Bayesian decision making and its relation to frequentist methods

中央大学大学院理工学研究科数学専攻　土居　正明
Masaaki Doi

1　はじめに

本研究では，ベイズ統計学を用いた意思決定の方法について検討を行った．医学・薬学や疫学をはじめとする多くの分野で統計学的な意思決定を行う際，頻度論の仮説検定に基づく手法が主に用いられている．一方，近年各種データベースが構築されつつあり，利用可能なデータが増加していることから，蓄積された情報を有効に活用した，より効率的な意思決定を行うことが期待されている．ベイズ統計学は事前分布の構築に過去のデータを利用することができるため，この目的に適う方法論の構築とその理論的性質の解明に対して期待が高まっている．

ベイズ統計学を用いた意思決定の方法には様々なものが提案されているが，本研究では米国医薬食品局 (Food and Drug Administration, FDA) から 2010 年に発出されたガイダンス "Guidance for the use of Bayesian statistics in medical device clinical trials" において "Bayesian hypothesis testing" と表現されている方法の 1 つ，すなわち「データを与えたもとで，ある仮説が正しい事後確率を評価する」方法を扱った．

意思決定におけるベイズ統計学を用いた方法と頻度論に基づく方法の関係の検討は，頻度論に基づく方法が主流の分野では特に重要な問題であり，Casella and Berger (1987) をはじめ，数多くの検討がなされている．しかし，本研究で扱った方法に対する，確率分布を具体的に特定した上での比較は Altham (1969)，Zaslavsky (2010)，Zaslavsky (2013)，Kawasaki et al. (2014) などの少数の検討がなされているのみである．

本研究では， Altham (1969) や Kawasaki et al. (2014) において，二項分布の生起確率に対する 2 群の優越性のベイズ流の事後確率と Fisher's exact test の片側 p 値の対応関係が明確に示されたことをもとに，他の分布や状況に対するベイズ流の事後確率と頻度論の検定の p 値の関係を検討した．具体的には，Poisson 分布の rate parameter，正規分布の分散，二項分布の生起確率に対して，ベイズ流の 2 群比較のための事後確率の表現を導出すると共に，それぞれ対応する頻度論の検定の p 値との関係を明示的に与えた．

2　Poisson 分布の rate parameter の優越性および非劣性

2.1　優越性およびその一般化

まず，Poisson 分布 $Po(\lambda_i)$ $(i = 1, 2)$ の rate parameter λ_i に対して，λ_1, λ_2 の優越性を検討した．Kawasaki and Miyaoka (2012a) は，$n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ とし，データ $X_i \sim Po(n_i\lambda_i)$ を与えたもとでの λ_1, λ_2 の事後分布をガンマ分布 $Ga(a_i, b_i)$ $(i = 1, 2)$ とした場合に，指標 $\Pr(\lambda_1 < \lambda_2 \mid X_1, X_2)$ を考え，以下の表現を導出した．

$$\begin{aligned}&\Pr(\lambda_1 < \lambda_2 \mid X_1, X_2)\\ &=1 - \frac{1}{a_2 B(a_1, a_2)}\left(\frac{b_2}{b_1+b_2}\right)^{a_2}\\ &\qquad \times {}_2F_1\left(a_2, 1-a_1; 1+a_2; \frac{b_2}{b_1+b_2}\right).\end{aligned}$$

ここで，${}_2F_1(a, b; c; z)$ は Gauss の超幾何関数である．この表現は，数値計算に Gauss の超幾何関数の計算が必要であり，また，統計学的に自然な解釈を与えづらいという特徴がある．そこで本研究では，まずこの指標に対するより簡潔かつ統計学的な解釈のしやすい表現を与えた．

