



図 3-7 平成 5 年～平成 17 年までの河口砂州の航空写真³⁾⁴⁾(一部加筆)

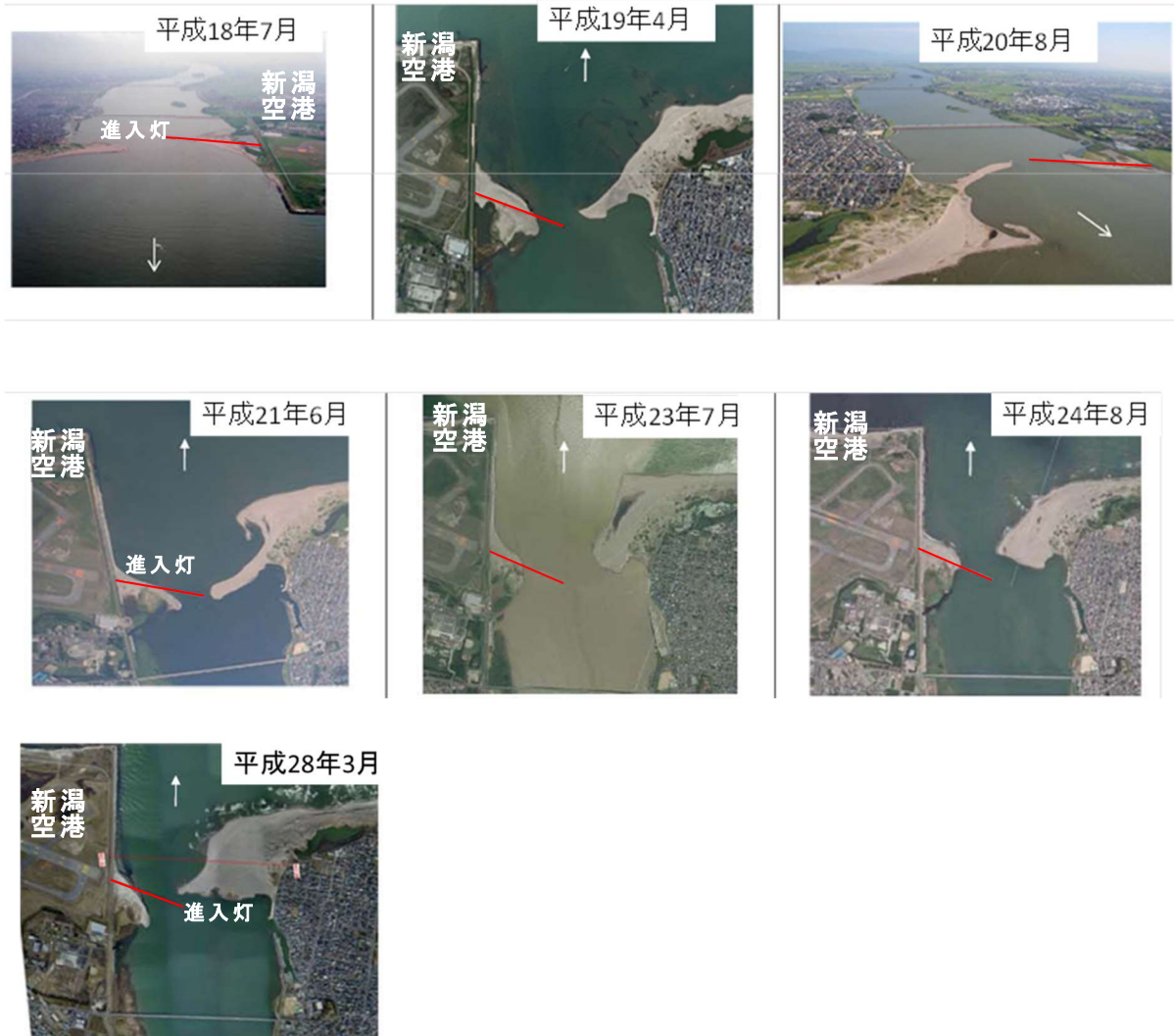


図 3-8 平成 18 年～平成 28 年までの河口砂州の航空写真⁴⁾(一部加筆)

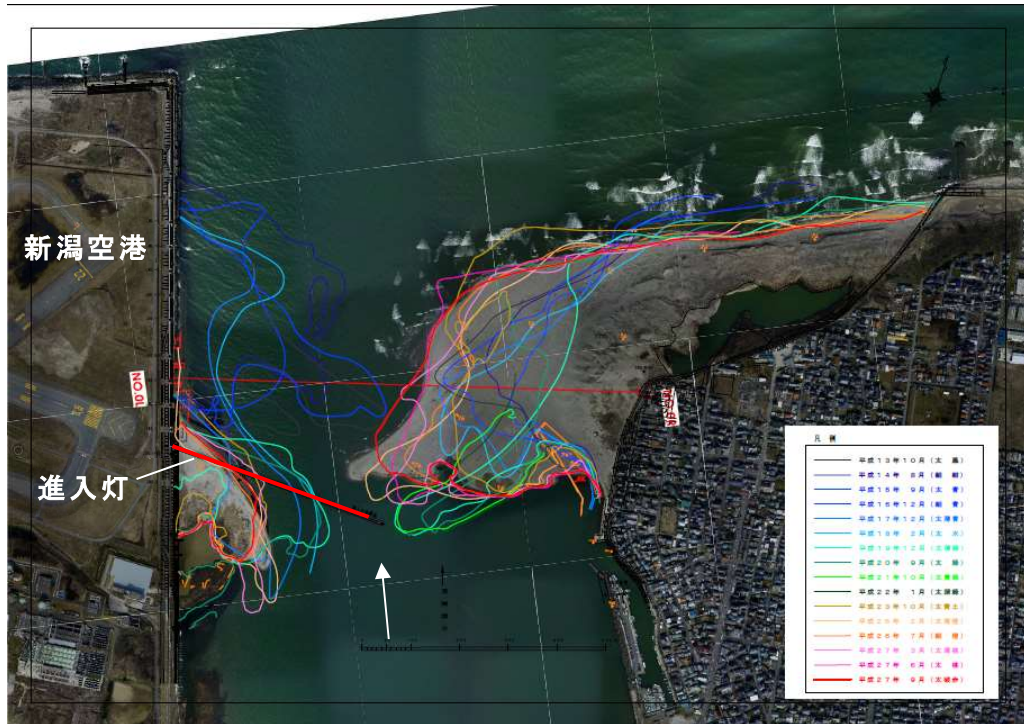


図 3-9 平成 13 年～平成 27 年までの河口砂州の汀線の経年変化 4) (一部加筆)

