$

$$= \frac{1}{p'_0} (3p'_0 - 3p'_0) = 0$$

式 ( 15), ( 20) より

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \sigma'_{ij}} &= \frac{MD}{3p'} \delta_{ij} + D \left\{ \frac{-1}{2\eta^* p'} \eta_{kl} (\eta_{kl} - \eta_{klo}) \delta_{ij} + \frac{3}{2\eta^* p'} (\eta_{ij} - \eta_{ijo}) \right\} \\
&= \frac{D}{p'} \left\{ \frac{M}{3} \delta_{ij} - \frac{3}{2\eta^*} \eta_{kl} (\eta_{kl} - \eta_{klo}) \delta_{ij} + \frac{3}{2\eta^*} (\eta_{ij} - \eta_{ijo}) \right\} \\
&= \frac{D}{p'} \left[ \frac{1}{3} \left\{ M - \frac{3}{2\eta^*} \eta_{kl} (\eta_{kl} - \eta_{klo}) \right\} \delta_{ij} + \frac{3}{2\eta^*} (\eta_{ij} - \eta_{ijo}) \right]
\end{aligned}$$



$\beta = M - \frac{3}{2\eta^*} \eta_{kl}(\eta_{kl} - \eta_{klo})$ とおくと

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma'_{ij}} = \frac{D}{p'} \left\{ \frac{\beta}{3} \delta_{ij} + \frac{3}{2\eta^*} (\eta_{ij} - \eta_{ijo}) \right\} \quad (21)$$

ここで、弾性剛性テンソルは、式 (22) のとおりである。

$$\begin{aligned} D_{ijkl}^e &= \left( K - \frac{2}{3} G \right) \delta_{ij} \delta_{kl} + G (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}) \\ &= K \delta_{ij} \delta_{kl} - \frac{2}{3} G \delta_{ij} \delta_{kl} + 2G I_{ijkl} \\ &= K \delta_{ij} \delta_{kl} + 2G \left( I_{ijkl} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \right) \end{aligned} \quad (22)$$

ここに、体積弾性係数  $K = \frac{1+e_0}{\kappa} p'$ 、せん断弾性係数  $G = \frac{3(1-2\nu)}{2(1+\nu)} K$  であり、限界応力比  $M$  とダ

イレイタンシー係数  $D$  は  $M = \frac{\lambda-\kappa}{D(1+e_0)}$  の関係がある。なお、 $e_0$  は基準となる間隙比、 $\nu$  はポア

ソン比、 $\lambda$  と  $\kappa$  は圧縮指数と膨潤指数である。

式 (22) より、

$$\begin{aligned} D_{ijkl}^e \frac{\partial \bar{F}}{\partial \sigma'_{kl}} &= \frac{D}{p'} \left\{ K \delta_{ij} \delta_{kl} + 2G \left( I_{ijkl} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \right) \right\} \left\{ \frac{\beta}{3} \delta_{kl} + \frac{3}{2\eta^*} (\eta_{kl} - \eta_{klo}) \right\} \\ &= \frac{D}{p'} \left\{ \beta K \delta_{ij} + \frac{3G}{\eta^*} (\eta_{ij} - \eta_{ijo}) \right\} \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{F}}{\partial \sigma'_{ij}} D_{ijkl}^e \frac{\partial \bar{F}}{\partial \sigma'_{kl}} &= \frac{D^2}{p'^2} \left\{ \frac{\beta}{3} \delta_{ij} + \frac{3}{2\eta^*} (\eta_{ij} - \eta_{ijo}) \right\} \left\{ \beta K \delta_{ij} + \frac{3G}{\eta^*} (\eta_{ij} - \eta_{ijo}) \right\} \\ &= \frac{D^2}{p'^2} \left\{ \beta^2 K + \frac{9G}{2\eta^*} (\eta_{ij} - \eta_{ijo})(\eta_{ij} - \eta_{ijo}) \right\} \\ &= \frac{D^2}{p'^2} (\beta^2 K + 3G) \end{aligned} \quad (24)$$

$$\left( \because (\eta_{ij} - \eta_{ijo})(\eta_{ij} - \eta_{ijo}) = \frac{3}{2} \eta^{*2} \right)$$

$$\begin{aligned}\delta_{ij} \frac{\partial \bar{F}}{\partial \sigma'_{ij}} &= \frac{D}{p'} \delta_{ij} \left\{ \frac{\beta}{3} \delta_{ij} + \frac{3}{2\eta^*} (\eta_{ij} - \eta_{ij0}) \right\} \\ &= \frac{D}{p'} \beta\end{aligned}\quad (25)$$

式 (14), (22), (23), (24), (25) より式 (26) を得る.

$$\begin{aligned}\sigma'_{ij} &= \left[ K\delta_{ij}\delta_{kl} + 2G \left( I_{ijkl} - \frac{1}{3} \delta_{ij}\delta_{kl} \right) \right. \\ &\quad \left. - C_3 \frac{\frac{D^2}{p'^2} \left\{ \beta K \delta_{ij} + \frac{3G}{\eta^*} (\eta_{ij} - \eta_{ij0}) \right\} \left\{ \beta K \delta_{kl} + \frac{3G}{\eta^*} (\eta_{kl} - \eta_{kl0}) \right\}}{C_4} \right] \dot{\epsilon}_{kl} \\ &\quad - \frac{\frac{\alpha}{t} C_3 \left\{ \beta K \delta_{ij} + \frac{3G}{\eta^*} (\eta_{ij} - \eta_{ij0}) \right\}}{C_4}\end{aligned}\quad (26)$$

ただし,

$$C_3 = 1 - \exp\left(-\frac{\epsilon_v^{vp}}{\alpha}\right)$$

$$C_4 = C_3 \frac{D^2}{p'^2} (\beta^2 K + 3G) + \frac{D}{p'} \beta$$

- [1] H. Sekiguchi and H. Ohta, "Induced anisotropy and time dependency in clays," *Proceeding of Specialty Session 9,9th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*, pp. 229-238, 1977.
- [2] 社団法人 地盤工学会, "地盤の変形解析-基礎理論から応用まで-", *地盤工学・基礎理論シリーズ*, vol. 1, pp. 39-64, 2002.
- [3] 敦. 飯塚 and 秀. 太田, "塑性論的粘塑性論による関口・太田モデルの解釈," *第34回地盤工学研究発表会発表講演集*, pp. 595-596, 1999.