定理 2.1（Doi (2016)） Poisson 分布 $Po(\lambda_i)$ $(i = 1, 2)$ に対して，λ_i の事後分布を $Ga(a_i, b_i)$ とする $(a_i, b_i > 0)$．このとき，事後確率 $\Pr(\lambda_1 < \lambda_2 \mid X_1, X_2)$ は以下の 2 通りに表現できる．

$$\begin{aligned}\Pr(\lambda_1 < \lambda_2 \mid X_1, X_2) &= I_{b_1/(b_1+b_2)}(a_1, a_2)\\ &= F_{2a_1, 2a_2}\left(\frac{b_1/a_1}{b_2/a_2}\right).\end{aligned}$$

ここで，$I_x(a, b)$ および $F_{\nu_1,\nu_2}(x)$ はそれぞれ自由度 (a, b) のベータ分布 $Beta(a, b)$ および自由度 (ν_1, ν_2) の F 分布 $F(\nu_1, \nu_2)$ の累積分布関数である．

a_1, a_2 が共に自然数の場合，事後確率はさらに以下の 2 通りに表現できる．

$$\Pr(\lambda_1 < \lambda_2 \mid X_1, X_2)$$

$$= \sum_{r=0}^{a_2-1} \binom{a_1+a_2-1}{r} \left(\frac{b_2}{b_1+b_2}\right)^r \left(\frac{b_1}{b_1+b_2}\right)^{a_1+a_2-1-r} \tag{1}$$

$$= \sum_{r=0}^{a_2-1} \binom{a_1+r-1}{a_1-1} \left(\frac{b_1}{b_1+b_2}\right)^{a_1} \left(\frac{b_2}{b_1+b_2}\right)^r. \tag{2}$$

ここで，(1) 式 および (2) 式 はそれぞれ，二項分布および負の二項分布の累積分布関数である．

定理 2.1 の特徴は以下の通りである．

(a) 近似を用いない正確な確率の表現を与えている．
(b) 標準的な統計ソフトで容易に計算できる．
(c) よく知られた確率分布の累積分布関数で表現されているため，統計学的意味付けがしやすい．

次に，(c) に関して，頻度論の検定との対応を検討した．2 群の Poisson rate parameter の優越性を検討する頻度論の検定として，Przyborowski and Wilenski (1940)，Krishnamoorthy and Thomson (2004) に従い，以下の条件付き検定を考える．まず，Poisson 分布 $Po(\lambda_i)$ と $n_i \in \mathbb{N}$ $(i=1,2)$ に対して，$X_i \sim Po(n_i\lambda_i)$ $(i=1,2)$ とする．このとき，$X_1=k_1, X_2=k_2$ とすると，$X_1+X_2=k_1+k_2$ を与えたもとでの X_1 の条件付き分布の確率関数は，

$$
\begin{aligned}
&f(X_1=k_1 \,|\, X_1+X_2=k_1+k_2)\\
=&\binom{k_1+k_2}{k_1}\\
&\times\left(\frac{n_1\lambda_1}{n_1\lambda_1+n_2\lambda_2}\right)^{k_1}\left(\frac{n_2\lambda_2}{n_1\lambda_1+n_2\lambda_2}\right)^{(k_1+k_2)-k_1}
\end{aligned}
$$

で与えられる．これより，帰無仮説 $H_0: \lambda_1 \geq \lambda_2$ および対立仮説 $H_1: \lambda_1 < \lambda_2$ に対する条件付き検定の p 値

$$
\begin{aligned}
p &= P(X_1 \leq k_1 \,|\, X_1+X_2=k_1+k_2, \lambda_1=\lambda_2)\\
&=\sum_{r=0}^{k_1}\binom{k_1+k_2}{r}\left(\frac{n_1}{n_1+n_2}\right)^{r}\left(\frac{n_2}{n_1+n_2}\right)^{k_1+k_2-r} \qquad (3)
\end{aligned}
$$

に対して，以下の定理を示した．

定理 2.2（Doi (2016)） Poisson 分布 $Po(\lambda_i)$ $(i=1,2)$ に対して，$n_i \in \mathbb{N}$ とし，$X_i \sim Po(n_i\lambda_i)$ とおく．また，λ_i の事前分布を $Ga(\alpha_i, \beta_i)$ とする $(\alpha_i, \beta_i > 0)$．

