

$$\begin{aligned} & \frac{\partial Vh}{\partial t} + \frac{\partial UVh}{\partial x} + \frac{\partial VVh}{\partial y} \\ &= -\frac{\partial \overline{u'v'h}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{v'v'h}}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \left( \rho gh \frac{\partial z_s}{\partial y} + \frac{\partial \overline{dph}}{\partial y} + dp_b \frac{\partial z_b}{\partial y} \right) \\ & \quad + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \Gamma_{yx} h}{\partial x} + \frac{\partial \Gamma_{yy} h}{\partial y} \right) - \frac{\hat{\tau}_{by}}{\rho \cos \theta} \end{aligned} \quad (4.27(b))$$

ここで、斜面に沿う方向のせん断応力の水平成分は、斜面に沿う方向の底面流速の  $x, y$  方向成分  $\hat{u}_{bx}, \hat{u}_{by}$  を用いて次のように表せる。

$$\hat{\tau}_{bx} = \hat{c}_b^2 u_b |\hat{u}_b|, \quad \hat{\tau}_{by} = \hat{c}_b^2 v_b |\hat{u}_b| \quad (4.28)$$

ここで、 $\hat{c}_b$  は図 4-4 のように河床に垂直な方向の距離を用いて式(4.29)のようになる。

$$\frac{1}{\hat{c}_b} = \frac{1}{\kappa} \ln \left( \frac{k_s + \delta z_b \cos \theta}{k_s} \right) + A_r \quad (4.29)$$

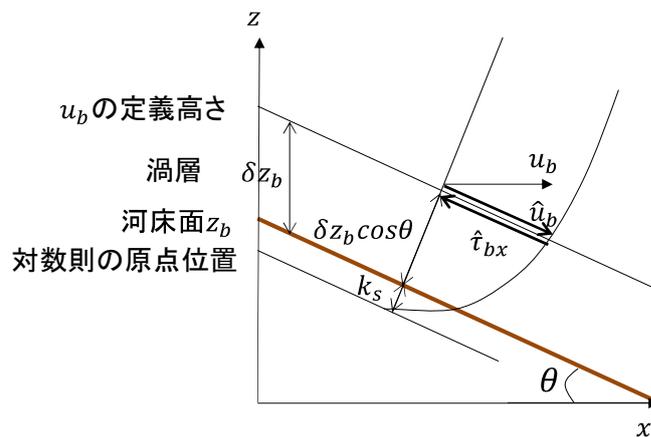


図 4-4 斜面勾配を有する場における底面流速の定義高さ

次に、式(4.27)の右辺第一、第二項の水深平均流速からの偏差成分による運動量交換の水深積分値を導出する。式(4.27)の右辺第一、第二項は、式(4.9)の流速鉛直分布を用いて式(4.30)となる。

$$\overline{u'_i u'_j} = \int_0^1 u'_i u'_j d\eta = \frac{13}{35} \Delta u_i \Delta u_j - \frac{2}{35} (\Delta u_i \delta u_j + \Delta u_j \delta u_i) + \frac{3}{35} \delta u_i \delta u_j \quad (4.30)$$

$$\Delta u_i = u_i - U_i, \quad \delta u_i = u_{si} - u_i$$

渦動粘性係数については、乱れエネルギーと粘性消散が局所平衡であるとした 0 方程式モデルを用いる。ここで、乱れエネルギーの輸送方程式を考え、渦動粘性係数の導出について述べる。

$$\frac{\partial k}{\partial t} + u_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{v_i h}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_i} \right) + P_k - \varepsilon \quad (4.31)$$

$\kappa$ : 乱れエネルギー,  $P_k$ : 乱流生産項,  $\varepsilon$ : 散逸項,  $i, j=1, 2$  (xy 方向)である. 渦動粘性係数は長さ, 時間, 流速のパラメータを用いて以下のように表現できる.

$$v_t = C_\mu k^2 / \varepsilon, \quad \varepsilon = C_\varepsilon k^{3/2} / \Delta, \quad v_t = C_\mu k^{1/2} \Delta / C_\varepsilon, \quad \varepsilon = \left( \frac{C_\varepsilon}{\Delta} \right)^4 \left( \frac{1}{C_\mu} \right)^3 v_t^3, \quad C_\mu, C_\varepsilon: \text{無次元}$$

定数,  $\Delta$ : 平滑化の幅の代表値である. 乱れの局所平衡を仮定すると,

$$\begin{aligned} P_k &= \varepsilon \\ v_t \overline{\left( \frac{\partial u_i}{\partial z} \right)^2} &= \left( \frac{C_\varepsilon}{\Delta} \right)^4 \left( \frac{1}{C_\mu} \right)^3 v_t^3, \quad v_t = \left( \left( \frac{\Delta}{C_\varepsilon} \right)^4 (C_\mu)^3 \overline{\left( \frac{\partial u_i}{\partial z} \right)^2} \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (4.32)$$

となる. 式(4.30)に式(4.7)の流速鉛直分布を用いると次の通りである.

$$\overline{\left( \frac{\partial u_i}{\partial z} \right)^2} = \frac{4C_h}{5h^2} (8\Delta u_i^2 - 7\Delta u_i \delta u_i + 2\delta u_i^2), \quad C_h = \frac{9(\alpha C_\varepsilon)^4}{C_\mu^3} \approx 2.25 \quad (4.33)$$

式(4.33)を式(4.32)に代入すると, 渦動粘性係数が求まる. 本研究では, 平衡状態において一般的な0方程式モデルと等価になるように,  $C_h = 9(\alpha C_\varepsilon)^4 / C_\mu^3 \approx 2.25$ としている. また, 式(4.32), (4.33)の上付きのバーは, 時間平均を示す.

次に, 式(4.16)の鉛直方向流速の運動方程式を水深積分し, 底面での圧力の非静水圧成分を導出する.

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u_j \frac{\partial w}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) \quad (4.33)$$

圧力  $p$  を静水圧と非静水圧成分  $dp(z)$  に分けて表示 ( $p = \rho g(z_s - z) + dp(z)$ ) すると, 式(4.34)となり,

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u_j \frac{\partial w}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial dp}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) \quad (4.34)$$

式(4.34)の両辺を水深積分すると,

$$\begin{aligned}
& \int_{z_b}^{z_s} \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u_j \frac{\partial w}{\partial x_j} \right) dz = \int_{z_b}^{z_s} \left\{ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial dp}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) \right\} dz \\
& \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_b}^{z_s} w dz - w_s \frac{\partial z_s}{\partial t} + w_b \frac{\partial z_b}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{z_b}^{z_s} w u_j dz - w_s u_{sj} \frac{\partial z_s}{\partial x_j} + w_b u_{bj} \frac{\partial z_b}{\partial x_j} \\
& = \frac{dp_b}{\rho} + \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{z_b}^{z_s} \tau_{zj} dz - \tau_{szj} \frac{\partial z_s}{\partial x_j} + \tau_{bzj} \frac{\partial z_b}{\partial x_j} + \tau_{szz} - \tau_{bzz} \right\}
\end{aligned} \tag{4.35}$$

となる。河床面に沿う方向の底面せん断応力の  $z$  方向成分を  $\hat{\tau}_{bz}$  とおくと、

$$\tau_{bzz} - \tau_{bzx} \frac{\partial z_b}{\partial x} - \tau_{bzy} \frac{\partial z_b}{\partial y} = \frac{\hat{\tau}_{bz}}{\cos \theta} \quad \cos \theta : \text{斜面の最急勾配} \tag{4.36}$$

となるから、鉛直方向運動方程式の水深積分は式(4.35)のようになる。

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial W h}{\partial t} + \frac{\partial W U_j h}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{w' u'_j} h}{\partial x_j} = \frac{dp_b}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial h \tau_{zj}}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho \cos \theta} \hat{\tau}_{bj} \\
& w = W + w', \quad u_i = U_i + u'_i
\end{aligned} \tag{4.37}$$

式(4.37)の左辺第三項における水深平均流速からの偏差成分による運動量交換の水深平均値と乱流応力項(右辺第二項)を無視すると、底面での圧力の非静水圧成分は式(4.38)で表せる。

$$\frac{dp_b}{\rho} = \frac{\partial W U_j h}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho \cos \theta} \hat{\tau}_{bj} \tag{4.38}$$

これより、式(4.38)の水深積分の鉛直方向運動方程式には、水深積分の水平方向運動方程式と同様に、河床面が傾くことによる底面せん断応力の作用面の増加の影響が考慮されている。

(c) 水深積分渦度方程式

式(4-14)の三次元の運動方程式の回転をとると三次元の渦度方程式は、式(4.39)のようになる。

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \omega_x}{\partial t} + \frac{\partial \omega_x u}{\partial x} + \frac{\partial \omega_x v}{\partial y} + \frac{\partial \omega_x w}{\partial z} - \frac{\partial \omega_x u}{\partial x} - \frac{\partial \omega_y u}{\partial y} - \frac{\partial \omega_z u}{\partial z} &= \frac{\partial T_z}{\partial y} - \frac{\partial T_y}{\partial z} \\
 \frac{\partial \omega_y}{\partial t} + \frac{\partial \omega_y u}{\partial x} + \frac{\partial \omega_y v}{\partial y} + \frac{\partial \omega_y w}{\partial z} - \frac{\partial \omega_x v}{\partial x} - \frac{\partial \omega_y v}{\partial y} - \frac{\partial \omega_z v}{\partial z} &= \frac{\partial T_x}{\partial z} - \frac{\partial T_z}{\partial x} \\
 \frac{\partial \omega_z}{\partial t} + \frac{\partial \omega_z u}{\partial x} + \frac{\partial \omega_z v}{\partial y} + \frac{\partial \omega_z w}{\partial z} - \frac{\partial \omega_x w}{\partial x} - \frac{\partial \omega_y w}{\partial y} - \frac{\partial \omega_z w}{\partial z} &= \frac{\partial T_y}{\partial x} - \frac{\partial T_x}{\partial y}
 \end{aligned} \tag{4.39}$$

ここに、 $T_x = \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}$ ,  $T_y = \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}$ ,  $T_z = \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}$  である。

本章では、式(4.39)に示す水平方向 ( $x, y$  方向) の渦度方程式を水深積分する。式の導出の過程は  $y$  方向成分のみを示し、同様の過程を  $x$  方向成分の渦度方程式にも行い、水深積分の水平方向渦度方程式を導出している。式(4.39)の  $y$  方向成分の渦度方程式の非定常項・移流項の水深積分は、

$$\begin{aligned}
 &\int_{z_b}^{z_s} \left( \frac{\partial \omega_y}{\partial t} + \frac{\partial \omega_y u}{\partial x} + \frac{\partial \omega_y v}{\partial y} + \frac{\partial \omega_y w}{\partial z} \right) dz \\
 &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_b}^{z_s} \omega_y dz - \omega_{sy} \frac{\partial z_s}{\partial t} + \omega_{by} \frac{\partial z_b}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} \omega_y u dz - \omega_{sy} u_s \frac{\partial z_s}{\partial x} + \omega_{by} u_b \frac{\partial z_b}{\partial x} \\
 &+ \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^{z_s} \omega_y v dz - \omega_{sy} v_s \frac{\partial z_s}{\partial y} + \omega_{by} v_b \frac{\partial z_b}{\partial y} + \omega_{sy} w_s - \omega_{by} w_b \\
 &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_b}^{z_s} \omega_y dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} \omega_y u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^{z_s} \omega_y v dz \\
 &- \omega_{sy} \left( \frac{\partial z_s}{\partial t} + u_s \frac{\partial z_s}{\partial x} + v_s \frac{\partial z_s}{\partial y} - w_s \right) + \omega_{by} \left( \frac{\partial z_b}{\partial t} + u_b \frac{\partial z_b}{\partial x} + v_b \frac{\partial z_b}{\partial y} - w_b \right)
 \end{aligned} \tag{4.40}$$

となり、式(4.14)の運動学的境界条件より、式(4.41)に変形される。

$$\int_{z_b}^{z_s} \left( \frac{\partial \omega_y}{\partial t} + \frac{\partial \omega_y u}{\partial x} + \frac{\partial \omega_y v}{\partial y} + \frac{\partial \omega_y w}{\partial z} \right) dz = \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_b}^{z_s} \omega_y dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} \omega_y u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^{z_s} \omega_y v dz \tag{4.41}$$

ここで、 $y$  方向成分の水深平均渦度  $\Omega_y$  と水深平均渦度からの偏差  $\omega'_y$  を用いると、式(4.41)は式(4.42)となる。

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_b}^{z_s} \omega_y dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} \omega_y u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^{z_s} \omega_y v dz \\
&= \frac{\partial \Omega_y}{\partial t} + \frac{\partial \Omega_y U h}{\partial x} + \frac{\partial \Omega_y V h}{\partial y} + \frac{\partial \overline{\omega'_y u' h}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{\omega'_y v' h}}{\partial y}
\end{aligned} \tag{4.42}$$

次に、式(4.39)の  $y$  方向の渦度方程式の回転項の水深積分は、式(4.43)となる。

$$\begin{aligned}
& \int_{z_b}^{z_s} \left( \frac{\partial \omega_x v}{\partial x} + \frac{\partial \omega_y v}{\partial y} + \frac{\partial \omega_z v}{\partial z} \right) dz \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} \omega_x v dz - \omega_{sx} v_s \frac{\partial z_s}{\partial x} + \omega_{bx} v_b \frac{\partial z_b}{\partial x} \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^{z_s} \omega_y v dz - \omega_{sy} v_s \frac{\partial z_s}{\partial x} + \omega_{by} v_b \frac{\partial z_b}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \int_{z_b}^{z_s} \omega_z u dz \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} \omega_x v dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^{z_s} \omega_y v dz \\
&\quad - v_s \left( \omega_{sx} \frac{\partial z_s}{\partial x} + \omega_{sy} \frac{\partial z_s}{\partial x} - \omega_{sz} \right) + v_b \left( \omega_{bx} \frac{\partial z_b}{\partial x} + \omega_{by} \frac{\partial z_b}{\partial x} - \omega_{bz} \right)
\end{aligned} \tag{4.43}$$

河床面に垂直な方向の渦度を  $\omega_{b\sigma}$  とし、水面に垂直な方向の渦度を  $\omega_{s\sigma}$  とすると、それぞれ、式(4.44)、式(4.45)で表せられ、これを式(4.43)に代入すると式(4.46)となる。

$$\omega_{sz} - \omega_{sx} \frac{\partial z_s}{\partial x} - \omega_{sy} \frac{\partial z_s}{\partial x} = \omega_{s\sigma} \tag{4.44}$$

$$\omega_{bz} - \omega_{bx} \frac{\partial z_b}{\partial x} - \omega_{by} \frac{\partial z_b}{\partial x} = \omega_{b\sigma} \tag{4.45}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{z_b}^{z_s} \left( \frac{\partial \omega_x v}{\partial x} + \frac{\partial \omega_y v}{\partial y} + \frac{\partial \omega_z v}{\partial z} \right) dz \\
&= \frac{\partial \Omega_x V h}{\partial y} + \frac{\partial \Omega_y V h}{\partial y} - (\omega_{s\sigma} v_s - \omega_{b\sigma} v_b) + \frac{\partial \overline{\omega'_x v' h}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{\omega'_y v' h}}{\partial y}
\end{aligned} \tag{4.46}$$

