

Strong Convergence Theorems for Fixed Points of Nonlinear Mappings of Nonexpansive Type

中央大学大学院理工学研究科数学専攻 富澤 佑季乃

本論文では、非線形関数解析学の一つの分野である非線形写像の不動点理論について得られた研究結果を体系的に論説する。特に、バナッハ空間における非拡大型の非線形写像の不動点に関していくつかの新たな強収束定理を与える。

(1) 非線形解析学における非拡大型の非線形写像の不動点問題及び近似法の意義

非線形関数解析学は、過去数十年にわたり大幅に成長している数学分野である。この学問は物理学、科学、工学、経済学などの分野で提起される非線形問題を抽象的に扱う際に有用な分野である。応用分野に現れる非線形問題の多くは非拡大写像に代表される非線形写像の不動点を求める問題、すなわち非拡大型の非線形写像の不動点問題として捉えられる。その理由は、極大単調作用素と非拡大型の非線形写像の密接な関係にある。極大単調作用素は様々な分野で提起される非線形問題を論ずるための効果的な道具として研究が行われている。これは最小化問題や変分不等式などに代表される凸解析・最適化問題が、極大単調作用素の零点を求める問題に帰着できるからである。極大単調作用素の理論の重大な進展として、1976年に Rockafellar はヒルベルト空間における極大単調作用素の零元を見つけるアルゴリズムを導入し、基本的な収束法を示した。これを近接点法といい、極大単調作用素のレゾルベントを用いる事で極大単調作用素の零点を得るための近似点列を構成する。実は極大単調作用素のレゾルベントは非拡大性を持つため、極大単調作用素の零点問題は非拡大写像の不動点問題に帰着される。また、下半連続な凸固有関数の劣微分は極大単調作用素であり、そのレゾルベントは非拡大性を持つ事から、極大単調作用素による微分包含式の定常問題も非拡大写像の不動点問題として捉える事ができる。以上のように、非線形問題に現れる極大単調作用素と密接に関係し、その応用性から、非拡大型の非線形写像に対する不動点理論は諸分野の関心を集める研究領域となっている。

不動点理論では不動点の構築方法自体が重要な問題の一つである。実際上の観点から、非拡大型の非線形写像の不動点に収束する反復法をいかに簡易な形で構築できるかが求められる。過去に Rockafellar は近接点法が常に強収束するかという問題を提起したが、それは 1991年に Güler によって否定的に解決された。強収束が保障される近似法の構築という問題に対し、2000年に Solodov - Svaiter は射影から構成される反復によって、極大単調作用素の零点へ強収束する新しい近接点法を提案した。これはハイブリッド法と呼ばれており、2003年に中條 - 高橋がハイブリッド法を用いたヒルベルト空間における非拡大写像のための強収束定理を証明した。2008年には高橋 - 竹内 - 窪田がヒルベルト空間における非拡大写像に対して縮小射影法と呼ばれる新しい不動点近似法を導入した。この二つの近似法の利点は、反復点列の強収束が空間のコンパクト性を仮定する事なく保障される

点である。この二つは非線形写像の不動点問題に重要な役割を果たす近似法である。一方、バナッハ空間上の不動点の近似は、ノルムの凸性や微分可能性の複雑さ、双対写像の非線形性などが原因で困難な問題となる。このような背景から、バナッハ空間における非拡大型の非線形写像の不動点を見つけるための近似法は盛んに研究されている。それらの近似法は、バナッハ空間上の極大単調作用素の零点問題及びそれに帰着できる非線形問題への応用が期待される。

以上より、非線形解析学における非拡大型の非線形写像の不動点問題は抽象的理論であるが、それは他分野の非線形問題に密接に関連している事から、一般バナッハ空間上の不動点近似法の構築は不動点理論において重要な問題でありその応用が期待されるものである。

