

中央大学博士論文

動的な地図に対するラベル配置問題  
に関する研究

Yusuke Yokosuka  
横須賀 佑介

博士 (工学)

中央大学大学院  
理工学研究科  
情報工学専攻

平成 29 年度  
2018 年 3 月



## 概要

統計データをグラフで表現した図や地図など様々な図において、図の中の特定の対象に対してその名前や説明などの情報をラベルとして配置することは、その図に対するユーザの理解を促進する。そのため、図や地図中の対応する点に対して、文字列やシンボルなどのラベルを配置するラベル配置問題は、計算幾何学という理論計算機科学の分野だけでなく、実用上も重要である。ラベル配置問題としては、ラベルのサイズは固定された中で、他のラベルと重なることなく、できるかぎり多くのラベルを配置するラベル数最大化、すべてのラベルを配置する中で、他のラベルと重なることなく、すべてのラベルで共通して利用する拡大率を最大化するラベル配置を求めるラベルサイズ最大化が多く研究されてきた。近年、商用の GIS アプリケーションや、AR/VR などの普及により、動的な環境への重要性が高まっている。このような背景のもと、動的な環境に対するラベル配置問題において、多くのヒューリスティクスが提案されてきた。また、動的な地図に対するラベル数最大化に対する、理論的保証を持つアルゴリズムが研究されてきた。しかし、理論的保証を持つアルゴリズムは、ラベルの配置位置があらかじめ決まっている、対応できている操作のバリエーションが少ない、など実用上利用する上でのギャップはまだ大きい。

そのため本論文では、実用上利用可能で、かつ、理論的な保証を持つアルゴリズムを構築することを目指し、回転する地図に対するラベルサイズ最大化問題と点重なり最小ラベル配置問題を扱う。回転する地図に対するラベルサイズ最大化問題は、ラベルサイズ最大化の動的な地図への拡張の 1 つである。また点重なり最小ラベル配置問題は、航空機の情報画面上を動的に移動する航空管制システムへの応用を考慮した問題である。

回転する地図に対するラベルサイズ最大化では、次の 3 つの条件を満たす中で、最大となるラベルの拡大率と、それを達成するアンカー点の位置、つまり、点に対してラベルを配置する位置を求める。1 つ目の条件は、地図が  $360^\circ$  回転した際に、ラベルが常に水平であることである。2 つ目の条件は、地図が回転しても、アンカー点の位置および拡大率は変わらないことである。最後の条件は、地図が回転している間に、ラベル同士は交差しないということである。本論文では、正方形、長方形といった各種のラベル形状において、この問題に対する  $O(n \log n)$  時間アルゴリズムを与える。従来の動的な地図に対する問題では、ラベル数最大化が多く考えられてきたが、ここではラベルサイズ最大化を扱っている。また、これまでの動的な地図に対するラベル数最大化では、アンカー点の位置があらかじめ決められているが、ここで与えるアルゴリズムは、アンカー点の位置が、ラベルの境界上であればどこでもよい。さらに、静的な地図に対するラベルサイズ最大化は APX 困難であるにもかかわらず、この

問題は多項式時間で解くことができる。そのため、より実用的にも利用しやすいアルゴリズムと考えられる。

点重なり最小化問題は、航空管制システムへの応用を考慮したラベル配置問題である。航空管制システムでは、各航空機のラベルは常に表示される必要があり、また、ラベルの重なりが発生した場合、航空管制官が手動で重なりを解消している。そのため de Berg と Gerrits (Comput. Geom. 2012) は、ラベルのサイズは固定で、すべてのラベルを配置する中で、他のラベルと重ならないラベルの数を最大化するフリーラベル最大化を提案した。フリーラベル最大化では、ラベルを動かすことなく読めるラベルの数を増やすために、重なりがあるラベルへ重なるラベルの数は増える。つまり、重なりのあるラベルを読むためにかかるコストは高くなる。しかし、航空管制官は常に全体の状況を把握しながら地図を見るため、1つのラベルに集中してラベルを移動させるよりも、少しずつ重なりを解消する方がよい。そのため、平面上の点に重なるラベルの数に着目し、すべての点の中でのこの数の最大値が、最小になるラベル配置を求める、点重なり最小化を考える。本論文では任意の長方形ラベルを持つこの問題に対する、LP 緩和を用いた 4-近似アルゴリズムと、単位正方形ラベルに対するより速い組合せ的 8-近似アルゴリズムを与える。また、前者のアルゴリズムを移動する点集合に対しても拡張し、4-近似アルゴリズムを与える。フリーラベル最大化に対して、問題設定が航空管制システムに適しているだけでなく、今までに理論的保証を持つアルゴリズムが提案されていない移動する点集合に対しても適用でき、提案アルゴリズムはより実用的であると考えられる。

本論文では、動的な地図に対する新たなラベル配置問題を定義し、その問題に対するアルゴリズムを提案した。本論文の成果は、従来考えられてきた他のラベル配置問題と比べ実用的な状況に対して、理論的な保証を持つアルゴリズムを提案したことである。また、IoT やビッグデータの隆盛により今後も加速度的に情報量が増え、地図だけでなく様々な情報を可視化し、ユーザが動的に操作し理解していく必要性が高まっていく中、その情報をより理解しやすくする方向性とその方法を示したことである。

# 目次

第 1 章	序論	1
1.1	動的な環境への対応	4
1.2	本論文の成果	5
1.3	本論文の構成	7
第 2 章	ラベル配置問題	11
2.1	点ラベル配置問題	12
2.2	静的な地図に対する点ラベル配置問題	13
2.3	動的な地図に対する点ラベル配置問題	14
第 3 章	回転する地図に対するラベルサイズ最大化	17
3.1	関連研究	19
3.2	性質	19
3.3	正方形ラベルに対する MSR	22
3.4	長方形ラベルに対する MSR	23
3.5	任意の正方形ラベルに対する MSBR	28
3.6	任意の長方形ラベルに対する MSBR	31
3.7	特殊な長方形ラベルに対する MSBR	33
3.8	4-スライダーモデル以外の場合	39
3.9	まとめ	40
第 4 章	点重なり最小ラベル配置問題	41
4.1	関連研究	43
4.2	問題の定式化と 4-近似アルゴリズム	44
4.3	単位正方形ラベルに対する組合せ的 8-近似アルゴリズム	49

---

4.4	まとめ . . . . .	55
第 5 章	結論	57
参考文献		61
謝辞		69
関連文献		71

# 第 1 章

## 序論

統計データをグラフで表現した図や地図など様々な図においては、図の中の特定の対象に対して名称や説明などの情報を追加することで、ユーザの理解を促進することができる。例えば、地図であれば特定の地点 (Point of Interest) の名称 (図 1.1(a)), 医療用の図などでは各器官の名称 (図 1.1(b)), UML (統一モデリング言語, Unified Modeling Language) の状態遷移図では状態名や状態間のリンクでの動作の説明 (図 1.1(c)) のように、特定の対象に対して情報を追加することで、図を理解しやすくしている。これらの追加の情報は文字列でおこなわれることが多いが、例えば観光案内用の地図などでは、観光地とその説明を追加していることもある [61]。そのため、図の中の特定の対象に対して情報を追加することは、地理情報システム (GIS) や地図製作、グラフ描画をはじめ、情報可視化における重要なトピックの 1 つである。

物理的な空間においては、商品名や値段などを商品に記載する場合、ラベルを貼りその上にそれらの情報を載せる。そのため、紙の上に表示された図から、画面上に表示された仮想空間上の図も含め、上述のような特定の対象に対する追加情報は、ラベル上に載せられていると仮定され、簡略化のためにそれらの追加情報も含めてラベルと呼ぶ。これらのラベルは、以下のように配置されることが望まれる [40]。

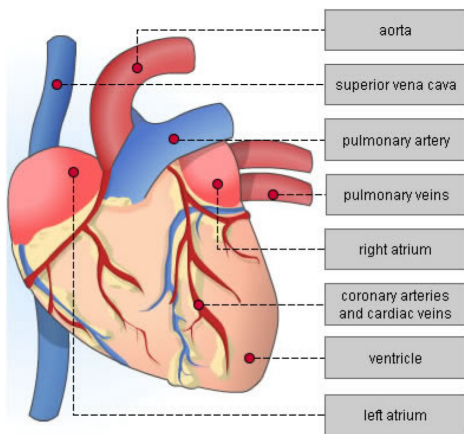
**Legibility:** 他の対象やラベルがあったとしても、読み易いようにラベルは配置されること。

**Unambiguity:** 特定の対象を説明するものであることがわかるような位置に配置されること。

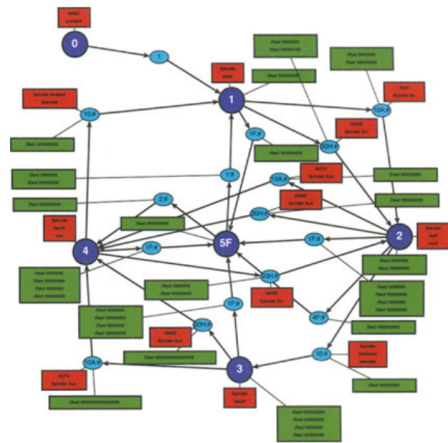
**Avoidance of Overlap:** 他のラベルと重なっていると読むことができないため、互いに交わらないこと。ただし、密な図などでは避けられないこともある。



(a) 地図 ([58] より引用).



(b) 医療用の図 ([9] より引用).



(c) UML 状態遷移図 ([42] より引用).

図 1.1. 図への情報の付与.

従来デザイナーが上記原理を考慮しながらラベルを配置していた. しかし地図を例にとると, 手動でラベルを配置する場合, そのコストは地図製作全体の約半分にもなると報告されている [44].

上記背景のもと, ラベルを自動で配置するという取り組みが, 地図製作者やグラフ描画研究開発者, 計算幾何学研究開発者によって, 様々な方法でなされてきた. ここで扱う問題を一般に **ラベル配置問題 (Label Placement Problem)** と呼び, 地図に限った場合などは, **地図ラベリング (Map Labeling)** と呼ぶ. ラベル配置問題は, Chazelle らによる ACM Computational Geometry Impact Task Force Report [17] にて, 計算幾何学という理論計算機科学の立場からも重要な研究領域として位置づけられている.

計算幾何学および理論計算機科学において, ラベル配置問題が重要である理由は次の 2 つ



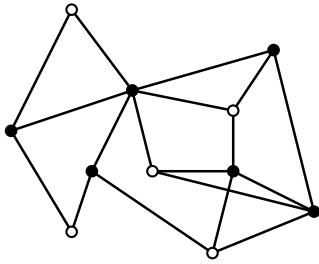


図 1.2. 最大独立集合問題  
(白丸が独立集合).

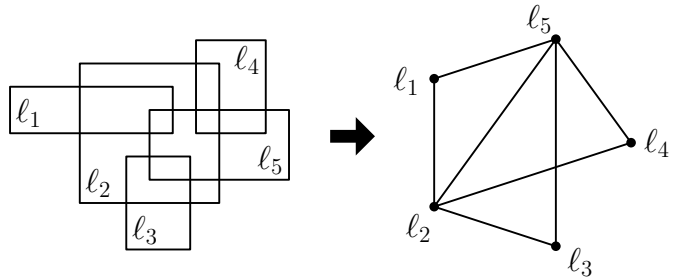


図 1.3. ラベル数最大化のインスタンスの交グラフ  
表現.

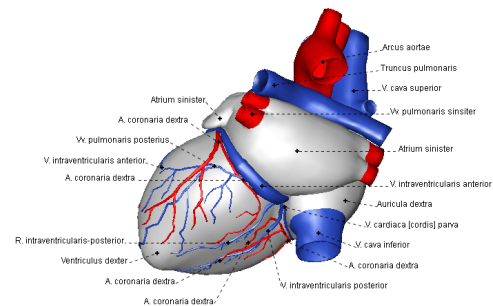
にあると考えられる. 1 つ目は応用として直接的であり, また, 地図製作コストを抑える意味でも重要な問題であることが挙げられる. 2 つ目は理論的にも研究の方向性を広げていることが挙げられる. ラベル配置問題の有名な問題の 1 つである, **ラベル数最大化 (Label Number Maximization)** 問題を例として説明しよう. この問題は, 図の中に長方形で表現されたラベルの集合が与えられ, それらの中から互いに交わらずに配置できるラベルの数を最大化する問題である. この問題は理論計算機科学で有名な問題の 1 つである, **最大独立集合 (Maximum Independent Set)** 問題 (図 1.2) の特殊ケースとなる. 具体的に以下で説明する. まず, 最大独立集合問題は以下のように定義される.

**定義 1.1** (最大独立集合). 頂点集合  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  および辺集合  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$  を持つグラフ  $G = (V, E)$  が与えられる. **最大独立集合 (Maximum Independent Set)** 問題は,  $G$  の中でサイズが最大の独立集合 (**Independent Set**) を求める問題である. ここで, 独立集合  $I \subseteq V$  とは,  $G$  内で隣接しない頂点集合である. 独立集合は, **安定集合 (Stable Set)** とも呼ばれる.

ラベル数最大化は, 与えられたラベル (長方形) を頂点とし, ラベルの間に重なりがある場合に辺があるとして構築された交グラフ (**Intersection Graph**) に対する, 最大独立集合問題と考えることができる (図 1.3). 最大独立集合問題は  $P \neq NP$  の仮定のもと, 任意の  $\epsilon$  に対して,  $|V|^{1-\epsilon}$  以内の近似率を持つアルゴリズムは存在しないことが知られている [65]. また, 最大次数が 3 の場合でさえ, PTAS は存在しない [12]. 一方, ラベル数最大化 (すなわち, 長方形に対する最大独立集合問題) は, 単位正方形に対しても NP 困難 [31] であるが, 単位高さ長方形に対する PTAS が得られている [3]. つまり, 一般のグラフの場合と比べよりよい近似率を与えることができる, 実用的な問題設定の 1 つであることがわかっている. さらに, 任意の長方形に対する研究は, 近年でも盛んにおこなわれている [1, 15, 16, 19]. なお, ここではラベル数最大化を例として取り上げたが, 他にもラベル配置問題を応用として



(a) AR/VR ([10] より引用).



(b) 医療画像の 3D モデル化 ([5] より引用).

図 1.4. 地図以外の動的な環境.

考えられた理論的な問題も数多く存在する [4, 25, 28]. このように、ラベル配置問題は理論的な研究に様々な広がりを与えており、とても興味深い.

## 1.1 動的な環境への対応

スマートデバイスの普及により、Google Mapをはじめ多くのパーソナルマッピングシステムの重要性が増加している. ここで扱われる地図は動的な操作が可能であり、例えば地図の並行移動や回転、拡大縮小などが考えられる. また、カーナビゲーションシステムでは自車の動きに合わせて動的に地図の表示が変化したり、航空管制システムなどでは複数の航空機を表す情報自体が動いたりする. 動的な環境としては、地図だけに限らず、様々な応用が挙げられる. 例えば、拡張現実 (Augmented Reality, AR) や仮想現実 (Virtual Reality, VR) でも、特定の対象に対してラベルを配置することはあり (図 1.4(a)), これらはユーザの視線方向に応じた表示をする必要がある. また、ラベルの付いた医療画像なども 3D データ上で表現できるようになり、インタラクティブに操作することが増えている (図 1.4(b)).

このような背景のもと、ラベル配置問題も動的な環境、特に動的に操作可能な地図が考えられている. そして、静的な地図と同様に、発見的な方法を用いたもの [24, 52] や、理論的な保証を持つもの [7, 8, 14, 32, 34, 35, 36, 43, 63] が提案されてきた. 特に、理論的な保証を持つ方法としては、ラベル数最大化の動的な地図への拡張である、可視区間最大化 (**Active Range Optimization, ARO**) [8] が考えられている. ここで、拡大縮小可能な地図を例として、ARO を説明しよう. 平面上にラベルの集合が与えられる. この時、縮尺を 3 次元目として扱う. その 3 次元空間上でのラベルは、縮尺を変化させたときに各縮尺における 2 次元空間上のラベルが通過する軌跡によって構成される 3 次元物体 (extrusion) である (図 1.5). ここで、各縮尺の間でラベルは連続的にサイズや位置などが変わるものとする.

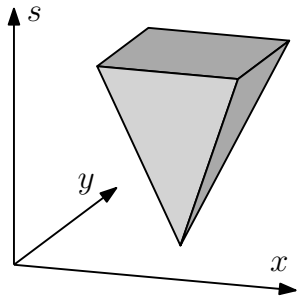


図 1.5. extrusion の例.

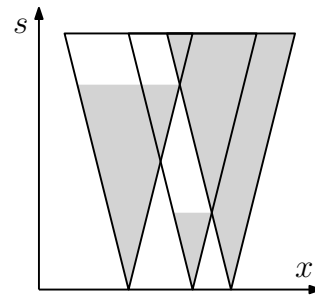


図 1.6. 1次元の拡大縮小地図に対する ARO.

**定義 1.2** (拡大縮小可能な地図に対する可視区間最大化). extrusion の集合  $\mathcal{E} = \{E_1, E_2, \dots, E_n\}$  が与えられる. このとき, 各 extrusion  $E_i \in \mathcal{E}$  は,  $(0, S_{\max})$  の間の縮尺に配置されるものとする. 拡大縮小可能な地図に対する可視区間最大化 (**Active Range Optimization, ARO**) は, 各 extrusion  $E \in \mathcal{E}$  に対して, 次を満たす可視区間 (**Active Range**)  $(a_E, A_E) \subseteq (0, S_{\max})$  を求める問題である.

- 各  $E$  に対して, 可視区間は 1 つだけである.
- 各  $E$  の可視区間は互いに交わらない.
- すべての extrusion の可視区間の和  $\sum_{E \in \mathcal{E}} (A_E - a_E)$  が最大である.

上述では 2 次元の地図で説明していたが, 1 次元の地図の例を図 1.6 に示す. ARO は, 拡大縮小する地図だけでなく, 回転する地図 [35] や, 軌跡に合わせて表示が変わるような地図 [32] に対しても拡張されているが, ラベルを配置対象に対して, どの位置にラベルを配置するのかをあらかじめ決めていいる. しかし, 実用上ラベルをできる限り多く配置する場合には, ラベル配置対象に対して, 自由な位置にラベルを配置できることが望まれる. 一部の研究では, ラベル配置対象に対して, どの位置にラベルを配置するのも含めて決定するアルゴリズム [34] も提案されているが, 1 次元地図だけを対象としている. さらに, 1 つの操作にしか対応できていない. 一方で, 実用上利用可能なアルゴリズムは発見的な方法が用いられており, 理論的な保証を持つことが難しい. そのため, 実用上利用可能なアルゴリズムと理論的な保証のあるアルゴリズムとの間には, まだまだ大きなギャップがあると言わざるを得ない.

## 1.2 本論文の成果

今まで述べた背景のもと, 実用上利用可能であり, かつ, 理論的な保証を持つアルゴリズムを提案していくために, 次の 2 つの問題を取り上げる.

**回転する地図に対するラベルサイズ最大化** ラベル配置問題としては、ラベル数最大化の他に、与えられたすべてのラベルを配置する中で、すべてのラベルで共通して利用する拡大率を最大化する、ラベルサイズ最大化 (**Label Size Maximization**) 問題も考えられてきた [31, 41]. ラベルサイズ最大化も NP 困難であることが知られている. 従来動的な地図への対応としては、ARO のようにラベル数最大化が考えられてきた. 本論文ではラベルサイズ最大化の動的な環境への対応の一環として、回転する地図に対するラベルサイズ最大化を考える. 問題設定は以下である. 各ラベルは地図上の対応する点と、アンカー点と呼ばれるラベル内部の点が一致するように配置される. この問題では、地図が  $0$  から  $2\pi$  の角度の間で回転したときに、地図に対してラベルが水平であり、また、アンカー点の位置およびすべてのラベルで共通して利用する拡大率は変わらない. さらに、回転中にすべてのラベルが交差しない. このような条件を満たした中で、ラベルサイズを最大化するラベルの拡大率とアンカー点の位置を求める. ここでは、各ラベルに対して、アンカー点はラベルの内部に配置される場合と、境界に配置される場合の 2 つを考える. 本論文では、アンカー点がラベルの内部にある場合の  $O(n \log n)$  時間、 $O(n)$  領域アルゴリズムを与える. さらにアンカー点がラベルの境界にある場合、任意の正方形ラベルまたは単位高さ長方形ラベルに対する、 $O(n \log n)$  時間、 $O(n)$  領域厳密アルゴリズムを与える. また、任意の長方形ラベルに対しては、 $O(n \log n)$  時間、 $O(n)$  領域  $1/2$ -近似アルゴリズムを与える. これらのアルゴリズムは、ラベルを配置する位置をあらかじめ決めておらず、また、ラベルの形にも制約がない. そのため、実用上利用しやすいと考えられる.

**点重なり最小ラベル配置問題** 航空管制システムにおいて、各航空機に関する情報は常にラベルとして表示される必要がある. また、ラベル同士の重なりが発生した場合には、航空管制官が手動で重なりを解消する. このアプリケーションに着目し、de Berg と Gerrits [23] は、フリーラベル最大化 (**Free-Label Maximization**) 問題を提案した. フリーラベル最大化は、他のラベルと重ならないラベルの数を最大化するものである. 一方で、重なりのあるラベルに重なるラベルの数は増えるため、重なりを解消するためにかかるコストは増える. 本論文では、航空管制システムへの応用を考慮し、de Berg と Gerrits の問題とは異なるラベル配置問題として、点重なり最小化 (**Point-Overlap Minimization**) 問題を導入する. この問題では、平面上の点に重なるラベルの数に着目し、そのような数の中で最大のものを最小化する. フリーラベル最大化が読むことが可能なラベルの数を最大化しているのに対し、この問題は読めないラベルを読むようにするためのコストを最小化する. 本論文では、任意の長方

形ラベルに対する点重なり最小化に対する LP 緩和を利用した 4-近似アルゴリズムと、単位正方形ラベルに対する高速な組合せ的 8-近似アルゴリズムを与える。航空管制システムにおいては、すべてのラベルを常に見えるようにしておく必要があるため、1 つのラベルを読むために集中してラベルを移動させるよりも、少しずつ重なりを解消する方が全体を見やすい。また、前者の近似アルゴリズムは、移動する点集合にも対応できる。そのため、点重なり最小化の問題設定はより実用的な設定であると考えられる。

動的な地図へのラベル配置問題における、本論文で考慮する問題の位置づけを表 1.1 にまとめる。ここで、固定位置モデルはラベルを配置できる位置が点の周りに有限に決められているモデルであり、例えば 4-ポジションモデルではラベル配置候補が 4 つある。また、スライダーモデルはラベルを配置できる位置がラベルの辺上で決められるモデルであり、例えば 4-スライダーモデルではラベル候補位置として、長方形で表されたラベルの 4 辺を利用できる。ここで述べたラベル配置候補のモデルを含め、具体的な用語の定義は 2 章にて説明する。本論文の成果は、表にも示したように、従来考えられてきた 1-ポジションモデルや 1-スライダーモデルよりも実用的な 4-ポジションモデル、4-スライダーモデルに対して、理論的保証を持つアルゴリズムをはじめて提案したことである。また、そのようなモデルにも適用できる問題設定を新たに提案していることである。

## 1.3 本論文の構成

本論文の構成は以下である。

まず、2 章にてラベル配置問題で一般的に利用される用語や、扱われている問題を紹介する。また、静的な地図および動的な地図に対して得られている結果をまとめる。それにより、本論文の成果の位置づけをより明確にする。

次に 3 章では、回転する地図に対するラベルサイズ最大化問題について述べる。ここでは、単位正方形や単位高さ長方形など、さまざまなラベル形状に対するアルゴリズムを与える。また、表 1.1 にまとめたように、固定位置モデルおよびスライダーモデルに対しての結果を与える。ARO では、4-スライダーモデルに対するアルゴリズムは与えられていない。さらに、ここで与えるアルゴリズムの多くは  $O(n \log n)$  時間の決定性アルゴリズムである。そのため、従来提案されてきたアルゴリズムと比べ、より実用的であると考えられる。なお、本章の内容の一部は、[J1, C2, D1–D3] で報告済みである。

4 章では点重なり最小化問題を扱う。この問題に対して、2 つの近似アルゴリズムを与える。基本的には静的な地図に対する問題をこの章では扱うが、1 つ目の近似アルゴリズムは、

移動する点集合も扱う。表 1.1 にまとめたように、この問題設定に対する理論的な保証を持つアルゴリズムは過去にはない。なお、本章の内容の一部は, [C1] に基づいている。

最後に, 5 章で本論文をまとめる。

表 1.1. 動的な環境に対するラベル配置問題における本論文の成果の位置づけ. ★ がついたものは、ヒューリスティクスのみの提案であり, ついていないものは理論的保証を持つアルゴリズムが提案されていることを意味する.

