アルゴリズム論的アプローチによる安定的・最適な財の配分
Stable and optimal distribution of goods by algorithmic approach

情報工学専攻　梅田 博之
UMEDA　Hiroyuki

1　はじめに

財の配分とは，各プレイヤー（財を欲する人）へ財を配分することである．各プレイヤーは各財への評価関数をもっている．財が配分されれば，評価関数をもとに効用が決定される．財の配分は一般に次のような過程で行われる．まず各プレイヤーは自分の評価関数をもとに戦略を決定する（例えば，オークションにおいては入札である）．次に提出された全プレイヤーの戦略をもとに事前に定めた仕組みで財の配分を決定する．

本論文の目的は，いかなる仕組みが最適であり，かつ安定であるか？という問いに答えることである．

まず，**最適**な仕組みとは何かをのべる．これは財の配分により定まる，目的関数の値を最大にする仕組みである．本論文で扱う目的関数は，全てのプレイヤーの効用の和である．

過去のアルゴリズム研究では最適であり，かつ計算量が少ないアルゴリズム（仕組み）を設計することを主な目的としていた．しかし最適であっても，プレイヤーの中に不満をもつ者がいる可能性がある．この場合，仕組みを持続的に，すなわち安定的に用いることは難しい．仕組みへ不満をもつプレイヤーがいる場合，不安定であるという．逆に，仕組みへ不満をもつプレイヤーがいない場合，**安定**であるという．ここでは 2 つの安定を考える．

仕組みが**弱安定**とは，各プレイヤーが自分の戦略を変更する誘因をもたないような戦略の組が存在することをいう（すなわち，ナッシュ均衡が存在すること）．割当が**公平**とは，自分の財への効用が，他人の財を得た時の効用以上であることを意味する．仕組みが**強安定**とは，ナッシュ均衡でありかつ割当が公平（戦略の組が決まると，割当が決まることに注意）である戦略の組が存在することである．

ところで，財の性質が変われば，仕組みも変える必要がある．従って本論文では，財が分割不可能である場合と分割可能な場合（財がパイのように任意の場所で切って分けることができる場合）それぞれにおいて，安定的・最適な財の配分を達成する仕組みを提案する．

前者に対しては，オークションを扱う．主な結果としては，第一にナッシュ均衡が存在するための必要十分条件を求める．これは，弱安定である条件を明らかにすることを意味する．第二にナッシュ均衡解を求めることを可能にし，計算時間を示す．無秩序の対価（最適解の値/最悪のナッシュ均衡解の値）が 2 であることが知られている [3] ため，ナッシュ均衡解であれば，最適解に対する近似保証が自動的に与えられることになる．

後者に対しては，パイ分割問題を扱う．提案アルゴリズムは，4 つの性質をもつ．1 つめは戦略的操作不可能性である．これは，常にアルゴリズムは弱安定であることを意味する．2 つめは無羨望性である．これは，割当が公平であることを保証する．この 2 つの性質から，アルゴリズムは強安定であるといえる．3 つめは最適性，すなわち最適解を返すことを保証する性質である．さらに，目的関数値が同じであれば，カット数は少ない方が望ましい（カット数が多いと，パイの細切れをプレイヤーへ割り当てることになるからである）．

2　オークション

本論文で扱うオークションモデルは，品物別入札の組合せオークションである [4]．これに対し，評価関数が劣加法性をもち，超過入札がないとき，無秩序の対価が 2 であることが示されている [3]．しかし，同論文にてナッシュ均衡が存在する条件は，たとえ評価関数が対称性をもつとさらに制限しても不明であることがのべられている．また，全探索でナッシュ均衡解を求めようとすると，計算時間は非有界である．

本論文では評価関数が劣加法性・対称性をもち，超過入札がないとき，ナッシュ均衡が存在するための必要十分条件を示す．また，ナッシュ均衡解を有限時間で求められるようにする [5], [6]．1 章でのべたように，これらはメカニズムが弱安定である条件を示し，さらに最適解の近似を求めることを可能にしたことと等価である．