(2) 論文の主結果

本論文では、バナッハ空間における非拡大型の非線形写像の不動点問題に対し、二種類の問題提起とそれに対する新たな強収束定理を与える。

① 一般均衡問題と可算無限個の擬非拡大写像族の不動点問題の共通解を得る近似法

一般的バナッハ空間の場合、ヒルベルト空間の場合とは異なり、極大単調作用素のレゾルベントは非拡大写像ではない。この事から、2005年に松下 - 高橋はバナッハ空間上で非拡大写像の拡張となる擬非拡大写像のクラスを導入した。このクラスは一様凸かつ一様に滑らかなバナッハ空間上で零点を持つすべての極大単調作用素のレゾルベントと、ヒルベルト空間上で不動点を持つすべての非拡大写像を含んでいる。また不動点理論の動向として、様々な非線形写像のクラスが有する性質が調査されており、その不動点近似のためのアルゴリズムの構築が積極的に研究されている。近年では特に、複数の写像の凸結合や1981年に Kuhfittig が導入した W -写像を用いて、様々なクラスの非線形写像族の共通不動点問題に関して多くの研究結果が発表されている。

一般均衡問題は、最適化問題・変分不等式・ミニマックス問題や物理学・経済学における多くの問題を含んでおり、非線形問題として非常に一般的である。一般均衡問題の解法は幾つか与えられており、2008年に高橋 - 高橋がヒルベルト空間上の逆強単調作用素による一般均衡問題と非拡大写像の不動点問題の共通解を見つける強収束定理を示した。2010年には Chang - Lee - Chan は一様に滑らかな一様凸バナッハ空間上で逆強単調作用素による一般均衡問題と二つの擬非拡大写像の共通不動点問題の共通解を求める近似法を検討した。一方、同じく2010年に松下 - 中條 - 高橋は滑らかな一様凸バナッハ空間における可算無限個の擬非拡大写像族の共通不動点問題を見つけるための近似法を導入した。

このような背景から、可算無限個の写像族に対する近似法の構築を動機として、一般均衡問題と可算無限個の擬非拡大写像族の不動点問題の共通解を求める解法を研究した。ハイブリッド法による反復点列を構成し、 W -写像と凸結合をそれぞれ使用する事で、新たに二つの強収束定理を与えた。これは上記の先行研究による強収束定理の拡張であり、擬非拡大写像族が可算無限個である場合でもハイブリッド法による近似が可能である事を示せ

た。これらの結果は可算無限個の制約を有する一般化均衡問題への適用が期待される。

一様凸かつ一様に滑らかなバナッハ空間上の空でない閉凸部分集合 C に対して次を満たす二変数関数 $f: C \times C \rightarrow \mathbf{R}$ の一般均衡問題を考える。

- (1) すべての $x \in C$ に対して $f(x, x) = 0$ である、
- (2) f は単調である、
- (3) すべての $x \in C$ に対して関数 $f(x, \cdot)$ は凸かつ下半連続である、
- (4) すべての $x, y \in C$ に対して $\tau(t) = f((1-t)x + ty, y), t \in [0, 1]$

で定義される関数 $\tau: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ は上半連続である。

これを満たす関数に対する一般均衡問題を扱うには、この関数の正の数に関するレゾルベントを考える。上記の条件下で、このレゾルベントは単価で擬非拡大写像であり、その不動点集合は閉凸となり一般均衡問題の解集合と一致する。解集合の閉凸性から射影の一意的存在が保障されるので、一般均衡問題の解への近似のためにハイブリット法が利用可能である事は先行研究から明らかとなっている。そこで、可算無限個の制約つき一般均衡問題を扱う方法を研究した結果、この制約が可算無限個の擬非拡大写像族の共通不動点として表せる場合に新たな強収束定理を得た。ここでは可算無限個の擬非拡大写像族を扱うために、写像の凸結合や W -写像を導入している。擬非拡大写像の凸結合及び W -写像はそれ自身が擬非拡大性を有し、それぞれの不動点集合は写像族の共通不動点集合と一致する。従って、可算無限個の制約つき一般均衡問題の解集合は上記のレゾルベントの不動点集合と凸結合や W -写像の不動点集合の共通部分としてみなす事ができる。これより、可算無限個の制約つき一般均衡問題の解はある二つの擬非拡大写像の共通不動点と抽象的に捉えられるので、ハイブリット法によってその共通不動点への近似点列が得られる。