ここで、 $\overline{\omega'_i u'_j}$ ,  $\overline{\omega'_i u'_\xi}$ ,  $\overline{\omega'_j u'_i}$ ,  $\overline{\omega'_j u'_\eta}$  は渦度と流速の鉛直分布に関する二次相関項であり、本研究では、水面における渦度をゼロとし、渦度の鉛直分布を流速鉛直分布の微分(2次式)で表せられると仮定すると、式(4.47)に示す渦度と流速鉛直分布の二次相関項が得られる。

$$\overline{\omega'_i u'_j} = -\Omega_i \left( \frac{\delta u_j}{10} + \frac{\Delta u_j}{5} \right) \tag{4.47}$$

次に、式(4.39)の  $y$  方向成分の渦度方程式におけるせん断応力項の回転項を水深積分する。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T_x}{\partial z} - \frac{\partial T_z}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial x} \right)
\end{aligned} \tag{4.48}$$

式(4.48)の右辺第一項の水深積分値は、せん断応力をブシネスク近似によって表すと式(4.49)のようになる。

$$\begin{aligned}
&\int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} \right) dz \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} \right) dz - \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} \right) \Big|_{z_s} \frac{\partial z_s}{\partial x} + \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} \right) \Big|_{z_b} \frac{\partial z_b}{\partial x} \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} \right) dz + \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} \right) \Big|_{z_b} \frac{\partial z_b}{\partial x} \\
&\approx \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} \left( v_t \frac{\partial \omega_y}{\partial x} \right) dz + \left( v_t \frac{\partial \omega_y}{\partial x} \right) \Big|_{z_b} \frac{\partial z_b}{\partial x} + \left( \frac{\partial v_t \tau_{xx}}{\partial z} v_t - \frac{\partial v_t \tau_{xz}}{\partial x} v_t \right) \Big|_{z_b} \frac{\partial z_b}{\partial x} \\
&\approx \frac{\partial}{\partial x} \left( v_t h \frac{\partial \Omega_y}{\partial x} \right) + \left( v_t \frac{\partial \omega_y}{\partial x} \right) \Big|_{z_b} \frac{\partial z_b}{\partial x} + \left( \frac{\partial v_t \tau_{xx}}{\partial z} v_t - \frac{\partial v_t \tau_{xz}}{\partial x} v_t \right) \Big|_{z_b} \frac{\partial z_b}{\partial x}
\end{aligned} \tag{4.49}$$

同様に、式(4.48)の右辺第二項の水深積分値は式(4.50)となる。

$$\begin{aligned}
&\int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} \right) dz \\
&= \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^{z_s} \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} \right) dz - \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} \right) \Big|_{z_s} \frac{\partial z_s}{\partial y} + \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} \right) \Big|_{z_b} \frac{\partial z_b}{\partial y} \\
&= \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^{z_s} \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} \right) dz + \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} \right) \Big|_{z_b} \frac{\partial z_b}{\partial y} \\
&\approx \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^{z_s} \left( v_t \frac{\partial \omega_y}{\partial y} \right) dz + \left( v_t \frac{\partial \omega_y}{\partial y} \right) \Big|_{z_b} \frac{\partial z_b}{\partial y} + \left( \frac{\partial v_t \tau_{xy}}{\partial z} v_t - \frac{\partial v_t \tau_{yz}}{\partial x} v_t \right) \Big|_{z_b} \frac{\partial z_b}{\partial y} \\
&\approx \frac{\partial}{\partial y} \left( v_t h \frac{\partial \Omega_y}{\partial y} \right) + \left( v_t \frac{\partial \omega_y}{\partial y} \right) \Big|_{z_b} \frac{\partial z_b}{\partial y} + \left( \frac{\partial v_t \tau_{xy}}{\partial z} v_t - \frac{\partial v_t \tau_{yz}}{\partial x} v_t \right) \Big|_{z_b} \frac{\partial z_b}{\partial y}
\end{aligned} \tag{4.50}$$

同様に、式(4.48)の右辺第三項の水深積分値は式(4.51)となる。

$$\begin{aligned}
& \int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial x} \right) dz \\
&= \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial x} \right)_{z_s} - \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial x} \right)_{z_b} \\
&= - \left( v_t \frac{\partial \omega_y}{\partial z} + \frac{\partial v_t}{\partial z} \frac{\tau_{xz}}{v_t} - \frac{\partial v_t}{\partial y} \frac{\tau_{zz}}{v_t} \right)_{z_b} = -v_{tb} \left( \frac{\partial \omega_y}{\partial z} \right)_{z_b} + \left( \frac{\partial v_t}{\partial z} \right)_{z_b} \left( \frac{\tau_{xz}}{v_t} \right)_{z_b}
\end{aligned} \tag{4.51}$$

よって、式(4.48)のせん断応力の回転項は、水深積分値は式(4.49)~式(4.51)を足し合わせる式(4.52)となる。

$$\begin{aligned}
& \int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} \right) dz + \int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} \right) dz + \int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial x} \right) dz \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \left( v_t h \frac{\partial \Omega_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( v_t h \frac{\partial \Omega_y}{\partial y} \right) + \left( v_t \frac{\partial \omega_y}{\partial x} \right)_{z_b} \frac{\partial z_b}{\partial x} + \left( v_t \frac{\partial \omega_y}{\partial y} \right)_{z_b} \frac{\partial z_b}{\partial y} \\
&\quad - \left( v_t \frac{\partial \omega_y}{\partial z} \right)_{z_b} + \left( \frac{\partial v_t}{\partial z} \frac{\tau_{xx}}{v_t} - \frac{\partial v_t}{\partial x} \frac{\tau_{xz}}{v_t} \right)_{z_b} \frac{\partial z_b}{\partial x} + \left( \frac{\partial v_t}{\partial z} \frac{\tau_{xy}}{v_t} - \frac{\partial v_t}{\partial x} \frac{\tau_{yz}}{v_t} \right)_{z_b} \frac{\partial z_b}{\partial y} \\
&\quad - \left( \frac{\partial v_t}{\partial z} \frac{\tau_{xz}}{v_t} - \frac{\partial v_t}{\partial y} \frac{\tau_{zz}}{v_t} \right)_{z_b}
\end{aligned} \tag{4.52}$$

ここで、底面での渦動粘性係数の水平方向の変化が、その鉛直方向の変化に比べて小さいとして無視すると、式(4.52)は式(4.53)のように変形できる。

$$\begin{aligned}
& \int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} \right) dz + \int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} \right) dz + \int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial x} \right) dz \\
&\approx \frac{\partial}{\partial x} \left( v_t h \frac{\partial \Omega_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( v_t h \frac{\partial \Omega_y}{\partial y} \right) + \left( v_t \frac{\partial \omega_y}{\partial x} \right)_{z_b} \frac{\partial z_b}{\partial x} + \left( v_t \frac{\partial \omega_y}{\partial y} \right)_{z_b} \frac{\partial z_b}{\partial y} \\
&\quad - \left( v_t \frac{\partial \omega_y}{\partial z} \right)_{z_b} + \left( \frac{\partial v_t}{\partial z} \frac{\tau_{xx}}{v_t} \right)_{z_b} \frac{\partial z_b}{\partial x} + \left( \frac{\partial v_t}{\partial z} \frac{\tau_{xy}}{v_t} \right)_{z_b} \frac{\partial z_b}{\partial y} - \left( \frac{\partial v_t}{\partial z} \frac{\tau_{xz}}{v_t} \right)_{z_b} \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \left( v_t h \frac{\partial \Omega_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( v_t h \frac{\partial \Omega_y}{\partial y} \right) + \left( v_t \frac{\partial \omega_y}{\partial x} \right)_{z_b} \frac{\partial z_b}{\partial x} + \left( v_t \frac{\partial \omega_y}{\partial y} \right)_{z_b} \frac{\partial z_b}{\partial y} \\
&\quad - \left( v_t \frac{\partial \omega_y}{\partial z} \right)_{z_b} + \frac{\partial v_t}{v_t \partial z} \left( (\tau_{xx})_{z_b} \frac{\partial z_b}{\partial x} + (\tau_{xy})_{z_b} \frac{\partial z_b}{\partial y} - (\tau_{xz})_{z_b} \right)
\end{aligned} \tag{4.53}$$

さらに、 $(\tau_{xz})_{z_b} - (\tau_{xx})_{z_b} \frac{\partial z_b}{\partial x} - (\tau_{xy})_{z_b} \frac{\partial z_b}{\partial y} = \frac{\hat{\tau}_{bx}}{\cos \theta}$  の関係を代入すると、式(4.53)は式

(4.54)となる。

$$\begin{aligned}
& \int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} \right) dz + \int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} \right) dz + \int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial x} \right) dz \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \left( v_t h \frac{\partial \Omega_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( v_t h \frac{\partial \Omega_y}{\partial y} \right) + \left( v_t \frac{\partial \omega_y}{\partial x} \right) \Big|_{z_b} \frac{\partial z_b}{\partial x} + \left( v_t \frac{\partial \omega_y}{\partial y} \right) \Big|_{z_b} \frac{\partial z_b}{\partial y} \\
&\quad - \left( v_t \frac{\partial \omega_y}{\partial z} \right) \Big|_{z_b} - \frac{\partial v_t \hat{\tau}_{bx}}{v_t \partial z \cos \theta}
\end{aligned} \tag{4.54}$$

また,  $\frac{\hat{\tau}_{bx}}{v_t} \approx \hat{\omega}_{by}$ ,  $\left( v_t \frac{\partial \omega_y}{\partial z} \right) \Big|_{z_b} - \left( v_t \frac{\partial \omega_y}{\partial x} \right) \Big|_{z_b} \frac{\partial z_b}{\partial x} - \left( v_t \frac{\partial \omega_y}{\partial y} \right) \Big|_{z_b} \frac{\partial z_b}{\partial y} \approx \left( v_t \frac{\partial \hat{\omega}_y}{\partial z} \right) \Big|_{z_b}$  とすると

式(4.54)は式(4.55)となる.

$$\begin{aligned}
& \int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} \right) dz + \int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} \right) dz + \int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial x} \right) dz \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \left( v_t h \frac{\partial \Omega_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( v_t h \frac{\partial \Omega_y}{\partial y} \right) - \left( v_t \frac{\partial \hat{\omega}_y}{\partial z} \right) \Big|_{z_b} - \frac{1}{\cos \theta} \left( \frac{\partial v_t}{\partial z} \right) \Big|_{z_b} \hat{\omega}_{by}
\end{aligned} \tag{4.55}$$

ここで, 底面付近で対数則が成り立つと仮定すると, 底面での渦度の鉛直方向の勾配は式(4.56)で表せられる.

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial z} \Big|_{z_b} = \frac{\partial}{\partial z} (\hat{u}(z))_{z_b} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \hat{u}_* \left( \frac{1}{\kappa} \ln \left( \frac{k_s + z \cos \theta}{k_s} \right) + A_r \right) \right) \Big|_{z_b} = \left( \frac{\hat{u}_*}{\kappa z \cos \theta} \right) \Big|_{z_b}$$

$$\frac{\partial \hat{\omega}_y}{\partial z} \Big|_{z_b} = - \left( \frac{\hat{u}_*}{z^2 \kappa \cos \theta} \right) \Big|_{z_b} = - \frac{\hat{\omega}_{eby}}{z_b \cos \theta} \tag{4.56}$$

底面での平衡渦度を式(4.57)で定義し, これらを式(4.55)に代入すると式(4.58)となる.

$$\hat{\omega}_{eby} = \left( \frac{\hat{u}_*}{z \kappa \cos \theta} \right) \Big|_{z_b} \tag{4.57}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x} \left( v_t h \frac{\partial \Omega_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( v_t h \frac{\partial \Omega_y}{\partial y} \right) - \left( v_t \frac{\partial \hat{\omega}_y}{\partial z} \right) \Big|_{z_b} - \frac{1}{\cos \theta} \left( \frac{\partial v_t}{\partial z} \right) \Big|_{z_b} \hat{\omega}_{by} \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \left( v_t h \frac{\partial \Omega_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( v_t h \frac{\partial \Omega_y}{\partial y} \right) + v_{tb} \frac{\hat{\omega}_{eby}}{z_b \cos \theta} - v_{tb} \frac{\hat{\omega}_{by}}{z_b \cos \theta}
\end{aligned} \tag{4.58}$$

ここで、底面付近の渦動粘性係数  $\nu_{tb}$  は、底面からの距離に比例すると考え、平衡状態の渦動粘性係数の水深平均値を用い、式(4.59)に示すように表すことが出来る。これを式(4.58)に代入すると式(4.60)となる。

$$\begin{aligned} \nu_{tb} &= \kappa u_* \delta z \cos\theta = 6\nu_t \delta z \cos\theta / h \cos\theta \quad (\because u_* = 6\nu_t / \kappa h \cos\theta) \\ &= 6\nu_t / h \end{aligned} \quad (4.59)$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x} \left( \nu_t h \frac{\partial \Omega_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu_t h \frac{\partial \Omega_y}{\partial y} \right) - \left( \nu_t \frac{\partial \hat{\omega}_y}{\partial \hat{z}} \right)_{z_b} - \frac{1}{\cos\theta} \left( \frac{\partial \nu_t}{\partial z} \right)_{z_b} \hat{\omega}_{by} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \nu_t h \frac{\partial \Omega_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu_t h \frac{\partial \Omega_y}{\partial y} \right) + \frac{6\nu_t}{h \cos\theta} (\hat{\omega}_{eby} - \hat{\omega}_{by}) \end{aligned} \quad (4.60)$$

ここで、式(4.60)の右辺第二項は、流体が河床面から受けるせん断力に起因した渦度の生産項を表している。式(4.60)の右辺第二項の生産項には、 $1/\cos\theta$ が掛けられており、河床面の傾きに伴う底面せん断応力の作用面の増加の影響が考慮されている。

以上より、式(4.42)、式(4.46)、式(4.60)を足し合わせると、水平方向渦度方程式の水深積分は式(4.61(a))、式(4.61(b))となる。

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \Omega_x}{\partial t} + \frac{\partial \Omega_x U h}{\partial x} + \frac{\partial \Omega_x V h}{\partial y} = \frac{\partial \Omega_x U h}{\partial y} + \frac{\partial \Omega_y U h}{\partial y} + (\omega_s u_s - \omega_b u_b) \\ &- \frac{\partial \overline{\omega'_x u' h}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{\omega'_x v' h}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{\omega'_x u' h}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{\omega'_y u' h}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \nu_t h \frac{\partial \Omega_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu_t h \frac{\partial \Omega_x}{\partial y} \right) \\ &+ \frac{6\nu_t}{h \cos\theta} (\hat{\omega}_{ebx} - \hat{\omega}_{bx}) \end{aligned} \quad (4.61(a))$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \Omega_y}{\partial t} + \frac{\partial \Omega_y U h}{\partial x} + \frac{\partial \Omega_y V h}{\partial y} = \frac{\partial \Omega_x V h}{\partial y} + \frac{\partial \Omega_y V h}{\partial y} + (\omega_s v_s - \omega_b v_b) \\ &- \frac{\partial \overline{\omega'_y u' h}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{\omega'_y v' h}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{\omega'_x v' h}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{\omega'_y v' h}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \nu_t h \frac{\partial \Omega_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu_t h \frac{\partial \Omega_y}{\partial y} \right) \\ &+ \frac{6\nu_t}{h \cos\theta} (\hat{\omega}_{eby} - \hat{\omega}_{by}) \end{aligned} \quad (4.61(b))$$