2.1　準備

入札者（プレイヤー）集合を $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ とし，**品物**（このモデルでは，財を品物とよぶ）集合を $M = \{1, 2, \ldots, m\}$ とする．各入札者 $i \in N$ は評価関数 $v_i(k), (1 \leq k \leq m)$ をもつ．ただし，$v_i(0) = 0$ であり（**正規化**），k に関し単調非減少である（**単調性**）とする．これが**劣加法性**をもつとは，$1 \leq k < k' \leq m$ をみたすすべての k, k' に対して，$v_i(\min\{k + k', m\}) \leq v_i(k) + v_i(k')$ をみたすことである．

各入札者は評価関数をもとに**入札**を決定する．入札者 $i \in N$ の品物 $j \in M$ への入札を $b_i(j)$ とかく．また，入札者 i のすべての財への入札の集合を $b_i = (b_i(1), b_i(2), \ldots, b_i(m))$ と表す．すべての b_i の集合である**入札プロファイル**を $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ とする．$\boldsymbol{b}$ から b_i を除いたものを $\boldsymbol{b}_{-i}$ とし，$\boldsymbol{b}$ に対し b_i を b'_i へ変更したものを $\boldsymbol{b}'_i = (b'_i, \boldsymbol{b}_{-i})$ とかく．

評価関数プロファイル $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ において，入札プロファイル $\boldsymbol{b}$ は，各入札者 $i \in N$ に対して

$$\sum_{j \in S} b_i(j) \leq v_i(|S|), \forall S \subseteq M$$

が成り立つとき**超過入札なし**とよばれる．以下では，超過入札なしの $\boldsymbol{b}$ を**実行可能**とよぶ．

メカニズムは入札プロファイル $\boldsymbol{b}$ を受け取り，品物を配分する．品物 $j \in M$ は j へ最も高い入札を行った入札者に割り当てる．入札者 $i \in N$ への品物の**割当**を $X_i(\boldsymbol{b})$ とかく．品物 $j \in M$ の価格は $j \in M$ への入札で 2 番目に高い入札額である．すなわち，入札者 $i \in N$ が品物 j を手に入れたときの**価格**は $b_{-i}^{max}(j) = \max\{b_h(j) | h \in N - \{i\}\}$ である．割当と価格から，入

札者 i の効用 $u_i(X_i(\boldsymbol{b}))$ は以下のように決定される．

$$u_i(X_i(\boldsymbol{b})) = v_i(|X_i(\boldsymbol{b})|) - \sum_{j \in X_i(\boldsymbol{b})} b_{-i}^{max}(j).$$

実行可能な入札プロファイル $\boldsymbol{b}$ は，全ての入札者 $i \in N$ と，全ての実行可能入札プロファイル $\boldsymbol{b}_i' = (b_i', \boldsymbol{b}_{-i})$ に対し，$u_i(X_i(\boldsymbol{b})) \geq u_i(X_i(\boldsymbol{b}_i'))$ が成り立つとき，**ナッシュ均衡**とよばれる．

割当 $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{b}) = (X_1(\boldsymbol{b}), X_2(\boldsymbol{b}), \ldots, X_n(\boldsymbol{b}))$ は，全ての入札者 $i \in N$ に対し，

$$u_i(X_i(\boldsymbol{b})) \geq v_i(|X_{i'}(\boldsymbol{b})|) - \sum_{j \in X_{i'}(\boldsymbol{b})} b_{-i'}^{max}(j), \forall i' \in N - \{i\}$$

が成立するとき，**公平**であるとよばれる．

評価関数プロファイル $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ によっては，ナッシュ均衡が存在しない場合もある．そこで評価関数プロファイル $\boldsymbol{v}$ が**弱安定**であるとは，実行可能であり，かつナッシュ均衡であるような $\boldsymbol{b}$ が存在することとする．評価関数プロファイル $\boldsymbol{v}$ が**強安定**であるとは，実行可能であり，ナッシュ均衡かつ割当 $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{b})$ が公平であるような $\boldsymbol{b}$ が存在することである．