問題設定	固定位置モデル		スライダモデル	
	1-ポジションモデル	4-ポジションモデル	1-スライダモデル	4-スライダモデル
ラベル数最大化 (ARO)	拡大縮小 [8, 43, 63] 回転 [35, 36] 点の軌跡 [32]	-	拡大縮小 (1 次元) [34]	-
ラベルサイズ最大化	回転 (3 章)	-	回転 (3 章)	回転 (3 章)
フリーラベル最大化	-	-	-	点集合の移動 [24]★
点重なり最小化	-	点集合の移動 (4 章)	-	-





## 第2章

# ラベル配置問題

前章で述べたように、ラベル配置問題 (**Label Placement Problem**) は、入力された図の中のオブジェクトや、地図内の道路や施設などに対応する文字列やシンボルを、配置する問題である。地域や河川、駅などのラベルは、入力された地図上で、対象物を理解できる位置に適切に配置されなければならない。ラベルを配置する対象に応じて、ラベル配置問題は以下のように分類される。

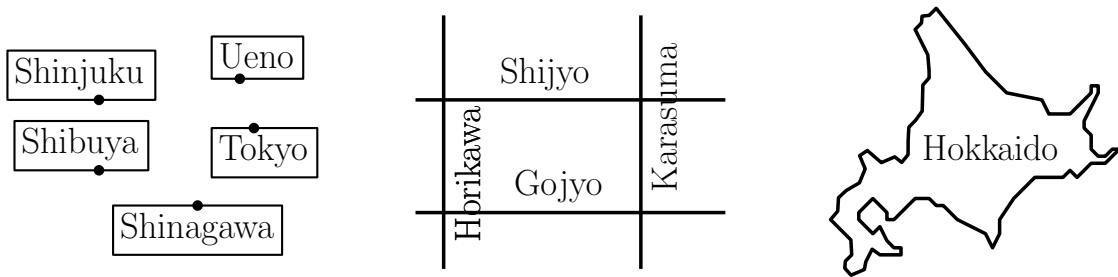
**点ラベル配置問題 (Point Labeling)** 駅や山頂など地図上の点や、グラフや図上の頂点に対してラベルを配置する問題 (図 2.1(a)). 点ラベル配置問題では、点の隣にラベルを配置することが多い。

**辺ラベル配置問題 (Line Labeling)** 道路や河川、線路のような地図上の線分やポリライン、グラフや図の中の辺に対してラベルを配置する問題 (図 2.1(b)). 辺ラベル配置問題では、辺に沿う形でラベルを配置することが多い。

**領域ラベル配置問題 (Area Labeling)** 地図上の国や州、島や湖などの多角形領域に対してラベルを配置する問題 (図 2.1(c)). 領域ラベル配置問題では、基本的に領域の内側にラベルは配置される。

上記の中で点ラベル配置問題が最も多く研究されており、また、本論文で扱う問題もすべて点ラベル配置問題であるため、この問題については次節以降で詳しく説明する。

辺ラベル配置問題では、道路に対して直線的にラベルを配置する問題 [27] や、曲線に合わせた形でラベルを配置する問題 [59] が考えられている。また、ヒューリスティクス [47, 48] や理論的な保証のあるもの [33] など、各種アルゴリズムが提案されている。



(a) 点ラベル配置問題. (b) 辺ラベル配置問題. (c) 領域ラベル配置問題.

図 2.1. 配置対象によるラベル配置問題の違い.

領域ラベル配置問題は、ある多角形の中に、他の多角形（ラベル）を配置する問題として定式化されることが多い [18, 39]. 一方で、近年島群に対するラベル配置も考えられている [57].

点ラベル配置問題を含め、ラベル配置問題に対する研究は [60] にまとめられているため、さらに詳しい情報については、こちらを参照頂きたい.

## 2.1 点ラベル配置問題

まず、点ラベル配置問題で扱われる、ラベルの配置候補位置に関する 2 つのモデルについて説明する. 点ラベル配置問題では、各点に対するラベルの配置候補の数について、固定位置モデル [31] とスライダーモデル [58] と呼ばれる 2 つのモデルが考えられてきた. どちらのモデルも対象の点がラベルの境界に含まれるようにラベルを配置する. 固定位置モデルはラベルの有限な配置候補位置を持つ. 例えば、配置候補が長方形の 2 つの頂点である 2-ポジションモデルや長方形の 4 つの頂点である 4-ポジションモデルが挙げられる (図 2.2). これに対して、スライダーモデルのラベル候補位置はラベルの指定された辺上である. 例えば、2-スライダーモデルでは、ラベル候補位置として、ラベルの向かい合う 2 つの辺を利用できる (図 2.3).

従来、点ラベル配置における最適化の分野では、主に 2 つの定式化が扱われてきた. 1 つはサイズが固定されたラベルを、互いに交わずに配置する数を最大化する、ラベル数最大化 (**Label Number Maximization**) 問題である (図 2.4(a)). もう 1 つは、すべてのラベルを配置しながら、ラベルのサイズを最大化する、ラベルサイズ最大化 (**Label Size Maximization**) 問題である (図 2.4(b)). ラベルサイズ最大化では、点集合  $P = \{p_1, \dots, p_n\}$  が与えられる. また、各点  $p_i \in P$  に対してラベルの幅  $w_i$  と高さ  $h_i$  が与

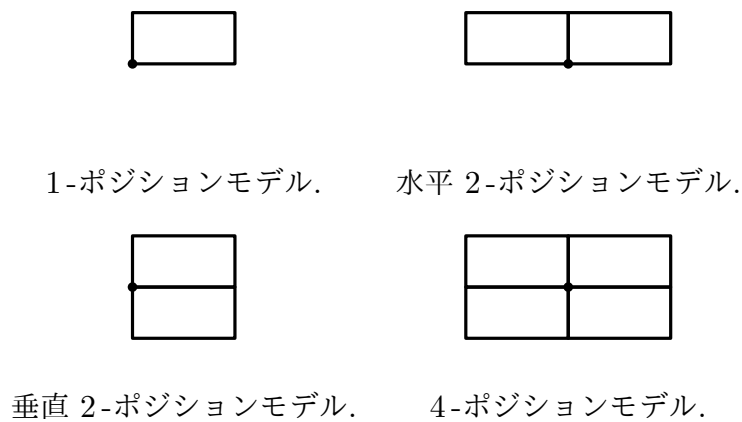


図 2.2. 固定位置モデル.

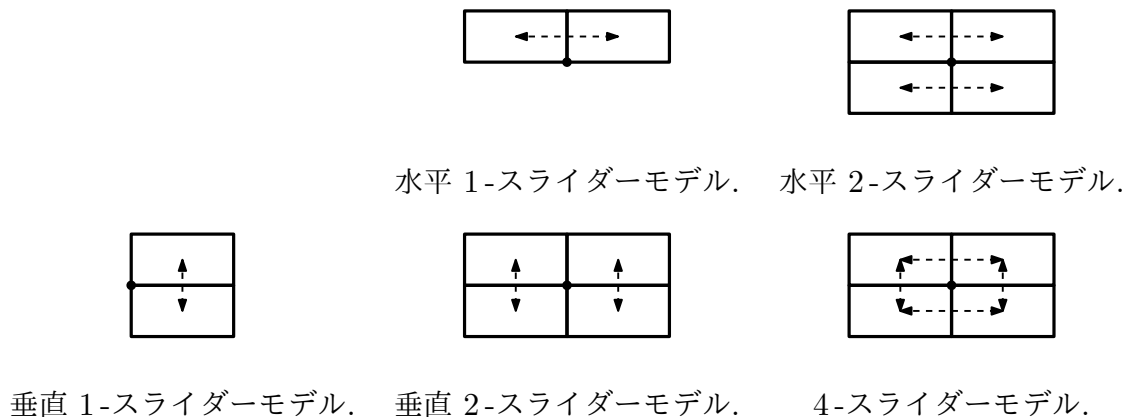


図 2.3. スライダーモデル.

えられる. さらに, すべてのラベルは同じ拡大率  $\sigma$  で拡大される. つまり, 点  $p_i$  に対するラベルのサイズは  $w_i\sigma \times h_i\sigma$  である. このような入力のもと, すべてのラベルが重ならずに,  $\sigma$  を最大化するラベル配置を求める.

## 2.2 静的な地図に対する点ラベル配置問題

静的な地図に対するラベル数最大化は, 単位正方形ラベルに対してでさえ NP 困難であることが知られている (例えば, [31, 58]). そのため, 多くの近似アルゴリズムが与えられてきた (例えば, [3, 58]). これらの多くの問題は, 単位正方形ラベルや単位高さの長方形ラベルに関するものがほとんどであった. しかし近年, 長方形に対する最大独立集合問題 (Maximum Independent Set for Rectangles, MISR) が多く研究 [1, 15, 16, 19] されており, これらで

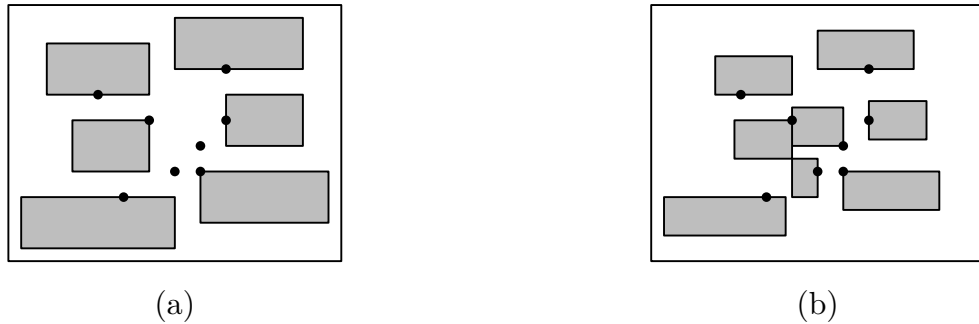


図 2.4. 同じ点集合に対する (a) ラベル数最大化と, (b) ラベルサイズ最大化の例. ラベル数最大化では, 配置できない点が存在するのに対し, ラベルサイズ最大化ではすべての点にラベルが配置される. 一方で, ラベルサイズ最大化ではすべてのラベルを同じ拡大率で拡大するため, ラベルのサイズは小さい.

得られた結果は, 任意の長方形に対するラベル数最大化に対しても適用できるものである.

静的な地図に対するラベルサイズ最大化では, 1-, 2-ポジションモデルを除いて, 単位正方形ラベルに対してさえ APX 困難であることが知られている [31]. そのため, 多くの定数近似アルゴリズムが各種長方形の形状に応じて示されてきた [31, 41]. また, 通常ラベルは座標軸に対して平行に配置されるが, Doddi ら [26] は単位正方形に対して, 様々な向きでラベルを配置してよい問題を扱っている. また, Zhu と Qin [64] は, すべてのラベルの向きは同じであるが, 座標軸に対しては平行でなくてもよい場合を扱っている.

## 2.3 動的な地図に対する点ラベル配置問題

動的な地図に対する点ラベル配置問題を考える前に, まず動的な地図に対してどのようにラベルを配置するとよいのか考える必要がある. Been ら [7] はこれに対し, 移動中や拡大縮小中にはラベルは突然消失したり表示されたりせず, また位置が急に変化することはない, という要求項目を与えている. この要求を満たすことを前提として, 動的な地図に対する点ラベル配置問題は考えられてきた.

Been ら [8] は上記要求を満たした上で, 拡大縮小する地図に対する ARO (定義 1.2) を定義している. 前述の通り, ARO はラベル数最大化の動的な地図への拡張である. 彼らは平面上の点に対してこの問題が NP 困難であることを示しており, また, 1 次元や 2 次元の点に対して, extrusion の形状に応じて, 厳密アルゴリズムや近似アルゴリズムを与えている. 前章では, extrusion の例として, 1 次元地図の場合には三角形, 平面地図の場合には四角錐を挙げたが, 彼らはその他, 1 次元の場合の正方形や, 平面地図の場合の四角錐体なども扱っ

ている。Liao ら [43] は、拡大縮小する地図の ARO に対し、Been ら [8] が扱っていない extrusion の形状に対する近似アルゴリズムを与えている。また、Gemsa ら [35] は回転する地図に対する ARO を扱っている。彼らはこの問題が NP 困難であることを示し、また、近似アルゴリズムを与えている。この問題に対して、Gemsa ら [36] はヒューリスティクス、近似アルゴリズム、厳密アルゴリズムの実験的な評価を実施している。さらに、Gemsa ら [32] は地図上の軌跡に応じて表示が変化する地図に対する ARO を扱っている。彼らは近似アルゴリズムおよび固定パラメータ容易性について議論している。また、これらは ARO の可視区間の和を最大にしているが、Zhang ら [63] は最小可視区間を最大化する問題を扱っている。

上述の研究では、extrusion は事前に与えられているため、点に対してラベルをどのように配置するのかあらかじめ決まっている、言わば 1-ポジションモデルを扱っていた。これに対し、Gemsa ら [34] は拡大縮小する地図に対する ARO をスライダーモデルに拡張している。この問題では、ラベルの可視区間の和を最大化するラベル配置位置を決定している。また、一度ラベルを配置する位置が決まると、地図の拡大縮小中に、その位置は変化しない。ただし、ここで扱っているのは 1 次元地図のみである。

Buchin と Gerrits [14] は、4-ポジション、2-スライダー、4-スライダーモデルにおける動的な地図に対するラベル配置問題を扱っている。ここでは、ラベルの重なりが起きそうになったときに、ラベルの配置位置を滑らかに変化させることを許容しているため、最も実用性の高い問題設定である。しかし、その場合には、強 PSPACE 完全であることが示されている。

与えられた点集合が動く場合も、Buchin と Gerrits [24] によって扱われている。この問題は、航空機を示す情報が画面上を動的に移動する航空管制システムへの応用を考慮しており、4-スライダーモデルのフリーラベル最大化 (4 章にて詳細を定義) の動的な点集合への拡張である。この問題に対し、Buchin と Gerrits はヒューリスティクスを与えている。



## 第 3 章

# 回転する地図に対するラベルサイズ最大化

前章までで述べたように、動的な環境に対してはラベル数最大化 (ARO) が考えられてきた。また、理論的な保証を持つアルゴリズムは、1-ポジションモデルに対してのみ与えられていた。

そのため本章では、ラベルサイズ最大化の動的な環境への対応の 1 つとして、回転する地図に対するラベルサイズ最大化を考える。ナビゲーションなどの多くの商用 GIS アプリケーションではユーザの向きに応じて動的に地図を回転するが、ラベルは常に水平に配置されるとする。この条件の下、すべての角度  $\theta \in [0, 2\pi)$  ですべてのラベルを交わりなく配置し、かつラベルサイズを最大化する (図 3.1)。以下ではまず、問題設定を説明する。

ラベルの集合  $L = \{\ell_1, \dots, \ell_n\}$  を持つ平面上の点集合  $P = \{p_1, \dots, p_n\}$  を含む地図を

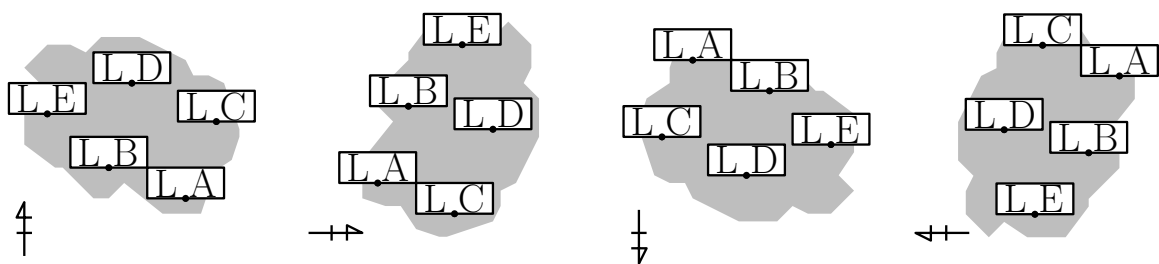


図 3.1. 回転する地図に対するラベルサイズ最大化の例。ラベルはすべて同じ拡大率  $\sigma$  で拡大され、また、回転中拡大率は常に同じであるため、この例では“L A”、“L B”および“L C”によって最大拡大率が決定される。

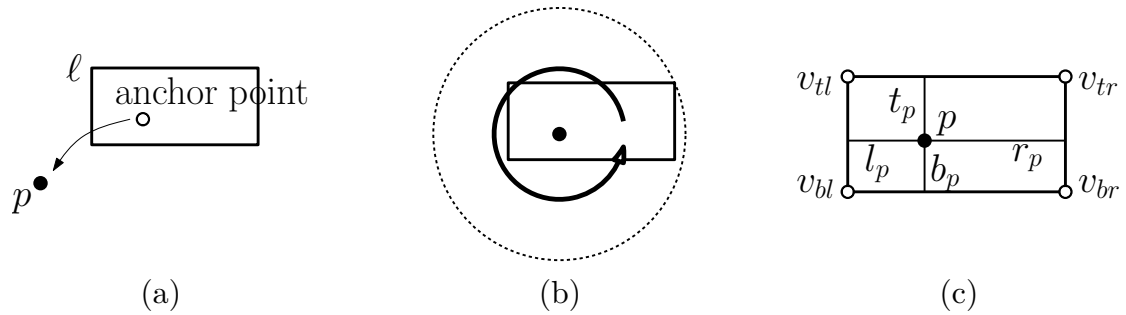


図 3.2. 本章で利用する定義.

$M$  とする. また, ラベルは様々なサイズを持つ軸に平行な長方形とし, 開集合であるとする. 各ラベル  $l_i \in L$  の幅は  $w_i > 0$ , 高さは  $h_i > 0$  で表現され, ラベルの拡大率を  $\sigma$  としたとき,  $l_i$  のサイズは  $w_i\sigma \times h_i\sigma$  となる. すべてのラベルで共通の拡大率  $\sigma$  が利用される.

各ラベル  $l_i$  は, アンカー点と呼ばれる点が  $p_i$  と一致するように配置される (図 3.2(a)). アンカー点は  $l_i$  の内部, または境界上に配置される. また,  $l_i$  が配置されたとき,  $l_i$  は  $p_i$  にアンカーされたと呼ぶ. 地図  $M$  が  $0$  から  $2\pi$  の角度の間で回転するとき, ラベルは地図の角度に対して水平であり, また互いに交わらない. さらに, 拡大率および各ラベルのアンカー点は, 回転中に変わらない. 本章で扱う問題は, 上記を満たす中の最大拡大率  $\sigma^*$ , およびアンカー点の位置を決定する. 通常のラベル配置問題では, 各ラベルは対象の点を境界に含むように配置されるが, 本問題ではラベルが対象の点を内部に含む場合も考える. 前者の問題を MSBR (Maximization problem of the Size of labels with Boundary anchor points on Rotating maps) と呼び, 後者の問題を MSR (Maximization problem of the Size of labels on Rotating maps) と呼び. MSR の場合アンカー点の位置は, 境界を含むラベルの内部であればどこでもよく, MSBR の場合, ラベルの境界であればどこでもよい. つまり, MSBR は 4-スライダーモデルである. この問題設定は静的な地図に対するラベルサイズ最大化の回転する地図への自然な拡張である.

表 3.1 に, MSR および MSBR に対する本章で得られた結果をまとめる. ここでは, いくつかのラベルの形状を扱う (例えば, 単位正方形や単位高さ長方形). 静的な地図に対するラベルサイズ最大化は, 単位正方形に対してできさえ, NP 困難 [31] であることが知られているが, いくつかのラベルの形状に対する MSR と MSBR は, 驚くべきことに多項式時間で解ける. また, 上記で利用されているアルゴリズムを修正し, 特殊な長方形ラベルに対する  $O(n \log n)$  時間アルゴリズム, 1-ポジション, 1-スライダーモデルそれぞれに対する多項式時間アルゴリズムも併せて与える.

以下では, 地図  $M$  の時計回りの回転を, アンカー点の周りでラベルが反時計回りに回転



表 3.1. MSR と MSBR に対する本章で得られた結果. 各値は計算時間を示す.

ラベルの形	MSR	MSBR
単位正方形	$O(n \log n)$ (定理 3.4)	$O(n \log n)$ (系 3.5)
正方形		$O(n \log n)$ (定理 3.11)
単位高さ (幅) 長方形	$O(n \log n)$ (定理 3.6)	$O(n \log n)$ (系 3.9)
長方形		$O(n \log n)$ (1/2-近似, 定理 3.13)

すると考える (図 3.2(b)). この置き換えは [35] と同じであり, 上記 2 つの回転は等価であるため, 同じ結果を得ることができる.

### 3.1 関連研究

前章までで述べたラベル配置問題の他に, 円ラベル配置問題 [54] がある. この問題は, 対応する地図上の点に対して, 円のラベルを配置する. ラベルを回転させた結果は円になるので, 本章で扱う MSBR および MSR と問題が似ているが, 本章で扱う問題は, ラベルを回転して得られた円同士が交差する場合を含むため, 円ラベルに対するアルゴリズムを単純には適用できない.

### 3.2 性質

本節ではまず, MSR にて拡大率が最大化されるときのアンカー点の位置について考える. 次に, その位置を利用して, MSR および単位高さ長方形ラベルに対する MSBR の最大拡大率を計算する.

$l_p$  を点  $p$  にアンカーされたラベルとする. また, 角度 0 で配置されたラベルの左上点, 右上点, 左下点, 右下点をそれぞれ  $v_{tl}, v_{tr}, v_{bl}, v_{br}$  とする.  $p$  を通り  $l_p$  の各辺と平行な線分を  $l_p$  の内部に描画したとき,  $p$  は  $l_p$  内部の水平線と垂直線をそれぞれ  $l_p : r_p$  (ここで,  $r_p = 1 - l_p$ ),  $t_p : b_p$  (ここで,  $b_p = 1 - t_p$ ) の比率に分ける (図 3.2(c)).  $p'$  に対するパラメータも同様に定義する. そのため,  $l_{p'}$  は  $p'$  のラベルであり,  $w_{p'}$  と  $h_{p'}$  は  $l_{p'}$  の初期幅, 高さである. さらに,  $l_{p'}$  に対する上記パラメータを  $v'_{tl}, v'_{tr}, v'_{bl}, v'_{br}, l_{p'}, r_{p'}, t_{p'}, b_{p'}$  とする. 最後に,  $p$  と  $p'$  との間の距離を  $d_{pp'}$  とする.