ここで本研究では、 $\hat{\omega}_{ebi} \approx \omega_{ebi}$ 、 $\hat{\omega}_{bi} \approx \omega_{bi}$ と仮定し、 $\omega_{ebi}$ 、 $\omega_{bi}$ はそれぞれ次のように表せる。

$$\omega_{ebi} = \varepsilon_{ji3} \frac{2u_{bj} c_b}{\kappa h} \ln\left(\frac{z_s}{z_b}\right), \quad \omega_{bi} = \varepsilon_{ji3} \frac{6\delta u_j - 12\Delta u_j}{h}$$

(d) 水表面流速運動方程式

水表面流速については、水面に沿う極薄い層の水平方向の運動方程式を考えると、デカルト座標系では以下のように表せる。水表面流速の運動方程式の導出過程については、簡単のため  $x$  方向について示す。

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=z_s} = - \frac{1}{\rho} \left. \frac{\partial p}{\partial x} + \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) \right|_{z=z_s} \quad (4.62(a))$$

$$\left. \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{z=z_s} = - \frac{1}{\rho} \left. \frac{\partial p}{\partial y} + \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) \right|_{z=z_s} \quad (4.62(b))$$

ここで、 $u|_{z=z_s} = u_s$ 、 $v|_{z=z_s} = v_s$ 、 $w|_{z=z_s} = w_s$  であり、式(4.63)の関係が成り立つことから、式(4.62(a))の左辺は式(4.64)で表せる。

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{z=z_s} = \frac{\partial u_s}{\partial t} - \frac{\partial z_s}{\partial t} \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=z_s}, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{z=z_s} = \frac{\partial u_s}{\partial x} - \frac{\partial z_s}{\partial x} \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=z_s} \quad (4.63)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{z=z_s} = \frac{\partial u_s}{\partial y} - \frac{\partial z_s}{\partial y} \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=z_s}$$

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=z_s} \\ &= \frac{\partial u_s}{\partial t} + u_s \frac{\partial u_s}{\partial x} + v_s \frac{\partial u_s}{\partial y} + w_s \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=z_s} - \frac{\partial z_s}{\partial t} \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=z_s} - u_s \frac{\partial z_s}{\partial x} \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=z_s} - v_s \frac{\partial z_s}{\partial y} \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=z_s} \end{aligned} \quad (4.64)$$

水表面での運動学的境界条件は、

$$w_s = \frac{\partial z_s}{\partial t} + u_s \frac{\partial z_s}{\partial x} + v_s \frac{\partial z_s}{\partial y} \quad (4.65)$$

であるから、

$$w_s \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=z_s} = \frac{\partial z_s}{\partial t} \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=z_s} + u_s \left. \frac{\partial z_s}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=z_s} + v_s \left. \frac{\partial z_s}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=z_s} \quad (4.66)$$

と表せる。式(4.66)を式(4.64)に代入すると式(4.67)となる。

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=z_s} = \frac{\partial u_s}{\partial t} + u_s \frac{\partial u_s}{\partial x} + v_s \frac{\partial u_s}{\partial y} \quad (4.67)$$

次に、式(4.62(a))の右辺第一項の圧力項については、同様に式(4.68)と表せる。

$$\left. \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{z=z_s} = \frac{1}{\rho} \left( \left. \frac{\partial p_s}{\partial x} - \frac{\partial z_s}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial z} \right|_{z=z_s} \right) \quad (4.68)$$

ここで、水面での圧力  $p_s$  を 0 (=大気圧) とし、圧力  $p$  を静水圧と非静水圧成分に分けて表すと、式(4.68)は式(4.69)となる。

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{z=z_s} = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p_s}{\partial x} - \frac{\partial z_s}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial z} \Big|_{z=z_s} \right) = -g \frac{\partial z_s}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial dp}{\partial z} \right)_{z_s} \frac{\partial z_s}{\partial x} \quad (4.69)$$

次に、式(4.62(a))の右辺第二項のせん断応力項について導出する。  $x$  面に作用する流速鉛直分布による  $z=z_s-\delta z$  の場所でのせん断応力は、テーラー展開より、

$$\tau_{xz} \Big|_{z=z_s-\delta z} \approx \tau_{xz} \Big|_{z=z_s} - \delta z \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \Big|_{z=z_s} + O(\delta z^2) \quad (4.70)$$

となり、水面に作用するせん断力を 0 とし、テーラー展開の二次精度の項を無視すると、式(4.70)は式(4.71)となる。

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \Big|_{z=z_s} \approx - \frac{\tau_{xz} \Big|_{z=z_s-\delta z}}{\delta z} \quad (4.71)$$

ここで、式(4.62(a))の右辺第二項は  $\delta x, \delta y, \delta z$  を両辺に乗じて以下のように表現される。

$$\delta x \delta y \delta z \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) \Big|_{z=z_s} = \delta x \delta y \delta z \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) \Big|_{z=z_s} - \delta x \delta y \tau_{xz} \Big|_{z=z_s-\delta z} \quad (4.72)$$

水面直下の極薄い層を考えているので、 $\delta x, \delta y \gg \delta z$  であることから、式(4.72)は右辺第一、二項が消去され、

$$\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) \Big|_{z=z_s} = - \frac{1}{\rho} \frac{\tau_{xz} \Big|_{z=z_s-\delta z}}{\delta z} \quad (4.73)$$

となる。よって、式(4.62(a))の  $x$  方向の水表面流速の運動方程式は、

$$\frac{\partial u_s}{\partial t} + u_s \frac{\partial u_s}{\partial x} + v_s \frac{\partial u_s}{\partial y} = -g \frac{\partial z_s}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial dp}{\partial z} \right)_{z_s} \frac{\partial z_s}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\tau_{xz} \Big|_{z=z_s-\delta z}}{\delta z} \quad (4.74)$$

となる。ここで、せん断応力をブシネスク近似で表し、渦動粘性係数を水面からの距離に比例するとおくと、式(4.74)の右辺第三項は以下のようになる。

$$- \frac{1}{\delta z} \tau_{xz} \Big|_{z=z_s-\delta z} = \nu_t \Big|_{z=z_s-\delta z} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right) \Big|_{z=z_s-\delta z} \approx \alpha_k \nu_{t0} \delta z \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right) \Big|_{z=z_s} \delta z \quad (4.75)$$

ここで、平衡状態を考えると

$$gI = \alpha_k \nu_{t0} \delta z^2 \left( \frac{2\delta u}{h^2} \right), \quad \tau_b = \nu_{t0} \left( \frac{2\delta u}{h} \right) \quad (4.76)$$

であるから,  $\alpha_k = 1/\delta z$  となる. これより, 水表面流速の運動方程式は次の様に変形される.

$$\frac{\partial u_{si}}{\partial t} + u_{sj} \frac{\partial u_{sj}}{\partial x_j} = -g \frac{\partial z_s}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial dP}{\partial z} \right)_{zs} \frac{\partial z_s}{\partial x} + P_{si} \quad (4.77)$$

$$P_{si} = \frac{V_t}{h^2} (12C_{ps} (u_{sei} - u_{si}) - (3\delta u_i - 6\Delta u_i)), \quad C_{ps} = 3$$

### (e) 二重水深積分連続式

任意高さの鉛直方向流速は連続式より, 以下のように与えられる.

$$w_\eta = w_{\sigma\eta} + u_k \left( \frac{\partial z}{\partial x_k} \right) \Big|_\eta, \quad w_{\sigma\eta} = \frac{\partial z_b}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \int_{zb}^{z\eta} u_k dz \right) \quad (4.78)$$

ここで, 流速鉛直分布は  $u_i = U_i + \Delta u_i (12\eta^3 - 12\eta^2 + 1) + \delta u_i (-4\eta^3 + 3\eta^2)$  であるから,  $w_{\sigma\eta}$  は,

$$\begin{aligned} w_{\sigma\eta} &= \frac{\partial z_b}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left( h \int_1^\eta u_k d\eta \right) \\ &= \frac{\partial z_b}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left( h \int_1^\eta (U_k + \Delta u_k (12\eta^3 - 12\eta^2 + 1) + \delta u_k (-4\eta^3 + 3\eta^2)) d\eta \right) \\ &= \frac{\partial z_b}{\partial t} + (3\eta^4 - 4\eta^3 + \eta) \frac{\partial h \Delta u_k}{\partial x_k} + (-\eta^4 + \eta^3) \frac{\partial h \delta u_k}{\partial x_k} + (\eta - 1) \frac{\partial h U_k}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (4.79)$$

となる. これを水深積分すると,

$$\begin{aligned} &\int_{zb}^{zs} w_{\sigma\eta} dz \\ &= h \int_0^1 \left( \frac{\partial z_b}{\partial t} + (3\eta^4 - 4\eta^3 + \eta) \frac{\partial h \Delta u_k}{\partial x_k} + (-\eta^4 + \eta^3) \frac{\partial h \delta u_k}{\partial x_k} + (\eta - 1) \frac{\partial h U_k}{\partial x_k} \right) d\eta \\ &= h \frac{\partial z_b}{\partial t} + \frac{h}{10} \frac{\partial h \Delta u_k}{\partial x_k} + \frac{h}{20} \frac{\partial h \delta u_k}{\partial x_k} - \frac{h}{2} \frac{\partial h U_k}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (4.80)$$

が得られる. また, 鉛直方向流速に関する勾配項  $u_k \left( \frac{\partial z}{\partial x_k} \right) \Big|_\eta$  は, 水深積分すると,

$$\begin{aligned} &h \int_0^1 u_k \left( \frac{\partial z}{\partial x_k} \right) \Big|_\eta d\eta \\ &= h \int_0^1 \left( u_k \frac{\partial z_s}{\partial x_k} - u_k \eta \frac{\partial h}{\partial x_k} \right) \Big|_\eta d\eta \\ &= h \frac{\partial z_s}{\partial x_k} \int_0^1 u_k d\eta - \left[ \eta \int_0^1 u_k d\eta \frac{\partial h}{\partial x_k} \right]_0^1 + \int_0^1 \left( \int_0^1 u_k d\eta \right) d\eta \frac{\partial h}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (4.81)$$

となり, 式(4.82)となる.

$$h \int_0^1 u_k \left( \frac{\partial z}{\partial x_k} \right) \Big|_{\eta} d\eta = h U_k \frac{\partial z_s}{\partial x_k} + \left( \frac{\Delta u_k h}{10} + \frac{\delta u_k h}{20} - \frac{U_k h}{2} \right) \frac{\partial h}{\partial x_k} \quad (4.82)$$

従って, 式(4.78)および式(4.80)より,

$$Wh = h \left( \frac{\partial z_m}{\partial t} + U_k \frac{\partial z_m}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \{ h^2 (k_2 \Delta u_k + k_1 \delta u_k) \} \quad (4.83)$$

が得られる. ここで,  $z_m = (z_s + z_b)/2$ ,  $k_1 = 1/20$ ,  $k_2 = 1/20$  である.

#### 4.2.2. 河床変動解析の基礎方程式の導出

##### (a) 流砂の連続式

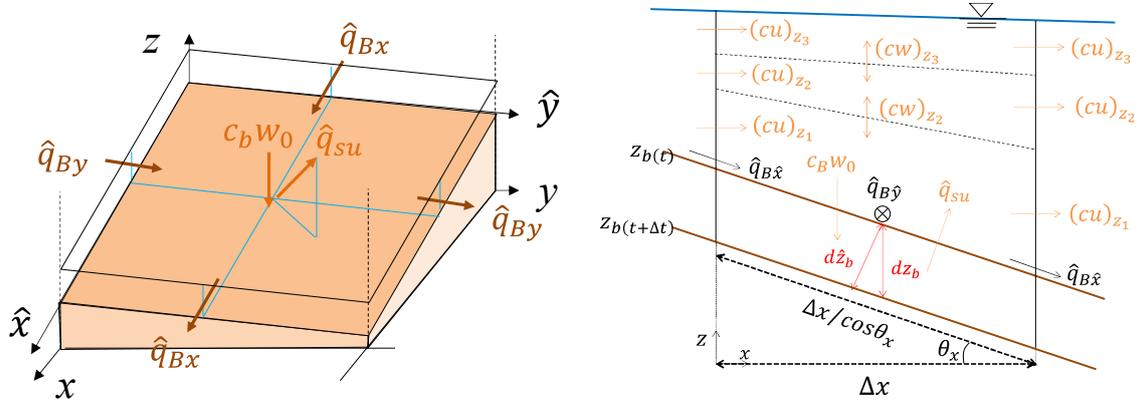


図 4-5 斜面勾配を有する流れ場における流砂の連続式のコントロールボリューム

図 4-5 に示すような斜面勾配を有する河床のコントロールボリュームを考え、流砂の連続式を導出する。流砂には掃流砂と浮遊砂を考慮する。斜面に沿う方向( $\hat{x}$ : $x$ - $z$ 平面と斜面の交線,  $\hat{y}$ : $y$ - $z$ 平面と斜面の交線)の掃流砂量をそれぞれ,  $\hat{q}_{B\hat{x}}$ ,  $\hat{q}_{B\hat{y}}$  とすると,  $x$ - $z$ 平面と  $y$ - $z$ 平面を通過する掃流砂量は, それぞれ  $\hat{q}_{B\hat{x}}\Delta y / \cos \theta_x$ ,  $\hat{q}_{B\hat{y}}\Delta x / \cos \theta_x$  と表せる。そこで, まず, コントロールボリューム内の掃流砂量のみので出入り関係を考え, 斜面勾配の有する流れ場の流砂での連続式を導出する(式(4.84))。

$$\begin{aligned} & (1-\lambda)\Delta x\Delta y(z_b(t+\Delta t)-z_b(t)) \\ & = -(\hat{q}_{B\hat{x}}(x+\Delta x, y)\Delta \hat{y} - \hat{q}_{B\hat{x}}(x, y)\Delta \hat{y} + \hat{q}_{B\hat{y}}(x, y+\Delta y)\Delta \hat{x} - \hat{q}_{B\hat{y}}(x, y)\Delta \hat{x})\Delta t \end{aligned} \quad (4.84)$$

式(4.84)の左辺をテーラー展開すると,

$$\begin{aligned} & (1-\lambda)\Delta x\Delta y(z_b(x, y, t+\Delta t) - z_b(x, y, t)) \\ & = (1-\lambda)\Delta x\Delta y\left(z_b(x, y, t) + \frac{\partial z_b(t)}{\partial t}\Delta t - z_b(x, y, t)\right) \\ & = (1-\lambda)\Delta x\Delta y\Delta t \frac{\partial z_b(x, y, t)}{\partial t} \end{aligned} \quad (4.85)$$

となり, 式(4.84)の右辺をテーラー展開すると,

$$\begin{aligned} & (\hat{q}_{B\hat{x}}(x+\Delta x, y, t)\Delta \hat{y} - \hat{q}_{B\hat{x}}(x, y, t)\Delta \hat{y} + \hat{q}_{B\hat{y}}(x, y+\Delta y, t)\Delta \hat{x} - \hat{q}_{B\hat{y}}(x, y, t)\Delta \hat{x})\Delta t \\ & = \left(\hat{q}_{B\hat{x}}(x, y, t)\Delta \hat{y} + \frac{\partial \hat{q}_{B\hat{x}}(x, y, t)}{\partial x}\Delta \hat{y}\Delta x - \hat{q}_{B\hat{x}}(x, y, t)\Delta \hat{y} + \hat{q}_{B\hat{y}}(x, y, t)\Delta \hat{x} + \frac{\partial \hat{q}_{B\hat{y}}(x, y, t)}{\partial y}\Delta \hat{x}\Delta y - \hat{q}_{B\hat{y}}(x, y, t)\Delta \hat{x}\right)\Delta t \\ & = \left(\frac{\partial \hat{q}_{B\hat{x}}(x, y, t)}{\partial x}\Delta \hat{y}\Delta x + \frac{\partial \hat{q}_{B\hat{y}}(x, y, t)}{\partial y}\Delta \hat{x}\Delta y\right)\Delta t \end{aligned} \quad (4.86)$$