(i) $k_1 \in \mathbb{N}\cup\{0\}, k_2 \in \mathbb{N}$ とする．このとき，$X_1=k_1+1, X_2=k_2$ のときの $\Pr(\lambda_1<\lambda_2 \,|\, X_1,X_2)$ と，$X_1=k_1, X_2=k_2$ のときの (3) 式の p 値の間に，以下の関係が成り立つ．

$$\lim_{(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)\to(0,0,0,0)}\Pr(\lambda_1<\lambda_2 \,|\, X_1,X_2)=1-p.$$

ここで，n_1, n_2 は $\Pr(\lambda_1<\lambda_2 \,|\, X_1,X_2)$ および p 値の計算に対して共通とする．

(ii) $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2,k_1,k_2 \in \mathbb{N}$ とし，$k_1 \geq \alpha_1, k_2 \geq \alpha_2, m_1 > \beta_1, m_2 > \beta_2$ とする．このとき，$X_1=k_1-\alpha_1+1, X_2=k_2-\alpha_2$, $n_1=m_1-\beta_1, n_2=m_2-\beta_2$ のときの $\Pr(\lambda_1<\lambda_2 \,|\, X_1,X_2)$ と，$X_1=k_1, X_2=k_2$, $n_1=m_1, n_2=m_2$ のときの (3) 式の p 値に対して，以下の関係が成り立つ．

$$\Pr(\lambda_1<\lambda_2 \,|\, X_1,X_2)=1-p.$$

次に，定理 2.2(i) に関して，λ_i の事前分布の確率密度関数が $\beta_i^{\alpha_i}/\Gamma(\alpha_i)\lambda_i^{\alpha_i-1} \propto \lambda_i^{\alpha_i-1}\exp(-\beta_i\lambda_i) \xrightarrow[(\alpha_i,\beta_i)\to(0,0)]{} \lambda^{-1}$ を満たすことに注目した．さらに，事後確率と p 値では，X_1 の値が 1 異なる場合が対応付けられている点を，事前分布を非対称とすることで解消することを考えた．つまり，$f(\lambda_1)\propto 1, f(\lambda_2)\propto\lambda_2^{-1}$ とした場合，X_1, X_2 が共通の状況で，事後確率と p 値との対応がつくことが予想される．実際，以下の系が成り立つ．

系 2.1 λ_1, λ_2 の事前分布をそれぞれ $f(\lambda_1)\propto 1, f(\lambda_2)\propto\lambda_2^{-1}$ と仮定する． $X_2>0$ のとき，$\Pr(\lambda_1<\lambda_2 \mid X_1,X_2)$ と (3) 式の p 値の間に，以下の関係が成り立つ．

$$\Pr(\lambda_1<\lambda_2 \mid X_1,X_2)=1-p.$$

定理 2.2 および系 2.1 は，Altham (1969) や Kawasaki et al. (2014) で示された，生起確率 π_1, π_2 の二項分布に対する同様の事後確率 $\Pr(\pi_1>\pi_2 \mid X_1,X_2)$ と，Fisher's exact test の片側 p 値の関係に対応するものと解釈できる．定理 2.2 および系 2.1 の特徴は以下の通りである．

(a) 定理 2.2 は，頻度論の検定の片側 p 値と，ベイズ流の「対立仮説が正しい事後確率」$\Pr(\lambda_1<\lambda_2 \mid X_1,X_2)=\Pr(H_1 \mid X_1,X_2)$ の間の対応を与えている．特に，(i) ではある意味での無情報事前分布に対応する状況を，(ii) ではより一般の事前分布に対応する状況の関係を示している．