2.2 本論文の成果

本論文の成果とその位置付けをのべる．紙面の都合上，博士論文 3 章で扱う入札者数 $n = 2$ のときをのべるが，博士論文においては，任意の入札者数における同様の結果を，4 章でのべている．

定理 2.1 で入札プロファイル $\boldsymbol{b}$ の実行可能性についての特徴づけを与える．これにより，$\boldsymbol{b}$ が実行可能であるかどうかを $O(m)$ で判定できる．定理 2.2 でナッシュ均衡が存在する必要十分条件をのべる．最後に準安定（定義 2.1）· 安定（定義 2.2）を定義し，これらが $\boldsymbol{b}$ がナッシュ均衡であるための必要十分条件であることをのべる（定理 2.3）．定理 2.3 より，$\boldsymbol{b}$ がナッシュ均衡かどうかを $O(m)$ で判定できる．定理 2.2，2.3 より，ナッシュ均衡解が存在するかどうかの判定および存在する場合の求解を $O(m^2)$ でできることになる．

以下では，評価関数プロファイル $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$ は与えられているものとする．各入札者 i，各 $1 \leq k_i \leq m$ に対して関数 $w_i(k_i)$ を

$$w_i(k_i) = k_i \min \left\{ v_i(1), \frac{v_i(2)}{2}, \ldots, \frac{v_i(k_i)}{k_i} \right\} \tag{1}$$

と定義する．すると，以下の定理がいえる．

定理 2.1 入札プロファイル $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$ において，各入札者 $i \in N = \{1, 2\}$ の入札ベクトル $b_i = (b_i(1), b_i(2), \ldots, b_i(m))$ が，$M = \{1, 2, \ldots, m\}$ 上でのある置換 π_i を用いて

$$b_i(\pi_i(1)) \leq b_i(\pi_i(2)) \leq \cdots \leq b_i(\pi_i(m))$$

と入札額の小さい順にならべられているとする．すると，入札者 $i \in N = \{1, 2\}$ の入札ベクトル b_i が実行可能であるための必要十分条件は，

$$\sum_{j=m-k_i+1}^{m} b_i(\pi_i(j)) \leq w_i(k_i), (k_i = 1, 2, \ldots, m)$$

が成立することである（$w_i(k_i)$ の定義は式 (1)）． □

定理 2.1 によって，入札プロファイル $\boldsymbol{b}$ が実行可能かどうかは，$O(m)$ で判定できることになる．次に，ナッシュ均衡が存在するための必要十分条件をのべる．そのための定義をまず行う．$P = (M_1, M_2)$ を品物の集合 M の二つの部分集合への分割とする．このとき，各入札者 $i \in N$ の入札 $d_i = (d_i(1), d_i(2), \ldots, d_i(m))$ を

$$d_i(j) = \begin{cases} \frac{w_i(|M_i|)}{|M_i|} & (j \in M_i \text{ のとき}), \\ 0 & (\text{それ以外のとき}) \end{cases} \tag{2}$$

と定義する．すると，以下の定理が得られる．

定理 2.2 評価関数プロファイル $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$ が弱安定である（実行可能なナッシュ均衡をもつ）ための必要十分条件は，式 (2) で定まる入札プロファイル $\boldsymbol{d} = (d_1, d_2)$ がナッシュ均衡となるような品物集合 M の二つの部分集合への分割 $P = (M_1, M_2)$ が存在することである． □

最後に，定理 2.3 で $\boldsymbol{b}$ がナッシュ均衡であるための必要十分条件をのべる．定理 2.3 より，$\boldsymbol{b}$ がナッシュ均衡かどうかは，$O(m)$ で判定できる．これと定理 2.2 を用いれば，ナッシュ均衡が存在するかどうかを調べることができ，さらに，存在する場合はナッシュ均衡解が得られる．これらを行うには，対称性より $m+1$ 個の分割 $P = (M_1, M_2)$ のそれぞれに対応する $\boldsymbol{d} = (d_1, d_2)$ を調べれば十分である（$|M_1| = 0, 1, \ldots, m$ の場合をそれぞれ調べる）．従って $O(m^2)$ でできる．