となり、式(4.84)は式(4.85)、式(4.86)より、次のようになる。

$$(1-\lambda)\Delta x\Delta y\Delta t\frac{\partial z_b(x,y,t)}{\partial t} = -\left(\frac{\partial\hat{q}_{bx}(x,y,t)}{\partial x}\Delta\hat{y}\Delta x + \frac{\partial\hat{q}_{by}(x,y,t)}{\partial y}\Delta\hat{x}\Delta y\right)\Delta t$$

$x = \hat{x}\cos\theta_x$ ,  $y = \hat{y}\cos\theta_y$ , であるから

$$(1-\lambda)\frac{\partial z_b(x,y,t)}{\partial t} = -\left(\frac{\partial\hat{q}_{bx}(\hat{x},\hat{y},t)}{\partial\hat{x}}\frac{1}{\cos\theta_y} + \frac{\partial\hat{q}_{by}(\hat{x},\hat{y},t)}{\partial\hat{y}}\frac{1}{\cos\theta_x}\right) \quad (4.87)$$

次に、式(4.87)に浮遊砂の浮上・沈降量を考慮する。河床面に垂直な方向に浮上する単位面積当たりの浮遊砂量を $\hat{q}_{su}$ とおくと、コントロールボリューム内で浮上する浮遊砂量は $\hat{q}_{su}\Delta\hat{x}\Delta\hat{y}$ と表せる。一方、浮遊砂の単位面積当たりの沈降量は、底面付近の浮遊砂濃度 $c_b$ と粒子の沈降速度 $w_f$ との積で表せるとすると、コントロールボリューム内に沈降する浮遊砂量は $c_b w_f \Delta x \Delta y$ となる。これらを $\Delta x \Delta y$ で除し、式(4.87)に代入すると式(4.88)となる。

$$(1-\lambda)\frac{\partial z_b(t)}{\partial t} = \frac{1}{\cos\theta_y}\frac{\partial\hat{q}_{bx}(\hat{x})}{\partial\hat{x}} + \frac{1}{\cos\theta_x}\frac{\partial\hat{q}_{by}(\hat{y})}{\partial\hat{y}} - \hat{q}_{su}\frac{\Delta\hat{x}\Delta\hat{y}}{\Delta x\Delta y} + c_b w_f \quad (4.88)$$

ここで、 $\frac{\Delta\hat{x}\Delta\hat{y}}{\Delta x\Delta y} = \frac{1}{\cos\theta_x \cos\theta_y} \approx \frac{1}{\cos\theta}$  ( $\theta$ : 斜面最急勾配)□とすると、

式(4.88)の浮遊砂と掃流砂の連続式は次のようになる。

$$(1-\lambda)\frac{\partial z_b(t)}{\partial t} = \frac{1}{\cos\theta_y}\frac{\partial\hat{q}_{bx}(\hat{x})}{\partial\hat{x}} + \frac{1}{\cos\theta_x}\frac{\partial\hat{q}_{by}(\hat{y})}{\partial\hat{y}} - \frac{\hat{q}_{su}}{\cos\theta} + c_b w_f \quad (4.89)$$

従って、斜面勾配を有する流れ場の流砂の連続式(式(4.89))には、斜面勾配による斜面に沿う方向の掃流砂の通過断面積の増加、浮遊砂の浮上面積の増加が考慮されている。

そして、式(4.89)に粒径階 $d_k$ を考慮すると式(4.90)となる。

$$(1-\lambda)\frac{\partial z_b}{\partial t} = \frac{1}{\cos\theta_y}\frac{\partial}{\partial\hat{x}}\left(\sum_k \hat{q}_{bxk}\right) + \frac{1}{\cos\theta_x}\frac{\partial}{\partial\hat{y}}\left(\sum_k \hat{q}_{byk}\right) - \sum_k \left(\frac{\hat{q}_{suk}}{\cos\theta} - c_{bk} w_{fk}\right) \quad (4.90)$$

ここに、 $k$  は各粒径階、□: 砂の空隙率、 $\hat{q}_{bxk}$ : 斜面に沿う方向( $\hat{x}$ :  $x$ - $z$  平面と斜面の交線、 $\hat{y}$ :  $y$ - $z$  平面と斜面の交線)の各粒径階 $d_k$ の掃流砂量、 $\hat{q}_{suk}$ : 各粒径階 $d_k$ の斜面に垂直な方向の浮遊砂の浮上量、 $w_{fk}$ : 各粒径階 $d_k$ の沈降速度、 $c_{bk}$ : 各粒径階 $d_k$ の基準面濃度である。粒径別流砂の連続式は、平野<sup>2)</sup>の式を式(4.90)を踏まえて拡張すると、以下のようになる。

$$E_l \frac{\partial f_{bk}}{\partial t} + \frac{1}{(1-\lambda)} \left\{ \frac{1}{\cos\theta_y} \frac{\partial\hat{q}_{bxk}}{\partial\hat{x}} + \frac{1}{\cos\theta_x} \frac{\partial\hat{q}_{byk}}{\partial\hat{y}} \right\} + \bar{f}_{bk} \frac{\partial z_b}{\partial t} + \frac{1}{1-\lambda} \left( \frac{\hat{q}_{suk}}{\cos\theta} - c_{bk} w_{fk} \right) = 0 \quad (4.91)$$

ここで,

$$\begin{cases} \bar{f}_{bk} = f_{bk} & (\partial z_b / \partial t \geq 0) \\ \bar{f}_{bk} = f_{bk0} & (\partial z_b / \partial t < 0) \end{cases}$$

$E_l$  は交換層の厚さであり,  $f_{bk}, f_{bk0}$  はそれぞれ交換層, 交換層下における粒径階  $d_k$  の含有率である. ここで, 浮遊砂の浮上量  $\hat{q}_{suk}$  にかかる  $1/\cos\theta$  を考慮し, 浮遊砂濃度の平面二次元移流拡散方程式を解いた解析では, 一度局所的な洗掘が生じると, 斜面勾配 ( $1/\cos\theta$ ) が大きくなるため, 浮遊砂の浮上量が増大し, 同一箇所が洗掘され続ける問題が生じた. このため, 計算の安定を考慮し, 式(4.89), (4.90), (4.91)の浮遊砂の浮上量に掛かる  $1/\cos\theta$  は, 本研究では考慮していない.

#### (b) 河床に沿う掃流力と掃流砂運動の解析法

ここでは, 斜面に沿う方向の底面せん断力から, 斜面に沿う方向の掃流砂量を導出する. 斜面に沿う方向のせん断応力は, 斜面に沿う方向の底面流速を用いて, それぞれ次のように表せる.

$$\hat{\tau}_{b\hat{x}} = \hat{c}_b^2 \hat{u}_{b\hat{x}} |\hat{u}_b|, \quad \hat{\tau}_{b\hat{y}} = \hat{c}_b^2 \hat{u}_{b\hat{y}} |\hat{u}_b| \quad (4.92)$$

$$\frac{1}{\hat{c}_b} = \frac{1}{\kappa} \ln \left( \frac{k_s + \delta_{zb} \cos\theta}{k_s} \right) + A_r \quad (4.93)$$

次に, 斜面に沿う方向の有効せん断応力は,  $k_s$  を平均粒径  $d_m$  の 2 倍とすると次のように表せる.

$$\hat{\tau}_{be\hat{x}} = \hat{c}_{be}^2 \hat{u}_{b\hat{x}} |\hat{u}_b|, \quad \hat{\tau}_{be\hat{y}} = \hat{c}_{be}^2 \hat{u}_{b\hat{y}} |\hat{u}_b| \quad (4.94)$$

$$\frac{1}{\hat{c}_{be}} = \frac{1}{\kappa} \ln \left( \frac{k_s + \delta_{zb} \cos\theta}{2d_m} \right) + A_r \quad (4.95)$$

斜面上の砂粒子に作用する無次元掃流力  $\hat{\tau}_{*ki}$  は, 斜面上の砂粒子の自重による付加掃流力<sup>3)</sup>を考慮すると式(4.96)となる.

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_{*k\hat{x}} &= \frac{\hat{\tau}_{b\hat{x}}}{sgd_k} - \frac{\tau_{*c0k}}{\mu_s} \frac{\partial z_b}{\partial x}, & \hat{\tau}_{*k\hat{y}} &= \frac{\hat{\tau}_{b\hat{y}}}{sgd_k} - \frac{\tau_{*c0k}}{\mu_s} \frac{\partial z_b}{\partial y} \\ \hat{\tau}_{*ek\hat{x}} &= \frac{\hat{\tau}_{be\hat{x}}}{sgd_k} - \frac{\tau_{*c0k}}{\mu_s} \frac{\partial z_b}{\partial x}, & \hat{\tau}_{*ek\hat{y}} &= \frac{\hat{\tau}_{be\hat{y}}}{sgd_k} - \frac{\tau_{*c0k}}{\mu_s} \frac{\partial z_b}{\partial y} \end{aligned} \quad (4.96)$$

ここで,  $\tau_{*c0k}$  は水平床上における各粒径階  $d_k$  の限界掃流力であり,  $\tau_{*c0k}$  は芦田・道上により修正された Egiazaroff の式<sup>4)5)</sup>を用いて評価する.

$$\frac{\tau_{c0k}/\rho}{\tau_{c0m}/\rho} = \begin{cases} \left\{ \frac{\log_{10} 19}{\log_{10}(19d_k/d_m)} \right\}^2 \frac{d_k}{d_m} & (d_k/d_m \geq 0.4) \\ 0.85 & (d_k/d_m < 0.4) \end{cases} \quad (4.97)$$

$\tau_{cm}$ : 水平床上における平均粒径  $d_m$  の限界掃流力である. 平均粒径  $d_m$  の限界掃流力の算定には岩垣の式<sup>6)</sup>を適用する.

$$\tau_{c0m}/\rho = \begin{cases} 80.9d_m & (0.3030 \leq d_m) \\ 134.6d_m^{31/22} & (0.1180 \leq d_m \leq 0.3030) \\ 55.0d_m & (0.0565 \leq d_m \leq 0.1180) \\ 8.41d_m^{11/32} & (0.0065 \leq d_m \leq 0.0565) \\ 226d_m & (d_m \leq 0.0065) \end{cases} \quad (4.98)$$

これらの諸量を用い, 斜面に沿う方向の平衡流砂量は, 芦田・道上<sup>5)</sup>による粒径別平衡流砂量式を用いて式(4.99)で評価する.

$$\frac{\hat{q}_{bk}}{\sqrt{sgd_k^3}} = 17f_{bk}\hat{\tau}_{*ek}^{3/2} \left(1 - \frac{\hat{\tau}_{*ck}}{\hat{\tau}_{*k}}\right) \left(1 - \frac{\hat{u}_{*ck}}{\hat{u}_*}\right) \quad (4.99)$$

$s$ : 粒子の水中比重,  $\hat{\tau}_{*ek}$ : 各粒径階  $d_k$  の斜面に沿う方向の無次元有効掃流力,  $\hat{\tau}_{*ck}$ : 各粒径階  $d_k$  の斜面に沿う方向の無次元限界掃流力,  $\hat{\tau}_{*k}$ : 各粒径階  $d_k$  の斜面に沿う方向の無次元掃流力,  $\hat{u}_{*ck}$ : 各粒径階  $d_k$  の斜面に沿う方向の限界摩擦速度,  $\hat{u}_*$ : 斜面に沿う方向の摩擦速度である. ここで, 斜面上の無次元限界掃流力  $\hat{\tau}_{*ck}$  は, 斜面上の最大勾配を  $\theta$  とすれば, 平坦河床の無次元限界掃流力  $\tau_{*c0k}$  を用いて次のように表せる.

$$\hat{\tau}_{*ck} = \tau_{*c0k} \cos\theta \quad (4.100)$$

式(4.99)で評価された掃流砂量は, 式(4.101)に示すように斜面に沿う方向の無次元掃流力によって成分分解し, 斜面に沿うそれぞれの方向の掃流砂量が計算される.

$$\frac{\hat{q}_{bki}}{\hat{q}_{bk}} = \frac{\hat{\tau}_{*eki}}{\hat{\tau}_{*ek}} \quad (4.101)$$

### (c) 浮遊砂濃度の三次元移流拡散方程式

各粒径階  $d_k$  の浮遊砂の連続式から, 以下に示す三次元浮遊砂濃度の移流拡散方程式が導かれる. 式(4.102)には, 河床面が傾くことによる浮遊砂の浮上面積の増加が考慮されている.

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial c_k}{\partial t} + \frac{\partial u c_k}{\partial x} + \frac{\partial v c_k}{\partial y} + \frac{\partial (w - \sigma_t - w_f) c_k}{\partial z} \\
& = \frac{\partial}{\partial x} \left( \varepsilon_s \frac{\partial c_k}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \varepsilon_s \frac{\partial c_k}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \varepsilon_s \frac{\partial c_k}{\partial z} \right) + \frac{\hat{q}_{suk(z=z_b)}}{\cos \theta}
\end{aligned} \tag{4.102}$$

ここで、 $c_k$  : 各粒径階  $d_k$  の浮遊砂濃度、 $\hat{q}_{suk}$  : 各粒径階  $d_k$  の斜面に垂直な方向の浮遊砂の浮上量、 $w_{fk}$  : 各粒径階  $d_k$  の沈降速度である。ここで、沈降速度は Rubey の式<sup>7)</sup>を適用する。

$$w_{fk} = \left( \sqrt{\frac{2}{3} + \frac{36\nu^2}{sgd_k^3}} - \sqrt{\frac{36\nu^2}{sgd_k^3}} \right) \sqrt{sgd_k} \tag{4.103}$$

$w_{fk}$  : 各粒径階  $d_k$  の沈降速度、 $s$  : 粒子の水中比重、 $\nu$  : 水の粘性係数である。

斜面に垂直な方向に浮上する浮遊砂量は、平衡状態を仮定した板倉・岸の式<sup>8)9)</sup>の  $\tau_{*k}$  に  $\hat{\tau}_{*k}$  を代入することにより求める。

$$\hat{q}_{suk} \approx K \left( \alpha_* \frac{\rho_s - \rho}{\rho_s} \cdot \frac{gd_k}{\hat{u}_*} \Omega - w_{fk} \right) \sqrt{sgd_k} \tag{4.104}$$

$$\Omega = \frac{\hat{\tau}_{*ek}}{B_*} \cdot \frac{\int_{\alpha'}^{\infty} \xi \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-\xi^2) d\xi}{\int_{\alpha'}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-\xi^2) d\xi} + \frac{\hat{\tau}_{*ek}}{B_* \eta_0} - 1 \tag{4.105}$$

$$\alpha' = \frac{B_*}{\hat{\tau}_{*ek}} - \frac{1}{\eta_0}, \quad \eta_0 = 0.5, \quad B_* = 0.143, \quad \alpha_* = 0.14, \quad K = 0.008$$

ここで、式(4.102)の浮遊砂の浮上量に掛かる  $1/\cos\theta$  は、式(4.89), (4.90), (4.91)と同様に本研究では考慮していない。

