Boundedness of spectral multipliers for Schrödinger operators and its applications to Besov spaces

数学専攻　谷口 晃一
KOICHI Taniguchi

本学位論文では, Schrödinger 作用素に対するスペクトル掛け算作用素の Lebesgue 空間における有界性, および開集合上の Besov 空間に関する結果がまとめられている.

1　序

ユークリッド空間, あるいはより一般の位相群上での偏微分方程式の解作用素, および Sobolev 空間などの関数空間は, Fourier 変換で定義される Fourier 掛け算作用素によって表現され, 群上の偏微分方程式論や関数空間論は Fourier 解析に基づいて発展してきた. しかし, Fourier 掛け算作用素の理論が適用できない場合も数多くある. 例えばユークリッド空間において滑らかでない領域, あるいは境界が非有界な領域に対して Fourier 変換を定義することは困難である. このような領域上における偏微分方程式あるいは関数空間の研究方法の一つとして, スペクトル掛け算作用素を用いる方法が知られている. スペクトル掛け算作用素とは, Hilbert 空間上の自己共役作用素の関数のことであり自己共役作用素のスペクトル分解によって定義される. この種の作用素は Fourier 掛け算作用素の一般化になっており, 領域上で定義された自己共役作用素を用いることで, 領域の境界に対し解析的あるいは幾何学的な条件を一切仮定せずに, 様々な設定で偏微分方程式や関数空間を扱うことを可能にする.

1970 年代以降, Lie 群上の Laplace 作用素やユークリッド空間上の Schrödinger 作用素などの様々な自己共役作用素に対して, スペクトル掛け算作用素の有界性に関する結果が得られている. これらの結果は 1990 年頃から関数空間論, 特に Besov 空間論に応用されている.

Besov 空間は 1960 年頃に Besov によって導入された関数空間であり, Sobolev 空間などの従来の関数空間よりも関数の微分可能性や可積分性を正確に記述している. しかし, この利点と引き換えにこの関数空間は 3 つのパラメータをもつ複雑な空間となっている. Besov 空間には様々な同値な定義が知られており, 特に Peetre による Fourier 掛け算作用素を用いた定義は非線形偏微分方程式の適切性などの研究において重要な役割を果たしている. 近年では, Fourier 掛け算作用素の代わりにスペクトル掛け算作用素を用いて領域上

で Besov 空間が定義されている．しかし, 各パラメータに制限を課さずに任意の開集合上で Besov 空間を定義した結果は知られていない．このことを実現するためには Schwartz 超関数の理論が必要不可欠であるが, 一般の開集合においては Schwartz 超関数に対応する超関数の理論が確立されていなかった．

本論文では, 開集合上における Schrödinger 作用素に対するスペクトル掛け算作用素の Lebesgue 空間における有界性を証明し, その結果を Besov 空間論へ応用する．具体的には, スペクトル掛け算作用素の有界性の結果を基に, 各パラメータに制限を課さずに開集合上で Besov 空間を定義しその基本的な性質を証明する．そのために, 開集合上で Schwartz 超関数に対応する新たな超関数を定義する．さらに, Besov 空間における双線形評価式を導出する．また双線形評価式の研究に関連して, 外部領域における熱方程式の解に対する勾配微分評価式を証明し, その時間減衰率を明らかにする．以上の研究成果は, Drichlet 境界条件の下で得られた結果である．本論文の最終章では, Neumann 境界条件の場合においてスペクトル掛け算作用素および Besov 空間に関する同様の研究を行い, 類似の結果を示す．

2　主結果

(1) スペクトル掛け算作用素の Lebesgue 空間における有界性

ユークリッド空間における開集合上で定義された Schrödinger 作用素に対してスペクトル掛け算作用素の Lebesgue 空間における有界性を証明した．さらに, 同様の方法によりスペクトル掛け算作用素に対する勾配微分評価式を導出できることも明らかにした．ここで, ポテンシャルは実数値可測関数であり, ポテンシャルの正部分は局所可積分関数, 負部分は加藤型ポテンシャルである．加藤型ポテンシャルとは, 負部分の特異性を制御するために加藤によって導入された条件を満たすポテンシャルをいい, 典型的な例は $|x|^{-\alpha}$ ($\alpha \in [0, 2)$) である ([8] を参照)．また, 境界条件として斉次 Dirichlet 境界条件を課している．以上の結果を示すために, Schrödinger 作用素によって生成される熱半群に対する Gauss 型各点評価式を証明した．

詳細については, 本論文の 2 章および 3 章に記載されている．また, 以上の結果は論文 [7] にまとめられている．

(2) 開集合上の Besov 空間

項目 (1) で得られた結果を基に, Schrödinger 作用素に対するスペクトル掛け算作用素を用いて開集合上で Besov 空間を定義した．より正確には, Schrödinger 作用素を何回でも作用できる様に関数の概念を拡張し新たな超関数の定義を与え, その超関数の空間の部

分空間として Besov 空間を開集合上で定義した．さらに, 完備性, 双対性, 各種埋め込み定理などの基本的な性質を証明した．この Besov 空間は Fourier 掛け算作用素を用いてユークリッド空間上で定義される Besov 空間の一般化になっている．本論文では, この空間を Schrödinger 作用素によって生成された Besov 空間と呼ぶ．また, 各パラメータおよびポテンシャルに関する然るべき仮定の下で Schrödinger 作用素によって生成された Besov 空間と Dirichlet Laplacian によって生成された Besov 空間に対する同型性定理を証明した．この種の研究に関しては領域がユークリッド空間の場合には, Georgiev-Visciglia や D'Ancona-Pierfelice による結果が知られており, ポテンシャル項を持つ波動方程式の分散型評価式の研究に応用されている ([1,3] を参照).