必要な定義を行い，定理 2.3 を示す．各 $i \in N = \{1, 2\}$ に対して $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$ から b_i を除いた入札を b_{-i} と表記する．従って，$b_{-1} = b_2$，$b_{-2} = b_1$ である．

定義 2.1 実行可能な入札プロファイル $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$ に対して，各入札者 $i \in N = \{1, 2\}$ が獲得する品物の集合を $Y_i = X_i(\boldsymbol{b})$ とし，$y_i = |Y_i|$ とする．各 $i \in N$ に対し，$M = \{1, 2, \ldots, m\}$ の置換 π_{-i} が存在して，

$$b_{-i}(\pi_{-i}(1)) \leq b_{-i}(\pi_{-i}(2)) \leq \cdots \leq b_{-i}(\pi_{-i}(m)),$$

$$Y_i = \{\pi_{-i}(1), \pi_{-i}(2), \ldots, \pi_{-i}(y_i)\}$$

が同時に成立するとき，$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$ は**準安定**であるとよばれる．また，$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$ が準安定であれば，各入札者 $i \in N$ の効用 $u_i(Y_i)$ は，$\boldsymbol{b}_i' = (b_i', b_{-i})$ とすると，

$$u_i(Y_i) = v_i(y_i) - \sum_{j=1}^{y_i} b_{-i}(\pi_{-i}(j)) = \max_{|X_i(\boldsymbol{b}_i')| = y_i} u_i(X_i(\boldsymbol{b}_i'))$$

である． □

定義 2.2 実行可能な入札プロファイル $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$ において，各入札者 $i \in N = \{1, 2\}$ の $M = \{1, 2, \ldots, m\}$ 上の置換 π_{-i} は

$$b_{-i}(\pi_{-i}(1)) \leq b_{-i}(\pi_{-i}(2)) \leq \cdots \leq b_{-i}(\pi_{-i}(m))$$

をみたすとする．$Y_i = X_i(\boldsymbol{b})$ は各入札者 $i \in N$ が獲得する品物の集合であり，$y_i = |Y_i|$ であるとする．したがって，$P = (Y_1, Y_2)$ は M の二つの部分集合への分割である．このとき，$1 \leq k \leq m$ をみたすすべての k で

$$v_i(k) - \sum_{j=1}^{k} b_{-i}(\pi_{-i}(j)) \leq v_i(y_i) - \sum_{j=1}^{y_i} b_{-i}(\pi_{-i}(j))$$

であるとき，b_{-i} は $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$ で安定であるとよばれる．b_1 と b_2 が $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$ でともに安定であるとき，$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$ は**安定**であるとよばれる． □

準安定かつ安定ならば，ナッシュ均衡であることはすぐにわかる（準安定ならば，各入札者の効用は，常に安定の定義式右辺に一致するため）．実は逆もいえる．

定理 2.3 実行可能な入札プロファイル $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2)$ がナッシュ均衡であるための必要十分条件は，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2)$ が準安定かつ安定であることである． □

定理 2.2, 2.3 を使って，例題 2.1 がナッシュ均衡をもつことを示し，存在する場合の求解の例も示す．さらに，定理 2.2 は評価関数プロファイル $\boldsymbol{v}=(v_1,v_2)$ が弱安定の条件であるが，ナッシュ均衡かつ $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{b})$ が公平であるような $\boldsymbol{b}$ を求めることはできないことを示す．