#### 4.2.3. 解析法1の方程式群のまとめと解析法2の方程式群

図4-6に解析法1の方程式群のまとめを示す。図内の赤枠で囲まれた部分が、斜面に沿う底面付近の流れと掃流砂を考慮した結果、導出された項であることを示す。これより、斜面に沿う方向の底面せん断応力  $\hat{\tau}_b$  を考慮することで、水深平均流速  $U_i$  や底面における非静水圧成分  $dp_b$  が変化し、流れ場全体が変化することが分かる。また、斜面に沿う方向の掃流砂量  $\hat{q}_{bi}$  を考慮することで河床変動量が変化する。この河床形状の変化は、流れの方程式群に含まれる斜面勾配  $1/\cos\theta$  に反映される。解析法1は、このように流れと河床変動の相互作用を考慮した解析法となっている。図4-7には、底面付近における水平方向の流れ及び流砂運動を考慮するが、斜面に沿う流れと流砂運動については考慮しない方程式群を示す。この解析法は、内田・福岡<sup>1)</sup>による一般底面流速解析法(GBVC法)に浮遊砂の三次元移流拡散を考慮したものに相当する。

<p><b>水深積分連続式</b>(水深<math>h</math>)</p> $\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial U_j h}{\partial x_j} = 0$	<p><b>洪水流解析</b></p>	<p><b>水深積分鉛直方向運動方程式</b></p> $\frac{dp_b}{\rho} = -\frac{\partial Wh U_j}{\partial x_j} + \frac{\hat{\tau}_{bz}}{\rho \cos\theta}$ <p style="text-align: right; color: red;">底面せん断応力項</p>
<p><b>水深積分水平方向運動方程式</b>(水深平均流速<math>U, V</math>)</p> $\frac{\partial U_i h}{\partial t} + \frac{\partial U_i U_j h}{\partial x_j} = -gh \frac{\partial z_s}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial dp_b}{\partial x_i} - \frac{dp_b}{\rho} \frac{\partial z_b}{\partial x_i}$ $+ \frac{\partial \overline{u'_i u'_j} h}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( h v_t \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) - \frac{\hat{\tau}_{bi}}{\rho \cos\theta}$ <p style="text-align: right; color: red;">底面せん断応力項</p>	<p><b>二重水深積分連続式</b></p> $Wh = h \left( \frac{\partial z_m}{\partial t} + U_j \frac{\partial z_m}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ h^2 (k_2 \Delta u_j + k_1 \delta u_j) \right\}$	<p><b>底面流速方程式</b></p> $u_{bi} = u_{si} - \varepsilon_{ij3} \Omega_j h - \frac{\partial Wh}{\partial x_i}$
<p><b>水深積分渦度方程式</b>(水深平均渦度<math>\Omega_x, \Omega_y</math>)</p> $\frac{\partial h \Omega_i}{\partial t} = -\frac{\partial h U_j \Omega_i}{\partial x_j} + \frac{\partial h U_i \Omega_j}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{h u'_i \omega'_j}}{\partial x_j} - \frac{\partial \overline{h u'_j \omega'_i}}{\partial x_j}$ $+ u_{si} \omega_{s\sigma} - u_{bi} \omega_{b\sigma} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( h v_t \frac{\partial \Omega_i}{\partial x_j} \right) + C_{p\omega} v_w \frac{\omega_{pei} - \omega_{bi}}{h} \frac{1}{\cos\theta}$ <p style="text-align: right; color: red;">底面からの渦度生産項</p>	<p><b>流砂の連続式</b></p> $(1 - \lambda) \frac{\partial z_b}{\partial t} = -\frac{\partial \hat{q}_{bj} / \cos\theta_i}{\partial x_j} + c_b w_0 - q_{su} _{z=z_b}$ <p style="text-align: right; color: red;">斜面に沿う掃流砂量の場所的变化</p>	<p><b>河床変動解析</b></p>
<p><b>水表面流速方程式</b>(水表面流速<math>u_s, v_s</math>)</p> $\frac{\partial u_{si}}{\partial t} + u_{sj} \frac{\partial u_{si}}{\partial x_j} = -g \frac{\partial z_s}{\partial x_i} + \frac{2v_t}{h^2} \left\{ 12C_{ps} (u_{sei} - u_{si}) \right\}$ $\left\{ -(3\delta u_i - 6\Delta u_i) \right\}$	<p><b>浮遊砂濃度の三次元移流拡散方程式</b></p> $\frac{\partial c}{\partial t} + u_j \frac{\partial c}{\partial x_j} + (w - w_0) \frac{\partial c}{\partial z}$ $= \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \varepsilon \frac{\partial c}{\partial x_j} \right) + q_{su} _{z=z_b}$	<p><b>浮遊砂濃度の三次元移流拡散方程式</b></p>

図4-6 解析法1の方程式群のまとめ

<p><b>水深積分連続式</b>(水深h)</p> $\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial U_j h}{\partial x_j} = 0$ <p><b>水深積分水平方向運動方程式</b>(水深平均流速U,V)</p> $\frac{\partial U_i h}{\partial t} + \frac{\partial U_i U_j h}{\partial x_j} = -gh \frac{\partial z_s}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial dp_b}{\partial x_i} - \frac{dp_b}{\rho} \frac{\partial z_b}{\partial x_i}$ $+ \frac{\partial \overline{u'_i u'_j} h}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( h v_t \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) - \frac{\tau_{bi}}{\rho}$ <p>水平方向流速のみで底面せん断応力項を評価し、底面の傾きによる作用面積の増分は考えない</p> <p><b>水深積分渦度方程式</b>(水深平均渦度<math>\Omega_x, \Omega_y</math>)</p> $\frac{\partial h \Omega_i}{\partial t} = - \frac{\partial h U_j \Omega_i}{\partial x_j} + \frac{\partial h U_i \Omega_j}{\partial x_j} + \frac{\partial h u'_i \omega'_j}{\partial x_j} - \frac{\partial h u'_j \omega'_i}{\partial x_j}$ $+ u_{si} \omega_{s\sigma} - u_{bi} \omega_{b\sigma} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( h v_t \frac{\partial \Omega_i}{\partial x_j} \right) + C_{p\omega} v_{tv} \frac{\omega_{bet} - \omega_{bi}}{h}$ <p>底面の傾きによる作用面積の増分は考えない</p> <p><b>水表面流速方程式</b>(水表面流速<math>u_s, v_s</math>)</p> $\frac{\partial u_{si}}{\partial t} + u_{sj} \frac{\partial u_{si}}{\partial x_j} = -g \frac{\partial z_s}{\partial x_i} + \frac{2v_t}{h^2} \left\{ 12C_{ps} (u_{sei} - u_{si}) \right\}$ $\left\{ - (3\delta u_i - 6\Delta u_i) \right\}$	<p><b>洪水解析</b></p> <p><b>水深積分鉛直方向運動方程式</b></p> $\frac{dp_b}{\rho} = \frac{\partial Wh U_j}{\partial x_j} + \frac{\tau_{bz}}{\rho}$ <p>水平方向流速のみで底面せん断応力項を評価し、底面の傾きによる作用面積の増分は考えない</p> <p><b>二重水深積分連続式</b></p> $Wh = h \left( \frac{\partial z_m}{\partial t} + U_j \frac{\partial z_m}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ h^2 (k_2 \Delta u_j + k_1 \delta u_j) \right\}$ <p><b>底面流速方程式</b></p> $u_{bi} = u_{si} - \varepsilon_{ij3} \Omega_j h - \frac{\partial Wh}{\partial x_i}$ <p><b>流砂の連続式</b> <b>河床変動解析</b></p> $(1 - \lambda) \frac{\partial z_b}{\partial t} = - \frac{\partial q_{bj}}{\partial x_j} + c_b w_0 - q_{su} _{z=z_b}$ <p>水平方向流速のみで掃流砂量を評価する</p> <p><b>浮遊砂濃度の三次元移流拡散方程式</b></p> $\frac{\partial c}{\partial t} + u_j \frac{\partial c}{\partial x_j} + (w - w_0) \frac{\partial c}{\partial z}$ $= \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \varepsilon \frac{\partial c}{\partial x_j} \right) + q_{su} _{z=z_b}$
--	---

図 4-7 解析法 2 の方程式群 <sup>1)</sup>

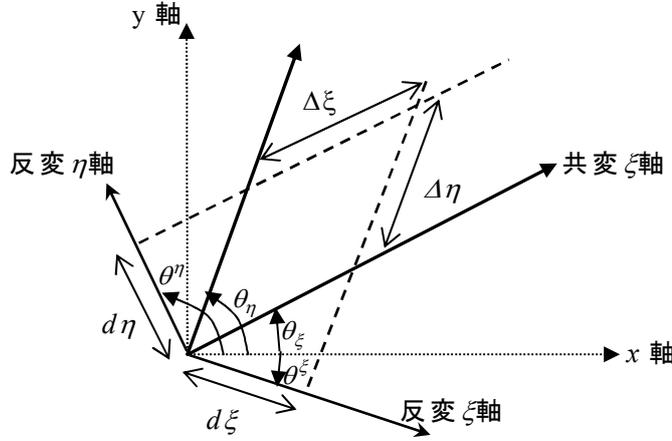


図 4-8 平面一般座標系の物理成分の幾何学表示

#### 4.2.4. 支配方程式の一般座標系への変換

本研究では、流れの方程式の座標系には一般座標系を用いる。図 4-8 は、平面一般座標系の物理成分を示す。デカルト座標系から一般座標系への座標変換は、反変基底物理成分、反変軸交差内角  $\theta^{\xi}$ 、反変距離を用いて行われる。このとき、流速ベクトルと応力テンソルのデカルト座標系成分と一般座標系物理成分との変換は次式で表される。

$$\begin{pmatrix} \tilde{U} \\ \tilde{V} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\xi}_x & \tilde{\xi}_y \\ \tilde{\eta}_x & \tilde{\eta}_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (4.106)$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{\tau}_{\xi\xi} & \tilde{\tau}_{\xi\eta} \\ \tilde{\tau}_{\xi\eta} & \tilde{\tau}_{\eta\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\xi}_x & \tilde{\xi}_y \\ \tilde{\eta}_x & \tilde{\eta}_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{\xi}_x & \tilde{\xi}_y \\ \tilde{\eta}_x & \tilde{\eta}_y \end{pmatrix}^T \quad (4.107)$$

ここで、 $\tilde{U}$ : 反変  $\xi$  方向流速、 $\tilde{V}$ : 反変  $\eta$  方向流速、 $J$ : ヤコビアンであり、反変基底物理成分  $(\tilde{\xi}_x, \tilde{\xi}_y), (\tilde{\eta}_x, \tilde{\eta}_y)$ 、反変距離  $(d\xi, d\eta)$ 、共変距離  $(\Delta\xi, \Delta\eta)$  は以下のように表せる。

$$\begin{pmatrix} \tilde{\xi}_x & \tilde{\xi}_y \\ \tilde{\eta}_x & \tilde{\eta}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d\xi \cdot \xi_x & d\xi \cdot \xi_y \\ d\eta \cdot \eta_x & d\eta \cdot \eta_y \end{pmatrix} = \frac{1}{\tilde{J}} \begin{pmatrix} y_\eta / d\eta & -x_\eta / d\eta \\ -y_\xi / d\xi & x_\xi / d\xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta^\xi & \sin \theta^\xi \\ \cos \theta^\eta & \sin \theta^\eta \end{pmatrix} \quad (4.108)$$

$$\begin{cases} d\xi^2 = 1/(\xi_x^2 + \xi_y^2) \\ d\eta^2 = 1/(\eta_x^2 + \eta_y^2) \end{cases} \quad (4.109)$$

$$\begin{cases} \Delta\xi^2 = (x_\xi^2 + y_\xi^2) \\ \Delta\eta^2 = (x_\eta^2 + y_\eta^2) \end{cases} \quad (4.110)$$

$$\tilde{J} = \frac{J}{d\xi \cdot d\eta} = \frac{1}{\sin \theta^{\eta\xi}}, \quad \cos \theta^{\eta\xi} = (\tilde{\xi}_x, \tilde{\xi}_y) \cdot (\tilde{\eta}_x, \tilde{\eta}_y)$$

○連続式

$$J \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{J} d\eta \tilde{U} h}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{J} d\xi \tilde{V} h}{\partial \eta} = 0 \quad (4.111)$$

○反変ξ方向運動方程式

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} h + \tilde{U} h \left\{ \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \xi} - \tilde{J} (\tilde{V} - \tilde{U} \cos \theta^{n\xi}) \frac{\partial \theta^{n\xi}}{\partial \xi} \right\} + \tilde{V} h \left\{ \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \eta} - \tilde{J} (\tilde{V} - \tilde{U} \cos \theta^{n\xi}) \frac{\partial \theta^{n\xi}}{\partial \eta} \right\} \\ &= -gh \left\{ \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} + \cos \theta^{n\xi} \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \right\} - \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial h dp_0}{\partial \xi} + \cos \theta^{n\xi} \frac{\partial h dp_0}{\partial \eta} \right) - \frac{dp_b}{\rho} \left( \frac{\partial z_b}{\partial \xi} + \cos \theta^{n\xi} \frac{\partial z_b}{\partial \eta} \right) \quad (4.112) \\ & - \frac{\hat{\tau}_{b\xi}}{\cos \theta} + \frac{1}{J} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{Jh}{d\xi} \tilde{\tau}_{\xi\xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{Jh}{d\eta} \tau_{\xi\eta} \right) \right\} - \tilde{J} h (-\tilde{\tau}_{\xi\xi} \cos \theta^{n\xi} + \tilde{\tau}_{\xi\eta}) \frac{\partial \theta^{n\xi}}{\partial \xi} \\ & - \tilde{J} h (-\tilde{\tau}_{\xi\eta} \cos \theta^{n\xi} + \tau_{\eta\eta}) \frac{\partial \theta^{n\xi}}{\partial \eta} \end{aligned}$$

○反変η方向運動方程式

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} h + \tilde{U} h \left\{ \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \xi} + \tilde{J} (\tilde{U} - \tilde{V} \cos \theta^{n\xi}) \frac{\partial \theta^{n\xi}}{\partial \xi} \right\} + \tilde{V} h \left\{ \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \eta} + \tilde{J} (\tilde{U} - \tilde{V} \cos \theta^{n\xi}) \frac{\partial \theta^{n\xi}}{\partial \eta} \right\} \\ &= -gh \left\{ \cos \theta^{n\xi} \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} + \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \right\} - \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial h dp_0}{\partial \eta} + \cos \theta^{n\xi} \frac{\partial h dp_0}{\partial \xi} \right) - \frac{dp_b}{\rho} \left( \frac{\partial z_b}{\partial \eta} + \cos \theta^{n\xi} \frac{\partial z_b}{\partial \xi} \right) \quad (4.113) \\ & - \frac{\tau_{b\eta}}{\cos \theta} + \frac{1}{J} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{Jh}{d\xi} \tilde{\tau}_{\eta\xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{Jh}{d\eta} \tau_{\eta\eta} \right) \right\} - \tilde{J} h (-\tilde{\tau}_{\eta\xi} + \tilde{\tau}_{\eta\eta} \cos \theta^{n\xi}) \frac{\partial \theta^{n\xi}}{\partial \xi} \\ & - \tilde{J} h (-\tilde{\tau}_{\eta\eta} + \tau_{\eta\eta} \cos \theta^{n\xi}) \frac{\partial \theta^{n\xi}}{\partial \eta} \end{aligned}$$