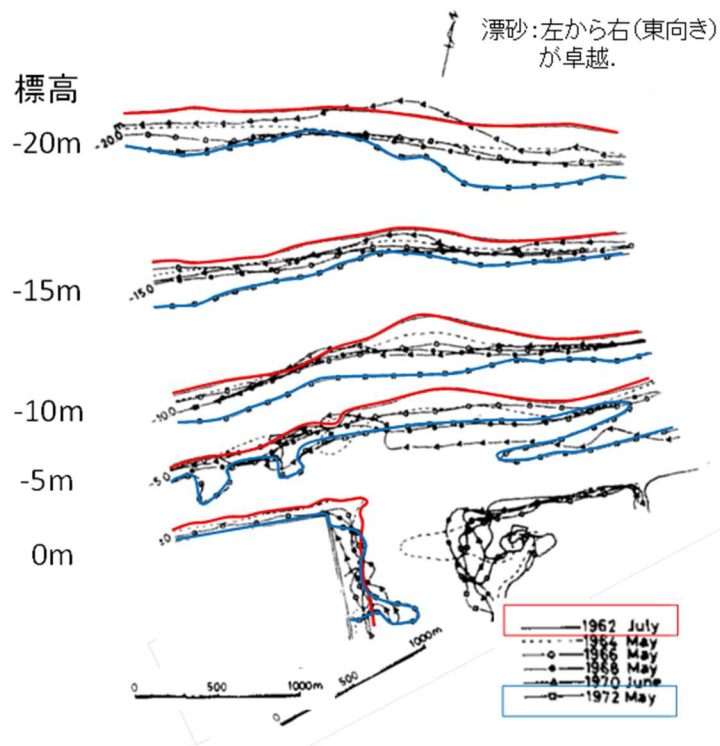
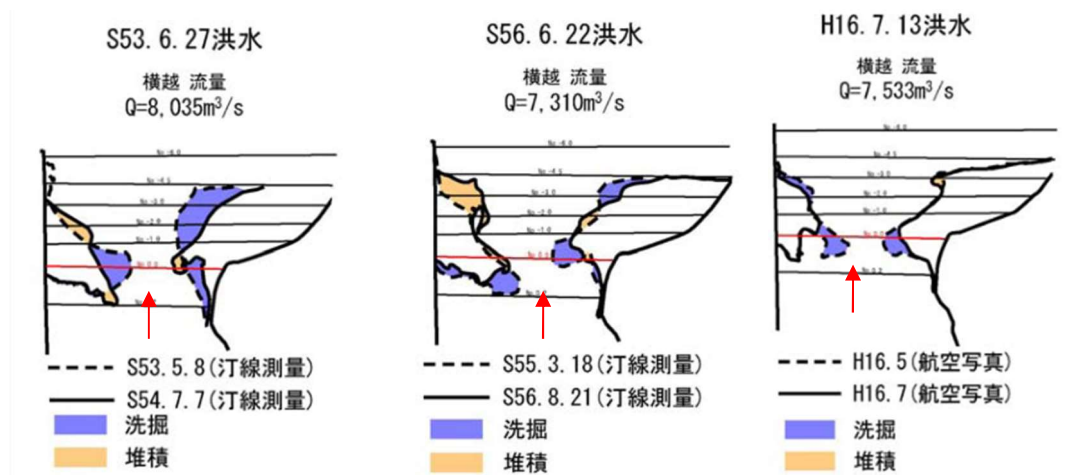
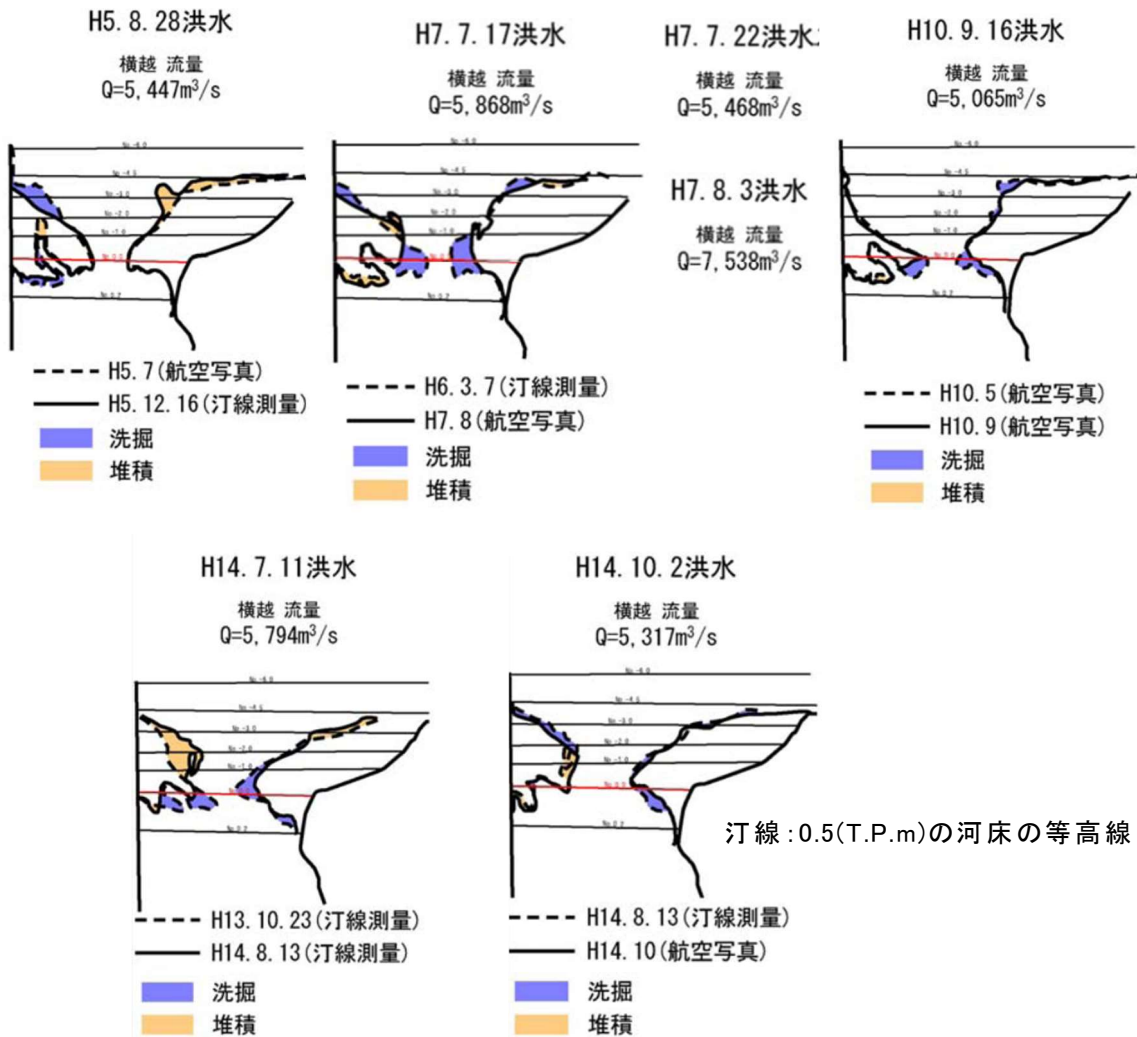


図 3-10 阿賀野川河口沖等深線の経年変化 5) (一部加筆)



汀線:0.5(T.P.m)の河床の等高線

図 3-11 6,000 m^3/s 以上の洪水における阿賀野川河口砂州の開口状況³⁾



汀線:0.5(T.P.m)の河床の等高線

図 3-12 4,500~6,000 m^3/s の洪水における阿賀野川河口砂州の開口状況³⁾

3.4. 平成 23 年 7 月阿賀野川洪水の観測体制と観測結果

図 3-13 は、国土交通省北陸地方整備局阿賀野川河川事務所との共同で行った平成 23 年 7 月阿賀野川洪水の観測体制を示し、図 3-14 は本洪水における水位観測地点を示す。阿賀野川河口部では、洪水時の河口砂州拡幅機構を把握するため、図 3-14(a) に示す既設の水位計に加えて、図 3-14(b)に示すよう、平成 22 年 6 月に計 10 点の圧力式水位計を設置し、詳細な水面形時間変化の観測が行われた。図 3-15 は、1.6km に設置された圧力式水位計の設置状況を示す。この地点では、圧力式水位計を低水路際に固定して水位計測が行われた。設置された圧力式水位計は、下部に穴が開けられた塩ビ管で覆われている。他の圧力式水位計も図 3-15 に示すように、河川構造物やコンクリート側岸に固定して設置されている。潮位データは阿賀野川河口から左岸側海岸に沿っておよそ 6km 離れた新潟西港の観測値を用いる。洪水時の浮子流量観測は、図 3-14(a) に示す横越水位・流量観測所地点において合計 12 回行われた(図 3-2)。