例題 2.1 $N=\{1,2\},M=\{1,2,3,4,5\}$ とし，各 $i\in N$ に対し，$v_i(0)=0,v_i(1)=v_i(2)=v_i(3)=3,v_i(4)=v_i(5)=6$ とする．対称性より，6 個の分割 $P^{(l)}=(M_1^{(l)},M_2^{(l)})$ を調べれば十分である．すなわち，$M_1^{(l)}$ に注目すれば

$$M_1^{(0)}=\phi,M_1^{(1)}=\{1\},\ldots,M_1^{(5)}=\{1,2,3,4,5\}$$

の 6 つである．このいずれかがナッシュ均衡であればよい（定理 2.2 より，すべてナッシュ均衡でない場合はナッシュ均衡は存在しない）．例えば $l=4$ のとき，$\boldsymbol{d}^{(4)}=(d_1^{(4)},d_2^{(4)})$ とすると，

$$\begin{array}{ll} M_1^{(4)}=\{1,2,3,4\}, & M_2^{(4)}=\{5\} \\ d_1^{(4)}=(1,1,1,1,0), & d_2^{(4)}=(0,0,0,0,3) \\ u_1(X_1(\boldsymbol{d}^{(4)}))=6, & u_2(X_2(\boldsymbol{d}^{(4)}))=3 \end{array}$$

である．これはナッシュ均衡である．このことを確かめるために，定理 2.3 を用いる．まずプレイヤー 1 に対して準安定かつ安定であるか調べる．$d_2^{(4)}$ を昇順に並べると，$d_2^{(4)}(1)=d_2^{(4)}(2)=d_2^{(4)}(3)=d_2^{(4)}(4)=0<d_2^{(4)}(5)=3$ となる．従って，

$$M_1^{(4)}=\{1,2,3,4\}=\{\pi_2(1),\pi_2(2),\pi_2(3),\pi_2(4)\}$$

であるため，プレイヤー 1 に関して準安定であり，このときの効用は 6 である．さらに，

$$\begin{array}{l} v_i(k)-\sum_{j=1}^{k}d_2^{(4)}(j)=3-0\le 6, \quad (k=1,2,3) \\ v_i(4)-\sum_{j=1}^{4}d_2^{(4)}(j)=6-0\le 6 \\ v_i(5)-\sum_{j=1}^{5}d_2^{(4)}(j)=6-3\le 6 \end{array}$$

であるから，プレイヤー 1 に関して安定である．プレイヤー 2 に対しても同様のことを行えば，$\boldsymbol{d}^{(4)}=(d_1^{(4)},d_2^{(4)})$ がナッシュ均衡であることを確かめられる．

この例で得られるナッシュ均衡解は $\boldsymbol{d}^{(1)}$ と $\boldsymbol{d}^{(4)}$ である．しかし $\boldsymbol{d}^{(1)}$,$\boldsymbol{d}^{(4)}$ による割当 $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{d}^{(1)}),\boldsymbol{X}(\boldsymbol{d}^{(4)})$ は公平でない（このことは，評価関数が全く同じであるにも関わらず，効用が異なるため，容易に得られる）．従って，定理 2.2 は弱安定の条件ではあるが，ナッシュ均衡かつ $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{b})$ が公平な $\boldsymbol{b}$ を求めることはできない．すなわち，強安定の条件ではない．□

3 パイ分割問題

パイとは始点と終点を同一視した半開区間 $(0,1]$ である．これをいかに各プレイヤーに配分するか？という問題がパイ分割問題である．この問題に対し，プレイヤー数を 3 としたときに，無羨望性・カット数の最小性をみたすメカニズムが提案されている [2]．本論文ではプレイヤー数の制限をなくし，二つの性質に加え，戦略的操作不可能性・最適性をみたすアルゴリズムを提案することを目的とする．

そこで注目したのは Alijani ら [1] が提案した類似問題のケーキ分割問題に対するアルゴリズムである．これは， 制約したケーキ分割問題に対し，戦略的操作不可能性・無羨望性・最適性・カット数の最小性を同時にみたす．戦略的操作不可能性は，常に支配戦略均衡が存在することを意味する．さらに，無羨望性とは割当が公平であることを保証する．この二つが同時に成り立つとき，強安定であるとよぶ．最適性から，常に目的関数の値を最大にする配分を行うことが保証される．効用が同じであれば，カット数は小さい方が望ましい．