水平せん断応力には、乱流混合および水深平均流速からの偏差成分による運動量交換の水深平均値を考慮し、以下のように表す。

$$\tau_{ij} = 2\rho\nu_t S_{ij} - \overline{\rho u_i' u_j'} \quad (4.114)$$

ここに、 $S_{ij}$  : 水平歪みテンソル、 $u_i' = u_i - U_i$ 、 $i, j=1, 2$  (xy 方向) である。本研究では、式(4.114)を式(4.107)の変換公式を用いて一般座標系におけるせん断力を得る。式(4.114)の右辺第一項は、水平歪みテンソル  $S_{ij}$  をそれぞれ式(4.115)~式(4.117)のように定義して求める。左辺第二項は、デカルト座標系において流速鉛直分布の相関による応力を求め、変換公式(4.107)により一般座標系に直接変換する。

$$\tilde{S}_{\xi\xi} = 2 \left[ \left( \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \xi} + \cos \theta^{n\xi} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \eta} \right) - \tilde{J} (\tilde{V} - \tilde{U} \cos \theta^{n\xi}) \left( \frac{\partial \theta^{n\xi}}{\partial \xi} + \cos \theta^{n\xi} \frac{\partial \theta^{n\xi}}{\partial \eta} \right) \right] \quad (4.115)$$

$$\tilde{S}_{\eta\eta} = 2[(\cos \theta^{\eta\xi} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \tilde{\xi}} + \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \tilde{\eta}}) + \tilde{J}(\tilde{U} - \tilde{V} \cos \theta^{\eta\xi})(\cos \theta^{\eta\xi} \frac{\partial \theta^{\eta}}{\partial \tilde{\xi}} + \frac{\partial \theta^{\eta}}{\partial \tilde{\eta}})] \quad (4.116)$$

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{\xi\eta} = & [(\cos \theta^{\eta\xi} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{\xi}} + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{\eta}}) - \tilde{J}(\tilde{V} - \tilde{U} \cos \theta^{\eta\xi})(\cos \theta^{\eta\xi} \frac{\partial \theta^{\xi}}{\partial \tilde{\xi}} + \frac{\partial \theta^{\xi}}{\partial \tilde{\eta}})] \\ & + [(\frac{\partial \tilde{V}}{\partial \tilde{\xi}} + \cos \theta^{\eta\xi} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \tilde{\eta}}) + \tilde{J}(\tilde{U} - \tilde{V} \cos \theta^{\eta\xi})(\frac{\partial \theta^{\eta}}{\partial \tilde{\xi}} + \cos \theta^{\eta\xi} \frac{\partial \theta^{\eta}}{\partial \tilde{\eta}})] \end{aligned} \quad (4.117)$$

また、式(4.114)の第二項の水深平均流速からの偏差成分による運動量交換の水深平均値は、式(4.118)となる。

$$\overline{u_i' u_j'} = \int_0^1 u_i' u_j' d\eta = \frac{13}{35} \Delta u_i \Delta u_j - \frac{2}{35} (\Delta u_i \delta u_j + \Delta u_j \delta u_i) + \frac{3}{35} \delta u_i \delta u_j \quad (4.118)$$

$$\Delta u_i = u_i - U_i, \quad \delta u_i = u_{si} - u_i$$

式(4.118)をデカルト座標系から一般座標系への変換則（式(4.107)）を用い、一般座標方向の応力を得る。

渦度方程式は，デカルト座標系をチェーン・ルールにより一般座標系表示して解析を行う．一般座標系表示した水深積分渦度方程式を式(4.119), (4.120)に示す．

#### ○x方向水深積分渦度方程式

$$\begin{aligned}
& J \frac{\partial \Omega_x h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} (\tilde{J} d\eta \cdot \Omega_x \tilde{U} h) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\tilde{J} d\xi \cdot \Omega_x \tilde{V} h) \\
&= \frac{\partial}{\partial \xi} (\tilde{J} d\eta \cdot \tilde{\Omega}_\xi u_x h) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\tilde{J} d\xi \cdot \tilde{\Omega}_\eta u_x h) + J(\omega_{s\sigma} u_{sx} - \omega_{s\sigma} u_{bx}) \\
&+ \frac{\partial}{\partial \xi} h J \xi_x (v_t (\frac{\partial \xi_x \Omega_x}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta_x \Omega_x}{\partial \eta})) + \frac{\partial}{\partial \eta} h J \eta_x (v_t (\frac{\partial \xi_x \Omega_x}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta_x \Omega_x}{\partial \eta})) \\
&+ J \frac{\partial}{\partial \xi} h \xi_y (v_t (\frac{\partial \xi_y \Omega_x}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta_y \Omega_x}{\partial \eta})) + J \frac{\partial}{\partial \eta} h \eta_y (v_t (\frac{\partial \xi_y \Omega_x}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta_y \Omega_x}{\partial \eta})) \\
&+ 6v_t J \frac{(\hat{\omega}_{ex} - \hat{w}_{bx})}{h \cos \theta} - J (\frac{\partial \omega'_x u'_y h}{\partial \xi} \xi_y + \frac{\partial \omega'_x u'_y h}{\partial \eta} \eta_y) \\
&+ J \frac{\partial \omega'_x u'_y h}{\partial \xi} \xi_y + J \frac{\partial \omega'_x u'_y h}{\partial \eta} \eta_y
\end{aligned} \tag{4.119}$$

#### ○y方向水深積分渦度方程式

$$\begin{aligned}
& J \frac{\partial \Omega_y h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} (\tilde{J} d\eta \cdot \Omega_y \tilde{U} h) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\tilde{J} d\xi \cdot \Omega_y \tilde{V} h) \\
&= \frac{\partial}{\partial \xi} (\tilde{J} d\eta \cdot \tilde{\Omega}_\xi u_y h) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\tilde{J} d\xi \cdot \tilde{\Omega}_\eta u_y h) + J(\omega_{s\sigma} u_{sy} - \omega_{b\sigma} u_{by}) \\
&+ \frac{\partial}{\partial \xi} h J \xi_x (v_t (\frac{\partial \xi_x \Omega_y}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta_x \Omega_y}{\partial \eta})) + \frac{\partial}{\partial \eta} h J \eta_x (v_t (\frac{\partial \xi_x \Omega_y}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta_x \Omega_y}{\partial \eta})) \\
&+ J \frac{\partial}{\partial \xi} h \xi_y (v_t (\frac{\partial \xi_y \Omega_y}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta_y \Omega_y}{\partial \eta})) + J \frac{\partial}{\partial \eta} h \eta_y (v_t (\frac{\partial \xi_y \Omega_y}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta_y \Omega_y}{\partial \eta})) \\
&- 6v_t J \frac{(\hat{\omega}_{ey} - \hat{w}_{by})}{h \cos \theta} - J (\frac{\partial \omega'_y u'_x h}{\partial \xi} \xi_x + \frac{\partial \omega'_y u'_x h}{\partial \eta} \eta_x) \\
&+ J \frac{\partial \omega'_y u'_x h}{\partial \xi} \xi_x + J \frac{\partial \omega'_y u'_x h}{\partial \eta} \eta_x
\end{aligned} \tag{4.120}$$

デカルト座標系の水表面流速の運動方程式を一般座標系変換すると以下のようになる。

### ○ $\xi\eta$ 方向水表面流速の方程式

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u_{s\xi}}{\partial t} + u_{s\xi} \frac{\partial u_{s\xi}}{\partial \tilde{\xi}} + u_{s\eta} \frac{\partial u_{s\xi}}{\partial \tilde{\eta}} - \tilde{J}(u_{s\eta} - u_{s\xi} \cos \theta^{\eta\xi}) \left( u_{s\xi} \frac{\partial \theta^{\xi}}{\partial \tilde{\xi}} + u_{s\eta} \frac{\partial \theta^{\xi}}{\partial \tilde{\eta}} \right) \\ & = -g \left( \frac{\partial z_s}{\partial \tilde{\xi}} + \cos \theta^{\eta\xi} \frac{\partial z_s}{\partial \tilde{\eta}} \right) - \left( \frac{\partial z_s}{\partial \tilde{\xi}} + \cos \theta^{\eta\xi} \frac{\partial z_s}{\partial \tilde{\eta}} \right) \left( \frac{\partial dp}{\partial z} \right)_{z=z_s} + P_{s\xi} \end{aligned} \quad (4.121)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u_{s\eta}}{\partial t} + u_{s\xi} \frac{\partial u_{s\eta}}{\partial \tilde{\xi}} + u_{s\eta} \frac{\partial u_{s\eta}}{\partial \tilde{\eta}} + \tilde{J}(u_{s\xi} - u_{s\eta} \cos \theta^{\eta\xi}) \left( u_{s\xi} \frac{\partial \theta^{\eta}}{\partial \tilde{\xi}} + u_{s\eta} \frac{\partial \theta^{\eta}}{\partial \tilde{\eta}} \right) \\ & = -g \left( \frac{\partial z_s}{\partial \tilde{\eta}} + \cos \theta^{\eta\xi} \frac{\partial z_s}{\partial \tilde{\xi}} \right) - \left( \frac{\partial z_s}{\partial \tilde{\eta}} + \cos \theta^{\eta\xi} \frac{\partial z_s}{\partial \tilde{\xi}} \right) \left( \frac{\partial dp}{\partial z} \right)_{z=z_s} + P_{s\eta} \end{aligned} \quad (4.122)$$

$$\begin{cases} P_{s\xi} = \frac{2\nu_t}{h^2} \{12C_{ps}(u_{se\xi} - u_{s\xi}) - (3\delta u_\xi - 6\Delta u_\xi)\} \\ P_{s\eta} = \frac{2\nu_t}{h^2} \{12C_{ps}(u_{se\eta} - u_{s\eta}) - (3\delta u_\eta - 6\Delta u_\eta)\} \end{cases}$$

ここに、 $P_{si}$ ：水表面流速の生産項、 $\nu_t$ ：渦動粘性係数、 $C_{ps}$ ：係数、 $C_{ps}=3$ 、 $u_{sei}$ ：平衡状態の*i*方向水表面流速である。ここで、浅水流の仮定を用いる場合は、右辺第2項は省略される。

### ○流砂の連続式

一般座標系の流砂の連続式は、平衡掃流砂量の出入り関係と浮遊砂の浮上量・沈降量の関係から以下のようになる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial z_b}{\partial t} + \frac{1}{(1-\lambda)J} \left\{ \frac{1}{\cos \theta_\eta} \frac{\partial}{\partial \tilde{\xi}} \left( \tilde{J} d\eta \cdot \sum_k \hat{q}_{B\xi k} \right) + \frac{1}{\cos \theta_\xi} \frac{\partial}{\partial \tilde{\eta}} \left( \tilde{J} d\xi \cdot \sum_k \hat{q}_{B\eta k} \right) \right\} \\ & + \frac{1}{1-\lambda} \sum_k \left( \frac{\hat{q}_{suk}}{\cos \theta} - c_{bk} w_{fk} \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.123)$$

ここに、 $\lambda$ ：砂の空隙率、 $\hat{q}_{B\eta k}$ 、 $\hat{q}_{B\xi k}$ ：反変 $\hat{q}_{B\eta k}$ 、 $\xi$ 方向、 $\eta$ 方向の各粒径階 $d_k$ の流砂量、 $\hat{q}_{suk}$ ：斜面に垂直な方向の各粒径階 $d_k$ の浮上量、 $w_{fk}$ ：各粒径階 $d_k$ の沈降速度、 $c_{bk}$ ：各粒径階 $d_k$ の基準面濃度である。

また，粒径別流砂の連続式は，以下の通りである．

$$E_l \frac{\partial f_{bk}}{\partial t} + \frac{1}{(1-\lambda)J} \left\{ \frac{1}{\cos\theta_\eta} \frac{\partial}{\partial \xi} (\tilde{J} d \eta \cdot \hat{q}_{B\xi}) + \frac{1}{\cos\theta_\xi} \frac{\partial}{\partial \eta} (\tilde{J} d \xi \cdot \hat{q}_{B\eta k}) \right\} + \hat{f}_{bk} \frac{\partial z_b}{\partial t} + \frac{1}{1-\lambda} \left( \frac{\hat{q}_{suk}}{\cos\theta} - c_{bk} w_{fk} \right) = 0 \quad (4.124)$$

ここで，

$$\begin{cases} \hat{f}_{bk} = f_{bk} & (\partial z_b / \partial t \geq 0) \\ \hat{f}_{bk} = f_{bk0} & (\partial z_b / \partial t < 0) \end{cases}$$

$E_l$  は交換層の厚さ， $f_{bk}$ ， $f_{bk0}$ ，交換層，交換層下における粒径階  $d_k$  の含有率である． $s$ ：粒子の水中比重， $\hat{\tau}_{*ek}$ ：斜面に沿う方向の各粒径階  $d_k$  の無次元有効掃流力， $\hat{\tau}_{*ck}$ ：斜面に沿う方向の各粒径階  $d_k$  の無次元限界掃流力， $\hat{\tau}_{*k}$ ：斜面に沿う方向の各粒径階  $d_k$  の無次元掃流力， $\hat{u}_{*ck}$ ：斜面に沿う方向の各粒径階  $d_k$  の限界摩擦速度， $\hat{u}_*$ ：斜面に沿う方向の摩擦速度である．

$$\frac{\hat{q}_{B\xi k}}{\hat{q}_{Bk}} = \frac{\hat{\tau}_{*k\xi}}{\hat{\tau}_{*k}} \quad (4.125)$$

$$\frac{\hat{q}_{B\eta k}}{\hat{q}_{Bk}} = \frac{\hat{\tau}_{*k\eta}}{\hat{\tau}_{*k}} \quad (4.126)$$

$\hat{q}_{Bk}$ ：粒径階  $d_k$  の流砂量， $\tilde{u}_b$ ， $\tilde{v}_b$ ：一般座標系における反変  $\xi$ ， $\eta$  方向の河床面近傍流速， $\tau_{*k}$ ， $\tau_{*ck}$ ：粒径階  $d_k$  の無次元掃流力，無次元限界掃流力， $\mu_s$ ：砂の静止摩擦係数， $\mu_k$ ：砂の動摩擦係数である．ここで，式(4.123)，(4.124)の浮遊砂の浮上量に掛かる  $1/\cos\theta$  は，デカルト座標系での導出と同様に，本研究では考慮していない．

### ○浮遊砂濃度の移流拡散方程式

浮遊砂濃度は、以下に示す三次元浮遊砂濃度の連続式により求める。

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial c_k}{\partial t} + \frac{1}{J} \left( \frac{\partial \Delta \eta \cdot u_\xi c_k}{\partial \xi} + \frac{\partial \Delta \xi \cdot u_\eta c_k}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial c_k (u_\sigma - \sigma_t - w_{0k})}{\partial \sigma} \\
 & = \frac{\partial}{\partial \tilde{\xi}} \left( \varepsilon_s \frac{\partial c_k}{\partial \tilde{\xi}} \right) + \frac{\partial}{\partial \tilde{\eta}} \left( \varepsilon_s \frac{\partial c_k}{\partial \tilde{\eta}} \right) + \cos \theta^{n\xi} \left\{ \frac{\partial}{\partial \tilde{\xi}} \left( \varepsilon_s \frac{\partial c_k}{\partial \tilde{\eta}} \right) + \frac{\partial}{\partial \tilde{\eta}} \left( \varepsilon_s \frac{\partial c_k}{\partial \tilde{\xi}} \right) \right\} \\
 & + \frac{\varepsilon_s}{\tilde{J}} \left( \frac{\partial c_k}{\partial \tilde{\xi}} \frac{\partial \theta^\xi}{\partial \tilde{\eta}} + \frac{\partial c_k}{\partial \tilde{\eta}} \frac{\partial \theta^\eta}{\partial \tilde{\xi}} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \varepsilon_s \frac{\partial c_k}{\partial z} \right) + \frac{\hat{q}_{suk(z=z_b)}}{\cos \theta}
 \end{aligned} \tag{4.127}$$