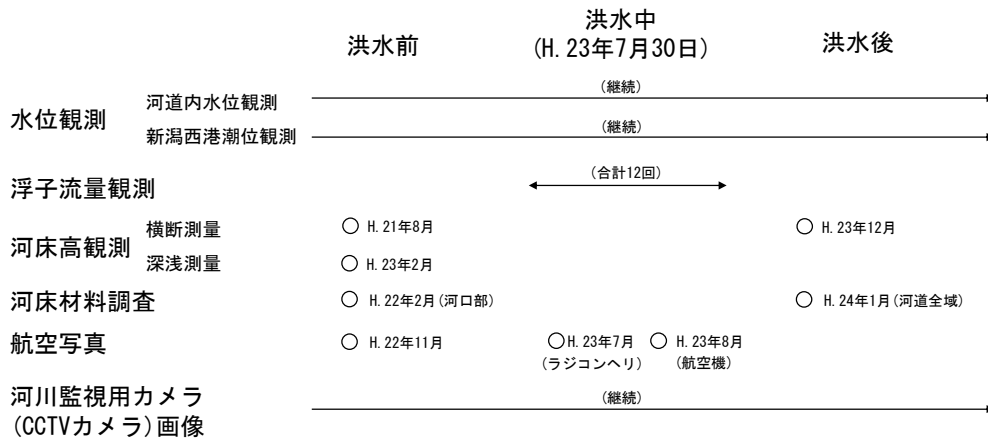
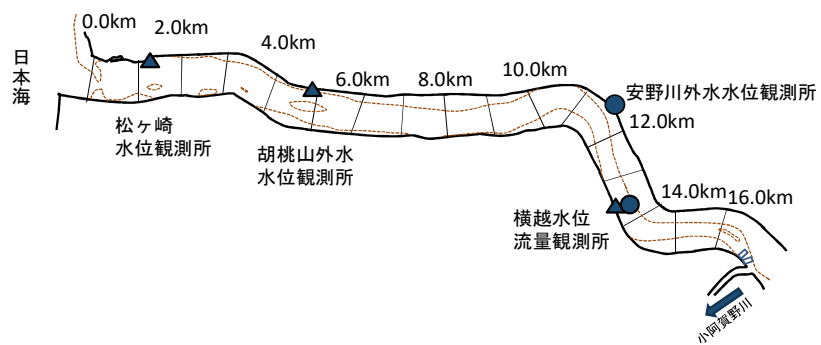
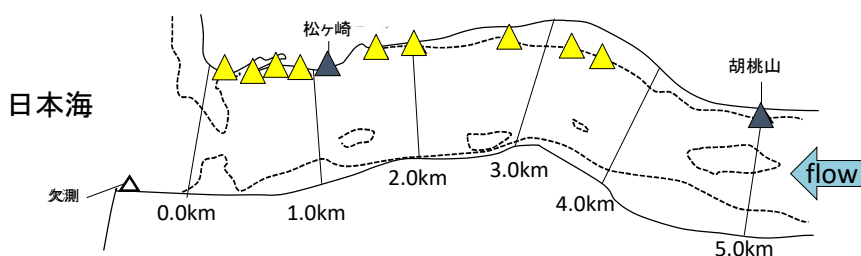


図 3-13 平成 23 年 7 月洪水に関する種々の観測が実施された時期



(a) 阿賀野川下流部の水位・流量観測所位置(既設)

[△:圧力式水位計の位置]



(b)阿賀野川河口域の水位観測位置

図 3-14 阿賀野川の水位・流量観測所位置



図 3-15 1.6km に設置された圧力式水位計

河床高の観測は、平成 23 年 7 月阿賀野川洪水前後に行われた。洪水前の地形測量については、平成 21 年 8 月に河川全域の横断測量を 200m 間隔で行い、さらに河口地形の詳細を把握するため、平成 23 年 2 月に-0.6km から 1.0km までの範囲でマルチビームによる 3 次元深浅測量が行われた。この詳細な深浅測量より、図 3-16 に示す水面下の河床高が面的に観測され、河口部水面下の詳細な地形データを得ることが出来た。洪水後の地形測量は、洪水前の横断測量と同様の範囲と縦断間隔で行われた。図 3-17 には、図 3-16 に示す測線上の洪水前後横断測量成果を示す。これより、1.0km から 0.4km までの河道内地形変化に比べ、0.2km 以降の河口地形は、河口砂州が拡幅する等大規模に変化したことを把握することが出来た。

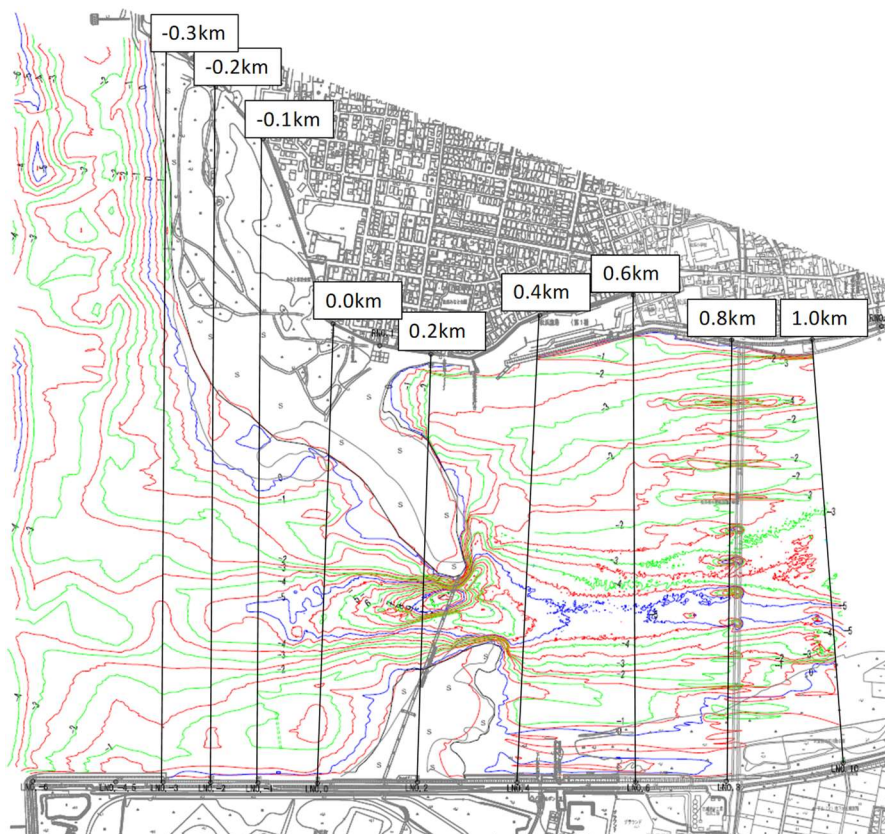


図 3-16 平成 23 年 2 月河口部深浅測量成果

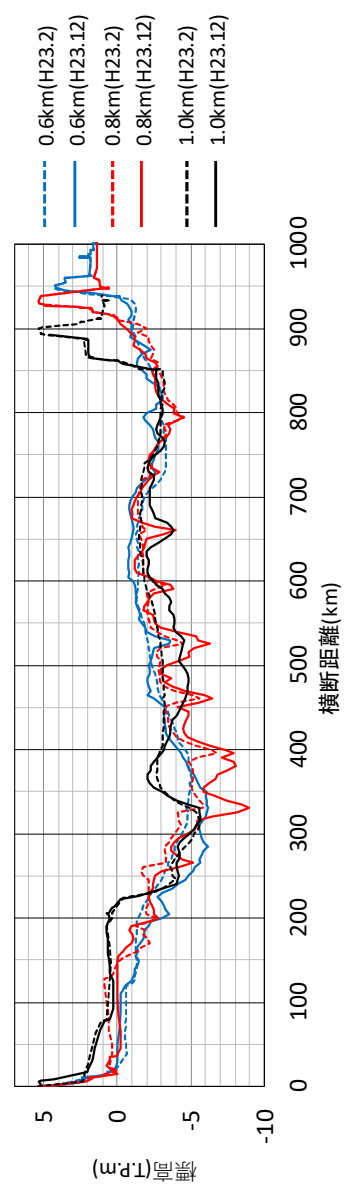
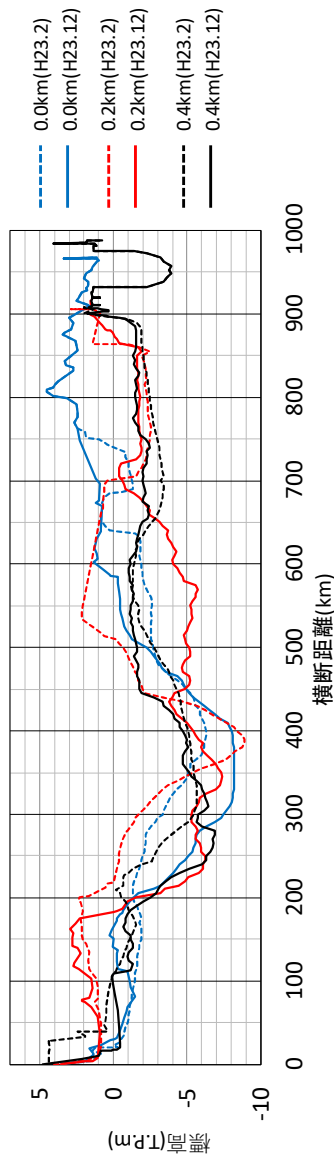
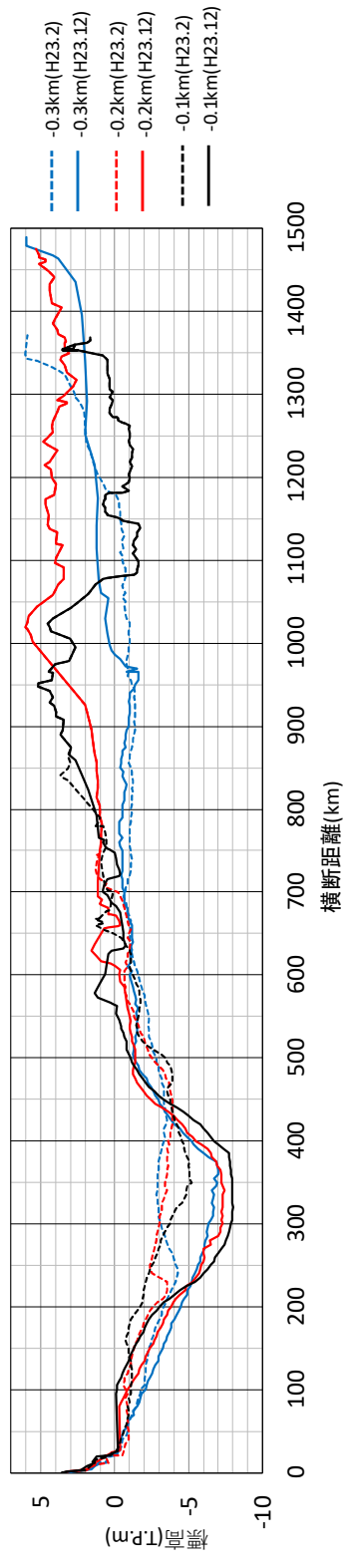