詳細については, 本論文の 4 章に記載されている．また, 以上の結果は論文 [5] にまとめられている．

(3) Besov 空間における双線形評価式

Besov 空間における双線形評価式は分数階微分に対する Leibniz 則に相当する評価式であり, Navier-Stokes 方程式や KdV 方程式などの非線形偏微分方程式の研究に取り入れられ, 主に非線形項の分数階微分を扱う上で基本的な役割を果たしている．領域上における非線形偏微分方程式の研究についてもこの種の評価式が基本的な役割を果たすことは想像に難くない．

本論文では, 領域上の Dirichlet Laplacian によって生成された Besov 空間における双線形評価式を証明した．この結果を得るために, 熱方程式の解に対する勾配微分評価式を仮定している．これは領域に対する仮定であり, 勾配微分評価式が成り立つ領域を明らかにすることが重要となる．このような領域の例として, ユークリッド空間, 半空間, 有界領域, 外部領域などが挙げられる．外部領域における勾配微分評価式は後述の項目 (4) で得られた結果である．また項目 (1) で得られた勾配微分評価式の結果から, 任意の開集合上においても双線形評価式に関する部分的な結果が得られる．さらに, 項目 (2) で述べた同型性定理より各パラメータおよびポテンシャルに関する然るべき仮定の下で Schrödinger 作用素によって生成された Besov 空間に対しても双線形評価式が得られる．

詳細については, 本論文の 5 章に記載されている．また, 以上の結果はプレプリント [6] にまとめられている．

(4) 外部領域における熱方程式の勾配微分評価式

外部領域における熱方程式の Dirichlet 問題の解に対して勾配微分評価式を証明した．領域がユークリッド空間および半空間の場合は解の具体的な表現が知られているため, 解の勾配微分を直接計算することでこの種の評価式が得られるとともに, 時間に関する減衰率が $t^{-1/2}$ であることも明らかになる．しかし, 外部領域の場合は解を具体的に書き表す

ことが困難であり, さらに一般には時間減衰率が $t^{-1/2}$ ではないことが示されている (石毛-壁谷 [4] を参照). 本論文では, 外部領域における熱方程式の Dirichlet 問題の解に対して勾配微分評価式を証明し, その時間減衰率を明らかにした.

詳細については, 本論文の 6 章に記載されている. また, 以上の結果は論文 [2] にまとめられている.

(5) Neumann 境界条件の場合における結果

項目 (1)–(4) は Dirichlet 境界条件の下で得られた結果である. 本論文の最終章では, 境界条件として斉次 Neumann 境界条件を課しスペクトル掛け算作用素の有界性および Besov 空間に関する同様の研究を行う. 具体的には, Lipschitz 領域上における Neumann Laplacian に対して, スペクトル掛け算作用素の Lebesgue 空間における有界性を証明し, その結果を基に Neumann Laplacian によって生成される Besov 空間を定義する. さらに, Besov 空間の基本的性質, 双線形評価式, 熱方程式の Neumann 問題に対する勾配微分評価式を証明した. Dirichlet 境界条件の場合との違いは, 有界領域を扱う際に現れる. 実際, 有界領域における Dirichlet Laplacian は零固有値を持たないが, Neumann Laplacian は零固有値を持つため, 零スペクトルの近傍での扱いが異なる.

詳細については, 本論文の最終章に記載されている. また, 以上の結果は論文 [9] にまとめられている.

参考文献

[1] P. D'Ancona and V. Pierfelice, *On the wave equation with a large rough potential*, J. Functional Analysis **227** (2005), no. 1, 30–77.

[2] V. Georgiev and K. Taniguchi, *On fractional Leibniz rule for Dirichlet Laplacian in exterior domain*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **39** (2019), no. 2, 1101–1115.

[3] V. Georgiev and N. Visciglia, *Decay estimates for the wave equation with potential*, Comm. Partial Differential Equations **28** (2003), no. 7-8, 1325–1369.

[4] K. Ishige and Y. Kabeya, *Decay rates of the derivatives of the solutions of the heat equations in the exterior domain of a ball*, J. Math. Soc. Japan **59** (2007), no. 3, 861–898.

[5] T. Iwabuchi, T. Matsuyama and K. Taniguchi, *Besov spaces on open sets*, Bull. Sci. Math. **152** (2019), 93–149.

[6] T. Iwabuchi, T. Matsuyama and K. Taniguchi, *Bilinear estimates in Besov spaces generated by the Dirichlet Lalacian*, arXiv:1705.08595v2.

[7] T. Iwabuchi, T. Matsuyama and K. Taniguchi, *Boundedness of spectral multipliers for Schrödinger operators on open sets*, Rev. Mat. Iberoam. **34** (2018), no. 3, 1277–1322.

[8] T. Kato, *Schrödinger operators with singular potentials*, Proceedings of the International Symposium on Partial Differential Equations and the Geometry of Normed Linear Spaces (Jerusalem, 1972). Israel J. Math. **13** (1972), 135–148 (1973).

[9] K. Taniguchi, *Besov spaces generated by the Neumann Laplacian*, Eur. J. Math. **4** (2018), no. 4, 1521–1548.