**補題 3.1.**  $l_p, l_{p'}$  を点  $p, p'$  それぞれにアンカーされたラベルとする.  $l_p$  と  $l_{p'}$  のアンカー点の位置が  $(1 - 2l_p)w_p = (1 - 2l_{p'})w_{p'}$  および  $(1 - 2t_p)h_p = (1 - 2t_{p'})h_{p'}$  を満たす場合

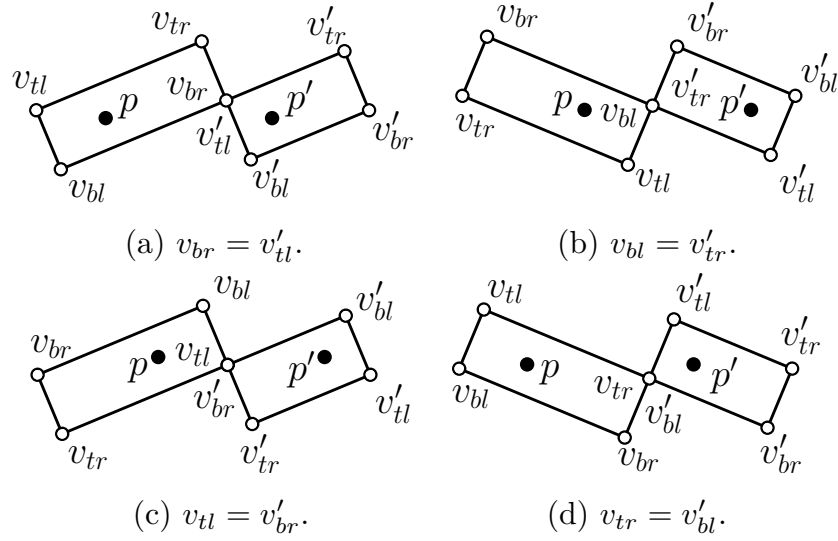


図 3.3. 2 つのラベル  $l_p, l_{p'}$  が頂点で交差する 4 つの場合.

にのみ, 最大拡大率で  $l_p$  と  $l_{p'}$  を配置できる.

証明. 一般性を失うことなく,  $p, p'$  は同じ  $y$  座標を持つと仮定する. また,  $\sigma$  を  $p$  と  $p'$  に対する拡大率とする. ラベルを回転したとき,  $l_p$  と  $l_{p'}$  はラベルの長方形の頂点で接する. なぜなら, もし  $l_p$  と  $l_{p'}$  がラベルの境界辺で接している場合, わずかな回転によって  $l_p$  と  $l_{p'}$  は交わるためである. さらに,  $l$  と  $l'$  は水平であるため, 最大ラベルサイズを決定するのは,  $v_{br} = v'_{tl}$ ,  $v_{bl} = v'_{tr}$ ,  $v_{tl} = v'_{br}$ , および  $v_{tr} = v'_{bl}$  の 4 つの場合のみである (図 3.3).

まず,  $v_{tl} = v'_{br}$  の場合を考える (図 3.4).  $l_p$  と  $l_{p'}$  は水平なため,  $(l_p w_p \sigma + (1 - l_{p'}) w_{p'} \sigma)^2 + (t_p h_p \sigma + (1 - t_{p'}) h_{p'} \sigma)^2 \leq d_{pp'}^2$  を満たす. よって, 以下が得られる.

$$\sigma \leq d_{pp'} / \sqrt{(l_p w_p + (1 - l_{p'}) w_{p'})^2 + (t_p h_p + (1 - t_{p'}) h_{p'})^2}. \quad (3.1)$$

同様に,  $v_{tr} = v'_{bl}$  の場合,

$$\sigma \leq d_{pp'} / \sqrt{((1 - l_p) w_p + l_{p'} w_{p'})^2 + (t_p h_p + (1 - t_{p'}) h_{p'})^2}, \quad (3.2)$$

$v_{br} = v'_{tl}$  の場合,

$$\sigma \leq d_{pp'} / \sqrt{((1 - l_p) w_p + l_{p'} w_{p'})^2 + ((1 - t_p) h_p + t_{p'} h_{p'})^2}, \quad (3.3)$$

$v_{bl} = v'_{tr}$  の場合,

$$\sigma \leq d_{pp'} / \sqrt{(l_p w_p + (1 - l_{p'}) w_{p'})^2 + ((1 - t_p) h_p + t_{p'} h_{p'})^2} \quad (3.4)$$

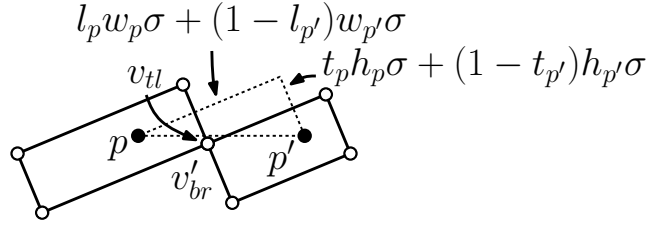


図 3.4.  $v_{tl} = v'_{br}$  の場合.

が得られる.

まず, 不等式 (3.1) と (3.2) に着目する. (3.1) と (3.2) の分母が小さくなるにつれて,  $\sigma$  は大きくなる. (3.1) と (3.2) の双方に  $(t_p h_p + (1 - t_{p'}) h_{p'})^2$  は現れる. また,  $(l_p w_p + (1 - l_{p'}) w_{p'})^2$  が小さくなるにつれて,  $((1 - l_p) w_p + l_{p'} w_{p'})^2$  は大きくなる. よって  $(l_p w_p + (1 - l_{p'}) w_{p'})^2 = ((1 - l_p) w_p + l_{p'} w_{p'})^2$  のとき,  $\sigma$  は (3.1) と (3.2) を満たす中で最大の値となる. この条件は,  $(1 - 2l_p) w_p = (1 - 2l_{p'}) w_{p'}$  とも書ける. 不等式 (3.3), (3.4) に対しても, 同様の結果が得られる.

同様に, 不等式 (3.1), (3.4) に着目する.  $(1 - 2t_p) h_p = (1 - 2t_{p'}) h_{p'}$  のとき, (3.1) と (3.4) を満たす中で  $\sigma$  が最大化される. この議論は 不等式 (3.2), (3.3) から得られる. 上記 2 つの等式は同時に満たされる. したがって,  $(1 - 2l_p) w_p = (1 - 2l_{p'}) w_{p'}$  および  $(1 - 2t_p) h_p = (1 - 2t_{p'}) h_{p'}$  のとき,  $\sigma$  は最大拡大率  $\sigma_{pp'}$  となる.

逆もまた成り立つ. □

補題 3.1 より, 以下が得られる.

**系 3.2.** ラベル  $l_p, l_{p'}$  を持つ点  $p, p'$  に対して, 各ラベルのアンカー点はそのラベルの対角線の交点にある場合に,  $l_p$  と  $l_{p'}$  は最大拡大率  $\sigma_{pp'}$  で配置できる.

**証明.** アンカー点をラベルの中心に配置したとき,  $l_p = t_p = l_{p'} = t_{p'} = 1/2$  である. したがって,  $(1 - 2 \times 1/2) w_p = (1 - 2 \times 1/2) w_{p'} = 0$ , かつ  $(1 - 2 \times 1/2) h_p = (1 - 2 \times 1/2) h_{p'} = 0$  となる. よって, 補題 3.1 は満たされるので, 拡大率  $\sigma_{pp'}$  は最大化される. □

系 3.2 より, 2 点間  $p, p'$  に対する MSR の最大拡大率  $\sigma_{pp'}$  は

$$2d_{pp'} / \sqrt{(w_p + w_{p'})^2 + (h_p + h_{p'})^2}$$

となる. したがって, 2 点以上の MSR は, すべての 2 点  $p_i, p_j$  の組に対して, 最大ラベルサイズ  $\sigma_{ij}$  を求め, その最小値  $\min\{\sigma_{ij}\}$  がとることで解くことができる. この素朴なアルゴリズムは,  $O(n^2)$  時間で動作する. なお, 系 3.2 ではラベルの中心にアンカー点を配置し

ているが、最適解を得るためのアンカー点の位置は補題 3.1 で得られた式を満たす位置であればどこでもよいことに注意すること。

また、すべてのラベルの高さ (または幅) が一致する場合、以下の命題が得られる。

**命題 3.3.** 単位高さ (または単位幅) 長方形ラベルに対する MSBR は  $\Theta(n^2)$  時間で解ける。

**証明.** MSR に対する素朴なアルゴリズムは単位高さ長方形ラベルに対する最大拡大率  $\sigma^*$  を与える。ここで、MSR で得られた長方形の中心に配置されたアンカー点をラベルの上辺 (単位幅ラベルの場合、左辺) の境界まで移動させることによって得られた点を考える。これらの点は補題 3.1 の不等式 (3.1)–(3.4) を満たす。したがって、これらの点は MSBR に対するアンカー点であり、また  $\sigma^*$  は最大拡大率である。□

次の節からは、ここで得られたアンカー点の位置を利用して、MSR および MSBR に対するアルゴリズムの時間複雑性を  $O(n \log n)$  に改善する。

### 3.3 正方形ラベルに対する MSR

すべてのラベルが正方形の場合、この問題は重み付き最近点对 (**Weighted Closest Pair**) [30] 問題と強く関連する。重み付き最近点对問題の入力は円盤の集合である。各円盤は  $P$  内の点を中心にもち、重み  $W$  を持つ。さらに、その半径は  $W\sigma$  である、ここで  $\sigma$  は拡大率である。この問題の目的は、円盤が互いに交わらない、最大拡大率  $\sigma^*$  を求めることである。

**定理 3.4.** すべての点のラベルが任意の正方形である MSR は、 $O(n \log n)$  時間、 $O(n)$  領域で解ける。

**証明.**  $p$  と  $p'$  を正方形ラベルをもつ 2 つの点とし、これらは同じ  $y$  座標を持つと仮定する。また、 $\sigma_{pp'}$  を  $p$  と  $p'$  の最大拡大率とする。正方形ラベルなので、 $w_p = h_p$  および  $w_{p'} = h_{p'}$  である。補題 3.2 より、アンカー点がラベルの中心となるように、 $p$  および  $p'$  にラベルがアンカーされたとき、 $p$  と  $p'$  の間の距離は  $\frac{\sqrt{2}}{2}(w + w')\sigma_{pp'}$  である。そのとき、 $\sigma_{pp'}$  は角度  $\pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4$ , および  $7\pi/4$  によって決定される。 $p$  および  $p'$  を中心としてラベルを  $360^\circ$  回転させて描いた円盤を考える。このとき、最大拡大率  $\sigma_{pp'}$  はお互いに円盤が交差しない状態で円盤のサイズを最大化することによって得られる。

したがって、正方形ラベルに対する MSR は各点  $p$  にして重み  $W = \frac{\sqrt{2}}{2}w_p$  が割り当てられた重み付き最近点对問題とみなすことができる。重み付きの最近点对問題に対しては、平面走査法による  $O(n \log n)$  時間、 $O(n)$  領域アルゴリズム [30] が提案されている。したがっ

---

**アルゴリズム 1** MSR に対するアルゴリズム
 

---

- 1:  $P$  に対する Delaunay 三角形分割  $DT(P)$  を求める.
  - 2: 各点  $p \in P$  に対して,  $DT(P)$  にて隣接する点との間での最大拡大率  $\sigma_p$  を求め, その中で最小のものを  $\sigma_{\text{pre}} = \min_{p \in P} \sigma_p$  とする.
  - 3: 各点  $p$  に対し,  $p$  を中心とした半径  $\frac{\sigma_{\text{pre}}}{2} \sqrt{w_p^2 + h_p^2}$  の閉円盤を描き, 円盤同士のすべての交差を Bentley-Ottman の交差列挙アルゴリズム [11] で列挙する.
  - 4: 円盤同士のすべての交差で最大拡大率を求め, その中で最小のものを  $\sigma^*$  として出力する.
- 

て, 証明が完了する. □

命題 3.3 と同様の議論にて, 以下が得られる.

**系 3.5.** すべての点のラベルが合同な正方形の場合, MSBR は  $O(n \log n)$  時間,  $O(n)$  領域で解ける.

### 3.4 長方形ラベルに対する MSR

本節では, 任意の長方形ラベルの場合の MSR および高さ (または幅) が一定の長方形 (単位高さラベル) の場合の MSBR に対する  $O(n \log n)$  時間,  $O(n)$  領域アルゴリズムを与える. 長方形に対しては, 重み付き最近点対問題に基づく 3.3 節のアルゴリズムは利用できない. なぜなら, 長方形ラベルの場合には, ラベルを回転させた際にラベルは交差しなくとも, 回転した際に描かれる円が交差することはあるからである. しかし, 重み付き最近点対問題に対する Formann のアルゴリズム [30] で利用されているアイデアは, MSR および単位高さ長方形ラベルに対する MSBR に対して適用できる. 本節で示すアルゴリズムは, まず最大拡大率を粗く見積もる. 次に, 得られた粗い最大拡大率で配置したラベルを  $360^\circ$  回転させて得られた円盤同士の交グラフを利用して正確な最大拡大率を求める. アルゴリズムでは,  $P$  に対する **Delaunay 三角形分割** [22, 49]  $DT(P)$  を利用する. Delaunay 三角形分割は **empty circle property** と呼ばれる,  $DT(P)$  内の三角形  $T$  に対して,  $T$  の外接円は内部に  $P$  の点を含まないという性質を満たす. 以下では  $DT(P)$  内の三角形を **Delaunay 三角形** と呼ぶ. また, 点  $p$  と  $q$  が  $DT(P)$  内の Delaunay 三角形の頂点である場合,  $q$  は  $p$  に隣接している, と呼ぶ.

アルゴリズム 1 にアルゴリズムを示す.

以下の定理ではアルゴリズム 1 の正当性と計算量を示す. なお,  $D_p$  をアルゴリズム 1 の

ステップ 3 で描いた  $p$  を中心とした円盤とする. また,  $R_p$  をその半径  $\frac{\sigma_{\text{pre}}}{2} \sqrt{w_p^2 + h_p^2}$  とする.

**定理 3.6.** 任意の長方形に対する MSR は,  $O(n \log n)$  時間,  $O(n)$  領域で解ける.

定理 3.6 を証明するために, 以下の補題を示す.

**補題 3.7.** アルゴリズム 1 のステップ 3 の後に得られた各円盤は, その中心の点を除き  $P$  の点を含まない.

**証明.** 点  $p \in P$  に対して,  $D_p$  を  $p$  を中心に持ち, 半径が  $R_p = \frac{\sigma_{\text{pre}}}{2} \sqrt{w_p^2 + h_p^2}$  である円盤とする.  $\sigma_{\text{pre}}$  の定義より,  $p$  のラベルと, その隣接する点  $q$  のラベルは地図の回転の間に交差しない. したがって,  $D_p$  は  $p$  の隣接点を含むことはできない. Delaunay 三角形分割において,  $p$  の最近点  $q$  は  $\text{DT}(P)$  における  $p$  の隣接点に含まれる. したがって,  $D_p$  の半径は  $|pq|$  以下である. したがって,  $D_p$  は  $\text{DT}(P)$  にて  $p$  に隣接しない点を含むこともない.  $\square$

**補題 3.8.** アルゴリズム 1 のステップ 3 の後に得られた交差する円盤の組の数は高々  $3n - 6$  である.

**証明.** まず, アルゴリズム 1 のステップ 2 にて交差する閉円盤の組の中心を直線分で結ぶ. 以下では, この直線分を辺として持つ直線グラフ  $G$  が平面グラフであることを示す. 2 つの閉円盤  $D_p$  と  $D_{p'}$  が交差する場合を考える.  $G$  において,  $p$  と  $p'$  は直線辺で結ばれる. そのため, 点  $q \neq p, p'$  を中心とした他の円盤  $D_q$  が線分  $\overline{pp'}$  と交差しない場合には, 端点を除いて  $\overline{pp'}$  と交わる辺は  $G$  に存在しない. すべての辺に対してこれが満たせた場合に, グラフ  $G$  は平面グラフであることが示せる. よって, 以下では上記のような円盤  $D_q$  が存在しないことを示す.

一般性を失うことなく,  $p, p'$  は水平に配置されており,  $p$  は原点,  $p'$  は  $p$  よりも大きな  $x$  座標を持つと仮定する (図 3.5). ここで,  $p, p'$  の  $x$  座標を  $x_p, x_{p'}$ ,  $y$  座標を  $y_p, y_{p'}$  とし, その他の点についても同様に記述する. さらに,  $D_p$  の境界と  $\overline{pp'}$  との交点を  $s$  とする. 以下では,  $0 = x_p \leq x_q \leq x_s, 0 = y_p = y_{p'} \leq y_q$  と仮定する. そのため,  $q$  は図 3.5 の斜線部分に存在する.  $x_q < 0$  および  $x_{p'} < x_q$  の場合, 補題 3.7 より  $D_q$  は  $\overline{pp'}$  と交差しない. また,  $y_q < 0 = y_p = y_{p'}$  の場合, および  $x_s < x_q \leq x_{p'}$  の場合は, 同様に解ける.

以下では  $p$  と  $q$  が  $\text{DT}(P)$  で隣接している場合と, そうでない場合に分けて考える.

**Case 1:**  $q$  が  $\text{DT}(P)$  にて  $p$  と隣接している場合.

以下では,  $\tilde{R}_{pq} = \frac{\sigma_{\text{pre}}}{2} \sqrt{(w_p + w_q)^2 + (h_p + h_q)^2}$  とする.  $\sigma_{\text{pre}}$  の定義より,  $|pq| \geq \tilde{R}_{pq}$  である. また,  $w_q, h_q > 0$  なので  $\tilde{R}_{pq} > R_p$  である.  $\tilde{C}_{pq}$  を  $p$  を中心とし, 半径  $\tilde{R}_{pq}$  を持

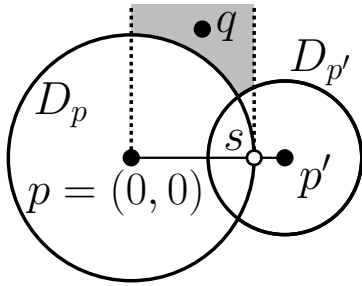


図 3.5. 補題 3.8 の仮定.

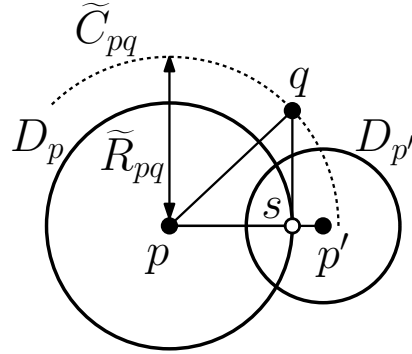


図 3.6. 補題 3.8 の Case 1.

つ円とする.  $\tilde{C}_{pq}$  は図 3.6 の点線の円である. このとき,  $q$  と  $\overline{pp'}$  の間の垂直距離は  $s$  から  $\tilde{C}_{pq}$  までの垂直線分の長さ以上である. よって,  $x_q = x_s$  の場合を考える.  $|pq| \geq \tilde{R}_{pq}$  かつ  $|\overline{ps}| = R_p = \frac{\sigma_{\text{pre}}}{2} \sqrt{w_p^2 + h_p^2}$  なので, 以下が得られる.

$$\begin{aligned} |\overline{sq}|^2 &= |\overline{pq}|^2 - |\overline{ps}|^2 \\ &\geq \left(\frac{\sigma_{\text{pre}}}{2}\right)^2 ((w_p + w_q)^2 + (h_p + h_q)^2) - \left(\frac{\sigma_{\text{pre}}}{2}\right)^2 (w_p^2 + h_p^2) \\ &= \left(\frac{\sigma_{\text{pre}}}{2}\right)^2 (w_q^2 + h_q^2 + 2w_p w_q + 2h_p h_q). \end{aligned}$$

さらに,  $R_q = \frac{\sigma_{\text{pre}}}{2} \sqrt{w_q^2 + h_q^2}$  および  $w_p, h_p, w_q, h_q > 0$  なので, 以下が得られる.

$$|\overline{sq}|^2 - R_q^2 \geq \left(\frac{\sigma_{\text{pre}}}{2}\right)^2 (2w_p w_q + 2h_p h_q) > 0.$$

したがって,  $D_q$  が  $\overline{pp'}$  と交差することはない.

**Case 2:**  $q$  が  $\text{DT}(P)$  にて  $p$  と隣接していない場合.

まず  $\overline{pp'} \cap D_p$  を外接円として含む  $p$  を頂点として持つ Delaunay 三角形が存在することを示す.  $p$  と  $p'$  が  $\text{DT}(P)$  にて隣接している場合,  $\overline{pp'}$  を 1 辺として持つ Delaunay 三角形の外接円は  $\overline{pp'} \cap D_p$  をすべて含む.  $p$  と  $p'$  が  $\text{DT}(P)$  にて隣接していない場合,  $\overline{pp'}$  の内部と交差する辺を持つ Delaunay 三角形  $\Delta pvv'$  が存在する. 補題 3.7 より  $v, v' \notin D_p$  なので,  $\Delta pvv'$  の外接円は  $\overline{pp'} \cap D_p$  をすべて含む. したがって, そのような Delaunay 三角形  $\Delta pvv'$  を考える. ここで,  $v'$  が  $p'$  の場合もある. 一般性を失うことなく,  $v$  と  $v'$  をそれぞれ  $y_v > 0, y_{v'} \leq 0$  となる点とする. また,  $t$  を  $\Delta pvv'$  の外接円と  $\overline{pp'}$  との交点とする.  $p$  と  $p'$  が隣接しているかどうかにかかわらず,  $\Delta pvv'$  の外接円は  $\overline{pp'} \cap D_p$  を完全に含むので,  $x_q \leq x_s < x_t$  である.  $x_v = x_q$  のとき,  $y_v < y_q$  および補題 3.7 より,  $D_q$  は  $\overline{pp'}$  を含むことはない. したがって, 以下では  $x_v < x_q \leq x_s$  と  $x_q < x_v < x_s$  の 2 つの場合を考える. 以下では,  $\Delta pvv'$  の外接円を境界として持つ円盤を  $D_\Delta$  とする.

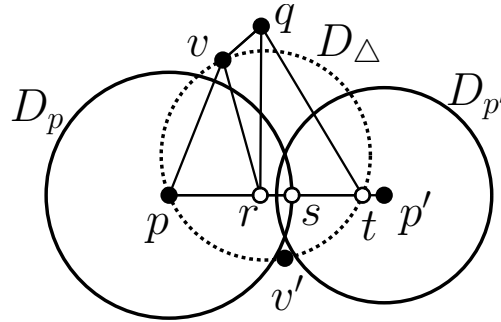


図 3.7. 補題 3.8 の Case 2-1.

**Case 2-1:**  $x_v < x_q \leq x_s$  の場合.

$r$  を  $\overline{pp'}$  と  $q$  から  $\overline{pp'}$  への垂直線との交点とする (図 3.7).  $D_\Delta$  は  $\overline{pp'} \cap D_p$  を完全に含むので,  $x_r \leq x_s < x_t$  である.  $\angle prq = \pi/2$  および  $x_t - x_s > 0$  より,  $\angle ptq < \pi/2$  である. さらに, empty circle property より  $q \notin D_\Delta$  なので,  $\angle pvq + \angle ptq \geq \pi$  が得られる. よって,  $\angle pvq \geq \pi - \angle ptq > \pi/2$  となる.  $r \in D_p$  および  $v \notin D_p$  より,  $|\overline{pr}| < |\overline{pv}|$  であり,  $\angle pvr \leq \angle prv$  となる. これより,  $\angle qvr = \angle pvq - \angle pvr > \pi/2 - \angle prv = \angle qrv$  であり, したがって  $|\overline{qv}| < |\overline{qr}|$  が得られる. 補題 3.7 より  $R_q < |\overline{qv}|$  なので,  $D_q$  は  $r$  を含むことはない. つまり,  $D_q$  が  $\overline{pp'}$  と交差することはない.