図 3-17 平成 23 年 7 月洪水前後の河口部横断面測量成果

河床材料調査も同様に、洪水前後に行われた。洪水前については、平成 22 年 2 月に河口砂州構成材料の把握を目的とした河床材料調査が行われ、図 3-18 に示す計 9 地点の河床表層材料を採取・分析した。洪水後の平成 24 年 1 月に行われた河床材料調査は、河道内の河床材料を調査することを目的としているため、「河床材料調査ガイドライン(案) H21.5」に基づいた調査が行われた。この調査より、図 3-19 に示す粒度分布が得られた。

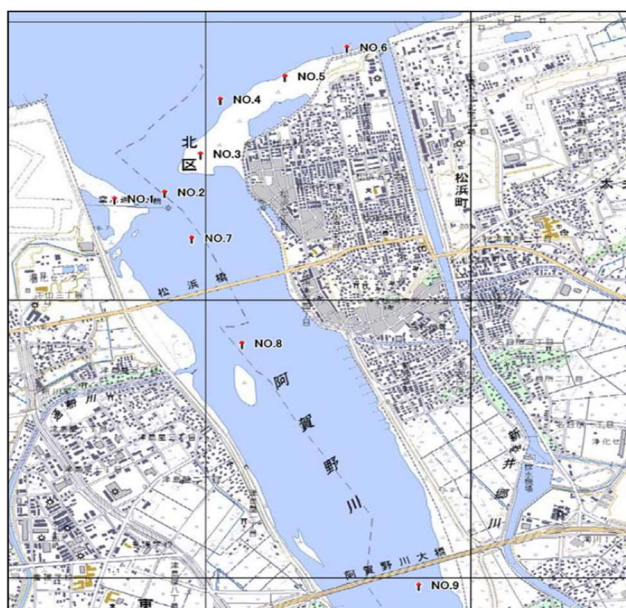


図 3-18 平成 22 年 2 月河口部河床材料調査位置

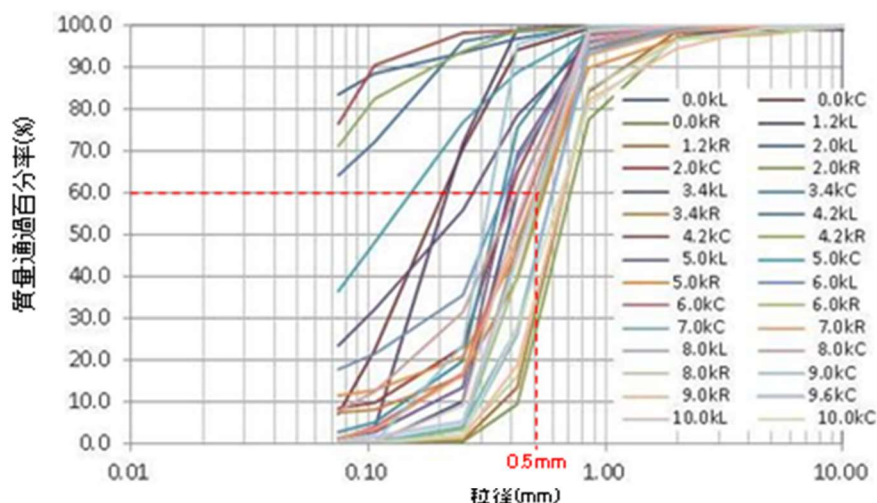


図 3-19 阿賀野川における河床材料調査結果

図 3-4 は、洪水前後に撮影された垂直航空写真による河口砂州形状の変化を示す。洪水中には、阿賀野川河川事務所がラジコンヘリコプターにより写真撮影を行い、北陸地方整備局が災害対策用有人ヘリコプターほくりく号により写真撮影を行った。それぞれの機関が撮影した写真を図 3-20、図 3-21 に示す。ラジコンヘリコプターによる撮影は、洪水ピーク流量流下時の平成 23 年 7 月 30 日 8 時 29 分に行われ、ほくりく号による撮影は同 17 時 36 分に行われた。また、図 3-21 に示す位置に設置されている河川監視用カメラ(以下、CCTV カメラ)により、洪水中の河口砂州の変形の様子が撮影された。図 3-22 には、0.8km に設置された CCTV カメラより得られた洪水開始時と洪水終了時の河口砂州



図 3-20 ラジコンヘリコプターを用いたピーク流量流下時の河口斜め写真



図 3-21 ほくりく号から撮影した河口斜め写真

形状画像を示す。本研究では、これらの連続画像の分析から、洪水時の右岸河口砂州先端位置の移動量を読み取った。画像の分析は、**図 3-23** に示すよう、CCTV カメラ画像と航空写真の照らし合わせから、次に示す①から③までの手順を踏み、行った。

- ①「新潟空港進入灯」、「左岸堤防先端」、「右岸河口砂州先端」に着目し、カメラ画像内で **a** と **b** の位置を定める。**a** は平面図内の **L** に対応し、**b** は左岸堤防から右岸河口砂州先端までの見た目上の距離を表し、河口砂州先端の移動に伴い、時間毎に変化する長さである。平面図内の **L** は、図内の黒点線で示すカメラ位置から新潟空港進入灯先端を通る直線が左岸堤防と交わる位置を起点とした左岸堤防先端までの長さである。
- ② $a:b=L:x$ が成り立つと考え、平面図内の **x** の長さを求める。
- ③ 黄色の線に示すよう、**x** の先端とカメラ位置を結ぶ直線を引き、右岸河口砂州との交点の時間変化を追うことで、右岸河口砂州先端位置の移動量を読み取った。

図 3-24 に CCTV カメラ画像を用いた洪水時の右岸河口砂州先端位置の移動量分析結果、洪水前に測量された 0.2km 横断面内の砂州頂点高さ、0.2km 右岸に設置された圧力式水位計の観測水位ハイドログラフを重ね合わせた図を示す。これより、洪水波形のピーク 2 を超えると急速に砂州が拡幅しており、洪水ピークのピーク 3 までに開口幅が拡大していることが分かる。また、カメラ画像より読み取った拡幅の生じた時間帯には、観測水位が砂州前縁部の河床高を上回っており、砂州前縁に位置する 0.2km 横断面上を越流する流れが生じたことが考えられる。一方、洪水減水期における砂州の拡幅量は、相対的に小さい。

次に、洪水時の河口砂州周辺の観測水面形の時間変化を考察する。**図 3-25** は、同規模の流量が流下している時間の観測水面形の比較を示す。時間は**図 3-2** に示した流量ハイドログラフと対応している。赤線で示すピーク 2 の 7/30 1:00 の観測水位は、青線で示すピーク 3 の 7/29 15:00 の観測水位に比べ、河口砂州付近で低くなっている。これは、ピーク 2 に河口砂州が拡幅したため、流水断面積が拡大した影響であると考えられ、河口砂州の拡幅の影響は、明確に観測水面形の時間変化に現れている。