本論文の主な成果は，Alijani ら [1] の成果を制約したパイ分割問題へも適用できるよう，拡張したことである [7]．これにより，同問題に対しても強安定で最適な財の配分を行うアルゴリズムを提案したといえる．

3.1 準備

パイを $P=(0,1]$ とする．n 人のプレイヤー集合 $N=\{1,2,\ldots,n\}$ の間で分割する問題では，プレイヤー集合 $N=\{1,2,\ldots,n\}$ の各 $i\in N$ は評価区間 $V_i=(\alpha_i,\beta_i]$ をもつ．ただし，$0\le\alpha_i<1$ であり，大きさ $\psi(V_i)=\beta_i-\alpha_i$ は $0<\psi(V_i)\le 1$ とする（**非零性**）．この評価区間 V_i は，以下の写像 $P(V_i)$ によって，パイの中で欲しい部分を表す．

$$P(V_i)=\begin{cases} (\alpha_i,\beta_i] & (\beta_i\le 1 \text{ のとき}), \\ (\alpha_i,1]\cup(0,\beta_i-1] & (\beta_i>1 \text{ のとき}). \end{cases}$$

プレイヤーの部分集合 $R\subseteq N$ に対し，プレイヤーの評価区間の集合を $\mathbf{V}_R$ とする．評価区間集合 $\mathbf{V}_N$ は非零性に加えて次の二つの制約をみたすとする．第一に，すべての評価区間の和集合はパイ全体に一致するとする．すなわち $\bigcup_{i\in N}P(V_i)=\bigcup_{i\in N}P((\alpha_i,\beta_i])=P=(0,1]$ であるとする（**被覆性**）．第二に，任意の異なる $i,j\in N$ に対し，$\alpha_i<\alpha_j$ ならば $\beta_i\le\beta_j\le 1+\beta_i$ であるとする（**順序性**）．これは言い換えれば，他の評価区間に真に含まれるようなことはないことを意味する．

各プレイヤー $i\in N$ は評価区間をアルゴリズムへ申告し，アルゴリズムはそれをもとに配分を行う．i への割当を $A_i(\mathbf{V}_N)=\{(\alpha_i^1,\beta_i^1],(\alpha_i^2,\beta_i^2],\ldots,(\alpha_i^{k_i},\beta_i^{k_i}]\}$ とかき，全てのプレイヤーの割当を集めた，割当ベクトルを $\mathbf{A}(\mathbf{V}_N)=(A_1(\mathbf{V}_N),A_2(\mathbf{V}_N),\ldots,A_n(\mathbf{V}_N))$ とする．$\mathbf{A}(\mathbf{V}_N)$ がパイ $P=(0,1]$ の分割であるとき，**実行可能な完全割当ベクトル**とよばれる．割当ベクトル $\mathbf{A}(\mathbf{V}_N)$ での $i\in N$ の**効用** $U_i(A_i(\mathbf{V}_N))$ は

$$U_i(A_i(\mathbf{V}_N))=\sum_{P((a_i,b_i])\in A_i(\mathbf{V}_N)}\psi(P(V_i)\cap P((a_i,b_i]))$$

（評価区間と割当の共通部分の大きさ）と定義される．

3.2 P-EFISM アルゴリズム

プレイヤー集合 $N=\{1,2,\ldots,n\}$ を扱うための正整数の集合である $[x..y]$ を，$x\le y$ のときは $[x,x{+}1,\ldots,y]$ であり，$x>y$ のときは $[x,x+1,\ldots,n,1,\ldots,y]$ であると定義する．$[x..y]$ の要素数を $|[x..y]|$ とかく．任意の

$i \in N = \{1, 2, \ldots, n\}$，$s \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ に対して $N(i+s)$ は，$i+s \leq n$ のときは $i+s$ であり，$i+s > n$ のときは $i+s-n$ であると定義する．各プレイヤー $i \in N$ のコピーのプレイヤー $n+i$ を導入する．$n+i$ の評価区間は，$V_{n+i} = (\alpha_i + 1, \beta_i + 1]$ である．これのパイへの写像 $P(V_{n+i})$ を，$P(V_{n+i}) = P(V_i)$ と定義する．