② レグマン距離に関してリプシッツ性を持たない非線形写像の不動点近似法

1967年に Bregman は最適化アルゴリズムの実現可能性を分析する過程で、距離関数を一般化した概念であるブレグマン距離を導入した。ブレグマン距離はメトリックを一般化した概念であり、これを用いる事で均衡問題、変分不等式、最適化問題などの工学で提起される非線形問題の研究領域は更なる発展を遂げてきた。非線形問題の解法を得るための反復アルゴリズムの研究に倣い、ブレグマン距離に対する非拡大型の非線形写像の不動点近似法について多くの研究が行われてきた。しかし非線形写像がブレグマン距離に対してリプシッツ連続でない場合の研究は未だ行われていなかった。この背景から、「ブレグマン距離に対する中間の意味での漸近的準非拡大写像」というリプシッツ性を持たない非拡大型の非線形写像の新しいクラスとして導入した。回帰的バナッハ空間上でこの新しいクラスの非線形写像の不動点集合が持つ性質を調べ、その結果からブレグマン距離によって与えられる射影が一意的に存在する事を確認した。更に、これらの写像の不動点を求めるための新しい反復近似法が縮小射影法で与えられる事を新たな強収束定理で示した。

これまでの不動点理論では主にヒルベルト空間上の距離と距離射影、及び一様に滑らかな一様凸バナッハ空間における距離射影のいくつかの拡張概念について研究が行われてい

た。1996年に Alber が導入した準距離射影、2007年に茨木 - 高橋が導入したサニー準非拡大射影はそれぞれ距離射影をバナッハ空間の場合に拡張した自然な概念であり、この二つの射影を用いる不動点近似法については多くの結果が発表されている。一方、ブregマン距離によって与えられる射影については 1981年に Censor - Lent が左ブregマン射影、2012年に Martin - Reich - Sabach が右ブregマン射影を導入しており、これはそれぞれ順番に準距離射影とサニー準非拡大射影の一般化となる。左ブregマン射影及び右ブregマン射影を用いた不動点近似法の研究は既存の結果の拡張となり、準距離射影とサニー準非拡大射影では扱えない範囲の非線形問題への応用も期待できる。

ブregマン距離に関して非リプシッツ連続な非線形写像を扱うために「中間の意味での左ブregマン漸近的準非拡大写像」(以下、L-BAQN 写像)と「中間の意味での右ブregマン漸近的準非拡大写像」(以下、R-BAQN 写像)のクラスを新たに導入した。二つの概念を与えたのはブregマン距離が対称性と三角不等式を満たさないためであり、この二つの写像の不動点問題を解く反復アルゴリズムをそれぞれ研究した。縮小射影法を用いて解決を試みた過程で、初めに L-BAQN 写像と R-BAQN 写像の不動点集合の性質を調べた。結果として、ブregマン距離を定める関数 f がルジャンドルかつ全凸であるとき、閉じた L-BAQN 写像の不動点集合が回帰的バナッハ空間上で閉凸である事が示せた。また同じ条件下で閉じた R-BAQN 写像の不動点集合の f の勾配による像が閉凸になる事が示せた。この二つの結果から、L-BAQN 写像の不動点集合に対する左ブregマン射影の一意的存在と R-BAQN 写像の不動点集合に対する右ブregマン射影の一意的存在が証明できた。従って、射影を用いる不動点近似法を考える事が出来るため、L-BAQN 写像と R-BAQN 写像のそれぞれの不動点問題に対して縮小射影法を用いた強収束定理を得た。得られた二つの強収束定理は既存の結果の一般化となる。すなわち特に、ブregマン距離が関数 $f(\cdot) = \|\cdot\|^2/2$ から導かれる場合、L-BAQN 写像の強収束定理は既存の結果である中間の意味での漸近的準非拡大写像の準距離射影による強収束定理の形となる。同様に、R-BAQN 写像の強収束定理はサニー準非拡大射影による強収束定理の形となり、更にヒルベルト空間の場合は双方の強収束定理が距離射影による縮小射影法の形となる。

以上