**Case 2-2:**  $x_q < x_v < x_s$  の場合.

まず,  $x_u \leq x_q \leq x_{u'}$  となるような Delaunay 三角形  $\Delta puu'$  が存在することを示す.  $p$  と  $q$  は  $DT(P)$  で隣接しないので,  $\overline{pq}$  と内部で交差する辺  $\overline{zz'}$  を持つ Delaunay 三角形  $\Delta pzz'$  が存在する. さらに,  $v$  は  $p$  を頂点として持つ Delaunay 三角形の頂点である.  $p$  は  $p$  を頂点として持つ Delaunay 三角形によって構成される多角形内部に含まれるので,  $\Delta pzz'$  から  $\Delta pvv'$  へ時計回りに Delaunay 三角形を訪れると, その中には条件を満たす Delaunay 三角形  $\Delta puu'$  が存在する. ここで,  $\Delta puu'$  の外接円を境界として持つ閉円盤を  $D_{\Delta'}$  とし,  $D_{\Delta'}$  の境界を  $C_{\Delta'}$  と記す. 以下では,  $r \in D_{\Delta'} \setminus C_{\Delta'}$  と  $r \notin D_{\Delta'} \setminus C_{\Delta'}$  の 2 つの場合に分けて考える.

**Case 2-2a:**  $r \in D_{\Delta'} \setminus C_{\Delta'}$  の場合.

$t'$  を  $C_{\Delta'}$  と  $\overline{pp'}$  の内部との交点とする (図 3.8).  $r \in D_{\Delta'} \setminus C_{\Delta'}$  なので,  $x_r < x_{t'}$  である. したがって,  $u$  と  $t$  をそれぞれ  $v$  と  $t'$  と読み替えることで, Case 2-1 と同様の議論により,  $D_q$  が  $\overline{pp'}$  と交差することがないことが示せる.

**Case 2-2b:**  $r \notin D_{\Delta'} \setminus C_{\Delta'}$  の場合.

四角形  $uqu'r$  を考える (図 3.9). 補題 3.7 より,  $u$  は  $D_q$  内には含まれない. したがって,  $D_q$  が  $\overline{pp'}$  と交差する場合,  $|\overline{qr}| \leq R_q < |\overline{qu}|$  または  $|\overline{qr}| \leq R_q < |\overline{qu'}|$  が満たされる. まず,



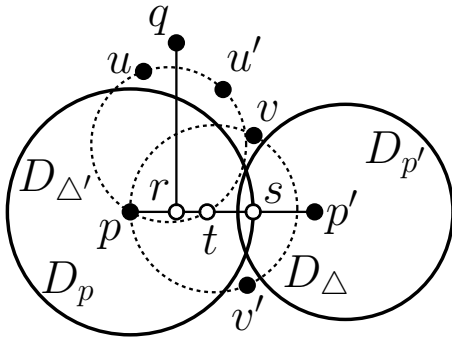


図 3.8. 補題 3.8 の Case 2-2a.

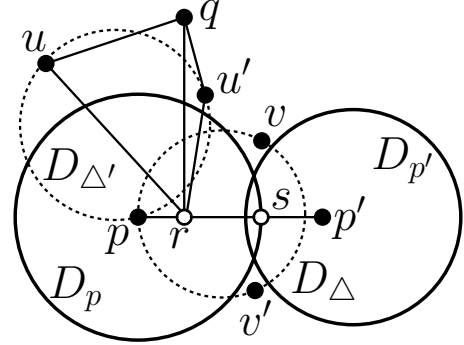


図 3.9. 補題 3.8 の Case 2-2b.

$|\overline{qr}| \leq R_q < |\overline{qu}|$  の場合を考える.  $\triangle qur$  において  $\angle qur < \angle qru$  なので,  $\angle qur < \pi/2$  となる.  $q$  と  $r$  は  $D_{\Delta'}$  の外側にあるので,  $\angle qu'r + \angle qur \geq \pi$  となる. したがって,  $\angle qu'r > \pi/2$  となり  $\angle qru < \pi/2$  が得られる. これより  $|\overline{qu'}| < |\overline{qr}| \leq R_q$  となるので,  $u'$  は  $D_q$  の内部に存在する. これは補題 3.7 に反する.  $|\overline{qr}| \leq R_q < |\overline{qu'}|$  の場合も同様に証明できるので,  $D_q$  が  $\overline{pp'}$  と交差することはない.  $\square$

**定理 3.6** の証明. まず, 正当性を証明する. アルゴリズム 1 のステップ 2 における  $\sigma_{\text{pre}}$  の定義より,  $\text{DT}(P)$  にて隣接する点同士のラベルは交差することはない. また, ステップ 4 にて考える円盤は 0 から  $2\pi$  の角度の間で回転したときに描かれるものである. 各ラベルはアンカー点を中心に持ち, また  $\sigma_{\text{pre}}$  によってサイズが決められている. さらに,  $\sigma_{\text{pre}} \geq \sigma^*$  なので, 交差する円盤同士での最大拡大率の最小をとることで  $\sigma^*$  が得られる.

次に, 計算量について示す. アルゴリズムのステップ 1 は  $O(n \log n)$  時間,  $O(n)$  領域で実施できる [22, 49]. また, ステップ 2 は各点に隣接する辺同士の最大拡大率を調べており, Delaunay 三角形分割の辺の数は  $O(n)$  なので,  $O(n)$  時間,  $O(1)$  領域で計算することができる. ステップ 3 にて, 交差数を  $K$  とすると, Bentley と Ottmann のアルゴリズム [11] は  $O((n+K) \log n)$  時間,  $O(n+k)$  領域ですべての交点を列挙することができる [11]. また, ステップ 4 は  $O(K)$  時間,  $O(1)$  領域で計算できる. 補題 3.8 より,  $K \leq 3n - 6$  なので, 定理が得られる.  $\square$

**系 3.9.** 単位高さ (または単位幅) 長方形に対する MSBR は  $O(n \log n)$  時間,  $O(n)$  領域で解ける.

補題 3.4 より, MSR および MSBR は最近点対問題の一般化である. 最近点対問題の計算時間の下限は  $\Omega(n \log n)$  であり, この結果は本章の問題にも適用できる.

### 3.5 任意の正方形ラベルに対する MSBR

本節では、与えられた点に対するラベルがすべて任意の正方形である MSBR (**Maximization problem of the Size of labels with Boundary anchor points on Rotating maps with Square labels**, 以下では MSBRwS と記載する) を扱う。まず、本問題に対して拡大率を最大化するアンカー点の位置を示し、これを利用して  $O(n \log n)$  時間アルゴリズムを与える。

**補題 3.10.** ラベル  $l_p, l_{p'}$  を持つ点  $p, p'$  が与えられ、各ラベルのアンカー点がラベルの左辺の中心に配置された場合、 $l_p$  と  $l_{p'}$  は MSBRwS に対する最大拡大率  $\sigma_{pp'}$  で配置できる。

**証明.** 本問題においてラベル  $l_p$  の幅  $w_p$  と高さ  $h_p$  は同じであるため、以下では高さも  $w_p$  と記載する。同様に、ラベル  $l_{p'}$  の高さも  $w_{p'}$  とする。一般性を失うことなく、 $p$  と  $p'$  は同じ  $y$  座標を持つと仮定し、 $p'$  の  $x$  座標は  $p$  の  $x$  座標よりも大きいと仮定する。さらに、 $w_p$  は  $w_{p'}$  以下であると仮定する。

MSBR ではアンカー点はラベルの境界上に配置されなければならないため、 $l_p = 0, l_p = 1, t_p = 0, t_p = 1$  の中の少なくとも 1 つは満たされる。また正方形ラベルに対しては、これら 4 つのケースは地図の回転によって、相互に変換可能であるため、これらのケースは等しい。そのため、ここでは  $l_p = 0$  のケースのみ考える。同様に  $l_{p'}$  についても  $l_{p'} = 0, l_{p'} = 1, t_{p'} = 0, t_{p'} = 1$  の中の少なくとも 1 つが満たされるため、以下の 4 つのケースを考える。

**Case 1:**  $l_p = 0$  かつ  $l_{p'} = 0$ .

本ケースにおける不等式 (3.1)–(3.4) は、

$$\sigma \leq d_{pp'} / \sqrt{w_{p'}^2 + (t_p w_p + (1 - t_{p'}) w_{p'})^2}, \quad (3.5)$$

$$\sigma \leq d_{pp'} / \sqrt{w_p^2 + (t_p w_p + (1 - t_{p'}) w_{p'})^2}, \quad (3.6)$$

$$\sigma \leq d_{pp'} / \sqrt{w_p^2 + ((1 - t_p) w_p + t_{p'} w_{p'})^2}, \quad (3.7)$$

$$\sigma \leq d_{pp'} / \sqrt{w_{p'}^2 + ((1 - t_p) w_p + t_{p'} w_{p'})^2} \quad (3.8)$$

となる。  $w_p < w_{p'}$  なので、不等式 (3.5), (3.8) のみ着目する。補題 3.1 と同様の議論により、 $(1 - 2t_p)w_p = (1 - 2t_{p'})w_{p'}$  のとき、(3.5)–(3.8) を満たしつつ  $\sigma$  は最大化される。したがって、このとき最大拡大率は  $d_{pp'} / \sqrt{w_{p'}^2 + (\frac{1}{2}(w_p + w_{p'}))^2}$  となる。

**Case 2:**  $l_p = 0$  かつ  $l_{p'} = 1$ .

本ケースにおける不等式 (3.1)–(3.4) は

$$\begin{aligned}\sigma &\leq d_{pp'}/\sqrt{(t_p w_p + (1 - t_{p'})w_{p'})^2}, \\ \sigma &\leq d_{pp'}/\sqrt{(w_p + w_{p'})^2 + (t_p w_p + (1 - t_{p'})w_{p'})^2}, \\ \sigma &\leq d_{pp'}/\sqrt{(w_p + w_{p'})^2 + ((1 - t_p)w_p + t_{p'}w_{p'})^2}, \\ \sigma &\leq d_{pp'}/\sqrt{((1 - t_p)w_p + t_{p'}w_{p'})^2}\end{aligned}$$

となる。Case 1 と同様に、 $(1 - 2t_p)w_p = (1 - 2t_{p'})w_{p'}$  のとき  $\sigma$  は最大化される。また、そのときの最大拡大率は  $d_{pp'}/\sqrt{(w_p + w_{p'})^2 + (\frac{1}{2}(w_p + w_{p'}))^2}$  である。

**Case 3:**  $l_p = 0$  かつ  $t_{p'} = 0$ .

本ケースにおける不等式 (3.1)–(3.4) は、

$$\sigma \leq d_{pp'}/\sqrt{((1 - l_{p'})w_{p'})^2 + (t_p w_p + w_{p'})^2}, \quad (3.9)$$

$$\sigma \leq d_{pp'}/\sqrt{(w_p + l_{p'}w_{p'})^2 + (t_p w_p + w_{p'})^2}, \quad (3.10)$$

$$\sigma \leq d_{pp'}/\sqrt{(w_p + l_{p'}w_{p'})^2 + ((1 - t_p)w_p)^2}, \quad (3.11)$$

$$\sigma \leq d_{pp'}/\sqrt{((1 - l_{p'})w_{p'})^2 + ((1 - t_p)w_p)^2} \quad (3.12)$$

となる。まず、不等式 (3.9) と (3.10) に着目する。 $((1 - l_{p'})w_{p'})^2 = (w_p + l_{p'}w_{p'})^2$  の場合、(3.9), (3.10) を満たしつつ、 $\sigma$  は最大化される。この条件は、 $l_{p'} = (1 - w_p/w_{p'})/2$  と書ける。同様に、不等式 (3.9) と (3.12) に着目した場合も、 $t_p = (1 - w_{p'}/w_p)/2$  のときに、 $\sigma$  は最大化される。仮定より  $w_p \leq w_{p'}$  なので、 $w_p = w_{p'}$  と  $w_p < w_{p'}$  の場合をわけて考える。 $w_p = w_{p'}$  のとき、 $t_p = 0$  である。そうでない場合、 $t_p$  は負の値となるため、不可能である。そのため、この場合も  $t_p = 0$  のとき  $\sigma$  は最大化される。上記 2 つの条件は同時に満たされるので、最大拡大率は  $d_{pp'}/\sqrt{(\frac{1}{2}(w_p + w_{p'}))^2 + w_{p'}^2}$  となる。

**Case 4:**  $l_p = 0$  かつ  $t_{p'} = 1$ .

Case 3 と同様の方法により、 $l_{p'} = (1 - w_p/w_{p'})/2$  および  $t_p = 1$  のとき  $\sigma$  は最大化され、最大拡大率は  $d_{pp'}/\sqrt{(\frac{1}{2}(w_p + w_{p'}))^2 + w_{p'}^2}$  となることが得られる。

上記より、Case 1, 3, 4 における最大拡大率は等しく、また、Case 2 の場合の最大拡大率より大きい。そのため、Case 1, 3, 4 にて、すべてのケースの中で最大拡大率  $\sigma^*$  を達成するアンカー点が存在する。さらに、Case 1 において  $\sigma$  を最大化するアンカー点の等式は、 $t_p = t_{p'} = 1/2$  を含む。よって証明は完了する。  $\square$

---

**アルゴリズム 2 MSBRwS に対するアルゴリズム**


---

- 1:  $P$  に対する Delaunay 三角形分割  $DT(P)$  を求める.
  - 2: 各点  $p \in P$  に対して,  $DT(P)$  にて隣接する点との間での最大拡大率  $\sigma_p$  を求め, その中で最小のものを  $\sigma_{pre} = \min_{p \in P} \sigma_p$  とする.
  - 3: 各点  $p$  に対し,  $p$  を中心とした半径  $\frac{\sqrt{5}}{2} w_p \sigma_{pre}$  の閉円盤を描き, 円盤同士のすべての交差を Bentley-Ottman の交差列挙アルゴリズム [11] で列挙する.
  - 4: 円盤同士のすべての交差で最大拡大率を求め, その中で最小のものを  $\sigma^*$  として出力する.
- 

補題 3.10 より, 2 点  $p, p'$  に対する MSBRwS の最大拡大率は  $d_{pp'} / \sqrt{w_{p'}^2 + (\frac{1}{2}(w_p + w_{p'}))^2}$  となる. さらに, 2 点より多い MSBRwS については, 3.2 節で説明した素朴な  $\Theta(n^2)$  時間アルゴリズムを利用することで解くことができる. よって, 以下では  $O(n \log n)$  時間アルゴリズムを与える.

MSBRwS に対する  $O(n \log n)$  時間アルゴリズムをアルゴリズム 2 に示す. このアルゴリズムは, アルゴリズム 1 とほぼ同じである. 違いは, ステップ 2, 4 にて補題 3.10 で得られたアンカー点を利用して 2 点間の最大拡大率を求めることである. さらに, ステップ 3 にて, 補題 3.10 にて得られた半径の閉円盤を利用する部分も異なる.

以下では, アルゴリズム 2 の正当性と計算量を示す.

**定理 3.11.** MSBRwS は  $O(n \log n)$  時間,  $O(n)$  領域で解ける.

**証明.** 本質的に, この定理の証明は定理 3.6 と同様である. しかし, アルゴリズム 2 にて, 補題 3.8 は満たされない. よって, 以下ではアルゴリズム 2 のステップ 3 の後で得られた閉円盤同士の交差の数が  $O(n)$  であることを示す.

これを示すために,  $P$  に対する **sphere-of-influence graph** (以下, **SIG** と記載) [56] を利用する (図 3.10). SIG とは,  $P$  を頂点とし, 2 つの点の最近傍円同士が交差する場合に辺を持つグラフのことである. ここで, 点  $p \in P$  の最近傍円とは,  $p$  を中心とし, その半径が  $p$  の最近点までの距離となる円のことである. SIG の辺の数は高々  $15n$  であることが知られている [53].

補題 3.8 と同様に, アルゴリズム 2 のステップ 3 にて, 円盤同士が交差する場合に, その 2 点を直線分をつないだグラフを考える. 補題 3.7 より, 各円盤は最近傍円よりも小さい. したがって, 直線分グラフの辺の数は高々  $15n$  であり, 証明は完了する.  $\square$

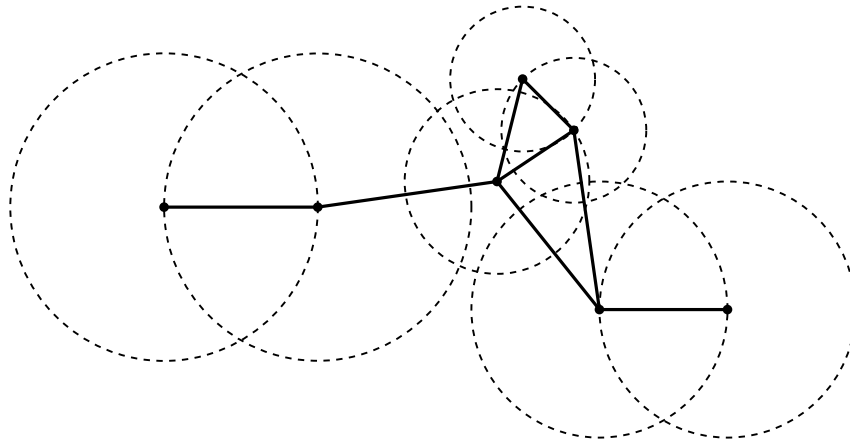


図 3.10. sphere-of-influence graph (SIG) の例. 太線が SIG であり, 点線円が最近傍円である.

上記の証明は, アルゴリズム 1 にも適用できるため, こちらの方が簡単である. しかし, 定理 3.6 の証明は, MSR と単位高さ長方形ラベルに対する MSBR が, MSBRwS よりも実際には高速に解けることを示唆している. さらに, MSBRwS を解くために, 次のような代替のアルゴリズムも考えることができる. まず,  $P$  に対する SIG を構築する. 次に, SIG の各辺の端点同士で最大拡大率を計算し, その最小のものを選ぶ. SIG の構築アルゴリズムは [55] にて正確に記載されていないが, おそらくアルゴリズム 2 と似たようなものになる. 定理 3.11 の証明にて構築された交グラフの辺の数も実際には SIG よりも少ないため, アルゴリズム 2 は代替アルゴリズムと比べ, 実際には MSBRwS を高速に解く.

### 3.6 任意の長方形ラベルに対する MSBR

本節では, 与えられた点に対するラベルが任意の長方形である MSBR に対して,  $O(n \log n)$  時間  $1/2$ -近似アルゴリズムを与える. まず, 最大拡大率の  $1/2$  以上の拡大率となるアンカー点の位置について示し, その後,  $O(n \log n)$  時間アルゴリズムを示す.  $O(n \log n)$  時間アルゴリズムは, アルゴリズム 1 とほぼ同様である. なお, 任意の長方形ラベルに対する MSBR が NP 困難かどうかはわかっていない.

**補題 3.12.** すべての点に対して, アンカー点の位置をそのラベルの左辺の中心とする. このとき得られる最大拡大率は, MSBR に対する最大拡大率の  $1/2$  以上である.

**証明.** まず, 2 点  $p, p'$  に対する MSBR を考える. ここで, 一般性を失うことなく,  $w_p < w_{p'}$

であると仮定する. ラベルの左辺の中心にアンカー点があるので, 不等式 (3.1)–(3.4) は,

$$\begin{aligned}\sigma &\leq d_{pp'} / \sqrt{w_{p'}^2 + \left(\frac{1}{2}(h_p + h_{p'})\right)^2}, \\ \sigma &\leq d_{pp'} / \sqrt{w_p^2 + \left(\frac{1}{2}(h_p + h_{p'})\right)^2}\end{aligned}$$

となる. ここで,  $w_p < w_{p'}$  と仮定しているため,  $d_{pp'} / \sqrt{w_{p'}^2 + \left(\frac{1}{2}(h_p + h_{p'})\right)^2}$  が 2 点  $p, p'$  に対する最大拡大率となる. また, 2 点より多い MSBR に対して, ラベルの左辺の中心にアンカー点がある場合の最大拡大率は  $\min \left\{ d_{pp'} / \sqrt{w_{p'}^2 + \left(\frac{1}{2}(h_p + h_{p'})\right)^2} \mid p, p' \in P \right\}$  となる. これを  $\sigma_{LC}$  とする.

また, 3.2 節より, 任意の長方形ラベルが与えられた MSR に対する最大拡大率  $\sigma_{MSR}$  は,

$$\min \left\{ 2d_{pp'} / \sqrt{(w_p + w_{p'})^2 + (h_p + h_{p'})^2} \mid p, p' \in P \right\}$$

となる. MSBR に対する最適値  $\sigma_{MSBR}$  が  $\sigma_{MSR}$  を超えることはないため,

$$\begin{aligned}\sigma_{LC} &= \min \left\{ d_{pp'} / \sqrt{w_{p'}^2 + \left(\frac{1}{2}(h_p + h_{p'})\right)^2} \mid p, p' \in P \right\} \\ &> \min \left\{ d_{pp'} / \sqrt{(w_p + w_{p'})^2 + (h_p + h_{p'})^2} \mid p, p' \in P \right\} \\ &= \frac{1}{2}\sigma_{MSR} \geq \frac{1}{2}\sigma_{MSBR}.\end{aligned}$$

となり, 証明は完了する. □

上記の補題とアルゴリズム 1 のわずかな修正により, 任意の長方形に対する MSBR の  $O(n \log n)$  時間,  $1/2$ -近似アルゴリズムが得られる. アルゴリズム 3 にアルゴリズムを示す. アルゴリズム 2 と同様に, アルゴリズム 1 との違いはステップ 2, 4 で利用するアンカー点の位置と, ステップ 3 の各円盤の半径である.

補題 3.12 および定理 3.11 と同様の議論により, 以下の定理が得られる.

**定理 3.13.** アルゴリズム 3 は MSBR に対する  $O(n \log n)$  時間,  $O(n)$  領域,  $1/2$ -近似アルゴリズムである.

---

**アルゴリズム 3** MSBR に対する 1/2-近似アルゴリズム
 

---

- 1:  $P$  に対する Delaunay 三角形分割  $DT(P)$  を求める.
  - 2: 各点  $p \in P$  に対して,  $DT(P)$  にて隣接する点との間での最大拡大率  $\sigma_p$  を求め, その中で最小のものを  $\sigma_{\text{pre}} = \min_{p \in P} \sigma_p$  とする.
  - 3: 各点  $p$  に対し,  $p$  を中心とした半径  $\sigma_{\text{pre}} \sqrt{w_p^2 + (\frac{1}{2}h_p)^2}$  の閉円盤を描き, 円盤同士のすべての交差を Bentley-Ottman の交差列挙アルゴリズム [11] で列挙する.
  - 4: 円盤同士のすべての交差で最大拡大率を求め, その中で最小のものを  $\sigma^*$  として出力する.
- 

### 3.7 特殊な長方形ラベルに対する MSBR

本節では, アンカー一点が配置される辺が決まっている場合の, アンカー一点の位置について考察し, その結果から特殊な条件を満たした長方形ラベルが与えられた MSBR が多項式時間で解けることを示す.