ここで、 $c_k$  : 各粒径階  $d_k$  の浮遊砂濃度、 $\hat{q}_{suk}$  : 斜面に垂直な方向の各粒径階  $d_k$  の浮上量、 $w_{jk}$  : 各粒径階  $d_k$  の沈降速度、 $c_{bk}$  : 各粒径階  $d_k$  の基準面濃度である。  
 ここで、式(4.127)の浮遊砂の浮上量に掛かる  $1/\cos\theta$  は、流砂の連続式(式(4.124))と同様に、本研究では考慮していない。

### 4.3. まとめ

第4章では、十分発達した河口砂州の洪水流による拡幅過程を説明するためには、縦横断的に大きな斜面勾配を有する河口砂州前縁部を越流する流れと流砂運動を適切に計算することが重要であると考え、これらを考慮した流れと流砂運動の解析法を定式化した。

十分発達した河口砂州は、洪水流の通水断面積を狭め、河口砂州を挟む上下流で大きな水位差を引き起こすとともに、流線を大きく曲げるため、河口砂州周辺では三次元性の強い加速流れとなる。河口砂州上を越流する流れは、砂州を洗掘し越流範囲を下流に広げながら開口幅を拡大する。この点に着目し、河口砂州周辺の流れの三次元性と縦横断的に大きな斜面勾配を有する砂州斜面に沿う底面付近の流れと流砂運動の解析に考慮し、洪水流による河口砂州の拡幅解析モデル(解析法1)を構築した。

解析法1を構築する際には、河口部周辺の三次元的な流れ構造は、水深スケールの渦運動に規定されること、河床変動解析に重要な底面流速が、水深積分した渦度の定義式により、水深平均渦度と水表面流速、水深平均鉛直方向流速から計算できることに着目した。具体的には、流速鉛直分布を三次式で表した上で、水深積分した渦度方程式、水表面における運動方程式、水深積分した連続式・運動方程式を連立して解析することで底面付近の水平方向流速を計算した。水平方向底面流速を底面の運動学的境界条件に適用することで、斜面に沿う底面付近の流速を計算し、これを用いて斜面に沿う方向の底面せん断応力を評価した。これにより、洪水時に三次元性の強い加速流が生じる阿賀野川河口砂州周辺において、砂州斜面上の底面付近の流れの適切な計算を可能にした。また、流砂運動の解析では、斜面に沿う方向の底面流速を用い、この方向の底面せん断応力を評価した上で、更に斜面上の砂粒子に作用する重力の影響を考慮することで、斜面に沿った方向の掃流砂量の評価式、斜面勾配を考慮した流砂の連続式を導出した。浮遊砂については、前述のように河口砂州周辺では三次元性の強い流れとなることから、流れの解析から得られた三次元流速場を用いて浮遊砂濃度の三次元移流拡散方程式を計算し、底面付近の浮遊砂濃度を精度良く求めることにした。これらにより洪水流と河床変動を一体的に計算出来る河口砂州の拡幅解析モデルの解析法1を構築した。

そして、構築した解析法1と斜面に沿う方向の流れと流砂運動については考慮しない解析法2の方程式群を比較して示した。これより、解析法1では、斜面に沿う流れと流砂

運動を考慮することで水深平均流速・圧力の非静水圧成分・河床変動等の流れ場が変化する。これにより起こる河床形状の変化が流れの水平方向・鉛直方向運動方程式及び渦度方程式内に反映されている。

## 参考文献

- 1) 内田龍彦, 福岡捷二: 非平衡粗面抵抗側を用いた一般底面流速解析法の導出と局所三次元流れへの適用, 土木学会論文集 B1 (水工学), Vol.71, No.2, pp.43-62, 2015.
- 2) 平野宗夫: *Armoring* をともなう河床低下について, 土木学会論文集, 第 195 号, pp.55-65, 1971.
- 3) 福岡捷二, 山坂昌成: 直線流路の交互砂州, 第 27 回水理講演会論文集, pp.703-708, 1983.
- 4) Egiazaroff, I. V. : Calculation of Nonuniform Sediment Concentrations, Journal of the Hydraulics Division, ASCE, Vol. 91, No. HY4, pp.225-247, 1965.
- 5) 芦田和男, 道上正規: 移動床流れの抵抗と掃流砂量に関する基礎的研究, 土木学会論文報告集, 第 206 号, pp.59-69, 1972.
- 6) 岩垣雄一: 限界掃流力の流体力学的研究, 土木学会論文報告集, 第 41 号, pp.1-21, 1956.
- 7) Rubey, W. W. : Settling Velocities of Gravel, Sand and Silt Particles, American Journal of science ser.5, No.25, pp.325-338, 1933.
- 8) Itakura T. and Kishi T. : Open Channel Flow with Suspended Sediments, Journal of the Hydraulic Division, ASCE, HY8, pp.1325-1343, 1980.
- 9) 板倉忠興: 河川における乱流拡散現象に関する研究, 土木試験所報告, 第 83 号, 1984.

## 第 5 章 平成 23 年 7 月阿賀野川洪水による河口砂州の拡幅機構と最終開口幅の検討

### 5.1. 概要

本章では、まず、河口砂州の大規模な拡幅に伴い開口幅が拡大した平成 23 年 7 月阿賀野川洪水の観測水面形の時系列データに、第 4 章で構築した十分発達した河口砂州の洪水流による拡幅機構の解析モデル(解析法 1)を適用した結果を示す。解析結果から、河口砂州の拡幅機構と最終開口幅について検討する。次に、解析法 1 と斜面に沿う方向の流れと流砂運動については考慮しない解析法 2 との比較から、斜面に沿う流れと流砂運動の考慮が阿賀野川河口砂州の拡幅機構と最終開口幅の決定に有効であることを示す。

### 5.2. 解析条件

#### (a) 対象区間・解析メッシュ形状・初期河床形状

図 5-1 は本研究の解析対象区間とその初期河床高を示す。解析対象区間は、横越水位・流量観測所(13.5km)を上流端とし、河口沖-2.5km を下流端とした。横越水位・流量観測所の直上流において河道線形が大きく蛇行していることから、上流端に到達する適切な流速分布を解くために助走区間を 16.0km まで設けている。解析下流端の位置は、7,870m<sup>3</sup>/s の洪水流量を観測した昭和 53 年 6 月阿賀野川洪水において土砂堆積が確認された-15.0 T.P.m の等深線を含む約-2.5km までとした。図 5-2 は、河口部の初期地形の詳細を示している。河道内の初期地形は、マルチビーム測量による 3 次元測量データを用い、水面上の河口砂州の初期地形は、洪水時に撮影された航空写真と水際近傍の水位観測値より得られた砂州高さのデータと定期横断測量結果を用いて作成した。

解析メッシュは、351(縦断方向)×126(横断方向)の計 44,226 で作成し、河口砂州の位置する 0.2km から-0.2km までの間は、初期地形を詳細に取り込み高い精度で計算を行うことを目的とし、10m 四方の格子形状とした。その他の場所は、概ね縦断方向に 20m から 40m、横断方向に 10m 程度の格子サイズとした。

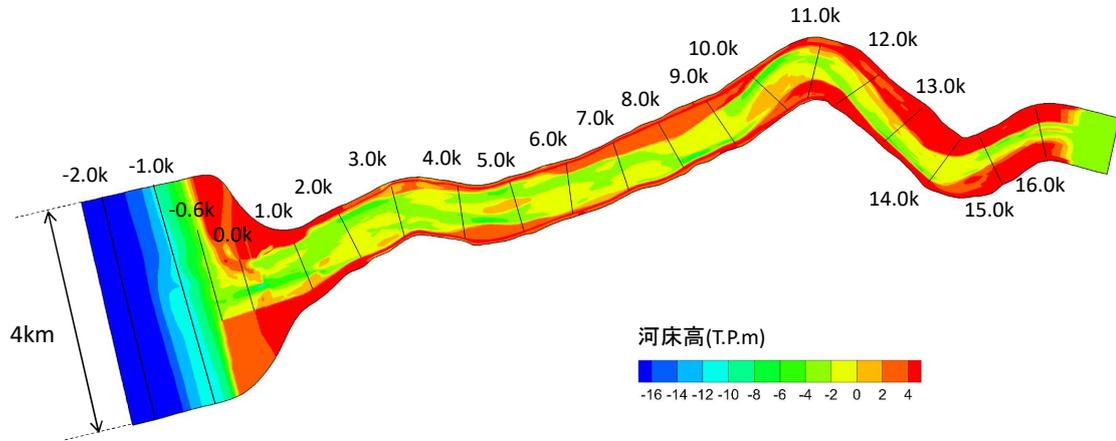


図 5-1 対象区間の初期地形

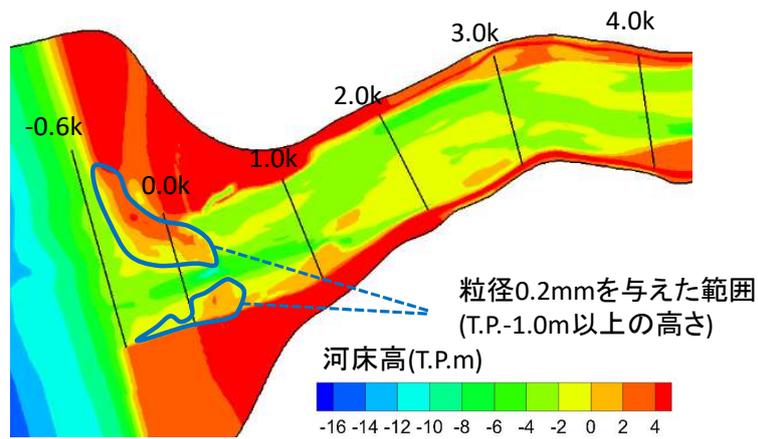


図 5-2 河口部の初期地形と河口砂州上の粒径の設定範囲

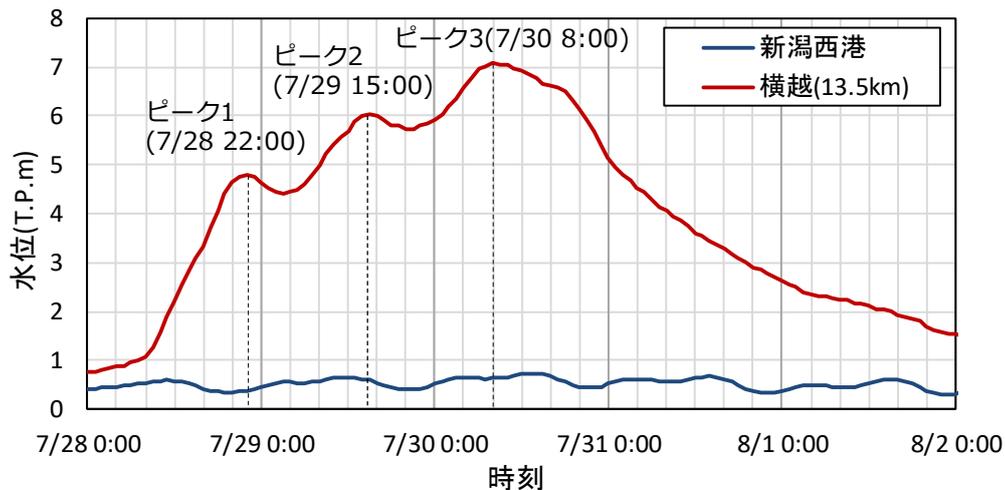


図 5-3 横越観測所と新潟西港地点の平成 23 年 7 月洪水時の観測水位ハイドログラフ

#### (b) 洪水流の上・下流端境界条件

図 5-3 は、本解析で与える上・下流端境界条件の水位ハイドログラフを示す。本研究では、上流端境界条件には横越水位・流量観測所で観測された水位ハイドログラフを与え、下流端境界条件には新潟西港で観測された潮位ハイドログラフを与える。河道においては、水面形の時間変化が測られていることから、流れの下流端境界条件は、河口を含む河川のどこでもよいが、砂州の崩壊土砂の海域への輸送を考えるために潮位を下流端条件として与え、海域・河道の洪水流を計算する。この際、解析水面形が河口を含む河道の洪水観測水面形にほぼ一致するように水位縦断形の計算を実行する。

#### (c) 土砂に関する上流端境界条件

横越での流入土砂の境界条件は、各時間での横越における流れの掃流力に見合う掃流流砂量、浮遊土砂量を計算で与えている。

#### (d) 河床材料

第 3 章の図 3-19 に阿賀野川で調査された河床材料粒度分布を示した。この調査結果より本解析の河道対象区間の平均的な粒径は、河床上に粒径 0.5mm の材料を一様に与えた。一方、河口砂州は主に波浪や漂砂により運ばれてきた細かい材料で形成されるため、図 5-2 に示した T.P.-1.0m 以上の砂州の範囲には粒径 0.2mm の材料を与えた。

### 5.3. 洪水流による阿賀野川河口砂州の拡幅機構と最終開口幅の検討

#### 5.3.1 解析水面形の時間変化と解析流量ハイドログラフ

図 5-4 は対象区間における水面形時系列の観測結果と解析法 1 の解析結果の比較を示す。解析結果は実線で右岸側の水面形を示し、破線で河道中央の水面形を示している。解析水面形時系列および水面形時系列から解析した流量ハイドログラフの解析結果は、それぞれ図 5-4、図 5-5 に示すように観測値をほぼ説明している。このことから、上・下流端にそれぞれ観測水位と潮位ハイドログラフを与え、上流端の土砂の境界条件に平衡掃流砂量と平衡浮遊砂量を与えた本解析結果は、実現象の洪水流と河床変動をよく再現している。低水路粗度係数は、観測水面形を再現するように図 5-5 に示す数値を与え、高水敷の粗度係数は一律に 0.037 を与えた。

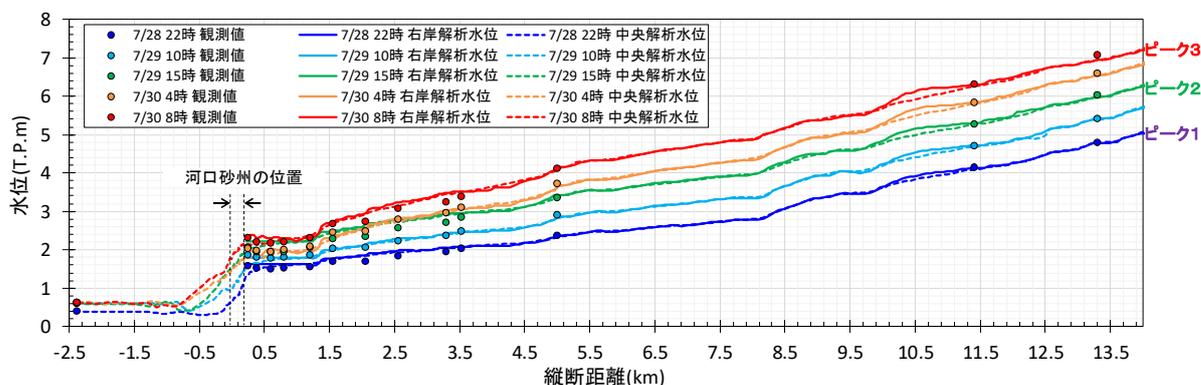


図 5-4 阿賀野川対象区間における解析と実測の水面形時間変化の比較(解析法 1)