(b) 系 2.1 は，事前分布を非対称に調整することで，「同じデータ (X_1,X_2) のもとで」の事後確率 $\Pr(\lambda_1<\lambda_2 \mid X_1,X_2)$ と頻度論の検定の p 値を完全に一致させることができることを示している．すなわち，有意水準片側 2.5% の検定と全く同じ意思決定を「$\Pr(\lambda_1<\lambda_2 \mid X_1,X_2)>0.975$ のときに $\lambda_1<\lambda_2$ が成り立つ，と判断する」ことにより実施できることが分かる．

次に，これらの定理および系を，非劣性等を含むように一般化した．すなわち，事後確率 $\Pr(\lambda_1/\lambda_2<c \,|\, X_1,X_2)$ と，帰無仮説 $H_0: \lambda_1/\lambda_2 \geq c$，対立仮説 $H_1: \lambda_1/\lambda_2 < c$ に対する条件付き検定の片側 p 値の関係について，定理 2.1，2.2 および系 2.1 に対応する定理を示した．

2.2 Poisson rate parameter の差に基づく非劣性の検討

次に，Poisson rate parameter に対する非劣性の指標として，$\Pr(\lambda_1<\lambda_2+\Delta \mid X_1,X_2)$ を考える．ここで，$\Delta>0$ は非劣性マージンである．このとき，下記表現を導出した．

定理 2.3 Poisson 分布 $Po(\lambda_i)$ $(i=1,2)$ に対して $a_i \in \mathbb{N}, b_i>0$ とし，λ_i の事後分布がガンマ分布 $Ga(a_i,b_i)$ とする．このとき，以下の関係が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
&\Pr(\lambda_1<\lambda_2+\Delta \mid X_1,X_2)\\
=&1-\sum_{j=0}^{a_1-1}\frac{(b_1\Delta)^j}{j!}\cdot\exp(-b_1\Delta)\\
&\times\sum_{r=0}^{a_1-1-j}\frac{\Gamma(r+a_2)}{r!\cdot\Gamma(a_2)}\left(\frac{b_2}{b_1+b_2}\right)^{a_2}\left(\frac{b_1}{b_1+b_2}\right)^{r}\\
=&1-f_{Poi}*F_{NB}(a_1-1).
\end{aligned}
$$

ここで，$x\in\mathbb{Z}$ に対して，

$$
f_{Poi}(x)=\begin{cases}0 & (x=-1,-2,\ldots)\\ \dfrac{(b_1\Delta)^x}{x!}\cdot\exp(-b_1\Delta) & (x=0,1,2,\ldots)\end{cases}
$$

は Poisson 分布 $Po(b_1\Delta)$ の確率関数であり，

$$
F_{NB}(x)=\begin{cases}0 & (x=-1,-2,\ldots)\\ \displaystyle\sum_{r=0}^{x}\frac{\Gamma(r+a_2)}{r!\cdot\Gamma(a_2)}\left(\frac{b_2}{b_1+b_2}\right)^{a_2}\left(\frac{b_1}{b_1+b_2}\right)^{r} & (x=0,1,2,\ldots)\end{cases}
$$

は，負の二項分布 $NB\left(a_2, b_1/(b_1+b_2)\right)$ の累積分布関数である．また，$*$ は数列の畳み込み，すなわち，2 つの数列

$f(n), g(n)$ に対して $f * g(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(n-m) \cdot g(m)$ である．

この表現により，数値積分等が不要で，容易に正確な確率が計算可能となった．次に，系 2.1 を受け，Ibrahim and Chen (2000) で提案された conditional power prior を利用し，事前分布を検討した．過去のデータ $n_{01}, n_{02}, X_{01}, X_{02}$ を用いたうえで，$0 < a_{01}, a_{02} \leq 1$ に対して，

$$\alpha_1 := [a_{01}X_{01}] + 1, \beta_1 := a_{01}n_{01},$$
$$\alpha_2 := [a_{02}X_{02}], \beta_2 := a_{02}n_{02}.$$