まず, 不等式 (3.1)–(3.4) を利用すると, MSR は図 3.11 に示す数理計画問題として定式化できる. また, 式 (3.23) を,

$$l_p, t_p \in \partial(l_p) \quad \forall p \in P \quad (3.13)$$

とすることで, MSBR の定式化となる. ここで,  $\partial(l_p)$  は,  $l_p$  の境界である.

$\zeta = 1/\sigma$  とすると, MSR の数理計画問題は, 図 3.12 のように書き直せる. 本式は 2 次錐計画であり, 多項式時間で解が求められる [45, 46]. 3.2 節では, MSR に対する  $O(n^2)$  時間アルゴリズムを与えたが, MSR に対する多項式時間アルゴリズムとしては, 2 次錐計画への帰着が利用できる. 一方で, MSBR の場合, つまり, 式 (3.33) を式 (3.13) に置き換えた場合, 2 次錐計画とはならない. しかし, 図 3.12 より, すべてのラベルに対してアンカー一点を配置する辺が決まっている場合には, MSBR であったとしても, 多項式時間で解が求められる.

次に, 上記定式化を利用して, 2 つの点に対する MSBR の解の性質を示す.

ラベル  $l_p, l_{p'}$  を持つ 2 つの点  $p, p'$  に対する MSBR を考える. MSBR では, アンカー一点はラベルの境界にのみ存在するので, アンカー一点が配置される候補の辺は, 左辺, 右辺, 上辺, 下辺の 4 つである. よって, 2 点  $p, p'$  に対する MSBR の解において, アンカー一点が配置される  $l_p$  および  $l_{p'}$  の辺の候補は 16 通りである (表 3.2). 以下ではまず, これらの候補のうちいくつかと同じ最適値を持つことを示す.

**補題 3.14.** ラベル  $l_p, l_{p'}$  を持つ 2 つの点  $p, p'$  に対する MSBR において, アンカー一点を配

$$\text{maximize } \sigma \quad (3.14)$$

$$\text{subject to } \sigma \leq d_{pp'} / \sqrt{\widehat{W}_{pp'}^2 + \widehat{H}_{pp'}^2} \quad \forall p, p' \in P \quad (3.15)$$

$$\sigma \leq d_{pp'} / \sqrt{\widetilde{W}_{pp'}^2 + \widetilde{H}_{pp'}^2} \quad \forall p, p' \in P \quad (3.16)$$

$$\sigma \leq d_{pp'} / \sqrt{\widehat{W}_{pp'}^2 + \widetilde{H}_{pp'}^2} \quad \forall p, p' \in P \quad (3.17)$$

$$\sigma \leq d_{pp'} / \sqrt{\widetilde{W}_{pp'}^2 + \widehat{H}_{pp'}^2} \quad \forall p, p' \in P \quad (3.18)$$

$$\widehat{W}_{pp'} = l_p w_p + (1 - l_{p'}) w_{p'} \quad \forall p, p' \in P \quad (3.19)$$

$$\widetilde{W}_{pp'} = (1 - l_p) w_p + l_{p'} w_{p'} \quad \forall p, p' \in P \quad (3.20)$$

$$\widehat{H}_{pp'} = t_p h_p + (1 - t_{p'}) h_{p'} \quad \forall p, p' \in P \quad (3.21)$$

$$\widetilde{H}_{pp'} = (1 - t_p) h_p + t_{p'} h_{p'} \quad \forall p, p' \in P \quad (3.22)$$

$$l_p, t_p \in [0, 1] \quad \forall p_i \in P \quad (3.23)$$

図 3.11. MSBR の数理計画問題による定式化.

表 3.2. アンカー点を配置する辺が決まっている場合の MSBR の最適値が等しくなる場合分け.

		$l_{p'}$ のアンカー点の位置			
		$l_{p'} = 0$	$t_{p'} = 0$	$l_{p'} = 1$	$t_{p'} = 1$
$l_p$ のアンカー点の位置	$l_p = 0$	A	E	C	E
	$t_p = 0$	F	B	F	D
	$l_p = 1$	C	E	A	E
	$t_p = 1$	F	D	F	B

置するラベル上の辺が決められたとき, 以下の場合でそれぞれ得られる MSBR の最大拡大率は等しい.

Case A  $l_p = l_{p'} = 0$ , または  $l_p = l_{p'} = 1$ .

Case B  $t_p = t_{p'} = 0$ , または  $t_p = t_{p'} = 1$ .

Case C  $l_p = 0$  かつ  $l_{p'} = 1$ , または  $l_p = 1$  かつ  $l_{p'} = 1$ .

Case D  $t_p = 0$  かつ  $t_{p'} = 1$ , または  $t_p = 1$  かつ  $t_{p'} = 1$ .

Case E  $l_p = 0$  または  $l_p = 1$ , かつ  $t_{p'} = 0$  または  $t_{p'} = 1$ .



$$\text{minimize } \zeta \quad (3.24)$$

$$\text{subject to } \sqrt{\widehat{W}_{pp'}^2 + \widehat{H}_{pp'}^2} \leq d_{pp'} \zeta \quad \forall p, p' \in P \quad (3.25)$$

$$\sqrt{\widetilde{W}_{pp'}^2 + \widetilde{H}_{pp'}^2} \leq d_{pp'} \zeta \quad \forall p, p' \in P \quad (3.26)$$

$$\sqrt{\widehat{W}_{pp'}^2 + \widetilde{H}_{pp'}^2} \leq d_{pp'} \zeta \quad \forall p, p' \in P \quad (3.27)$$

$$\sqrt{\widetilde{W}_{pp'}^2 + \widehat{H}_{pp'}^2} \leq d_{pp'} \zeta \quad \forall p, p' \in P \quad (3.28)$$

$$\widehat{W}_{pp'} = l_p w_p + (1 - l_{p'}) w_{p'} \quad \forall p, p' \in P \quad (3.29)$$

$$\widetilde{W}_{pp'} = (1 - l_p) w_p + l_{p'} w_{p'} \quad \forall p, p' \in P \quad (3.30)$$

$$\widehat{H}_{pp'} = t_p h_p + (1 - t_{p'}) h_{p'} \quad \forall p, p' \in P \quad (3.31)$$

$$\widetilde{H}_{pp'} = (1 - t_p) h_p + t_{p'} h_{p'} \quad \forall p, p' \in P \quad (3.32)$$

$$l_p, t_p \in [0, 1] \quad \forall p \in P \quad (3.33)$$

$$\zeta > 0 \quad (3.34)$$

図 3.12. MSR に対する 2 次錐計画.

Case F  $l_{p'} = 0$  または  $l_{p'} = 1$ , かつ  $t_p = 0$  または  $t_p = 1$ .

証明. まず, Case A について示す.  $l_p$  の左辺にアンカー一点が存在 ( $l_p = 0$ ) し,  $l_{p'}$  の左辺にアンカー一点が存在 ( $l'_{p'} = 0$ ) する場合の最適解を考える. このとき,  $\widehat{W}_{pp'} = w_{p'}$ ,  $\widetilde{W}_{pp'} = w_p$  であり, 制約式 (3.15)–(3.18) は,

$$\sigma \leq d_{pp'} / \sqrt{w_{p'}^2 + \widehat{H}_{pp'}^2} \quad (3.35)$$

$$\sigma \leq d_{pp'} / \sqrt{w_{p'}^2 + \widetilde{H}_{pp'}^2} \quad (3.36)$$

$$\sigma \leq d_{pp'} / \sqrt{w_p^2 + \widetilde{H}_{pp'}^2} \quad (3.37)$$

$$\sigma \leq d_{pp'} / \sqrt{w_p^2 + \widehat{H}_{pp'}^2} \quad (3.38)$$

となる. 一方で,  $l_p$  の右辺にアンカー一点が存在 ( $l_p = 1$ ) し,  $l_{p'}$  の右辺にアンカー一点が存在 ( $l'_{p'} = 1$ ) する場合の最適解では,  $\widehat{W}_{pp'} = w_p$ ,  $\widetilde{W}_{pp'} = w_{p'}$  である. このとき, 制約式 (3.15)–(3.18) は, 式 (3.35)–(3.38) となり,  $l_p, l_{p'}$  の左辺にアンカー一点が存在する場合と変わらない. つまり, これらの 2 つの場合の最適解は同じであり, 本最適解においてはどちらの場合でもラベルを配置できる. Case B–D についても同様に示せる.

次に, Case E について示す.  $l_p$  の左辺にアンカー一点が存在 ( $l_p = 0$ ) し,  $l_{p'}$  の上辺にアンカー一点が存在 ( $t'_p = 0$ ) する場合の最適解を考える. このとき,  $\widehat{W}_{pp'} = (1 - l_{p'})w_{p'}$ ,  $\widetilde{W}_{pp'} = w_p + l_{p'}w_{p'}$ ,  $\widehat{H}_{pp'} = t_p h_p + h_{p'}$ ,  $\widetilde{H}_{pp'} = (1 - t_p)h_p$  であり, 制約式 (3.15)–(3.18) は,

$$\sigma \leq d_{pp'} / \sqrt{((1 - l_{p'})w_{p'})^2 + (t_p h_p + h_{p'})^2} \quad (3.39)$$

$$\sigma \leq d_{pp'} / \sqrt{((1 - l_{p'})w_{p'})^2 + ((1 - t_p)h_p)^2} \quad (3.40)$$

$$\sigma \leq d_{pp'} / \sqrt{(w_p + l_{p'}w_{p'})^2 + ((1 - t_p)h_p)^2} \quad (3.41)$$

$$\sigma \leq d_{pp'} / \sqrt{(w_p + l_{p'}w_{p'})^2 + (t_p h_p + h_{p'})^2} \quad (3.42)$$

となる. 一方で,  $l_p$  の左辺にアンカー一点が存在 ( $l_p = 0$ ) し,  $l_{p'}$  の下辺にアンカー一点が存在 ( $t'_p = 1$ ) する場合の最適解では,  $\widehat{W}_{pp'} = (1 - l_{p'})w_{p'}$ ,  $\widetilde{W}_{pp'} = w_p + l_{p'}w_{p'}$ ,  $\widehat{H}_{pp'} = t_p h_p$ ,  $\widetilde{H}_{pp'} = (1 - t_p)h_p + h_{p'}$  である. このとき, 制約式 (3.15)–(3.18) は,

$$\sigma \leq d_{pp'} / \sqrt{((1 - l_{p'})w_{p'})^2 + (t_p h_p)^2} \quad (3.43)$$

$$\sigma \leq d_{pp'} / \sqrt{((1 - l_{p'})w_{p'})^2 + ((1 - t_p)h_p + h_{p'})^2} \quad (3.44)$$

$$\sigma \leq d_{pp'} / \sqrt{(w_p + l_{p'}w_{p'})^2 + ((1 - t_p)h_p + h_{p'})^2} \quad (3.45)$$

$$\sigma \leq d_{pp'} / \sqrt{(w_p + l_{p'}w_{p'})^2 + (t_p h_p)^2} \quad (3.46)$$

となり, 制約式 (3.39)–(3.42) と異なる. しかし, 制約式 (3.23) より  $t_p \in [0, 1]$  であり, そのため,  $t_p = 1 - \bar{t}_p$  (ここで,  $\bar{t}_p \in [0, 1]$ ) としても, 最適値は変わらない. このように置き換えると, 制約式 (3.39)–(3.42) と制約式 (3.43)–(3.46) は等しくなる. よって, これら 2 つの場合の最適値は等しい (ただし, 2 つの場合でアンカー一点の位置は異なる). Case E の中のその他場合 ( $l_p$  の右辺にアンカー一点が存在し,  $l_{p'}$  の上辺または下辺にアンカー一点が存在する場合) も同様に示せる. さらに, Case F についても同様に示せる.  $\square$

補題 3.14 より, 以下では各 Case におけるアンカー一点の位置を以下とする.

Case A.  $l_p = 0$  かつ  $l_{p'} = 0$ .

Case B.  $t_p = 0$  かつ  $t_{p'} = 0$ .

Case C.  $l_p = 0$  かつ  $l_{p'} = 1$ .

Case D.  $t_p = 0$  かつ  $t_{p'} = 1$ .

Case E.  $l_p = 0$  かつ  $t_{p'} = 0$ .

Case F.  $t_p = 0$  かつ  $l_{p'} = 0$ .

なお、以下では各 Case における最大拡大率をそれぞれ  $\sigma^A, \sigma^B, \dots, \sigma^F$  と表し、また、2 点  $p, p'$  に対しては、例えば Case A の場合には、 $\sigma_{pp'}^A$  のように表記する。

**補題 3.15.** ラベル  $\ell_p, \ell_{p'}$  を持つ 2 つの点  $p, p'$  に対する MSBR において、表 3.2 に示す A–F の 6 つの Case それぞれの場合の  $\sigma_{pp'}$  およびアンカー点の位置は以下となる。

Case A.  $\sigma_{pp'}^A = d_{pp'} / \sqrt{\max(w_p^2, w_{p'}^2) + ((h_p + h_{p'})/2)^2}$  であり、 $t_p, t_{p'}$  は  $(1 - 2t_p)h_p = (1 - 2t_{p'})h_{p'}$  を満たす。

Case B.  $\sigma_{pp'}^B = d_{pp'} / \sqrt{((w_p + w_{p'})/2)^2 + \max(h_p^2, h_{p'}^2)}$  であり、 $l_p, l_{p'}$  は  $(1 - 2l_p)w_p = (1 - 2l_{p'})w_{p'}$  を満たす。

Case C.  $\sigma_{pp'}^C = d_{pp'} / \sqrt{(w_p + w_{p'})^2 + ((h_p + h_{p'})/2)^2}$  であり、 $t_p, t_{p'}$  は  $(1 - 2t_p)h_p = (1 - 2t_{p'})h_{p'}$  を満たす。

Case D.  $\sigma_{pp'}^D = d_{pp'} / \sqrt{((w_p + w_{p'})/2)^2 + (h_p + h_{p'})^2}$  であり、 $l_p, l_{p'}$  は  $(1 - 2l_p)w_p = (1 - 2l_{p'})w_{p'}$  を満たす。

Case E.

- $w_p \leq w_{p'}$  かつ  $h_{p'} \leq h_p$  の場合、 $\sigma_{pp'}^E = d_{pp'} / \sqrt{((w_p + w_{p'})/2)^2 + ((h_p + h_{p'})/2)^2}$  であり、 $t_p = (1 - h_{p'}/h_p)/2$ ,  $l_{p'} = (1 - w_p/w_{p'})/2$  となる。
- $w_p > w_{p'}$  かつ  $h_{p'} \leq h_p$  の場合、 $\sigma_{pp'}^E = d_{pp'} / \sqrt{w_p^2 + ((h_p + h_{p'})/2)^2}$  であり、 $t_p = (1 - h_{p'}/h_p)/2$ ,  $l_{p'} = 0$  となる。
- $w_p \leq w_{p'}$  かつ  $h_{p'} > h_p$  の場合、 $\sigma_{pp'}^E = d_{pp'} / \sqrt{((w_p + w_{p'})/2)^2 + h_{p'}^2}$  であり、 $t_p = 0$ ,  $l_{p'} = (1 - w_p/w_{p'})/2$  となる。
- $w_p > w_{p'}$  かつ  $h_{p'} > h_p$  の場合には、 $\sigma_{pp'}^E = d_{pp'} / \sqrt{w_p^2 + h_{p'}^2}$  であり、 $t_p = 0$ ,  $l_{p'} = 0$  となる。

Case F.

- $w_{p'} \leq w_p$  かつ  $h_p \leq h_{p'}$  の場合、 $\sigma_{pp'}^F = d_{pp'} / \sqrt{((w_p + w_{p'})/2)^2 + ((h_p + h_{p'})/2)^2}$  であり、 $l_p = (1 - w_{p'}/w_p)/2$ ,  $t_{p'} = (1 - h_p/h_{p'})/2$  となる。
- $w_{p'} > w_p$  かつ  $h_p \leq h_{p'}$  の場合、 $\sigma_{pp'}^F = d_{pp'} / \sqrt{w_{p'}^2 + ((h_p + h_{p'})/2)^2}$  であり、 $l_p = 0$ ,  $t_{p'} = (1 - h_p/h_{p'})/2$  となる。
- $w_{p'} \leq w_p$  かつ  $h_p > h_{p'}$  の場合、 $\sigma_{pp'}^F = d_{pp'} / \sqrt{((w_p + w_{p'})/2)^2 + h_p^2}$  であり、 $l_p = 0$ ,  $t_{p'} = (1 - h_p/h_{p'})/2$  となる。
- $w_{p'} > w_p$  かつ  $h_p > h_{p'}$  の場合には、 $\sigma_{pp'}^F = d_{pp'} / \sqrt{w_{p'}^2 + h_p^2}$  であり、 $l_p = 0$ ,  $t_{p'} = 0$  となる。

**証明.** まず、Case A について示す。制約式 (3.35), (3.36) に着目すると、 $\hat{H}_{pp'}$  が大きくな

ると  $\tilde{H}_{pp'}$  が小さくなる. よって,  $\hat{H}_{pp'} = \tilde{H}_{pp'}$  のときに,  $\sigma_{pp'}^A$  は最大となる. よって, 制約式 (3.35)–(3.38) を満たす中で最大の  $\sigma_{pp'}^A$  となるのは,  $(1 - 2t_p)h_p = (1 - 2t_{p'})h_{p'}$  を満たす  $t_p, t_{p'}$  を選んだ時であり, このとき,  $\sigma_{pp'}^A = d_{pp'}/\sqrt{\max(w_p^2, w_{p'}^2) + (h_p + h_{p'})^2}$  となる.  $t_p, t_{p'} \in [0, 1]$  であり,  $t_p = t_{p'} = 1/2$  のとき必ず上記式を満たすため, あらゆるラベルサイズにて本拡大率は達成できる. Case B–D についても同様に示せる.

次に, Case E について示す. Case E においても Case A の場合と同様に, 制約式 (3.39)–(3.42) を満たす中で最大の  $\sigma_{pp'}^E$  となるのは,  $(1 - l_{p'})w_{p'} = (w_p + l_{p'}w_{p'})$  かつ  $(1 - t_p)h_p = t_ph_p + h_{p'}$  のときである. このとき,  $t_p = (1 - h_{p'}/h_p)/2$ ,  $l_{p'} = (1 - w_p/w_{p'})/2$  であり,  $\sigma_{pp'}^E = d_{pp'}/\sqrt{((w_p + w_{p'})/2)^2 + ((h_p + h_{p'})/2)^2}$  となる. ここで,  $t_p, l_{p'} \in [0, 1]$  のため,  $w_p > w_{p'}$  または  $h_{p'} > h_p$  の場合には, 本  $\sigma_{pp'}^E$  は達成できない.  $w_p > w_{p'}$  かつ  $h_{p'} \leq h_p$  の場合には,  $(1 - w_p/w_{p'})/2 < 0$  となるため,  $l_{p'} \geq 0$  とする必要がある.  $l_{p'} = 0$  の場合は,  $\sigma_{pp'}^E = \sigma_{pp'}^A$  となるが,  $l_{p'}$  の値が大きくなるにつれて最大拡大率は大きくなり,  $l_{p'} = 1$  にて  $\sigma_{pp'}^E = \sigma_{pp'}^C$  となる. よって,  $l_{p'} = 0$  のときが最大であり,  $t_p = (1 - h_{p'}/h_p)/2$  にて,  $\sigma_{pp'}^E = d_{pp'}/\sqrt{w_p^2 + ((h_p + h_{p'})/2)^2}$  となる.  $w_p \leq w_{p'}$  かつ  $h_{p'} > h_p$  の場合,  $w_p > w_{p'}$  かつ  $h_{p'} > h_p$  の場合も同様に示せる. Case F についても同様に示せる.  $\square$

補題 3.15 を利用して以下の補題が得られる.

**補題 3.16.** ラベル  $l_p, l_{p'}$  を持つ 2 つの点  $p, p'$  に対する MSBR において, 以下が満たされる.

- $w_p \leq w_{p'}$  および  $h_p \leq h_{p'}$  の場合, または,  $w_p \geq w_{p'}$  および  $h_p \geq h_{p'}$  の場合,

$$\sigma_{pp'} = d_{pp'}/\sqrt{\min(w_{p'}^2 + ((h_p + h_{p'})/2)^2, ((w_p + w_{p'})/2)^2 + h_{p'}^2)}.$$

- $w_p \leq w_{p'}$  および  $h_p \geq h_{p'}$  の場合, または,  $w_p \geq w_{p'}$  および  $h_p \leq h_{p'}$  の場合,

$$\sigma_{pp'} = d_{pp'}/\sqrt{((w_p + w_{p'})/2)^2 + ((h_p + h_{p'})/2)^2}.$$

補題 3.16 より, すべての点对  $p, p'$  に対して,  $w_p \leq w_{p'}$  および  $h_p \leq h_{p'}$  であり, さらに,  $w_{p'}^2 + ((h_p + h_{p'})/2)^2 \leq ((w_p + w_{p'})/2)^2 + h_{p'}^2$  の場合には,  $l_p = l_{p'} = 0$  かつ  $t_p = t_{p'} = 1/2$  にアンカー点を置くことで, 最大拡大率でラベルを配置することができる. 同様に, すべての点对  $p, p'$  に対して,  $w_p \leq w_{p'}$  および  $h_p \leq h_{p'}$  であり,  $w_{p'}^2 + ((h_p + h_{p'})/2)^2 \geq ((w_p + w_{p'})/2)^2 + h_{p'}^2$  の場合, アンカー点の位置を  $l_p = l_{p'} = 1/2$  かつ  $t_p = t_{p'} = 0$  とすることで, 最大拡大率でラベルを配置することができる. このような条件を満たした長方形ラベルに対しては, (アンカー点の位置が異なるが) アルゴリズム 2 が適用できるため, 以下が得られる.

**命題 3.17.** すべての点対  $p, p' \in P$  に対して, 以下のどちらかの条件が満たされる場合, MSBR は  $O(n \log n)$  時間,  $O(n)$  領域で解ける.

- $w_p \leq w_{p'}$  および  $h_p \leq h_{p'}$  であり, さらに,  $w_{p'}^2 + ((h_p + h_{p'})/2)^2 \leq ((w_p + w_{p'})/2)^2 + h_{p'}^2$  である.
- $w_p \leq w_{p'}$  および  $h_p \leq h_{p'}$  であり,  $w_{p'}^2 + ((h_p + h_{p'})/2)^2 \geq ((w_p + w_{p'})/2)^2 + h_{p'}^2$  である.

命題 3.17 は, アルゴリズム 2 が適用できる範囲をより正確に表現したものとしてみることができ.

## 3.8 4-スライダーモデル以外の場合

前節までは MSR および (4-スライダーモデルである) MSBR のアルゴリズムについて述べてきた. 本節では, 前節までの結果を利用し, 1-ポジションモデル, および 1-スライダーモデルに対する MSBR が多項式時間で解けることを示す. これらの大きな特徴は, 4-スライダーモデルの場合と比べ, 任意の長方形ラベルに対しても最大拡大率が求まることである.

### 3.8.1 1-ポジションモデルに対する MSBR

1-ポジションモデルの MSBR では, すでにアンカー点の位置が決まっている. そのため, 指定されたアンカー点の位置を利用して, アルゴリズム 2 を解くことで, 以下が得られる. なお, 利用する円盤の半径は異なるので注意すること.

**定理 3.18.** 1-ポジションモデルの MSBR は  $O(n \log n)$  時間,  $O(n)$  領域で解ける.

アンカー点がどの位置であったとしても, Delaunay 三角形分割上で隣接する点との間での最大拡大率を求めると, ラベルを  $360^\circ$  回転させたときに得られる円盤が他の点を含むことはない. そのため, アルゴリズム 2 の証明と同様の方法で, 上記定理は得られる.