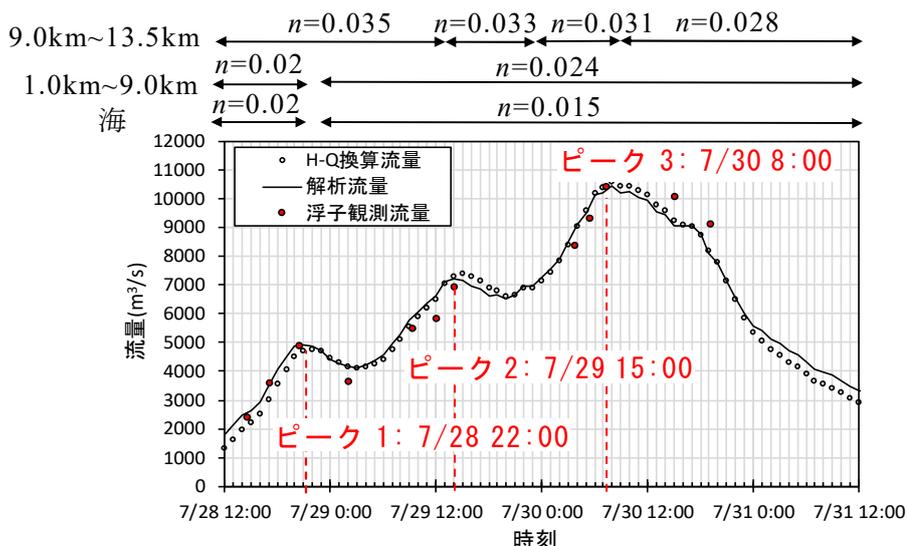


図 5-5 横越観測所(13.5km)における観測流量と解析流量ハイドログラフの比較及び低水路粗度係数(解析法 1)

### 5.3.2 河口砂州の拡幅過程と最終開口幅の検討

ここでは、解析法 1 の解析結果から、阿賀野川河口砂州の洪水流による拡幅機構と最終開口幅について検討するとともに、斜面に沿う流れと流砂運動を考慮しない解析法 2 の解析結果との比較から、河口砂州拡幅に対する斜面に沿う流れと流砂運動の考慮の有効性を検討する。解析法 2 を用いた解析の条件は、解析法 1 と同一条件で行っている。

図 5-6, 図 5-7, 図 5-8, 図 5-10 は、解析法 1 の解析結果から、洪水前、ピーク 1(7/28 22:00) , ピーク 2(7/29 15:00) , ピーク 3(7/30 8:00)のそれぞれの時間帯で作成した河口砂州の立体図を示している。図 5-9, 図 5-11 は、ピーク 2, ピーク 3 の時間帯における解析法 1 による砂州拡幅計算結果との比較のために作成した解析法 2 による河口砂州の立体図を示している。図 5-13 は、河口砂州上にある 0.2km 地点における解析法 1 による解析横断形状の時間変化と洪水後の横断測量結果の比較を示す。

まず、解析法 1 の解析結果から得られた河口砂州拡幅過程を示す。ピーク 1 では流量が約  $5,000\text{m}^3/\text{s}$  であり、図 5-7 に示すように洪水流は河口砂州を越流せず河道中央部に流れが集中している。その結果、図 5-12 に示すように、河道中央部が洗掘を受け、河床低下が進行している。ピーク 2(7/29 15:00)では流量が約  $7,000\text{m}^3/\text{s}$  であり、図 5-8 に示すように河口砂州の上流側前縁部において越流が生じている。図 5-12 に示した 0.2km 地点の右岸側の砂州は、ピーク 2 の前後 1 時間(7/29 14:00~16:00)の間に約 150m の範囲に渡り大きく洗掘を受け、砂州が拡幅し始める。その後、図 5-12 に示すように、最大流量(約  $11,000\text{m}^3/\text{s}$ )に達するピーク 3 までの間に拡幅が急激に進行する。これは、第 3 章において CCTV カメラの映像分析から明らかとなった砂州の拡幅過程とほぼ一致するものである。また、ピーク 3 では、砂州拡幅に伴いピーク 2 までに洗掘を受けた河口主流部河床が埋め戻されている。図 5-12 に示した洪水後の解析結果は、河口砂州上にある 0.2km 地点で観測された砂州の拡幅量や河道中央部の埋戻し量をほぼ説明出来ている。

次に、図 5-8 と図 5-9, 図 5-10 と図 5-11 をそれぞれ比較すると、洪水流が河口砂州を越流し始めた時間帯であるピーク 2 では、解析法 1 と解析法 2 で河口砂州の拡幅状況にそれほど大きな差は見られない。一方、砂州の拡幅が十分に進行したピーク 3 では、解析法 2 の結果に比べて解析法 1 の結果の方が、河口砂州の位置がより下流に移動していることが分かる。図 5-13, 図 5-14, 図 5-15 は、それぞれ図 5-10, 図 5-11 に示す 0.2km 断面, 0.17km 断面, 0.13km 断面における、解析法 1 と解析法 2 のピーク 3 での解析横

断面形状の拡幅状況の詳細を示す。ピーク 3 の時点で既に十分拡幅が進行している 0.2km 断面とその下流の 0.17km 断面では、解析法 1 と解析法 2 の差はそれほど大きくない。しかし、河口砂州の斜面勾配が急になる砂州前縁部に位置する 0.13km 断面では、解析法 1 の横断面形状は、解析法 2 の横断面形状に比べて右岸砂州の拡幅量が大きくなり、それに伴い河道中央部河床の埋め戻し量も増大している。図 5-17 は、ピーク 3 における解析法 1 による斜面に沿う方向の掃流砂量ベクトル・摩擦速度を示す。図 5-18 は、解析法 2 による水平方向の掃流砂量ベクトル・摩擦速度を示す。これらの図内の破線は、河床高の等高線を示している。図 5-17、図 5-18 の比較より、河口砂州上流側の河床勾配が緩やかな 0.4km から 0.2km の区間では、解析結果に大きな差は見られない。一方で、縦横断的に大きな河床勾配を有する河口砂州より下流の区間では、解析法 1 の掃流砂量ベクトル・摩擦速度が、解析法 2 に比べて大きい。特に砂州上を越流する流れが生じる 0.2km から 0.0km の区間における差が顕著であり、解析法 1 では、砂州上から河口主流部に向かい多量の掃流砂が供給されていることが分かる。この流れと流砂運動の差が、図 5-15 に示した解析法 1 と解析法 2 による 0.13km 断面形状計算結果の差となって現れた。このことから、縦横断的に大きな斜面勾配を有する砂州上の斜面に沿う底面付近の流れと流砂運動を解析に考慮することが重要であることが明らかとなった。

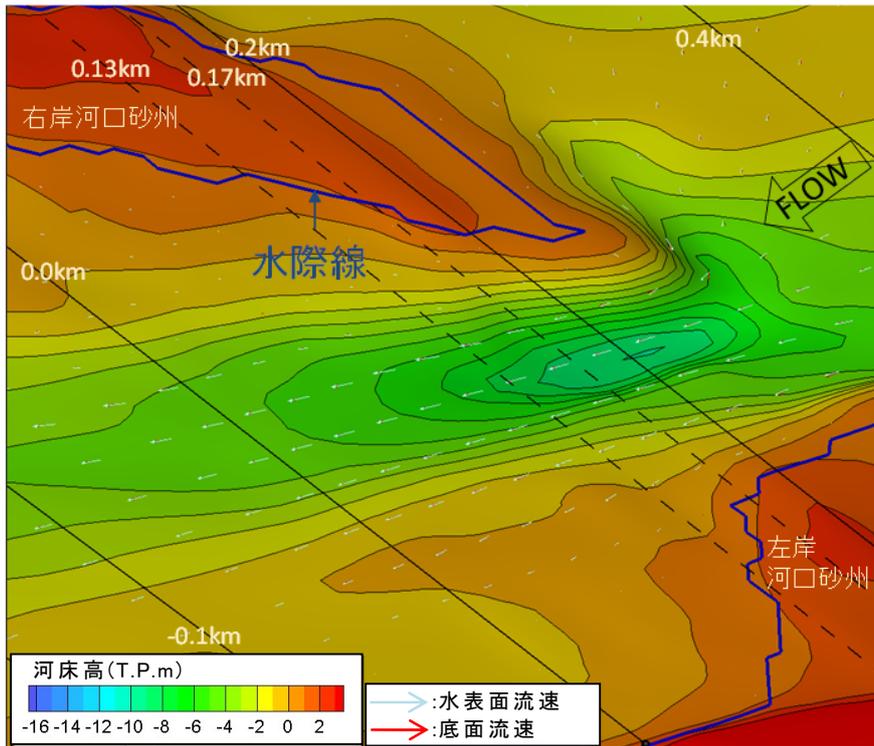


図 5-6 洪水前の河口砂州の立体図と流況図(解析法 1)

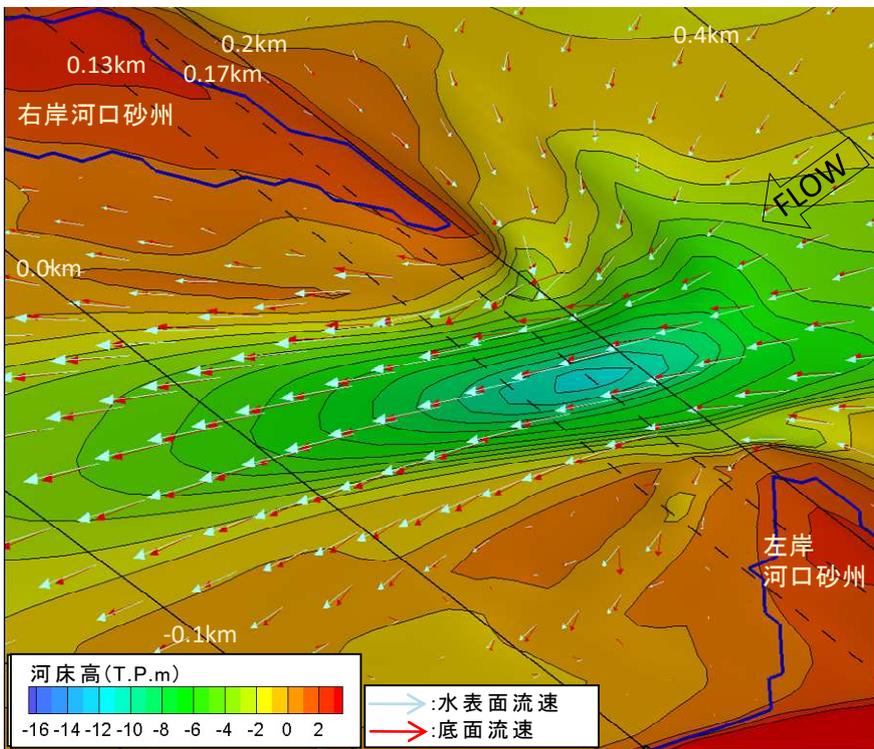


図 5-7 ピーク 1 での河口砂州の立体図と流況図(解析法 1)

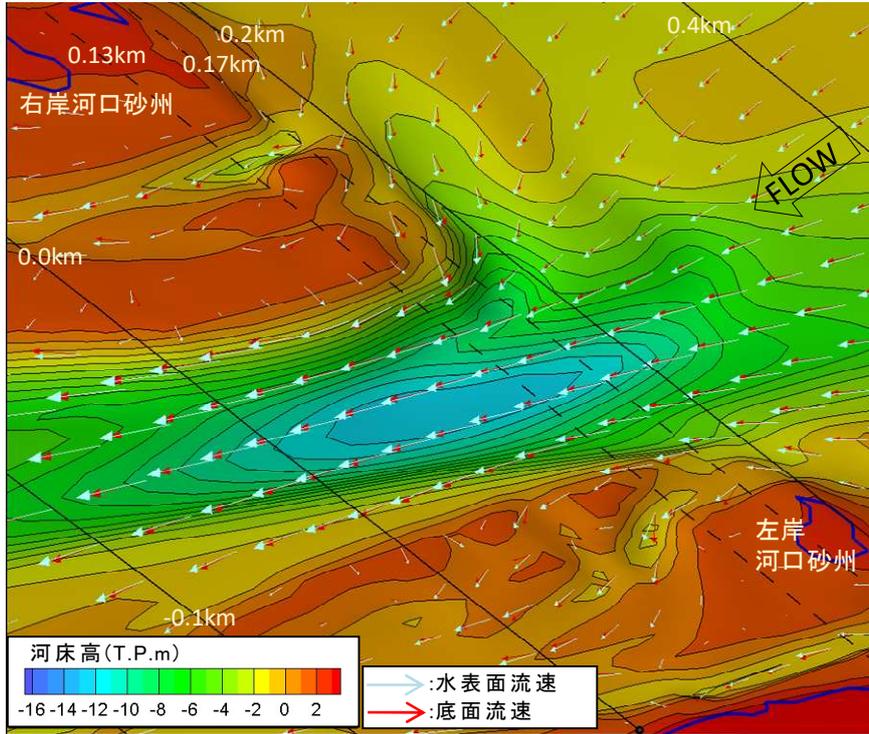


図 5-8 ピーク 2 での河口砂州の立体図と流況図 (解析法 1)

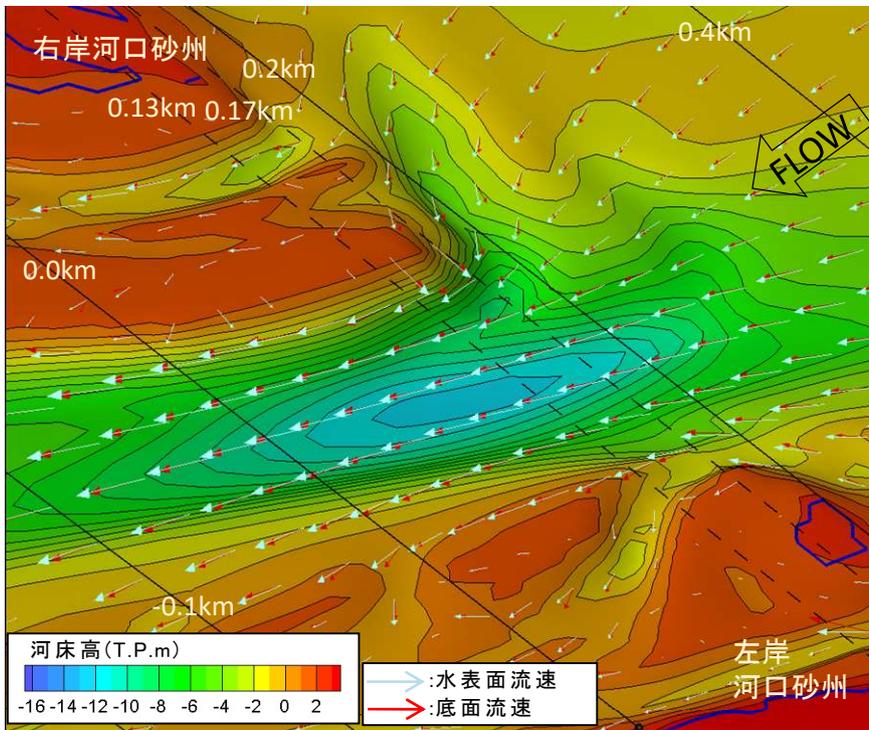


図 5-9 ピーク 2 での河口砂州の立体図と流況図 (解析法 2)