図 3-22 河口部に設置された CCTV カメラの位置



(a) 洪水ピーク 1 後の CCTV カメラ画像



(b) 洪水後の CCTV カメラ画像

図 3-23 0.8km に設置された CCTV カメラ画像の時間的比較

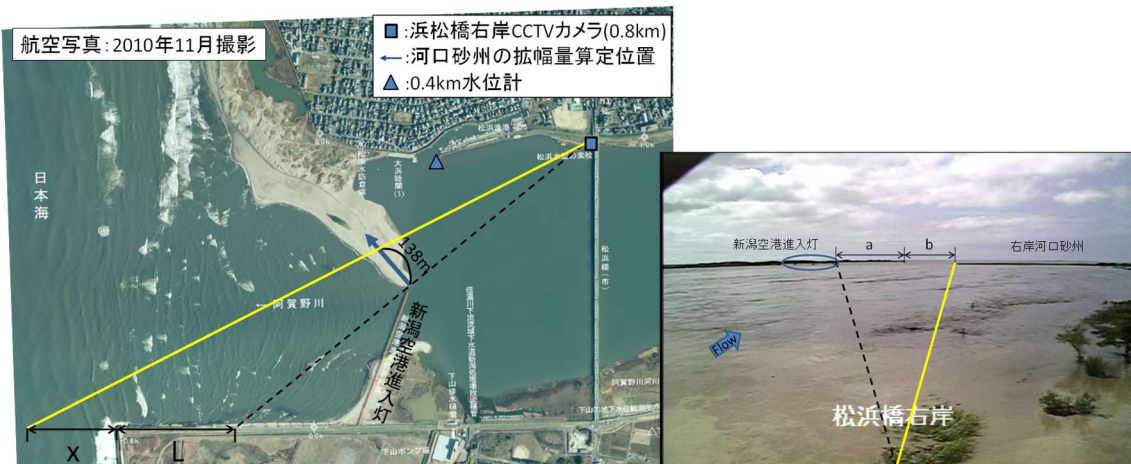


図 3-24 CCTV カメラ画像分析方法

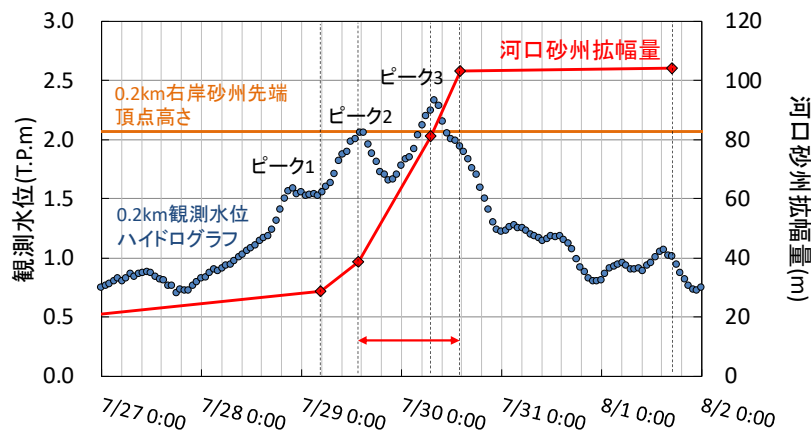


図 3-25 洪水中の CCTV カメラ画像分析・観測結果に基づく砂州拡幅過程

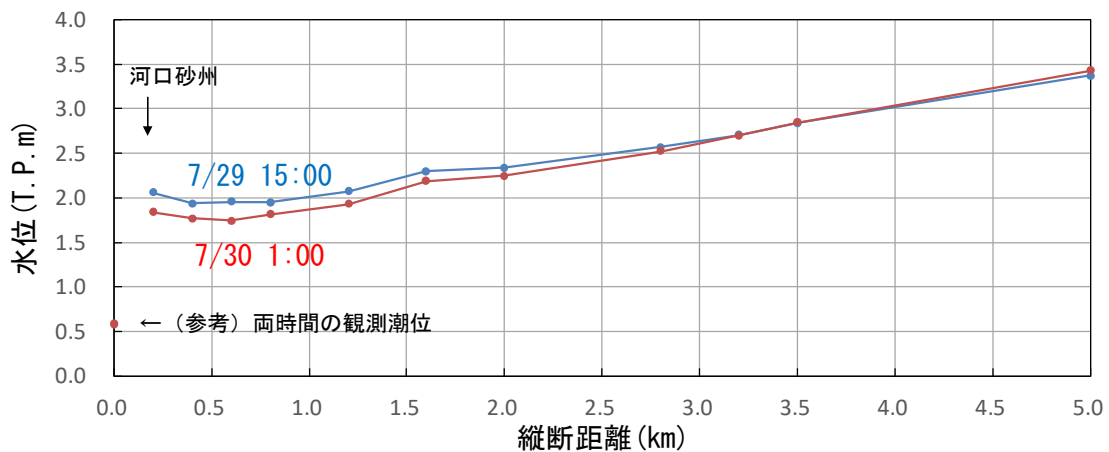


図 3-26 阿賀野川河口域の詳細に観測された水面形の時間変化

3.5. まとめ

本章では、まず、阿賀野川の概要及び十分発達した河口砂州形状の特徴とその経年変化を示した。次に、既往最大洪水である平成 23 年 7 月阿賀野川洪水における詳細な観測結果から、河口砂州がどのように拡幅し開口幅が拡大したかを検討した。

阿賀野川の河口では、昭和 40 年頃から両岸に砂州が形成されるようになり、河口砂州は約 1,000m の河幅を、河口では 200m 程度の開口幅まで狭めている。河口砂州の形状は、滞筋部の河床高と河口砂州の比高差は 10m 以上あり、河口砂州付近の斜面勾配は約 1/6 にもなり、縦横断的に大きな斜面勾配を有する。阿賀野川河口砂州の経年変化は、近年、徐々に河川の上流側に移動する傾向にある。しかし、河口砂州は洪水流によってどのようなプロセスを経て最終開口幅に至るかは明らかでない。

本研究では、阿賀野川河口砂州の拡幅のプロセスを明らかにするため、国土交通省北陸地方整備局阿賀野川河川事務所と共同で大規模な河口砂州観測体制を整備した。特に重要な二つの観測準備を次に示す。一つ目は、洪水中の河口砂州の拡幅過程は、その上流河道の水面形の時間変化に明確に現れることから、河口から 3.4km 付近までの区間に水位計を密な縦断間隔で設置し、洪水時の水面形時系列を詳細に観測する体制を整えた。二つ目は、洪水中の河口砂州拡幅過程を把握するため、CCTV カメラによる洪水中の河口砂州変形の様子を撮影する準備を整えた。

このような観測体制を整えた状況において、平成 23 年 7 月新潟県と福島県只見地方に被害をもたらした記録的な豪雨(平成 23 年 7 月新潟・福島豪雨)が生じた。平成 23 年 7 月阿賀野川洪水では、横越(13.5km)地点のピーク流量が既往最大となる約 11,000m³/s に達した。洪水前後の 0.2km 横断測量結果から、この洪水により河口砂州は約 250m 拡幅したことを示した。また、前述した詳細な河口部の水位と砂州形状の観測結果から、河口砂州上を洪水流が越流することで拡幅が生じ始め、洪水ピークまでの間に急激に開口幅が拡大すること、一方で、洪水減水期における拡幅量は相対的に小さいことが分かった。

参考文献

- 1) 国土交通省北陸地方整備局:阿賀野川整備計画, 2016.
- 2) 国土地理院, 国土変遷アーカイブ・空中写真観覧システム,
<http://mapps.gsi.go.jp/maplibSearch.do#1>.
- 3) 国土交通省河川局, 阿賀野川水系河川整備基本方針, 土砂管理等に関する資料
(案), 2007.
- 4) 国土交通省 北陸地方整備局 阿賀野川河川事務所:河口砂州の変遷と現状, 2016.
- 5) 田中則男, 加藤一正, 柳島慎一:阿賀野川河口近傍海岸の海底地形変化について
(1963年~1973年), 港湾技術研究所報告, Vol.15, No.2, pp.89-166, 1976.