### 3.8.2 1-スライダーモデルに対する MSBR

1-スライダーモデルの MSBR は, 3.7 節で説明したように, 2 次錘計画 (図 3.12) にて多項式時間で解ける [45, 46].

**定理 3.19.** 1-スライダーモデルの MSBR は多項式時間で解ける.

### 3.9 まとめ

本節では、回転する地図に対するラベルサイズ最大化を考えた。一般に静的な地図に対するラベルサイズ最大化は APX 困難であるが、この問題は多項式時間で解けること、また、効率的に最大拡大率が求められることを示した。

今後の課題としては、任意の長方形ラベルに対する MSBR の多項式時間アルゴリズムが挙げられる。また、他の動的な環境、例えば、拡大する地図や点の軌跡、への対応も挙げられる。

## 第 4 章

# 点重なり最小ラベル配置問題

従来のラベル配置問題では、ラベルが互いに交わらないように配置する問題を考えていた。しかし、航空管制システムにおいては、ラベルは航空機の位置だけでなく、高度や速度のような重要な情報も含むため、すべてのラベルを配置する必要がある。そのため、航空管制官は読むことができないラベルを読むために、時間のかかる手作業でラベルの位置を移動させる。なお、ラベルのサイズは固定である。

この背景のもと、de Berg と Gerrits [23] はフリーラベル最大化 (**Free-Label Maximization**) 問題を導入した。この問題は、他のラベルと重なりがないラベルであるフリーラベルの数を最大化する。つまりこの問題設定では、他のラベルを動かさずに読むことが可能なラベルの数を最大化する。しかし、フリーでないラベルを読むために、重なっている他のラベルを移動させるためのコストは高くなる。図 4.1(a) にフリーラベル最大化の最適解を示す。ここで、フリーラベルの数は 5 である。しかし、航空管制システムに対する実際の応用を考慮した場合、この解は望ましくない。その理由を説明する。同じ点に複数のラベルが重なっている場合、それらのラベルは互いを読めないものとしており、航空管制官はそのラベルを読むために少なくとも 1 つのラベルを動かす必要がある。航空管制官は、画面上の航空機の位置を把握しながら、ラベルを確認するため、1 つのラベルを見ることに時間がかかることよりも、画面全体を走査しながら、少しずつラベルの重なりを解消する方がよい。

手動でラベルを移動させる数を削減するための 1 つの代替方法として、以下の新たな問題を導入する。

**定義 4.1** (点重なり最小化). 平面上の  $n$  点集合  $P = \{p_1, \dots, p_n\}$  (これをラベル点の集合と呼ぶ) と軸平行な  $n$  個の長方形ラベルの集合  $\{l_1, \dots, l_n\}$  で構成されたインスタンス  $I$  が与えられる。ここで、各ラベル点  $p_i$  にラベル  $l_i$  は配置されるとする。このとき、 $p_i$  は  $l_i$  の境界上にあるようにする。平面上の任意の点  $q$  に対して、関数  $\lambda(q)$  を  $q$  に重なるラベル

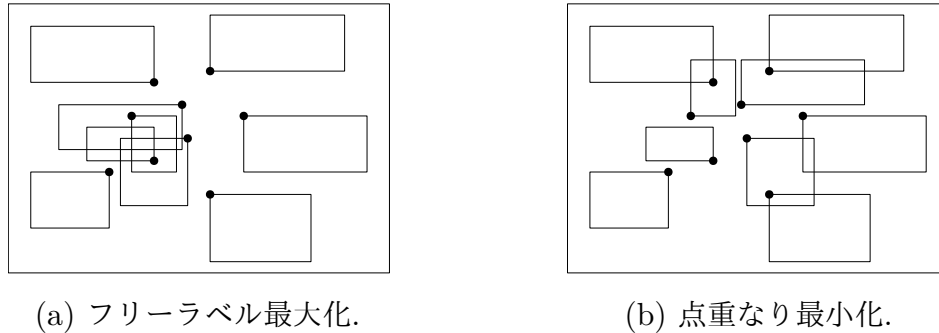


図 4.1. (a) フリーラベル最大化と (b) 点重なり最小化の最適解の違い.

の数とする.  $I$  に対する点重なり最小化 (Point-Overlap Minimization) 問題は, 平面上のすべての点  $q$  の中で最大の  $\lambda(q)$  を最小化する, すべてのラベルの配置位置を求めるものである.

図 4.1(b) は図 4.1(a) と同じ点集合に対する点重なり最小化の最適解を示す. ここで, 最適解の値も, フリーラベルの数も 2 である. しかし, フリーラベル最大化と比べ, すべてのラベルは他のラベルを動かすことなく読むことができる.

de Berg と Gerrits [23] は航空管制システムへの応用のための最初のステップとして, 静的な地図のみに対するフリーラベル最大化を扱っていた. 本章では, 各ラベル点が移動する場合の点重なり最小化も扱う. この問題を扱う上で, 3 章で扱った, ラベル内の点とラベル点を一致させる点である, アンカー点を利用する. ラベル点が移動する場合も, 静的なラベル点集合の場合と同様に, 各ラベルの境界上にラベル点があるようにラベルは配置される. そのため, 各ラベルにおいて利用可能なアンカー点の集合を  $A$  とする.  $A$  はラベル配置候補によって定義され, 例えば 4-ポジションモデルでは, ラベルの左上, 右上, 右下, 左下の 4 つの頂点の集合である. これを利用して 各ラベル点に対するアンカー点の位置, つまり, ラベル配置位置を返す, ラベル配置関数  $F: P \rightarrow A$  を定義する. また, すべてのラベル配置関数  $F$  の集合を  $\mathcal{F}$  とする.

**定義 4.2** (移動する点集合に対する点重なり最小化). 平面上の移動する  $n$  個のラベル点の集合  $P = \{p_1, \dots, p_n\}$  と軸平行な  $n$  個の長方形ラベルの集合  $\{\ell_1, \dots, \ell_n\}$  で構成されたインスタンス  $I$  が与えられる. ここで各ラベル点  $p_i \in P$  の時刻  $t$  における位置は  $p_i(t) = (x_i(t), y_i(t))$  で表わされる. また, 各ラベル点  $p_i$  にラベル  $\ell_i$  は配置されるとする. このとき,  $p_i$  は  $\ell_i$  の境界上にあるようにする. ラベル配置関数  $F \in \mathcal{F}$  にて, 時刻  $t$  における平面上の任意の点  $q$  に重なるラベルの数を  $\lambda_t^F(q)$  とする.  $I$  に対する移動する点に対す



る点重なり最小化 (**Point-Overlap Minimization for Moving Points**) 問題は,

$$\min_{F \in \mathcal{F}} \max_t \max_{q \in \mathbb{R}^2} \lambda_t^F(q)$$

となるラベル配置関数  $F \in \mathcal{F}$  を求めるものである.

この問題では, ラベル配置関数はすべての時刻  $t$  で同じであるため, すべての時刻  $t$  において, 各ラベル  $l_i$  のラベル点  $p_i$  に対する配置位置は変わらない. この問題設定は, ラベルが移動中に突然位置が変わることはない, という要求項目 [7] を満たしている.

なお, ここで扱う点集合はあらかじめどのように移動するのかがわかっており, また, 移動するラベル点  $p_i \in P$  の各座標値  $x_i(t), y_i(t)$  は高々次数  $\delta$  ( $\delta$  は定数) の多項式で表わされるものとする. さらに [2] と同様に, 2 つの移動するラベル点の交点は  $O(1)$  時間で求められる計算モデルを仮定する. 移動する点集合に対するフリーラベル最大化 [24] も考えられているが, 提案されているのはヒューリスティクスであり, 理論的な保証はない.

上記の問題に対し, 本章ではまず任意の長方形ラベルに対する LP 緩和を利用した 4-近似アルゴリズムを提案する. このアルゴリズムは, 静的な点重なり最小化および, 移動する点集合に対する点重なり最小化双方に利用できる. ここで扱うのは, 4-ポジションモデルのみである.

さらに, 単位正方形ラベルに対する, より速く動作する組合せ的な 8-近似アルゴリズムを提案する. ここでは, 4-ポジションモデルだけでなく, スライダーモデルも対象とする.

なお, 4-ポジションモデルおよび 4-スライダーモデルに対する点重なり最小化は, NP 困難であることに注意する. この結果は, [31, 58] のような他の NP 困難なラベル配置問題からの帰着により, 簡単に得られる.

## 4.1 関連研究

本章で扱っている, 平面上のすべての点  $p$  の中で最大の  $\lambda(p)$  は, **ply** と呼ばれており, 近年 ply に関する最適化問題が多く研究されている. 例えば, Evans ら [29] は動く点集合において, 時間の経過によってそれぞれの点がどのように動いているかはわからず, 点に対してクエリを出すことで, 正確な位置がわかるような場合に, 一定時間経過後に ply が最小となるようなクエリ戦略を求める問題を扱っている. グラフ描画の分野では, 低 ply グラフ描画問題が考えられている [6, 37]. この問題では固定した ply の数で描画できる直線グラフがあるか調べられている. Buchin ら [13] は, ply が固定された 1 次元ポリラインに対して, Fréchet 距離を計算するアルゴリズムを与えている.

静的な点集合に対する点重なり最小化は, スケジューリングにおける, マシン数最小化

(Machine Minimization) 問題と関係する.

**定義 4.3** (マシン数最小化). ジョブの集合  $J = \{j_1, \dots, j_n\}$  が与えられる. 各ジョブ  $j_i \in J$  はリリース時刻  $r_i$ , 終了期限  $d_i$ , 処理時間  $p_i$  を持つ. マシン数最小化 (Machine Minimization) 問題では, すべてのジョブ  $j_i \in J$  が,  $r_i$  から  $d_i$  の間に処理され, また, 各時刻において 1 つのマシンには 1 つのジョブしか割り当てられないようなスケジュールの中で, マシンの数が最小となるものを求める.

1次元地図の場合の点重なり最小化はマシン数最小化の特殊ケースの 1 つである. なお, マシン数最小化では, リリース時刻と終了期限の間ならばどこからでもジョブを開始できる連続的なモデル [20, 38] と, リリース時刻と終了期限の間の決められた位置からしか開始できない離散的なモデル [21, 62] の 2 つが考えられている. 前者はスライダーモデル, 後者は固定位置モデルと対応する.

移動する点集合を考慮する問題としては, 動的データ構造 (Kinetic Data Structure) が挙げられる. 移動する点集合に対する動的データ構造として, 最近点对や全最近点, ユークリッド最小木などが考えられている [50].

## 4.2 問題の定式化と 4-近似アルゴリズム

本節では, 4-ポジションモデルに対する点重なり最小化を IP によって定式化し, LP 緩和を用いた 4-近似アルゴリズムを提案する. また同様の考えで, 移動する点集合に対する点重なり最小化に対する 4-近似アルゴリズムも併せて提案する. これらのアルゴリズムは  $n$  個の任意の長方形ラベルを扱うことができる.

本章では,  $\mathcal{I}$  を扱う問題のインスタンスの集合とする. ただし, 扱っている問題を明確にするために,  $c$ -ポジションモデルのインスタンスの集合の場合には  $\mathcal{I}_{cP}$ ,  $c$ -スライダーモデルの場合には,  $\mathcal{I}_{cS}$  と記載する. さらに, 移動する点集合の問題を扱う場合には,  $\mathcal{I}^{\text{MP}}$  と記載する. 例えば, 4-ポジションモデルの静的な点集合に対する点重なり最小化のインスタンスの集合は,  $\mathcal{I}_{4P}$  となり, 4-スライダーモデルの動的な点集合に対する点重なり最小化のインスタンスの集合は,  $\mathcal{I}_{4S}^{\text{MP}}$  となる. 与えられたインスタンス  $I \in \mathcal{I}$  に対して, アルゴリズム ALG の解の目的関数値を  $\text{ALG}(I)$  と記す. 同様に, 問題の最適値は  $\text{OPT}(I)$  と記す.

### 4.2.1 静的な点集合に対する点重なり最小化

まず, 4-ポジションモデルに対する点重なり最小化の IP 定式化を与える. ラベル点  $p_i$  に対して,  $S_{ij}$  をラベル  $l_i$  を配置可能な  $j$  番目の候補領域とする. ここで,  $j = 1, 2, 3$ , お

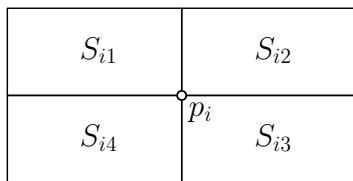


図 4.2. ラベル候補.

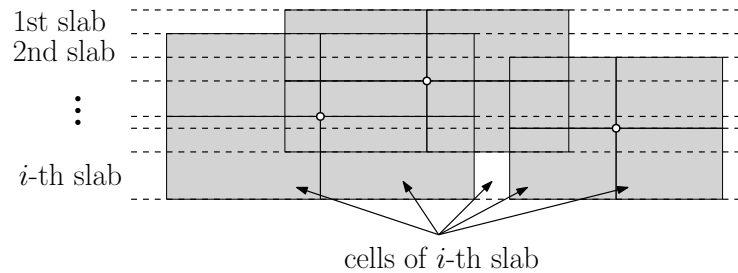


図 4.3. スラブとセル.

よび 4 はそれぞれ,  $p_i$  に対して “左上”, “右上”, “右下”, “左下” のラベル候補を意味する (図 4.2). このとき, 変数  $x_{ij}$  は  $S_{ij}$  にラベル  $l_i$  を配置する場合には 1, 配置しない場合には 0 となるものとする. また, 以下で定義されるセルの集合を  $\mathcal{C}$  と記す. 各ラベル候補の上辺または下辺を通る水平線を引く. これにより平面は水平なスラブ (図 4.3) に分割される. ここで, スラブの数は  $O(n)$  である. 次に, 各スラブに対して, スラブと交差する各ラベル候補の左辺または右辺を通る垂直線を引く. 連続した 2 つの垂直線で囲まれた領域をセルと定義する. スラブ内のセルの数は  $O(n)$  のため, 平面上のすべてのセルの数は  $O(n^2)$  である. この IP の目的は平面上の点と重なるラベルの数の最大値を示す  $\tau$  を最小化することである. IP は以下である.

$$\begin{aligned}
 & \text{minimize} && \tau \\
 & \text{subject to} && \sum_{S_{ij} \cap C \neq \emptyset} x_{ij} \leq \tau && C \in \mathcal{C} \\
 & && \sum_{j=1}^4 x_{ij} = 1 && i = 1, \dots, n \\
 & && x_{ij} \in \{0, 1\} && i = 1, \dots, n, \quad j = 1, 2, 3, 4
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

この IP において, 最初の制約式は各セルと重なるラベルの数は高々  $\tau$  であることを意味している. この制約式は平面上のすべての点の代わりにすべてのセルを考えている. これは平面上の点と交差するラベルのすべての可能なケースは, セルによって表すことができるためである. なお,  $\tau = 1$  とすると, この制約式は MISR の近似アルゴリズム [15, 16] を設計するために使われるものと同じである. 2 つ目の制約式は, 1 つのラベル候補位置に各ラベルが配置されることを意味する. 1 つ目の制約式の数は  $O(n^2)$ , 2 つ目の制約式の数は  $O(n)$  なので, 制約式の総数は  $O(n^2)$  である.

IP (4.1) の LP 緩和は以下である.

$$\begin{aligned}
 & \text{minimize} && \tau \\
 & \text{subject to} && \sum_{S_{ij} \cap C \neq \emptyset} x_{ij} \leq \tau \quad C \in \mathcal{C} \\
 & && \sum_{j=1}^4 x_{ij} = 1 \quad i = 1, \dots, n \\
 & && x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, 2, 3, 4
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

この LP を利用して, 点重なり最小化に対する単純な 4-近似アルゴリズムを得る. アルゴリズムは以下である.

Step 1. LP (4.2) の最適解を求める.

Step 2. 各ラベル点  $p_i$  に対して,  $x_{ij} \geq 1/4$  となるような変数  $x_{ij}$  を 1 つ選び, その変数の値を 1 とする. 残りの変数については 0 とする.

このアルゴリズムを *LP-Rounding* (LPR) と呼ぶ.

**定理 4.1.** 任意のインスタンス  $I \in \mathcal{I}_{4P}$  に対して,  $\text{LPR}(I) \leq 4\text{OPT}(I)$  である.

**証明.** アルゴリズム LPR は各ラベル点に対して 1 つだけラベルを配置する. そのため, アルゴリズム LPR で得られるラベルの配置は正当なラベル配置である.

アルゴリズム LPR で得られた解の目的関数値  $\text{LPR}(I)$  を考える. また, LP (4.2) の最適値を  $\text{OPT}_{\text{LP}}(I)$  とする. このとき, 各ラベル点  $p_i$  に対して  $x_{ij}$  は少なくとも  $1/4$  以上の値であるため,  $\text{LPR}(I)$  は高々  $4\text{OPT}_{\text{LP}}(I)$  である.  $\text{OPT}_{\text{LP}}(I) \leq \text{OPT}(I)$  のため,  $\text{LPR}(I) \leq 4\text{OPT}(I)$  となり, 定理を得る.  $\square$

ラベル点が 1 つだけの点集合で構成されるインスタンスの場合, LP (4.2) の最適値は  $1/4$  となる. そのため, LP (4.2) の整数性ギャップは 4 となり, アルゴリズム LPR の近似率と一致する.

アルゴリズム LPR の計算時間を以下に示す. Step 1 ではまず,  $\mathcal{C}$  を構築する必要がある. これには,  $O(n^2)$  時間かかる. さらに, LP (4.2) を解くためには,  $O(N^3L)$  時間かかる [51], ここで,  $N$  は LP (4.2) における変数の数であり, また,  $L$  は LP (4.2) で必要とするビット長である. LP (4.2) においては  $N = O(n)$ ,  $L = O(n^3)$  なので, Step 1 は合計で  $O(n^6)$  時間かかる. Step 2 は  $O(n)$  時間かかる. 上記議論をまとめると, アルゴリズム LPR は  $O(n^6)$  時間で動作する.

### 4.2.2 移動する点集合に対する点重なり最小化

本項では、前項で扱った静的な点集合に対する点重なり最小化に対する LP 緩和を用いたアルゴリズムを、移動する点集合に対する点重なり最小化に拡張する。ここで扱う移動するラベル点  $p_i \in P$  は  $\delta$  次 ( $\delta$  は定数) の多項式で表わされるものとする。

本項でも前項と同様に、IP 定式化を考える。静的なラベル点集合の場合、平面上のすべての点の代わりに、各セルに重なるラベル候補の数を考慮した。移動するラベル点集合の場合には、同様の考えを時刻  $t$  にも適用する。時刻  $t$  が連続して変わったときに、セルの大きさが変わったとしても、セルの 4 辺を構成する 2 本の水平線と 2 本の垂直線が変わらない限りは、セルに重なるラベル候補は変わらない。そのため、それらを 1 つのセルとしてまとめて考える。

この考えを利用して、前項で考えたセルの集合  $\mathcal{C}$  を具体的に見直す。まず、スラブについて考える。スラブは、各ラベル点のラベル候補の上辺または下辺を通る水平線によって構成されることを思い出そう。時刻  $t$  が変化するとき、各水平線はラベル点の移動に伴って移動する。水平線同士の交差、つまり上下関係の変化がない限り、スラブの大きさは違うが、スラブを構成する水平線は変わらない。つまり、スラブの中に含まれているラベル候補の集合に変化はない。よって、スラブとしては水平線同士の交差がない限り、時刻  $t$  が変わっても、それらのスラブは同一であるとみなす。2 つの水平線同士の交差 (上下関係の変化) は高々  $O(\delta)$  回のため、すべての水平線では、 $O(\delta n^2)$  回の水平線同士の上下関係の変化がある。時刻  $t$  を固定したときのスラブの数は  $O(n)$  個より、高々  $O(\delta n^3)$  個のスラブを考慮すればよい。次に各スラブの中のセルについて考える。スラブの中の各ラベル候補の左辺または右辺を通る垂直線によって、各セルは構成されるため、スラブの場合と同様に、時刻  $t$  が変化するとき、垂直線同士の左右関係の変化がない限り、そのセルに含まれるラベル候補は変わらない。そのため、それらのセルを同一視する。2 つの垂直線の交差 (左右関係の変化) は高々  $O(\delta)$  回のため、すべての垂直線では、 $O(\delta n^2)$  回の垂直線同士の左右関係の変化がある。時刻  $t$  における 1 つのスラブの中のセルの数は高々  $O(n)$  より、1 つのスラブに対して高々  $O(\delta n^3)$  個のセルを考慮すればよい。まとめると、このようにして得られたセルの集合が、IP で利用する  $\mathcal{C}$  であり、その数は  $O(\delta^2 n^6)$  である。移動する点集合に対する  $\mathcal{C}$  の例を図 4.4 に示す。この  $\mathcal{C}$  を利用すれば、IP 定式化は IP (4.1) と同じである。すると、前項と同様の議論より、以下が得られる。

**定理 4.2.** 任意のインスタンス  $I \in \mathcal{I}_{4P}^{\text{MP}}$  に対して、 $\text{LPR}(I) \leq 40\text{OPT}(I)$  である。

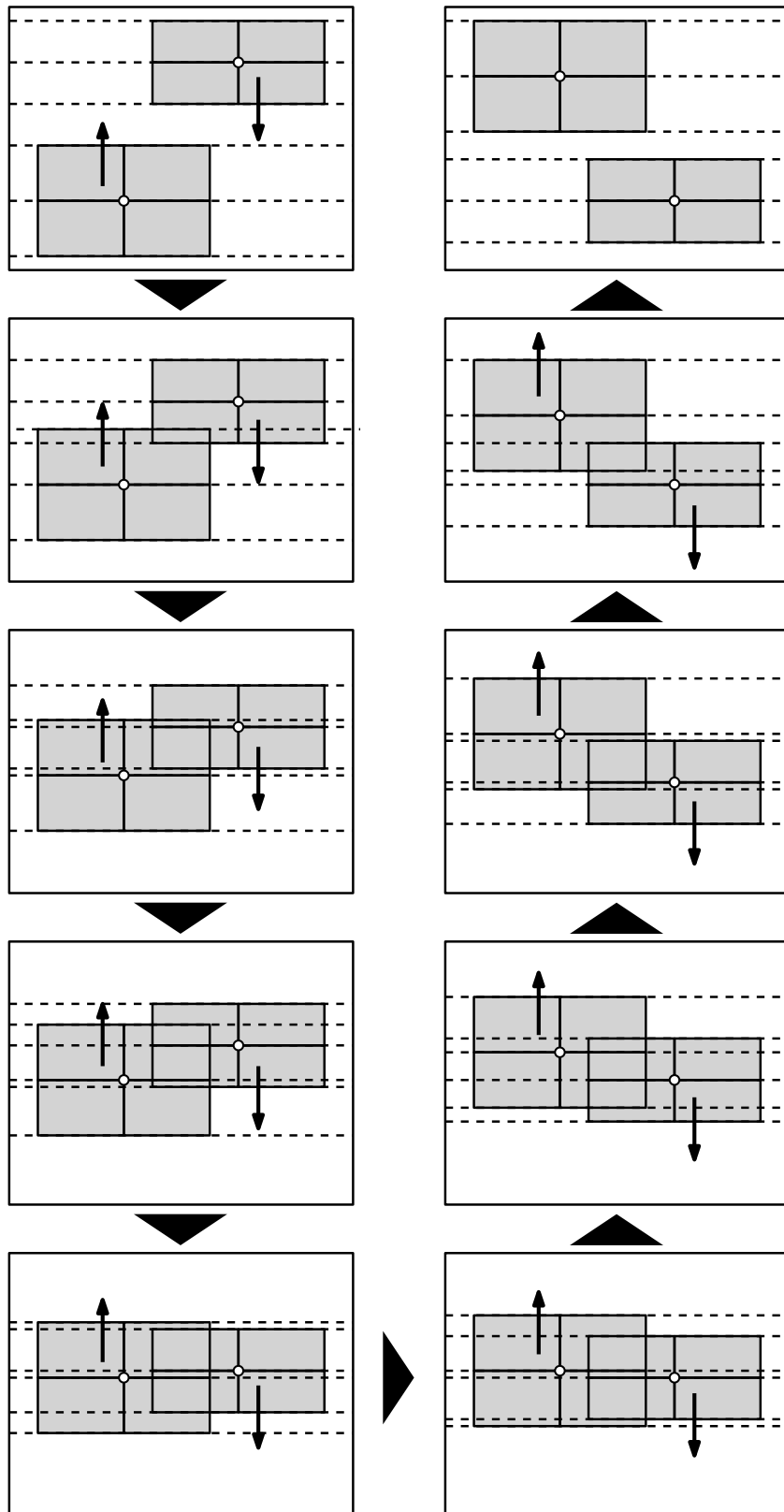
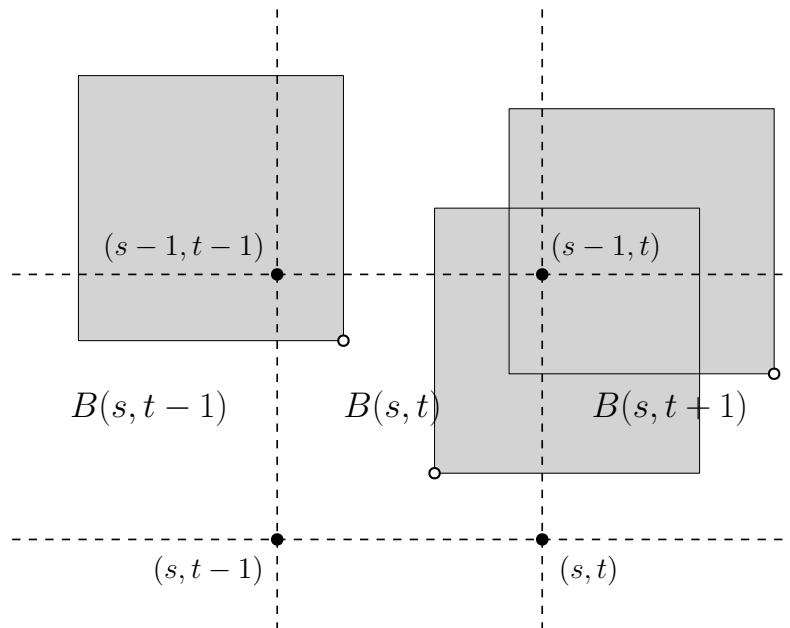


図 4.4. 移動する点集合に対する  $C$  の例.

