

論文の内容の要旨

本論文では、バナッハ空間における非拡大写像の不動点近似の強収束定理を二種類の場合に与えている。その一つは、可算無限個の非拡大写像の不動点であって、同時に、与えられた一般均衡問題の解でもあるものを近似する場合であり、もう一方は、与えられたブレッグマン距離に関して必ずしもリップシツ連続とは限らない非拡大写像の不動点を近似する場合である。いずれの場合も、バナッハ空間としては一様凸かつ一様に滑らかなものを対象としている。

第一の場合は、非拡大写像として、バナッハ空間上の極大単調作用素のレゾルベントやヒルベルト空間上の非拡大写像を含む擬非拡大写像とよばれている写像を考えている。一般均衡問題としては、最適化問題・変分不等式・ミニマックス問題などを含む一般的な形を考えている。Chang - Lee - Chan (2010) は、このような一般均衡問題の解であって、二つの擬非拡大写像の共通な不動点でもある解を求める近似法を与え、その強収束定理を示した。一方、Aoyama-Kohsaka-Takahashi(2009) は可算無限個の非拡大写像族の共通の不動点に収束する近似法を考案し、その強収束定理を示した。このような背景から、本論文では、このような一般均衡問題と可算無限個の擬非拡大写像族の不動点問題の共通解に収束する近似法として、 W -写像と凸結合をそれぞれ使用するものを考察し、それぞれについて強収束定理を示している。

第二の場合は、非拡大写像として、学位申請者が新たに導入したブレッグマン距離に対する中間の意味での漸近的準非拡大写像を考えている。ブレッグマン距離はある点とその他の点の距離を与えられた凸関数とそのある点での接線のその他の点での値の差で与えられ、距離の性質のすべてを満すわけではないが、通常ノルムから定まる距離の拡張になる。凸関数としてはルジャンドルであって全凸であるものと考えている。そのうえで、ノルムから定まる距離の場合に必ずしもリップシツ連続とは限らない非拡大写像として知られている中間の意味での漸近的準非拡大写像の概念をブレッグマン距離の場合に拡張している。ブレッグマン距離の非対称性により、中間の意味での左ブレッグマン漸近的準非拡大写像と中間の意味での右ブレッグマン漸近的準非拡大写像の二種類であり、いずれの非拡大写像に対しても、近似不動点集合への左（または右）ブレッグマン射影を用いた射影近似法の強収束定理が与えられている。なお、射影近似法の構成のために、中間の意味での左（または右）ブレッグマン漸近的準非拡大写像の不動点集合への左（または右）ブレッグマン射影の一意存在も示されている。Qin-Huang-Wang(2011) やTakahashi-Yao(2008) などの結果の拡張を与える。

論文審査の結果の要旨

本論文では、バナッハ空間における非拡大写像に対する不動点問題としていくつかの形の問題を提出し、それらの問題の不動点を近似する近似解法を提案し、さらに、それらについての強収束定理を論証している。また、このために非線形関数解析学の基礎理論も含め、必要な不動点理論に関わる既存の研究結果が体系的に説明されている。

提出論文は、序文、第1章(準備)、第2章(一般均衡問題と可算無限個の擬非拡大写像族の共通不動点問題との共通解に対する近似法)、第3章(ブレッグマン距離に関して中間の意味で漸近的準非拡大写像の不動点近似法)、後書、文献表から構成されている。

第1章では、リプシッツ写像、非拡大写像、単調写像、凸関数とその劣微分など基本的な非線形写像や非線形汎関数とまたそれらに係わる概念が導入される。また、ノルムの凸性や滑らかさなどノルム空間の幾何に関する基本事項がまとめられている。

第2章では、初めに一般均衡問題に関する先行研究や可算無限個の非拡大写像族の共通不動点問題に関する先行研究がまとめられる。ついで、擬非拡大写像の概念が導入され、その性質が調べられ、一般均衡問題と可算無限個の擬非拡大写像族の不動点問題の共通解を求める問題が定式化される。ついで、ハイブリッド法による反復点列を構成し、 W -写像と凸結合をそれぞれ使用する二つの強収束定理を得ている。これらの結果は可算無限個の制約を有する一般均衡問題への応用が期待され、上記の先行研究の強収束定理の一般化であり、制約条件が可算無限個である場合でもハイブリッド法による近似が可能であることを示せたことにもなる。

第3章では、非拡大写像として中間の意味での漸近的準非拡大写像の概念が説明され、その不動点近似に関する先行研究と非拡大写像の不動点の近似法の一つである射影法に関する先行研究などがまとめられている。ついで、距離関数を一般化した概念であるブレッグマン距離が導入され、その基本性質が調べられ。さらに、ブレッグマン距離に関して中間の意味での左(または右)ブレッグマン漸近的準非拡大写像の概念が導入される。最後に、それぞれについて縮小射影法が構成可能であることとそれによる近似点列の強収束定理を得ている。これらは、ノルムから定る距

離に関して中間の意味で漸近的準非拡大写像に対して知られている研究結果の一般化を与える.

様々な分野に現れる非線形問題が非拡大型の非線形写像の不動点を求める問題として捉えられる. 代表的なものは極大単調作用素の零点を求める問題であり, そのレゾルベントを考えることにより, 零点問題を非拡大写像であるレゾルベントの不動点を求める問題に直すことができる. 極大単調作用素の零点を求める問題はある種の変分不等式の解を求める問題や凸汎関数の最小値を定める問題など最適化問題の解を求める際に現われる. また, 時間発展問題の定常解を求める問題にも現われる. このようなことから非拡大型写像の不動点問題はRockafellar やBrowder などにより非線形関数解析学の基本問題として早くから研究されている. 不動点理論では不動点の存在や一意性の解明は重要であるが, 不動点の構成法または近似法自身もまた一つの重要な問題である. 応用上の観点からも, 非拡大型の非線形写像の不動点に強収束する反復法をできるだけ簡易な形で構成することが求められる. このような観点からもすでに多くの研究成果があり, また研究活動の活発な分野になっている.

本論文はこのような研究分野における最新の研究成果をさらに一般化した結果を複数与えている. バナッハ空間上の不動点の近似は, ノルムの凸性や微分可能性の複雑さ, 双対写像の非線形性などが原因で困難な問題となるが, 先行結果を十分に吟味し, その技法を整備・拡張することにより, 新たな結果を導いている. 今後のこの分野の発展に資する研究成果と判断される. 一般バナッハ空間上の不動点近似の構成は, 不動点理論において重要な問題であり今後の応用が期待される. 論文は丁寧にかつ精緻に書かれており, 学位申請者がこの研究分野や非線形関数解析学一般について, 正確で広汎な知識を有していることを示している.

以上のことから, 本論文は博士 (理学) の学位論文として十分なものと認められる.