第 4 章 十分発達した河口砂州の洪水流による拡幅機構の解析モデルの構築

十分発達した河口砂州上を越流する流れによる砂州拡幅過程を説明するには、縦横断的に大きな斜面勾配を有し、流れの三次元が強い砂州上の斜面に沿う底面付近の流れと流砂運動を適切に計算することが重要である。本章では、この三次元流れと急勾配斜面を有する砂州上の斜面に沿う底面付近の流れと掃流砂及び浮遊砂の三次元的な移流拡散を定式化し、解析モデルを構築する。以下では、この解析法を解析法 1 と呼ぶことにする。また、河床勾配が緩勾配であることを想定し、底面付近の水平方向の流れと流砂運動を考えた解析法 2 の方程式群を示す。解析法 1 と解析法 2 の方程式系を対比することで、斜面に沿う流れと流砂運動の考慮が、流れ場全体に及ぼす重要性を考察する。

4.1. 十分発達した河口砂州周辺の洪水流場の特徴と解析法 1 の概要

4.1.1 十分発達した河口砂州周辺の洪水流場の特徴

図 4-1 は、洪水時の発達した河口砂州の拡幅機構に重要となる流れと土砂輸送の様式図を示す。阿賀野川の河口砂州は両岸から大きく発達し、河口砂州開口幅を狭めている。洪水時、十分発達した河口砂州は、河口砂州を挟む上下流で大きな水位差を引き起こすと同時に、洪水流の流線を大きく曲げるため、河口砂州周辺では、三次元性の強い加速流となる。この流れは、洪水流量の増大に伴い、越流範囲を広げながら砂州を拡幅させる。

本研究では、この点に着目し、河口砂州周辺の流れの三次元性と縦横断的に大きな斜面勾配を有する砂州上の斜面に沿う底面付近の流れと流砂運動を解析に考慮し、洪水流による河口砂州の拡幅過程を定式化する。

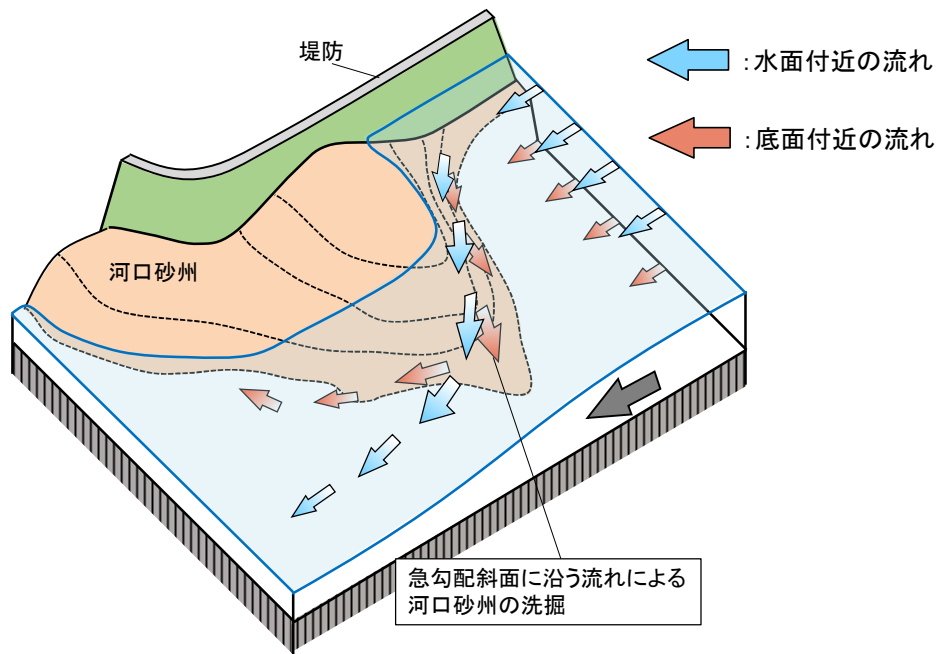


図 4-1 河口砂州周辺の流れの模式図

4.1.2 斜面に沿う底面付近の流れと流砂運動を考慮した解析法1の概要

本研究では、河口部周辺の三次元的な流れ構造は、水深スケールの渦運動に規定されることに着目し、流れの解析モデルを構築した。本研究の基本的な考え方は、内田・福岡¹⁾が開発した GBVC 法に基づいている。水平方向底面流速方程式((4.5), (4.6)), 水表面流速運動方程式(4.75), 二重水深積分連続式(4.81)は、GBVC 法と同様の式を用いている。

x, y 方向の渦度の定義式は、式(4.1)に示すよう表され、これを Leibniz rule に従い水深積分すると、 x, y 方向の水深平均渦度と水表面流速、底面流速の関係は、それぞれ式(4.2), 式(4.3)のように表せる。

$$\omega_x = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right), \omega_y = \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (4.1)$$

ここに $i=(1,2(x,y))$, ω_x, ω_y : それぞれ x, y 方向渦度, u, v : それぞれ x, y 方向流速, w : 鉛直方向流速である。

$$\int_{z_b}^{z_s} \omega_x dz = \int_{z_b}^{z_s} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) dz \quad (4.2)$$

$$\Omega_x h = -v_s + v_b + \frac{\partial Wh}{\partial y} - w_s \frac{\partial z_s}{\partial y} + w_b \frac{\partial z_b}{\partial y}$$

$$\int_{z_b}^{z_s} \omega_y dz = \int_{z_b}^{z_s} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) dz \quad (4.3)$$

$$\Omega_y h = u_s - u_b - \frac{\partial Wh}{\partial x} + w_s \frac{\partial z_s}{\partial x} - w_b \frac{\partial z_b}{\partial x}$$

ここで、水深平均渦度 Ω_i は式(4.4)で定義される。

$$\frac{1}{h} \int_{z_b}^{z_s} \omega_x dz = \Omega_x, \quad \frac{1}{h} \int_{z_b}^{z_s} \omega_y dz = \Omega_y \quad (4.4)$$

従って、式(4.2)(4.3)を x, y 方向の底面流速 u_b, v_b について整理すれば、式(4.5), 式(4.6)が得られる。これより、河床変動解析に重要な底面流速 u_b, v_b は、水深平均渦度 Ω と水表面流速 u_s, v_s , 水深平均鉛直方向流速 W から計算できることが分かる。また、底面の鉛直方向流速 w_b は、式(4.7)に示す底面における運動学的境界条件より計算する。斜面に沿う底面流速の大きさは、これらの底面流速を用い、式(4.8)より計算する。図 4-2(a)に示すこれらに関する運動方程式を連立して解くことで三次元的

な流れの影響を考慮した底面流速を計算する．本研究では，式(4.5)，式(4.6)の右辺第 4,5 項は，計算の安定化のため省略した．

$$u_b = u_s - \Omega_y h - \frac{\partial Wh}{\partial y} + w_s \frac{\partial z_s}{\partial y} - w_b \frac{\partial z_b}{\partial y} \quad (4.5)$$

$$v_b = v_s + \Omega_x h - \frac{\partial Wh}{\partial y} + w_s \frac{\partial z_s}{\partial y} - w_b \frac{\partial z_b}{\partial y} \quad (4.6)$$