図 4.5.  $B(s, t)$  とそのコーナー.

計算時間は、 $O(n^{10})$  となる。なお、上述の議論は移動する点集合に対して記載したが、拡大縮小する地図や回転する地図に対しても同様の結果が得られる。

### 4.3 単位正方形ラベルに対する組合せ的 8-近似アルゴリズム

本節では、ラベルの形を単位正方形、すなわち、各ラベルはサイズ 1 の正方形、に制限した問題について議論する。説明を簡単にするために、各ラベル点の座標は整数でなく、また、正の値であるとする。このようなラベル点はラベル点を移動することによって簡単に得られる。そのようなインスタンスが与えられたら、サイズが 1 で格子点の座標が整数であるような整数格子を考える。以下ではその整数格子上的座標を  $(\cdot, \cdot)$  で記す。

正の整数  $s$  と  $t$  に対して、 $B(s, t)$  を  $(s-1, t-1)$ ,  $(s-1, t)$ ,  $(s, t)$  および  $(s, t-1)$  を頂点 (コーナー) として持つ正方格子の中の正方形とする (図 4.5)。これを以下ではボックスと呼ぶ。簡単のため、 $B(s, t)$  を  $B(s, t)$  内のラベル点の集合を示す際にも利用する。ボックスは内部にラベル点を含まないとき、空であると言われる。そうでなければ、非空である。また、行  $s$  (列  $t$ ) を任意の  $h$  に対するボックス  $B(s, h)$  ( $B(h, t)$ ) の集合とする。任意の正の整数  $s, t$ , および  $t \leq t'$  となるような  $t'$  に対して、 $m_s(t, t')$  を  $\bigcup_{t \leq h \leq t'} B(s, h)$  に含まれるラベル点の数とする。 $s_{\max}$  (または  $t_{\max}$ ) を行  $s$  (または列  $t$ ) で少なくとも 1 つのラベル点を持つ最大の整数とする。

補題 4.3. 任意のインスタンス  $I \in \mathcal{I}_{4P}$  に対して,

$$D \equiv \max \left\{ \left\lceil \frac{m_s(t, t')}{2(t' - t + 2)} \right\rceil \mid 1 \leq s \leq s_{\max}, 1 \leq t \leq t' \leq t_{\max} \right\} \leq \text{OPT}(I)$$

となる.

証明.  $x^*$  を IP (4.1) の最適解とする. ラベル点  $p_i$  が  $j$  番目のラベル候補にラベルを配置した場合にのみ,  $x_{ij}^* = 1$  となることに注意する. ここで,  $j = 1, 2, 3$ , および  $4$  はそれぞれ, “左上”, “右上”, “右下”, および “左下” のラベル候補と対応する. 与えられたボックス  $B(s, t)$  に対し,  $X_j^*(s, t)$  を  $B(s, t)$  内にあり,  $j$  番目のラベル候補を利用しているラベル点の数, すなわち,  $\sum_{i: p_i \in B(s, t)} x_{ij}^*$  とする.

ここで, 任意の行  $s$  と  $t \leq t'$  となる任意の列  $t$  と  $t'$  を選ぶとする. 最適解  $t \leq t'$  において, 少なくとも  $X_1^*(s, t)$  個のラベルは, 点  $(s-1, t-1)$  と重なる. これは,  $X_1^*(s, t) \leq \text{OPT}(I)$  を意味する. 同様に, 点  $(s-1, t)$  に着目すると,  $X_2^*(s, t) + X_1^*(s, t+1) \leq \text{OPT}(I)$  が得られる (図 4.5 参照). ボックス  $B(s, t), \dots, B(s, t')$  の  $2(t' - t + 2)$  個のすべてのコーナーに対して同様の議論を適用すると, 以下が得られる.

$$\begin{aligned} X_1^*(s, t) &\leq \text{OPT}(I) \\ X_2^*(s, t) + X_1^*(s, t+1) &\leq \text{OPT}(I) \\ &\vdots \\ X_3^*(s, t'-1) + X_4^*(s, t') &\leq \text{OPT}(I) \\ X_3^*(s, t') &\leq \text{OPT}(I) \end{aligned}$$

上記不等式において, 変数  $X^*$  はそれぞれたった 1 つの不等式にしか現れない. したがって, 左辺の和は  $m_s(t, t')$  である. 一方で, 右辺の和は  $2(t' - t + 2)\text{OPT}(I)$  である. まとめると,  $m_s(t, t')/(2(t' - t + 2)) \leq \text{OPT}(I)$  となる.  $\text{OPT}(I)$  の整数性より,  $\lceil m_s(t, t')/(2(t' - t + 2)) \rceil \leq \text{OPT}(I)$  となり, 補題を得る.  $\square$

### 4.3.1 PUR アルゴリズム

本節の残りの部分では, 近似率が 8 となる組合せ的なアルゴリズムを提案する. このアルゴリズムを *Place-Upperside-of-Ribbon* (PUR) と呼ぶ. PUR では前処理として, 補題 4.3 の  $D$  を効率的に求めるためにリボンを計算する.

#### 前処理

リボンを次の性質を満たす, ある行の中の連続したボックスの極大列とする.



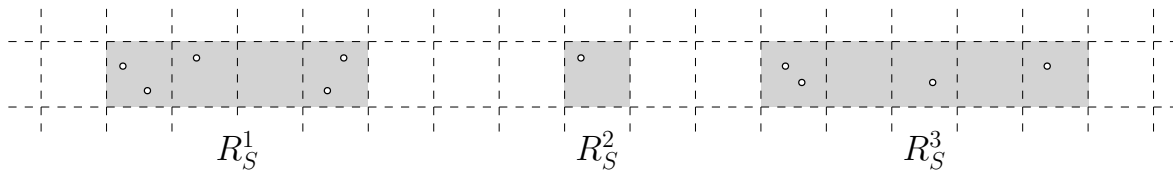


図 4.6. リボンの集合.

- 左端, 右端のボックスは空でない.
- 2 つの連続したボックスの少なくとも一方は空でない.

図 4.6 にリボンの集合の例を示す. 定義より, すべての空でないボックスはどれかのリボンによってカバーされることに注意する. また, すべてのリボンの和は  $O(n)$  個のボックスにより構成される. 以下で示す前処理はすべてのリボンを見つけつつ, 同時に  $D$  を計算する.

P-Step 1: 各ラベル点に対して, 行座標  $s$  と列座標  $t$  を計算する. ここで,  $s$  と  $t$  はそのラベル点を含むボックス  $B(s, t)$  の右下コーナーの座標である.

P-Step 2: すべてのラベル点を行座標でソートする.

P-Step 3: 少なくとも 1 つのラベル点を含む行  $s$  に対して, 以下を実行する.

3-1: 行  $s$  に含まれるラベル点をその列座標でソートする.

3-2: リボンの集合  $\{R_s^1, R_s^2, \dots, R_s^{q(s)}\}$  を構築する. ここでリボンの集合の合併は, 行  $s$  に含まれるラベル点をすべてカバーする.

3-3:  $\tilde{D}_s$  を計算する. ここで  $\tilde{D}_s$  とは,  $t \leq t'$  であり,  $B(s, t)$  と  $B(s, t')$  がどれかのリボンの含まれるようなすべての  $(t, t')$  の中で最大の  $\lceil m_s(t, t') / (2(t' - t + 2)) \rceil$  である. そして,  $\tilde{D} = \max\{\tilde{D}, \tilde{D}_s\}$  を更新する.

補題 4.4.  $D = \tilde{D}$ .

証明.  $\tilde{D}$  はリボン内のボックスに制限されたときの  $D$  の値なので,  $D \geq \tilde{D}$  である.  $D$  は  $(u, v, v')$  によって決定されている, つまり,  $D = \lceil m_u(v, v') / (2(v' - v + 2)) \rceil$  であると仮定する. このとき,  $B(u, v)$  と  $B(u, v')$  は空ではない. そうでない場合, 空のボックスを取り除くことによって, よりよい解が得られ, それは  $D$  の最適性に反する. リボンの集合はすべての空でないボックスを含むため,  $(u, v, v')$  は P-Step 3-3 にて必ず扱われる. これは,  $D = \tilde{D}$  を意味する.  $\square$

## ラベル配置処理

それぞれのリボンの中のラベル点に対して, PUR はすべてのラベルを左上または右上に配置する. 以下では,  $m_s(t)$  を  $m_s(t, t)$  として利用する. また, 与えられたボックス  $B(s, t)$  に対し,  $l_s(t)$  ( $r_s(t)$ ) を左上 (右上) の位置にラベルを配置された  $B(s, t)$  内のラベル点の数とする. ここで,  $m_s(t) = l_s(t) + r_s(t)$  であることに注意する. 以下にボックス  $B(s, t), \dots, B(s, t')$  で構成された特定のリボンに対する PUR のラベル配置処理を示す.

L-Step 0:  $B(s, t)$  内のラベル点に対して,  $l_s(t) = \min\{2D, m_s(t)\}$  および  $r_s(t) = m_s(t) - l_s(t)$  となるようにラベルを配置する.

L-Step  $h$ :  $h = \{1, 2, \dots, t' - t\}$  である  $B(s, t + h)$  内のラベル点に対し,  $l_s(t + h) = \min\{2D - r_s(t + h - 1), m_s(t + h)\}$  および  $r_s(t + h) = m_s(t + h) - l_s(t + h)$  となるようにラベルを配置する.

$h \geq 1$  に対する任意の L-Step  $h$  において,  $2D - r_s(t + h - 1)$  は非負でなければならない. なぜなら, そうでなければ, アルゴリズムは  $l_s(t + h)$  として負の値を返すことになるためである. 以下はそれを保証する.

**補題 4.5.** ボックス  $B(s, t), \dots, B(s, t')$  で構成されるリボン内のラベル点に対して, PUR は  $0 \leq h \leq t' - t$  となるような任意の整数  $h$  に対して  $r_s(t + h) \leq 2D$  となるようにラベルを配置する.

**証明.** 帰納法により, この主張を証明する. まず (i)  $r_s(t) \leq 2D$  を証明し, 次に (ii)  $0 \leq h \leq k$  に対して  $r_s(t + h) \leq 2D$  が成立するという仮定のもと,  $r_s(t + k + 1) \leq 2D$  を証明する.

(i)  $D$  の最大性より,  $m_s(t)/4 \leq \lceil m_s(t)/4 \rceil \leq D$  となる, よって,

$$m_s(t) \leq 4D \tag{4.3}$$

が得られる.  $m_s(t) \leq 2D$  の場合,  $r_s(t) = 0 \leq 2D$  となる. そうでなければ, (4.3) より  $r_s(t) = m_s(t) - 2D \leq 2D$  となる.

(ii)  $l_s$  の定義より,  $r_s(t + k) + l_s(t + k + 1) \leq 2D$  である.  $r_s(t + k) + l_s(t + k + 1) < 2D$  の場合,  $r_s(t + k + 1) = 0 \leq 2D$  である. ここで,  $r_s(t + k) + l_s(t + k + 1) = 2D$  と仮定する. このとき,  $-1 \leq i \leq k$  の中で  $r_s(t + i - 1) + l_s(t + i) < 2D$  を満たす  $i$  が存在する. リボンの定義より,  $B(s, t - 2)$  および  $B(s, t - 1)$  はラベル点を含まないので,  $r_s(t - 2) = 0$  および  $l_s(t - 1) = 0$  となる. そのため,  $i = -1$  の場合,  $r_s(t + i - 1) + l_s(t + i) = r_s(t - 2) + l_s(t - 1) = 0$  となるため, 上記式を満たす  $i$  は必ず存在する.  $i$  としてそのような整数の中で最大のもの

を選ぶと,

$$r_s(t+i) = 0 \quad (4.4)$$

となる.  $i$  の最大性により, 以下の  $(k-i+1)$  個の式が得られる.

$$\begin{aligned} r_s(t+i) + l_s(t+i+1) &= 2D \\ &\vdots \\ r_s(t+k) + l_s(t+k+1) &= 2D \end{aligned}$$

これらの和をとり, (4.4) を用いて, 以下が得られる.

$$\begin{aligned} &r_s(t+i) + m_s(t+i+1, t+k) + l_s(t+k+1) = 2(k-i+1)D \\ \iff &m_s(t+i+1, t+k) + l_s(t+k+1) = 2(k-i+1)D \\ \iff &m_s(t+i+1, t+k+1) - r_s(t+k+1) = 2(k-i+1)D \\ \iff &r_s(t+k+1) = m_s(t+i+1, t+k+1) - 2(k-i+1)D \end{aligned} \quad (4.5)$$

一方で,  $D$  の最大性より, 以下が得られる.

$$\begin{aligned} \frac{m_s(t+i+1, t+k+1)}{2(k-i+2)} &\leq \left\lceil \frac{m_s(t+i+1, t+k+1)}{2(k-i+2)} \right\rceil \leq D \\ \iff &m_s(t+i+1, t+k+1) \leq 2(k-i+2)D \end{aligned} \quad (4.6)$$

よって (4.5) と (4.6) より,  $r_s(t+k+1) \leq 2D$  が得られる.  $\square$

**定理 4.6.** 任意のインスタンス  $I \in \mathcal{I}_{4P}$  に対して,  $\text{PUR}(I) \leq 8\text{OPT}(I)$  である.

**証明.**  $1 \leq s \leq s_{\max}$  かつ  $1 \leq t \leq t_{\max}$  である  $B(s, t)$  内の点  $p$  を考える. アルゴリズム PUR より,  $B(s, t)$  のコーナー, すなわち  $(s, t)$ ,  $(s-1, t)$ ,  $(s, t-1)$ , および  $(s-1, t-1)$  と重なるラベルのみ,  $p$  と重なる. PUR より, 格子点  $(u, v)$  にて  $r_{u+1}(v) + l_{u+1}(v+1)$  個のラベルが重なる. その数は高々  $2D$  である. したがって,  $p$  にて高々  $8D$  個のラベルが交差し, これは  $\text{PUR}(I) \leq 8D$  を意味する. この事実と補題 4.3 より, 証明は完了する.  $\square$

計算時間に関しては, 以下が得られる.

**定理 4.7.** アルゴリズム PUR は  $O(\max\{k^2, n \log n\})$  時間で動作する, ここで,  $k$  は空でないボックスの数である.

**証明.** P-Step 1 は簡単であり,  $O(n)$  時間で動作する. また, P-Step 2 は  $O(n \log n)$  時間で動作する. 行  $s$  に含まれるラベル点の数を  $n_s$  とした場合, P-Step 3-1 は  $O(n_s \log n_s)$  時間

で動作する. ソートされた順番で走査することによって, P-Step 3-2 は  $O(n_s)$  時間で動作する.  $n = \sum_{s=1}^{s_{\max}} n_s$  なので, P-Step 3-1 と P-Step 3-2 は合計で  $O(n \log n)$  時間で動作する. P-Step 3-3 に対しては, 少なくとも 1 つのラベル点を含むすべての行  $s$  に対して, 配列  $A_s = \{m_s(t_s^1, t) \mid B(s, t) \in \bigcup_{1 \leq q \leq q(s)} R_s^q\}$  を用意する. ここで,  $t_s^1$  は  $B(s, t_s^1)$  が空でない最小 (左端) の列である. P-Step 3-1 にて列の座標順に各行の中のラベル点はソートされているので, そのような配列をすべて構築するために必要な計算時間は  $O(n)$  となる.  $A_s$  を利用することにより,  $m_s(t, t')$  は定数時間で求められる. したがって, しらみつぶし探索により, 合計で  $O(k^2)$  時間必要である. 上記のように一度  $D$  が計算されれば, 行  $s$  内のリボンに対するすべての L-Step  $h$  は, ( $A_s$  を利用することにより) 定数時間で動作する. これは, すべてのラベルが  $O(n)$  時間で配置できることを意味する. 上記の議論をまとめると, 定理が得られる.  $\square$

$k$  は高々  $n$  なので, 全体の計算時間は  $O(n^2)$  となる. しかし, 自明でないインスタンス, 特に, 実世界のインスタンスに対しては,  $k$  は小さいと考えられ, そのため, 計算時間は実際には  $O(n \log n)$  となると考えられる.

### 4.3.2 スライダーモデルへの拡張

本項では, 前述までの 4-ポジションモデルに対するアルゴリズムを, 4-スライダーモデルにも適用できることを示す.

本項でも, 前述と同様に与えられたラベル点集合に対する整数格子を考える. 4-ポジションモデルの場合には整数格子の格子の中にラベル点があれば, 最適解はそのボックスのコーナーのどれか 1 つにのみ交差することを保証できる. しかしスライダーモデルの場合, ラベルが閉集合の場合には, 2 つ以上のコーナーに重なる可能性があり, ラベルが開集合の場合には, どのコーナーとも重ならない可能性がある. そのため, スライダーモデルの場合, 補題 4.3 が成立しない. よって, 以下ではラベルが開集合であるか, 閉集合であるかに分けて考える.

まず, ラベルが閉集合の場合を考える. このとき, 最適解において, ボックスの複数のコーナーに重なるラベルが存在しうる. そのため, 整数格子を平行移動することで, そのようなラベルを解消する. 以下では, ボックスの左上と右上のコーナーと重なるような最適なラベル配置があるとする. このとき, すべての最適に配置されたラベルの左辺および右辺に対して, 各列  $0, \dots, t_{\max}$  までの距離を求める. その中で 0 を除いた最小値を  $\epsilon$  とする. 整数格子の列を  $x$  軸方向に  $\epsilon/2$  分移動させると, 他のラベルが新たにコーナーを含むことなく, ボックスの左上と右上のコーナーを含むラベル配置を解消することができる. あるボックスの上下

のコーナーと重なるような最適なラベル配置があったとしても、同様の手続きが適用できる。これにより、最適解のラベルがたった 1 つだけのコーナーと重なるような整数格子を作ることができる。

次に、ラベルが開集合の場合を考える。このとき、どのコーナーとも重ならない最適に配置されたラベルが存在しうる。この場合も、ラベルが閉集合の場合と同様に整数格子を移動させることで、最適解のラベルはたった 1 つだけのコーナーと重なるような整数格子を作ることができる。

上記のように整数格子を構築することで、4-ポジションモデルの場合と同様に、以下が得られる。

**補題 4.8.** 任意のインスタンス  $I \in \mathcal{I}_{4S}$  に対して、

$$D \equiv \max \left\{ \left\lceil \frac{m_s(t, t')}{2(t' - t + 2)} \right\rceil \mid 1 \leq s \leq s_{\max}, 1 \leq t \leq t' \leq t_{\max} \right\} \leq \text{OPT}(I)$$

である。

上記補題が得られれば、残りは 4-ポジションモデルの場合と同じ議論により、8-近似アルゴリズムが得られる。

## 4.4 まとめ

本章では、ラベル配置問題に対する新たな方向性として、点重なり最小化を導入した。点重なり最小化は図 4.1 で示した例と、航空管制官の画面の見方から考えると、de Berg と Gerrits [23] によって導入されたフリーラベル最大化よりも、航空管制に対して優れたコンセプトであると考えられる。4-ポジションモデルの点重なり最小化に対して、LP 緩和を基にした 4-近似アルゴリズムを提案した。このアルゴリズムは、移動する点集合にも自然に拡張可能であるが、その計算時間は強多項式時間ではあるが、その複雑性は高いものとなっていた。そのため、単位正方形にラベルの形を制限することによって、完全に組合せ的な 8-近似アルゴリズムを与えた。これは上述のものよりも高速に動作する。また、このアルゴリズムはスライダーモデルにも拡張できる。



## 第5章

# 結論

本論文では、地図の拡大縮小や回転、点の移動など動的な環境に対するラベル配置問題にて、実用上利用可能であるアルゴリズムと、理論的保証を持つアルゴリズムのギャップに着目した。そして、このギャップを埋めることを目指し、回転する地図に対するラベルサイズ最大化問題、および点重なり最小ラベル配置問題を新たに導入し、それらに対するアルゴリズムを提案した。本論文の成果は、従来考えられてきた他のラベル配置問題と比べ実用的な状況に対して、理論的な保証を持つアルゴリズムを提案したことである。また、IoT (Internet of Things) やビッグデータの隆盛により今後も加速度的に情報量が増えていく中、地図だけに限らず、可視化された情報をユーザが動的に操作し理解する必要性は高まっていくと考えられる。本論文で示した方法は、それらの情報を、より理解しやすくするための方向性を示している。