とおく．ここで，$i = 1,2$ に対して λ_i の事前分布を $Ga(\alpha_i, \beta_i)$ とする（$n_{0i} > 0$ は仮定する）．(3) 式で求めた $H_0: \lambda_1 \geq \lambda_2, H_1: \lambda_1 < \lambda_2$ に対する優越性の検定の p 値に対して，以下の関係が成り立つ．

定理 2.4 (i) $X_2 > 0$ とする．このとき，$\Pr(\lambda_1 < \lambda_2 + \Delta \mid X_1, X_2)$ と $H_0: \lambda_1 \geq \lambda_2, H_1: \lambda_1 < \lambda_2$ に対する，(3) 式の優越性の p 値の間に，以下の関係が成り立つ．

$$\lim_{a_{01}, a_{02}, \Delta \to +0} P(\lambda_1 < \lambda_2 + \Delta \mid X_1, X_2) = 1 - p.$$

(ii) $i = 1,2$ に対して，$\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{N}$ とする．ここで，λ_i の事前分布を $Ga(\alpha_i, \beta_i)$ とし，$m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ とする．このとき，$X_1 = k_1 - \alpha_1 + 1, X_2 = k_2 - \alpha_2, n_1 = m_1 - \beta_1, n_2 = m_2 - \beta_2$ のときの $P(\lambda_1 < \lambda_2 + \Delta \mid X_1, X_2)$ と，$X_1 = k_1, X_2 = k_2, n_1 = m_1, n_2 = m_2$ のときの $H_0: \lambda_1 \geq \lambda_2, H_1: \lambda_1 < \lambda_2$ に対する (3) 式の優越性の p 値との間に，以下の関係が成り立つ．

$$\lim_{\Delta \to +0} P(\lambda_1 < \lambda_2 + \Delta \mid X_1, X_2) = 1 - p.$$

定理 2.4 により，非劣性マージンが $\Delta \to +0$ となるときの事後確率と (3) 式の p 値の関係が明示的に示され，これによりベイズ流の非劣性の確率に基づく意思決定が「条件付き検定のベイズ流の非劣性への拡張」と解釈できる．

3 正規分布の分散の優越性および同等性

次に，正規分布に従うデータの分散の優越性および同等性を検討した．正規分布 $N(\mu_i, \sigma_i^2)$ $(i = 1,2)$ に対して，$x_{ij} \overset{ind}{\sim} N(\mu_i, \sigma_i^2)$ とし $(j = 1, \ldots, n_i)$，$\mathbf{x}_i = (x_{i1}, \ldots, x_{in_i})'$ とおく．ここで，分散の優越性の指標 $\Pr(\sigma_1^2 > \sigma_2^2 \mid \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ を考え，定理 2.1 と類似した下記定理が成り立つことを示した．

定理 3.1（Doi et al. (2017a)） 正規分布 $N(\mu_i, \sigma_i^2)$ $(i = 1,2)$ に対して，σ_i^2 の（周辺）事後分布が逆ガンマ分布 $Inv\text{-}Ga(a_i, b_i)$ とする．このとき，事後確率 $\Pr(\sigma_1^2 > \sigma_2^2 \mid \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ は以下の 3 種類の表現をもつ．

$$\begin{aligned}\Pr(\sigma_1^2 > \sigma_2^2 \mid \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) =& 1 - \frac{1}{a_2 B(a_1, a_2)} \left(\frac{b_2}{b_1 + b_2}\right)^{a_2} \\ & \times {}_2F_1\left(a_2, 1 - a_1; 1 + a_2; \frac{b_2}{b_1 + b_2}\right) \\ =& I_{b_1/(b_1+b_2)}(a_1, a_2) \\ =& F_{2a_1, 2a_2}\left(\frac{b_1/a_1}{b_2/a_2}\right).\end{aligned}$$