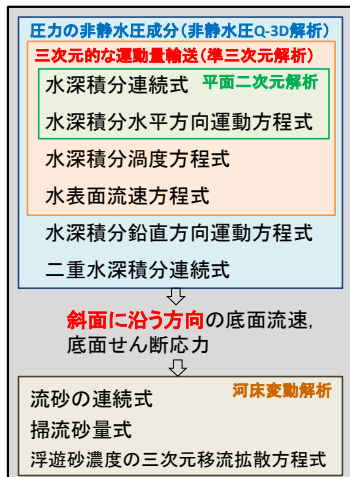
$$w_b = u_b \frac{\partial z_b}{\partial x} + v_b \frac{\partial z_b}{\partial y} \quad (4.7)$$

$$|\hat{u}_b| = \sqrt{u_b^2 + v_b^2 + w_b^2} \quad (4.8)$$

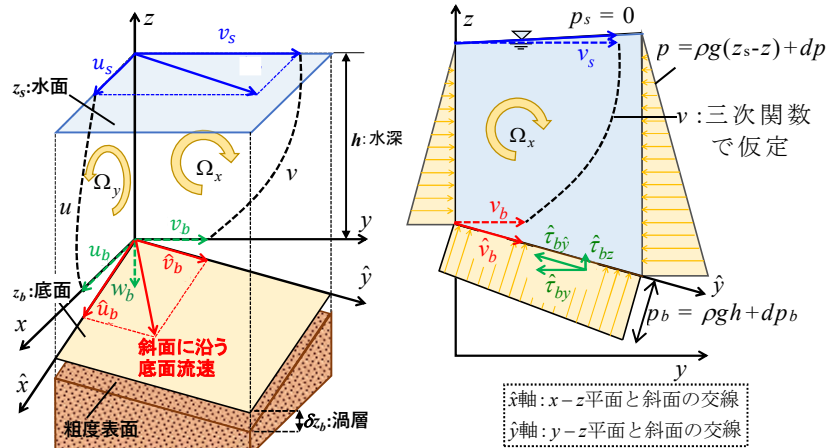
水平方向流速の鉛直分布は，三次式を仮定し，三次関数の積分値が水深平均流速 U_i ，水面では水表面流速 u_{si} ，底面では底面流速 u_{bi} となり，水面における流速の鉛直勾配が 0 となる 4 つの境界条件を与えることで導くことのできる式(4.9)を用いる．

$$u_i = U_i + \Delta u_i (12\eta^3 - 12\eta^2 + 1) - \delta u_i (4\eta^3 - 3\eta^2) \quad (4.9)$$

ここで， U_i : i 方向水深平均流速， u_i : i 方向流速， u_{si} : i 方向水表面流速， u_{bi} : i 方向底面流速， $\Delta u_i = u_{si} - U_i$ ， $\delta u_i = u_{si} - u_{bi}$ ， $\eta = (z_s - z)/h$ ， z_s : 水位， h : 水深である．



(a) 解析法 1 の方程式群



(b) 解析法 1 の変数の定義

図 4-2 斜面に沿う流れと流砂運動を考慮した解析法 1 の枠組み

図 4-2(b)は、本研究で構築した解析法における局所流れ場のイメージを示す。 x, y 軸は水平方向を表し、 \hat{x}, \hat{y} 軸は斜面に沿う方向を表す。これ以降、上付きのハットは斜面に沿う方向を表すものとする。前述した流れの解析より得られる水平方向の底面流速を底面における運動学的境界条件に適用することで、縦横断的に大きな勾配を持つ斜面に沿う方向の底面流速を評価し、斜面に作用する底面せん断応力 $\hat{\tau}_b$ を求める。流砂運動の解析では、斜面に沿う流れから評価される底面せん断応力 $\hat{\tau}_b$ と斜面上の砂粒子に作用する重力の影響を考慮することで、斜面に沿った掃流砂量の評価式、斜面勾配を考慮した流砂の連続式を導出する。また、阿賀野川河口砂州は、細砂で構成されることから河床変動解析には浮遊砂を考慮する必要がある。前述のように河口砂州周辺では三次元性の強い流れとなるため、流れの解析から得られた三次元流速場を用いて浮遊砂濃度の三次元移流拡散方程式を計算し、底面付近の浮遊砂濃度を精度良く求める。

図 4-3 に本解析モデルの解析フローを示す。初期条件や洪水終了判定については省略している。本解析モデルの時間的な差分は、陽解法を用いる。このため、時刻 t の流れ場は既知量であるとする。これを用い、まず、時刻 $t+\Delta t$ の水平方向流れを計算し、次にその値を用いることで時刻 $t+\Delta t$ の鉛直方向流れを計算する。ここで圧力の非静水圧成分 dp_b については、SMAC 法による収束計算より求める。これらの時刻 $t+\Delta t$ における水深平均した流れ場を用い、斜面に沿う底面流速 \hat{u}_b を計算し、これを用いて後述する斜面に沿う掃流力 $\hat{\tau}_b$ を求めた後、流砂量を計算することで、河床変動解析を行い、河床高を更新する。この一連の手順で解析を洪水終了まで行う。

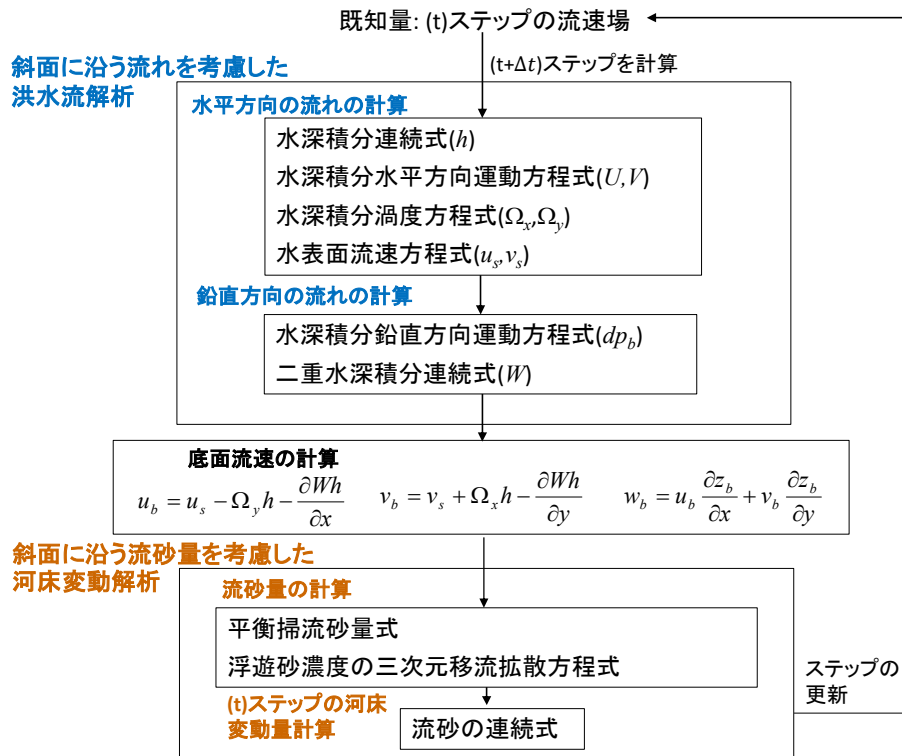


図 4-3 本解析法の解析フロー

4.2. 洪水流による河口砂州拡幅機構解析モデルの基礎方程式

4.2.1. 洪水流解析の基礎方程式の導出

本節では、前節に示した洪水流・河床変動解析に用いる方程式の導出過程と斜面に沿う底面流速及び底面せん断応力の評価法を示す。

(a) 水深積分連続式

式(4.10)は、流体の三次元の連続式を示す。ここに、 u : x 方向、 v : y 流速、 w : z 方向流速、 ρ : 流体の密度である。本研究が対象とする河口部では、淡水と塩水との混合が生じているが、洪水時には塩水の影響は無視できるため $\rho=1.0$ とする。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0 \quad (4.10)$$

式(4.10)を Leibniz rule に従い水深積分すると、式(4.11)となる。

$$\begin{aligned} & \int_{z_b}^{z_s} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dz \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} u dz - u_s \frac{\partial z_s}{\partial x} + u_b \frac{\partial z_b}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^{z_s} v dz - v_s \frac{\partial z_s}{\partial y} + v_b \frac{\partial z_b}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \int_{z_b}^{z_s} w dz = 0 \end{aligned} \quad (4.11)$$

ここで、 x, y 方向の水深平均流速を式(4.12)のように定義すると、式(4.11)は式(4.13)となる。

$$U = \frac{1}{h} \int_{z_b}^{z_s} u dz, \quad V = \frac{1}{h} \int_{z_b}^{z_s} v dz \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} & \int_{z_b}^{z_s} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dz \\ &= \frac{\partial U h}{\partial x} + \frac{\partial V h}{\partial y} - \left(u_s \frac{\partial z_s}{\partial x} + v_s \frac{\partial z_s}{\partial y} + w_s \right) + \left(u_b \frac{\partial z_b}{\partial x} + v_b \frac{\partial z_b}{\partial y} - w_b \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