以下、それぞれの問題についての成果と課題について述べる。

3章では回転する地図に対するラベルサイズ最大化の多項式時間アルゴリズムを与えた。アルゴリズムでは、最適解のアンカー点の位置があらかじめ決められることに着目し、最適解が多項式時間で求められることを示している。さらに、重み付き最近点対問題に対する Formann のアルゴリズム [30] のアイデアを流用することで、 $O(n \log n)$  時間を達成している。ここで与えたアルゴリズムにて、MSR および単位高さ長方形および任意の正方形のラベルに対する MSBR が  $O(n \log n)$  時間で解けることを示した。静的な地図に対するラベルサイズ最大化が APX 困難であるのに比べ、ここで扱う問題は多項式時間で解けることは、とても興味深い。また、従来の ARO では 1-ポジションモデルが主であったが、本アルゴリズムは 4-スライダーモデルに対応でき、実用上有効である。一方で、任意の長方形に対しては、 $1/2$ -近似アルゴリズムを与えた。また、特殊な条件を満たす場合には、長方形ラベルでも多項式時間アルゴリズムが存在することを示した。任意の長方形ラベルに対して、多項式時間

アルゴリズムが存在するかどうかは未解決問題である。さらに、4-スライダーモデルの問題を扱うために利用した方法にて、1-ポジションモデルおよび 1-スライダーモデルに対する多項式時間アルゴリズムも併せて与えた。そのため、2-ポジションモデルや 2-スライダーモデルなど、その他のラベル候補に対するアルゴリズムの検討も、今後の課題として挙げられる。さらに、他の動的な地図への対応も、課題として挙げられる。なお、拡大縮小する地図に対しては、すでにラベルのサイズが最大化されているため、ラベルサイズ最大化を適用することが難しい。しかし、点の軌跡や、点集合が移動する場合などは、今後の課題である。

4 章では、航空管制システムへの応用を考慮したフリーラベル最大化に代替する問題として、点重なり最小化を扱った。ここでは、任意の長方形に対する 4-ポジションモデルの問題において、静的な点だけでなく、移動する点集合に対しても、4-近似アルゴリズムを与えた。このアルゴリズムは LP 緩和を利用した基本的なものである。また、実用的な計算時間を実現する、正方形ラベルに対する組合せ的な 8-近似アルゴリズムを与えた。このアルゴリズムは、4-ポジションモデルおよび 4-スライダーモデルに適用できる。アルゴリズムとしては、整数格子の格子点に重なるラベルの数に着目したものとなっている。一方で、ここで与えたアルゴリズムは、フリーラベル最大化と比べ、問題設定としては航空管制システムとしてより実用的であるが、その計算時間や対応できているラベルの形状としてはまだまだ実用的と呼ぶのは難しい。そのため、さらなる計算時間の改善およびその他のラベル形状、ラベル候補位置への対応などが、今後の課題として挙げられる。さらに、各種動的な地図への対応も課題である。

上記を含め、動的な環境として他にも以下の課題が挙げられる。

- 現状扱っている問題は、一度アンカー点の位置を決めたら、その後アンカー点の位置は変わらない。しかし、実際にはアンカー点の位置が滑らかに変化するのであれば、そのような移動をした方が、より多くのラベルや、より大きなサイズでのラベル配置が実現できる。そのため、このような問題も扱う必要があるだろう。
- 現状は 1 つの操作に対するアルゴリズムの提案が多いが、実際の地図は各種操作を実施できる。そのため、複数の操作に対応した理論保証付きアルゴリズムの提案も望まれる。
- 現状扱っている問題では、操作があらかじめ決まっている場合が多いが、実際はインタラクティブに操作されるため、どのような動作となるかは事前にはわからない。そのため、オンラインアルゴリズムについて検討する必要もあろう。
- 地図だけでなく、医学的な 3D モデルや AR/VR など他の応用分野への対応も重要である。



上記のような課題を今後も解決していくことで、理論的な保証を持ちつつ、実用的なアルゴリズムを構築していきたい。



## 参考文献

- [1] Anna Adamaszek and Andreas Wiese. Approximation schemes for maximum weight independent set of rectangles. In *54th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science, FOCS 2013, Berkeley, CA, USA*, pages 400–409, 2013.
- [2] Pankaj K. Agarwal and Micha Sharir. Davenport-schinzel sequences and their geometric applications. In Jörg-Rüdiger Sack and Jorge Urrutia, editors, *Handbook of Computational Geometry*, pages 1–47. North Holland, 2000.
- [3] Pankaj K. Agarwal, Marc J. van Kreveld, and Subhash Suri. Label placement by maximum independent set in rectangles. *Comput. Geom.*, 11(3-4):209–218, 1998.
- [4] Hee-Kap Ahn, Sang Won Bae, Jong Min Choi, Matias Korman, Wolfgang Mulzer, Eunjin Oh, Ji-won Park, André van Renssen, and Antoine Vigneron. Faster algorithms for growing prioritized disks and rectangles. *CoRR*, abs/1704.07580, 2017.
- [5] Kamran Ali, Knut Hartmann, and Thomas Strothotte. Label layout for interactive 3d illustrations. *Journal of WSCG*, 13(1):1–8, 2005.
- [6] Patrizio Angelini, Michael A. Bekos, Till Bruckdorfer, Jaroslav Hancl Jr., Michael Kaufmann, Stephen G. Kobourov, Antonios Symvonis, and Pavel Valtr. Low ply drawings of trees. In Yifan Hu and Martin Nöllenburg, editors, *Graph Drawing and Network Visualization - 24th International Symposium, GD 2016, Athens, Greece, Revised Selected Papers*, volume 9801 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 236–248. Springer, 2016.
- [7] Ken Been, Eli Daiches, and Chee-Keng Yap. Dynamic map labeling. *IEEE Trans. Vis. Comput. Graph.*, 12(5):773–780, 2006.
- [8] Ken Been, Martin Nöllenburg, Sheung-Hung Poon, and Alexander Wolff. Optimizing active ranges for consistent dynamic map labeling. *Comput. Geom.*, 43(3):312–328, 2010.
- [9] Michael A. Bekos. *Map Labeling Algorithms with Application in Graph Drawing and*

- Cartography*. PhD thesis, School of Applied Mathematics and Physical Sciences, National Technical University of Athens, 2008.
- [10] Blaine Bell, Steven Feiner, and Tobias Höllerer. View management for virtual and augmented reality. In Joe Marks and Elizabeth D. Mynatt, editors, *Proceedings of the 14th Annual ACM Symposium on User Interface Software and Technology, UIST 2001, Disney's BoardWalk Inn Resort, Walt Disney World, Orlando, Florida, USA*, pages 101–110. ACM, 2001.
- [11] Jon Louis Bentley and Thomas Ottmann. Algorithms for reporting and counting geometric intersections. *IEEE Trans. Computers*, 28(9):643–647, 1979.
- [12] Piotr Berman and Toshihiro Fujito. On approximation properties of the independent set problem for low degree graphs. *Theory Comput. Syst.*, 32(2):115–132, 1999.
- [13] Kevin Buchin, Jinhee Chun, Maarten Löffler, Aleksandar Markovic, Wouter Meulemans, Yoshio Okamoto, and Taichi Shiitada. Folding free-space diagrams: Computing the fréchet distance between 1-dimensional curves (multimedia contribution). In Boris Aronov and Matthew J. Katz, editors, *33rd International Symposium on Computational Geometry, SoCG 2017, Brisbane, Australia*, volume 77 of *LIPICs*, pages 64:1–64:5. Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum fuer Informatik, 2017.
- [14] Kevin Buchin and Dirk H. P. Gerrits. Dynamic point labeling is strongly PSPACE-complete. *Int. J. Comput. Geometry Appl.*, 24(4):373–395, 2014.
- [15] Parinya Chalermsook and Julia Chuzhoy. Maximum independent set of rectangles. In *Proceedings of the Twentieth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, SODA 2009, New York, NY, USA*, pages 892–901, 2009.
- [16] Timothy M. Chan and Sariel Har-Peled. Approximation algorithms for maximum independent set of pseudo-disks. *Discrete & Computational Geometry*, 48(2):373–392, 2012.
- [17] Bernard Chazelle. Application challenges to computational geometry: CG impact task force report. Technical Report TR-521-96, Princeton University, 1996.
- [18] L. Paul Chew and Klara Kedem. A convex polygon among polygonal obstacles: Placement and high-clearance motion. *Comput. Geom.*, 3:59–89, 1993.
- [19] Julia Chuzhoy and Alina Ene. On approximating maximum independent set of rectangles. In *IEEE 57th Annual Symposium on Foundations of Computer Science, FOCS 2016, Hyatt Regency, New Brunswick, New Jersey, USA*, pages 820–829,

- 2016.
- [20] Julia Chuzhoy, Sudipto Guha, Sanjeev Khanna, and Joseph Naor. Machine minimization for scheduling jobs with interval constraints. In *45th Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS 2004), Rome, Italy, Proceedings*, pages 81–90. IEEE Computer Society, 2004.
  - [21] Mark Cieliebak, Thomas Erlebach, Fabian Hennecke, Birgitta Weber, and Peter Widmayer. Scheduling with release times and deadlines on a minimum number of machines. In Jean-Jacques Lévy, Ernst W. Mayr, and John C. Mitchell, editors, *Exploring New Frontiers of Theoretical Informatics, IFIP 18th World Computer Congress, TC1 3rd International Conference on Theoretical Computer Science (TCS2004), Toulouse, France*, volume 155 of *IFIP*, pages 209–222. Kluwer/Springer, 2004.
  - [22] Mark de Berg, Otfried Cheong, Marc van Kreveld, and Mark Overmars. *Computational Geometry: Algorithms and Applications*. Springer-Verlag, 3rd edition, 2008.
  - [23] Mark de Berg and Dirk H. P. Gerrits. Approximation algorithms for free-label maximization. *Comput. Geom.*, 45(4):153–168, 2012.
  - [24] Mark de Berg and Dirk H. P. Gerrits. Labeling moving points with a trade-off between label speed and label overlap. In *Algorithms - ESA 2013 - 21st Annual European Symposium, Sophia Antipolis, France. Proceedings*, pages 373–384, 2013.
  - [25] Erik D. Demaine, Mohammad Taghi Hajiaghayi, Hamid Mahini, Amin S. Sayedi-Roshkhar, Shayan Oveis Gharan, and Morteza Zadimoghaddam. Minimizing movement. *ACM Trans. Algorithms*, 5(3):30:1–30:30, 2009.
  - [26] Srinivas Doddi, Madhav V. Marathe, Andy Mirzaian, Bernard M. E. Moret, and Binhai Zhu. Map labeling and its generalizations. In Michael E. Saks, editor, *Proceedings of the Eighth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, New Orleans, Louisiana.*, pages 148–157. ACM/SIAM, 1997.
  - [27] Shawn Edmondson, Jon Christensen, Joe Marks, and Stuart Shieber. A general cartographic labelling algorithm. *Cartographica*, 33(4):13–23, 1996.
  - [28] David Eppstein. Maximizing the sum of radii of disjoint balls or disks. In Thomas C. Shermer, editor, *Proceedings of the 28th Canadian Conference on Computational Geometry, CCCG 2016, Simon Fraser University, Vancouver, British Columbia, Canada*, pages 260–265. Simon Fraser University, Vancouver, British Columbia,

- Canada, 2016.
- [29] William S. Evans, David G. Kirkpatrick, Maarten Löffler, and Frank Staals. Minimizing co-location potential of moving entities. *SIAM J. Comput.*, 45(5):1870–1893, 2016.
- [30] Michael Formann. Weighted closest pairs. In Patrice Enjalbert, Alain Finkel, and Klaus W. Wagner, editors, *STACS 93, 10th Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science, Würzburg, Germany. Proceedings*, volume 665 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 270–281. Springer, 1993.
- [31] Michael Formann and Frank Wagner. A packing problem with applications to lettering of maps. In Robert L. Scot Drysdale, editor, *Proceedings of the Seventh Annual Symposium on Computational Geometry, North Conway, NH, USA*, pages 281–288. ACM, 1991.
- [32] Andreas Gemsa, Benjamin Niedermann, and Martin Nöllenburg. Trajectory-based dynamic map labeling. In Leizhen Cai, Siu-Wing Cheng, and Tak Wah Lam, editors, *Algorithms and Computation - 24th International Symposium, ISAAC 2013, Hong Kong, China, Proceedings*, volume 8283 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 413–423. Springer, 2013.
- [33] Andreas Gemsa, Benjamin Niedermann, and Martin Nöllenburg. Label placement in road maps. In Vangelis Th. Paschos and Peter Widmayer, editors, *Algorithms and Complexity - 9th International Conference, CIAC 2015, Paris, France. Proceedings*, volume 9079 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 221–234. Springer, 2015.
- [34] Andreas Gemsa, Martin Nöllenburg, and Ignaz Rutter. Sliding labels for dynamic point labeling. In *Proceedings of the 23rd Annual Canadian Conference on Computational Geometry, Toronto, Ontario, Canada, 2011*.
- [35] Andreas Gemsa, Martin Nöllenburg, and Ignaz Rutter. Consistent labeling of rotating maps. *JoCG*, 7(1):308–331, 2016.
- [36] Andreas Gemsa, Martin Nöllenburg, and Ignaz Rutter. Evaluation of labeling strategies for rotating maps. *ACM Journal of Experimental Algorithmics*, 21(1):1.4:1–1.4:21, 2016.
- [37] Emilio Di Giacomo, Walter Didimo, Seok-Hee Hong, Michael Kaufmann, Stephen G. Kobourov, Giuseppe Liotta, Kazuo Misue, Antonios Symvonis, and Hsu-Chun Yen. Low ply graph drawing. In Nikolaos G. Bourbakis, George A. Tsihrantzis, and Maria Virvou, editors, *6th International Conference on Informa-*

- 
- tion, Intelligence, Systems and Applications, IISA 2015, Corfu, Greece*, pages 1–6. IEEE, 2015.
- [38] Sungjin Im, Shi Li, Benjamin Moseley, and Eric Torng. A dynamic programming framework for non-preemptive scheduling problems on multiple machines [extended abstract]. In Piotr Indyk, editor, *Proceedings of the Twenty-Sixth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, SODA 2015, San Diego, CA, USA*, pages 1070–1086. SIAM, 2015.
- [39] Keiko Imai, Hiroshi Imai, and Takeshi Tokuyama. Maximin location of convex objects in a polygon and related dynamic Voronoi diagrams. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, 42(1):45–58, 1999.
- [40] Eduard Imhof. Positioning names on maps. *The American Cartographer*, 2(2):128–144, 1975.
- [41] Joo-Won Jung and Kyung-Yong Chwa. Labeling points with given rectangles. *Inf. Process. Lett.*, 89(3):115–121, 2004.
- [42] Gunnar W. Klau and Petra Mutzel. Automatic layout and labelling of state diagrams. In Willi Jäger and Hans-Joachim Krebs, editors, *Mathematics - Key Technology for the Future*, pages 584–608. Springer-Verlag, 2003.
- [43] Chung-Shou Liao, Chih-Wei Liang, and Sheung-Hung Poon. Approximation algorithms on consistent dynamic map labeling. *Theor. Comput. Sci.*, 640:84–93, 2016.
- [44] Joel L. Morrison. Computer technology and cartographic change. In David Ruxton Fraser Taylor, editor, *The Computer in Contemporary Cartography*. John Wiley & Sons Inc, 1980.
- [45] Yurii E. Nesterov and Michael J. Todd. Self-scaled barriers and interior-point methods for convex programming. *Math. Oper. Res.*, 22(1):1–42, 1997.
- [46] Yurii E. Nesterov and Michael J. Todd. Primal-dual interior-point methods for self-scaled cones. *SIAM Journal on Optimization*, 8(2):324–364, 1998.
- [47] Gabriele Neyer and Frank Wagner. Labeling downtown. In Gian Carlo Bongiovanni, Giorgio Gambosi, and Rossella Petreschi, editors, *Algorithms and Complexity, 4th Italian Conference, CIAC 2000, Rome, Italy, March 2000, Proceedings*, volume 1767 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 113–124. Springer, 2000.
- [48] Benjamin Niedermann and Martin Nöllenburg. An algorithmic framework for labeling road maps. In *Geographic Information Science - 9th International Conference*,

- GIScience 2016, Montreal, QC, Canada, Proceedings*, pages 308–322, 2016.
- [49] Franco P. Preparata and Michael Ian Shamos. *Computational Geometry - An Introduction*. Springer, 1985.
- [50] Zahed Rahmati. *Simple, Faster Kinetic Data Structures*. PhD thesis, Department of Computer Science, University of Victoria, 2014.
- [51] James Renegar. A polynomial-time algorithm, based on newton’s method, for linear programming. *Math. Program.*, 40(1-3):59–93, 1988.
- [52] Nadine Schwartzges, Jan-Henrik Haurert, Alexander Wolff, and Dennis Zwiebler. Point labeling with sliding labels in interactive maps. In Joaquín Huerta, Sven Schade, and Carlos Granell, editors, *Connecting a Digital Europe Through Location and Place - International AGILE’2014 Conference, Castellon, Spain*, Lecture Notes in Geoinformation and Cartography, pages 295–310. Springer, 2014.
- [53] Michael A. Soss. On the size of the euclidean sphere of influence graph. In *Proceedings of the 11th Canadian Conference on Computational Geometry, UBC, Vancouver, British Columbia, Canada*, 1999.
- [54] Tycho Strijk and Alexander Wolff. Labeling points with circles. *Int. J. Comput. Geometry Appl.*, 11(2):181–195, 2001.
- [55] Godfried T. Toussaint. A graph-theoretical primal sketch. In Godfried T. Toussaint, editor, *Computational Morphology. A Computational Geometric Approach to the Analysis of Form*, pages 222–260. North-Holland, 1988.
- [56] Godfried T. Toussaint. The sphere of influence graph: Theory and applications. *International Journal of Information Technology & Computer Science*, 14(2):37–42, 2014.
- [57] Arthur van Goethem, Marc J. van Kreveld, and Bettina Speckmann. Circles in the water: Towards island group labeling. In *Geographic Information Science - 9th International Conference, GIScience 2016, Montreal, QC, Canada, Proceedings*, pages 293–307, 2016.
- [58] Marc J. van Kreveld, Tycho Strijk, and Alexander Wolff. Point labeling with sliding labels. *Comput. Geom.*, 13(1):21–47, 1999.
- [59] Alexander Wolff, Lars Knipping, Marc van Kreveld, Tycho Strijk, and Pankaj K. Agarwal. A simple and efficient algorithm for high-quality line labeling. In Peter M. Atkinson and David J. Martin, editors, *Innovations in GIS VII: GeoComputation*, chapter 11, pages 147–159. Taylor & Francis, 2000.



- 
- [60] Alexander Wolff and Tycho Strijk. The map-labeling bibliography, 2009.
- [61] Hsiang-Yun Wu, Shigeo Takahashi, Chun-Cheng Lin, and Hsu-Chun Yen. Travel-route-centered metro map layout and annotation. *Comput. Graph. Forum*, 31(3):925–934, 2012.
- [62] Guosong Yu and Guochuan Zhang. Scheduling with a minimum number of machines. *Oper. Res. Lett.*, 37(2):97–101, 2009.
- [63] Xiao Zhang, Sheung-Hung Poon, Minming Li, and Victor C.S.Lee. On maxmin active range problem for weighted consistent dynamic map labeling. In *Proceedings of The Seventh International Conference on Advanced Geographic Information Systems, Applications, and Services, GEOProcessing 2015, Lisbon, Portugal*, pages 32–37, 2015.
- [64] Binhai Zhu and Zhongping Qin. New approximation algorithms for map labeling with sliding labels. *J. Comb. Optim.*, 6(1):99–110, 2002.
- [65] David Zuckerman. Linear degree extractors and the inapproximability of max clique and chromatic number. *Theory of Computing*, 3(1):103–128, 2007.



# 謝辞

筆者が本論文をこのようなかたちにまとめることができたのは、これまでご指導、ご助言、ご鞭撻下さった多くの皆様のおかげです。

学部4年、大学院博士課程前期課程から、博士課程後期課程まで約15年もの間、ご指導賜りました中央大学工学部情報工学科 今井 桂子 先生には、深く感謝し、厚く御礼申し上げます。大学に通っていない6年間も共同研究員として、勉強会をさせて頂きました。また、開催しているゼミには助教の先生方にも声をかけて頂き、多くの出会いと刺激を与えて頂きました。さらに今井先生には、研究面のみならず、生活面まで大変お世話になりました。すべて今井先生のお人柄のおかげであり、今井先生に支えられながら過ごした15年間でした。感謝しても感謝しきれません、本当にありがとうございます。

中央大学工学部情報工学科 浅野 孝夫 先生、今堀 慎治 先生、中央大学工学部電気電子情報通信工学科 田村 裕 先生、埼玉大学 堀山 貴史 先生には、本論文執筆にあたり、貴重なご意見を頂きました。この場を借りて、感謝の意を表します。

中央大学工学部情報工学科 鈴木 寿 先生には、航空管制官の方を紹介して頂き、本論文の実用性を明確にすることができました。心より感謝致します。

ゼミを通して、多くのご助言や励ましを下さった、明治大学 森口 昌樹 先生、九州大学 神山 直之 先生、中央大学工学部情報工学科 東川 雄哉 先生、鮎川 矩義 先生、白髪 丈晴 先生にも厚く御礼申し上げます。先生方の貴重なコメントにより、本論文を発展させることができました。

中央大学工学部情報工学科 鳥海 重喜 先生、日本 IBM 株式会社 松本 雄介 君には、同じ出身で博士を取得するという道を示して頂き、筆者にとって最も身近な目標でした。学生の頃、お二人が同じ時間にいてくださったおかげで、本論文も今の筆者もあります。深く感謝致します。

三菱電機株式会社 デザイン研究所 デジタルデザイングループおよび関係者の皆様には、仕事とは少し異なる分野の研究にもかかわらず、学位取得を応援して頂き、本当に感謝しております。皆様のご支援のおかげで本論文を作成することができました。

最後に、まだ子供が小さい中でも学位取得を後押ししてくれた妻 佳奈と、家を離れても我慢してくれた娘 絵里、息子 輝、そして、学位取得を支援してくれた両親に心より感謝致します。

# 関連文献

## 学術論文

- [J1] Yusuke Yokosuka and Keiko Imai. Polynomial time algorithms for label size maximization on rotating maps. *Journal of Information Processing*, 25:572–579, 2017.

## 国際会議

- [C1] Yuya Higashikawa, Keiko Imai, Yusuke Matsumoto, Noriyoshi Sukegawa, and Yusuke Yokosuka. Minimum point-overlap labeling. In *Proceedings of the 10th International Conference on Algorithms and Complexity, CIAC 2017, Athens, Greece*, pages 334–344, 2017.
- [C2] Yusuke Yokosuka and Keiko Imai. Polynomial time algorithms for label size maximization on rotating maps. In *Proceedings of the 25th Canadian Conference on Computational Geometry, CCCG 2013, Waterloo, Ontario, Canada*, pages 187–192, 2013.

## 国内研究会等

- [D1] 横須賀佑介, 今井桂子. 回転する地図に対するラベルサイズ最大化について. 電子情報通信学会コンピューテーション研究会, 信学技報, COMP2016-30, pages 47–52, 2016.
- [D2] 横須賀佑介, 今井桂子: 回転する地図上の正方形ラベルに対するラベルサイズ最大化. 電子情報通信学会コンピューテーション研究会, 信学技報, COMP2013-59, pages 131–135, 2013.

- [D3] 横須賀佑介, 今井桂子. 回転する地図に対するラベルサイズ最大化. 電子情報通信学会コンピューテーション研究会, 信学技報, COMP2013-18, pages 157–162, 2013.