3.1 分散の優越性

まず，平均既知の場合の分散の優越性を検討した．

定理 3.2（Doi et al. (2017a)） 正規分布 $N(\mu_i, \sigma_i^2)$ $(i = 1,2)$ に対して，μ_i が既知であり，σ_i^2 の事前分布が $Scaled\text{-}inv\text{-}\chi^2(\nu_i, \tau_i^2)$ とする $(\nu_i, \tau_i^2 > 0)$．このとき，事後確率 $\Pr(\sigma_1^2 > \sigma_2^2 \mid \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ と $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2, H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$ に対する F 検定の片側 p 値の間に，以下の関係が成り立つ．

$$\lim_{(\nu_1, \nu_2) \to (0,0)} \Pr(\sigma_1^2 > \sigma_2^2 \mid \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = 1 - p.$$

ここで，$Scaled\text{-}inv\text{-}\chi^2(\nu_i, \tau_i^2)$ の確率密度関数は

$$f(\sigma_i^2 \mid \nu_i, \tau_i^2) = \frac{\left(\nu_i \tau_i^2/2\right)^{\nu_i/2} (\sigma_i^2)^{-\nu_i/2-1}}{\Gamma(\nu_i/2)} \exp\left(-\frac{\nu_i \tau_i^2}{2\sigma_i^2}\right)$$

である $(\nu_i, \tau_i > 0)$．

ここで，事前分布に対して，

$$f(\sigma_i^2 \mid \nu_i, \tau_i^2) \propto (\sigma_i^2)^{-\nu_i/2-1} \exp\left(-\frac{\nu_i \tau_i^2}{2\sigma_i^2}\right) \xrightarrow[\nu_i \to 0]{} (\sigma_i^2)^{-1}$$

となる．これより，$\nu_i \to 0$ に対応する事前分布として $f(\sigma_i^2) \propto (\sigma_i^2)^{-1}$ を考えると，以下が成り立つ．

系 3.1（Doi et al. (2017a)） $i = 1,2$ に対して，μ_i が既知であり，σ_i^2 の事前分布が $f(\sigma_i^2) \propto (\sigma_i^2)^{-1}$ の場合，以下が成り立つ．

$$\Pr(\sigma_1^2 > \sigma_2^2 \mid \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = 1 - p.$$

系 3.1 は，「（ある意味での）無情報事前分布を用いた事後確率が，F 検定の片側 p 値と一致する」ことを示している．

さらに，本定理に対して，平均が未知であり，(i) 平均および分散の各事前分布が独立でそれぞれ $f(\mu_i) \propto 1$，分散 $Scaled\text{-}inv\text{-}\chi^2(\mu_i, \tau_i^2)$ の場合と，(ii) 平均と分散の同時事前分布が正規逆ガンマ分布の場合にも，定理 3.2 および系 3.1 と同様の関係が成り立つことを示した．

3.2 分散の同等性

次に，分散の同等性の指標 $\Pr(1/\Delta < \sigma_1/\sigma_2 < \Delta \mid \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ を考え，以下の表現を導出した．

定理 3.3（Doi et al. (2017a)） 正規分布 $N(\mu_i, \sigma_i^2)$ $(i = 1,2)$ に対して，σ_i^2 の（周辺）事後分布が $Scaled\text{-}inv\text{-}\chi^2(a_i, b_i)$ とする．このとき，事後確率 $\Pr(1/\Delta < \sigma_1/\sigma_2 < \Delta \mid \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ は以下の 3 種類の表現をもつ．

$$\begin{aligned}&\Pr(1/\Delta < \sigma_1/\sigma_2 < \Delta \mid \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \\ =& F_{2a_1, 2a_2}\left(\frac{b_1/a_1}{b_2/a_2} \cdot \Delta^2\right) - F_{2a_1, 2a_2}\left(\frac{b_1/a_1}{b_2/a_2} \cdot \frac{1}{\Delta^2}\right) \\ =& I_{\frac{b_1 \cdot \Delta^2}{b_1 \cdot \Delta^2 + b_2}}(a_1, a_2) - I_{\frac{b_1/\Delta^2}{b_1/\Delta^2 + b_2}}(a_1, a_2) \\ =& \frac{1}{a_2 B(a_1, a_2)} \left(\frac{b_2}{b_1/\Delta^2 + b_2}\right)^{a_2} \\ & \times {}_2F_1\left(a_2, 1 - a_1; 1 + a_2; \frac{b_2}{b_1/\Delta^2 + b_2}\right)\end{aligned}$$