式(4.13)に式(4.14)の水面及び河床面における運動学的境界条件を代入すると、最終的に水深積分連続式は式(4.15)となる。

$$\frac{\partial z_s}{\partial t} + u_s \frac{\partial z_s}{\partial x} + v_s \frac{\partial z_s}{\partial y} - w_s = 0, \quad \frac{\partial z_b}{\partial t} + u_b \frac{\partial z_b}{\partial x} + v_b \frac{\partial z_b}{\partial y} - w_b = 0 \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial U h}{\partial x} + \frac{\partial V h}{\partial y} = 0 \quad (4.15)$$

(b) 水深積分水平方向・鉛直方向運動方程式

式(4.16)は、三次元のレイノルズ運動方程式を保存形式で示す.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial uu}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{\partial uw}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) \\
 \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial vu}{\partial x} + \frac{\partial vv}{\partial y} + \frac{\partial vw}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) \\
 \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial wu}{\partial x} + \frac{\partial wv}{\partial y} + \frac{\partial ww}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right)
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

流体のせん断応力 τ_{ij} は、分子粘性の影響が乱流せん断応力と比較して小さいため、分子粘性項を無視し、乱流モデルに渦粘性モデルを用いると次のように表すことが出来る.

$$\frac{\tau_{ij}}{\rho} = 2\nu s_{ij} - \overline{\rho u'_i u'_j} \approx 2\nu_t s_{ij} - \frac{2}{3} k \delta_{ij}, \tag{4.17}$$

ここで、 $i, j = 1, 2, 3: x, y, z$, ν_t : 水の粘性係数, ν_t : 渦動粘性係数, k : 乱れエネルギー, δ_{ij} : クロネッカーのデルタ記号であり、流体の歪み速度 s_{ij} は次式に示す通りである. また、式(4.17)の上付きのバーは時間平均を示す.

$$s_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \tag{4.18}$$

次に、式(4.16)に示す水平方向 (x, y 方向) のレイノルズ運動方程式を水深積分する. 本論文では、 x 方向成分のみ導出過程を示すが、同様の導出を y 方向成分のレイノルズ方程式にも行い、水深積分した水平方向運動方程式を導出している. 式(4.16)に示す x 方向成分のレイノルズ方程式の左辺、非定常項・移流項の水深積分は、まず、前述した水深積分連続式と同様の式展開を行い、式(4.20)となる.

$$\begin{aligned}
 &\int_{z_b}^{z_s} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial uu}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{\partial uw}{\partial z} \right) dz \\
 &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_b}^{z_s} u dz - u_s \frac{\partial z_s}{\partial t} + u_b \frac{\partial z_b}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} u u dz - u_s u_s \frac{\partial z_s}{\partial x} + u_b u_b \frac{\partial z_b}{\partial x} \\
 &+ \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^{z_s} u v dz - u_s v_s \frac{\partial z_s}{\partial y} + u_b v_b \frac{\partial z_b}{\partial y} + u_s w_s - u_b w_b
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

式(4.12)の運動学的境界条件より、

$$\int_{z_b}^{z_s} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial uu}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{\partial uw}{\partial z} \right) dz = \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_b}^{z_s} u dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} u u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^{z_s} u v dz \tag{4.20}$$

ここで、水平方向流速 u_i の鉛直分布を水深平均流速 U_i と水深平均流速からの偏差流速 u_i' に分けて式(4.21)のように表示する.

$$u_i = U_i + u_i' \quad (4.21)$$

式(4.21)の関係を式(4.20)に代入すると水深積分したレイノルズ方程式の左辺項が式(4.22)のように導かれる. ここで、上付きのバーは、水深平均を表す.

$$\begin{aligned} & \int_{z_b}^{z_s} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial uu}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{\partial uw}{\partial z} \right) dz \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_b}^{z_s} (U + u') dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} (U + u')(U + u') dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^{z_s} (U + u')(V + v') dz \\ &= \frac{\partial U h}{\partial t} + \frac{\partial (UU + \overline{u'u'}) h}{\partial x} + \frac{\partial (UV + \overline{u'v'}) h}{\partial y} \end{aligned} \quad (4.22)$$

次に、式(4.16)の x 方向レイノルズ方程式の右辺第一項の圧力項を水深積分すると、式(4.23)となる.

$$-\frac{1}{\rho} \int_{z_b}^{z_s} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) dz = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} p dz - p_s \frac{\partial z_s}{\partial x} + p_b \frac{\partial z_b}{\partial x} \right) \quad (4.23)$$

圧力 p の鉛直分布は、 $p = \rho g(z_s - z) + dp(z)$ のように静水圧と非静水圧成分 $dp(z)$ に分けて表示する. 圧力の非静水圧成分 $dp(z)$ の鉛直分布は、底面で dp_b 、水面で $dp_s=0$ として、一次式 ($dp(z) = dp_b(z_s - z)/h$) を仮定する. この圧力鉛直分布を水深積分すれば、式(4.23)は、式(4.24)になる.

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\rho} \int_{z_b}^{z_s} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) dz = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} p dz - p_s \frac{\partial z_s}{\partial x} + p_b \frac{\partial z_b}{\partial x} \right) \\ &= -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\rho g}{2} \frac{\partial h^2}{\partial x} + \frac{\partial \overline{dp} h}{\partial x} + (\rho g h + dp_b) \frac{\partial z_b}{\partial x} \right) \\ &= -\frac{1}{\rho} \left(\rho g h \frac{\partial z_s}{\partial x} + \frac{\partial \overline{dp} h}{\partial x} + dp_b \frac{\partial z_b}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (4.24)$$

次に、式(4.16)に示す x 方向レイノルズ運動方程式右辺第二項のせん断応力項を水深積分すると、式(4.25)になる。

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\rho} \int_{z_s}^{z_b} \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) dz \\
&= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} \tau_{xx} dz - \tau_{sxx} \frac{\partial z_s}{\partial x} + \tau_{bxx} \frac{\partial z_b}{\partial x} \right) + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^{z_s} \tau_{xy} dz - \tau_{sxy} \frac{\partial z_s}{\partial y} + \tau_{bxy} \frac{\partial z_b}{\partial y} \right) \\
&\quad + \frac{1}{\rho} (\tau_{sxz} - \tau_{bxz}) \\
&= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \Gamma_{xx} h}{\partial x} + \frac{\partial \Gamma_{xy} h}{\partial y} - (\tau_{sxx} \frac{\partial z_s}{\partial x} + \tau_{sxy} \frac{\partial z_s}{\partial y} - \tau_{sxz}) + (\tau_{bxx} \frac{\partial z_b}{\partial x} + \tau_{bxy} \frac{\partial z_b}{\partial y} - \tau_{bxz}) \right)
\end{aligned} \tag{4.25}$$

ここに、 $\frac{T_{ij}}{\rho} = 2\nu_i S_{ij} - \frac{2}{3} k \delta_{ij}$, $S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$ である。

式(4.25)において、風などの水面に作用する外力を無視する仮定を用いることで、水面に作用するせん断応力を 0 とし、河床面に沿う方向 (x - z 平面と河床面の交線方向) の底面せん断応力の x 方向成分を $\hat{\tau}_{bx}$ とおくと、

$$\tau_{bxz} - \tau_{bxx} \frac{\partial z_b}{\partial x} - \tau_{bxy} \frac{\partial z_b}{\partial y} = \frac{\hat{\tau}_{bx}}{\cos \theta} \quad \text{cos} \theta : \text{斜面の最急勾配} \tag{4.26}$$

となるから、水平方向運動方程式の水深積分は、式(4.27(a),(b))ようになる。ここで

$$\frac{1}{\cos \theta} = \sqrt{1 + \tan^2 \theta} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z_b}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z_b}{\partial y} \right)^2}$$

である。 $1/\cos \theta$ は、水平方向単位面積当たりの河床面の面積割合を表しており、これは、河床面に作用する底面せん断応力が作用する水平方向単位面積当たりの潤辺を考慮していることを意味している。

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial U h}{\partial t} + \frac{\partial U U h}{\partial x} + \frac{\partial U V h}{\partial y} \\
&= - \frac{\partial \overline{u'u'h}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{u'v'h}}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \left(\rho g h \frac{\partial z_s}{\partial x} + \frac{\partial \overline{dp} h}{\partial x} + dp_b \frac{\partial z_b}{\partial x} \right) \\
&\quad + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \Gamma_{xx} h}{\partial x} + \frac{\partial \Gamma_{xy} h}{\partial y} \right) - \frac{\hat{\tau}_{bx}}{\rho \cos \theta}
\end{aligned} \tag{4.27(a)}$$