$$
-\frac{1}{a_2 B(a_1,a_2)}\left(\frac{b_2}{b_1\cdot\Delta^2+b_2}\right)^{a_2}
\times {}_2F_1\left(a_2, 1-a_1; 1+a_2; \frac{b_2}{b_1\cdot\Delta^2+b_2}\right).
$$

4 二項分布の生起確率の非劣性

X_i が独立に二項分布 $Bin(n_i,\pi_i)$ に従うとする ($i=1,2$)．このとき，生起確率に対する非劣性の指標 $\Pr(\pi_1>\pi_2-\Delta\mid X_1,X_2)$ に対して ($\Delta>0$ は非劣性マージン), Gamalo et al. (2011) では Monte Carlo 積分を用いた近似的な評価が行われ，Kawasaki and Miyaoka (2012b) では Appell の超幾何級数を用いた複雑な表現がなされている．本研究では，下記の正確な表現を与えた．

定理 4.1（Doi et al. (2017b)） 二項分布 $Bin(n_i,\pi_i)$ ($i=1,2$) に対して，π_i の事後分布が $Beta(a_i,b_i)$ とする ($a_i,b_i\in\mathbb{N}$)．このとき，事後確率 $\Pr(\pi_1>\pi_2-\Delta\mid X_1,X_2)$ は以下のように表現できる．

$$
\begin{aligned}
&\Pr(\pi_1>\pi_2-\Delta\mid X_1,X_2)\\
=&I_\Delta(a_2,b_2)+\sum_{s_1=0}^{a_1-1}\sum_{s_2=0}^{b_1-1}\binom{a_1+b_1-1}{s_1+s_2}\\
&\times\binom{a_1+b_1-s_1-s_2-2}{a_1-s_1-1}\cdot(-1)^{a_1-s_1-1}\\
&\times\Delta^{a_1+b_1-1-s_1-s_2}\binom{s_1+s_2}{s_1}\frac{B(a_2+s_1,b_2+s_2)}{B(a_2,b_2)}\\
&\times I_{1-\Delta}(b_2+s_2,a_2+s_1)\\
&+\sum_{s_1=0}^{a_1-1}\binom{a_1+b_1-1}{s_1}\frac{B(a_2+s_1,b_2+a_1+b_1-1-s_1)}{B(a_2,b_2)}\\
&\times I_{1-\Delta}(b_2+a_1+b_1-1-s_1,a_2+s_1) \qquad (4)
\end{aligned}
$$

このとき，2.2 節同様，conditional power prior の使用および，Fisher's exact test との対応を考慮し，

$$
\alpha_1:=[a_{01}X_{1H}],\beta_1:=[a_{01}(n_{1H}-X_{1H})]+1,\\
\alpha_2:=[a_{02}X_{2H}]+1,\beta_2:=[a_{02}(n_{2H}-X_{2H})]
$$

とおき，π_i の事前分布を $Beta(\alpha_i,\beta_i)$ とおく ($0\le a_{01},a_{02}\le 1, n_{1H},n_{2H}\in\mathbb{N}, 0\le X_{1H}\le n_{1H}, 0\le X_{2H}\le n_{2H}$ かつ $X_{1H},X_{2H}\in\{0\}\cup\mathbb{N}$ を仮定する)．このとき，以下の定理が成り立つことを示した．

定理 4.2（Doi et al. (2017b)） (i) $X_1=k_1,X_2=k_2$ とし，$k_1>0,k_2<n_2$ とする．このとき，$\Pr(\pi_1>\pi_2-\Delta\mid X_1,X_2)$ と Fisher's exact test の片側 p 値の間に，以下の関係が成り立つ．

$$
\lim_{a_{01},a_{02},\Delta\to+0}\Pr(\pi_1>\pi_2-\Delta\mid X_1,X_2)=1-p.
$$

(ii) $\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2,m_1,m_2\in\mathbb{N}$ とし, $\alpha_1<k_1\le m_1,\alpha_2\le k_2<m_2-\beta_2$ とする．このとき，$X_1=k_1-\alpha_1,n_1=m_1-(\alpha_1+\beta_1)+1,X_2=k_2-\alpha_2+1,n_2=m_2-(\alpha_2+\beta_2)+1$ のときの $\Pr(\pi_1>\pi_2-\Delta\mid X_1,X_2)$ と，$X_1=k_1,X_2=k_2,n_1=m_1,n_2=m_2$ のときの Fisher's exact test の片側 p 値の間に，以下の関係が成り立つ．

$$
\lim_{\Delta\to+0}\Pr(\pi_1>\pi_2-\Delta\mid X_1,X_2)=1-p.
$$

定理 4.2 は，Poisson rate parameter に対する定理 2.4 に対応するものである．

参考文献

Altham, P. M. (1969). Exact Bayesian analysis of a 2× 2 contingency table, and Fisher's "exact" significance test. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 31(2):261–269.

Casella, G. and Berger, R. L. (1987). Reconciling Bayesian and frequentist evidence in the one-sided testing problem. *Journal of the American Statistical Association*, 82(397):106–111.

Doi, M. (2016). Bayesian index of superiority and the p-value of the conditional test for Poisson parameters. *Journal of the Japan Statistical Society*, 46(2):99–127.

Doi, M., Ide, K., and Kawasaki, Y. (2017a). Bayesian indexes of superiority and equivalence and the p-value of the F-test for the variances of normal distributions. *Japanese Journal of Biometrics*, 38(1):1–16.

Doi, M., Takahashi, F., and Kawasaki, Y. (2017b). Bayesian noninferiority test for 2 binomial probabilities as the extension of Fisher exact test. *Statistics in Medicine*, 36(30):4789–4803.

Gamalo, M. A., Wu, R., and Tiwari, R. C. (2011). Bayesian approach to noninferiority trials for proportions. *Journal of Biopharmaceutical Statistics*, 21(5):902–919.

Ibrahim, J. G. and Chen, M.-H. (2000). Power prior distributions for regression models. *Statistical Science*, 15(1):46–60.

Kawasaki, Y. and Miyaoka, E. (2012a). A Bayesian inference of $P(\lambda_1<\lambda_2)$ for two Poisson parameters. *Journal of Applied Statistics*, 39(10):2141–2152.

Kawasaki, Y. and Miyaoka, E. (2012b). A Bayesian inference of $P(\pi_1>\pi_2)$ for two proportions. *Journal of Biopharmaceutical Statistics*, 22(3):425–437.

Kawasaki, Y., Shimokawa, A., and Miyaoka, E. (2014). On the Bayesian index of superiority and the p-value of the Fisher exact test for binomial proportions. *Journal of the Japan Statistical Society*, 44(1):73–81.

Krishnamoorthy, K. and Thomson, J. (2004). A more powerful test for comparing two Poisson means. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 119(1):23–35.

Przyborowski, J. and Wilenski, H. (1940). Homogeneity of results in testing samples from Poisson series: With an application to testing clover seed for dodder. *Biometrika*, 31(3/4):313–323.

Zaslavsky, B. G. (2010). Bayesian versus frequentist hypotheses testing in clinical trials with dichotomous and countable outcomes. *Journal of Biopharmaceutical Statistics*, 20(5):985–997.

Zaslavsky, B. G. (2013). Bayesian hypothesis testing in two-arm trials with dichotomous outcomes. *Biometrics*, 69(1):157–163.