準備ができたので，以下に提案アルゴリズムを示す．

アルゴリズム 3 P-EFISM($N, \mathbf{V}_N$)

$[s..t] \leftarrow \underset{\{[x..y] \subseteq N\}}{\mathrm{argmin}} \left\{ \dfrac{\min\{\beta_{x+|[x..y]|-1} - \alpha_x, 1\}}{|[x..y]|} \right\}$;
$\Phi \leftarrow \dfrac{\beta_{s+|[s..t]|-1} - \alpha_s}{|[s..t]|}$;
For $i = 0$ to $|[s..t]| - 1$ do
  $A_{N(s+i)} \leftarrow P((\alpha_s + i\Phi, \alpha_s + (i+1)\Phi])$;
if $(t < s)$ then
  $R \leftarrow N - [s..t]$;
  For each $i \in R$ do
    $V'_i \leftarrow V_i \cap (\beta_t, \alpha_s]$; $(\alpha'_i, \beta'_i] \leftarrow V'_i$;
else
  $R \leftarrow \{t+1, t+2, \ldots, n, n+1, \ldots, n+s-1\}$;
  For each $i \in R$ do
    $V'_i \leftarrow V_i \cap (\beta_t, \alpha_{n+s}]$; $(\alpha'_i, \beta'_i] \leftarrow V'_i$;
While $R \neq \emptyset$ do
  $[s..t] \leftarrow \underset{\{[x..y] \subseteq R | x \leq y\}}{\mathrm{argmin}} \left\{ \dfrac{\beta'_y - \alpha'_x}{|[x..y]|} \right\}$;
  $\Phi \leftarrow \dfrac{\beta'_t - \alpha'_s}{|[s..t]|}$;
  For $i = 0$ to $|[s..t]| - 1$ do
    $A_{N(s+i)} \leftarrow P((\alpha'_s + i\Phi, \alpha'_s + (i+1)\Phi])$;
  $R \leftarrow R - [s..t]$;
  For each $i \in R$ do
    $V'_i \leftarrow V'_i - (\alpha'_s, \beta'_t]$; $(\alpha'_i, \beta'_i] \leftarrow V'_i$;
return $\mathbf{A} = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$;

3.3 P-EFISM アルゴリズムの性質

この節では，P-EFISM がみたす性質を示す．

定義 3.1 アルゴリズムは，任意の評価区間集合 $\mathbf{V}_N$ および任意の $V'_i = (\alpha'_i, \beta'_i]$ に対して，

$$U_i(V'_i, \mathbf{V}_{N-\{i\}}) \leq U_i(V_i, \mathbf{V}_{N-\{i\}}) \quad (\forall i \in N)$$

のとき，**戦略的操作不可能性**をみたすとよばれる． □

定義 3.2 アルゴリズムは，任意の評価区間集合 $\mathbf{V}_N$ に対して，すべての $i, j \in N$ で

$$\sum_{P((a_j, b_j]) \in A_j(\mathbf{V}_N)} \psi(P(V_i) \cap P((a_j, b_j])) \leq U_i(A_i(\mathbf{V}_N))$$

が成立するとき，**無羨望性**をみたす（割当ベクトル $\mathbf{A}(\mathbf{V}_N)$ は**公平**である）とよばれる． □

戦略的操作不可能性が成り立てば，各プレイヤー $i \in N$ にとって V_i を申告することが支配戦略である．従って，申告の組 $\mathbf{V}_N$ が支配戦略均衡（支配戦略均衡ならば，ナッシュ均衡であることに注意する）である．さらに，無羨望性より $\mathbf{V}_N$ が申告されれば，割当ベクトル $\mathbf{A}(\mathbf{V}_N)$ は公平である．ゆえに，$\mathbf{V}_N$ は支配戦略均衡であると同時に，公平な配分を達成する．従って，この二つの性質が同時に成り立つとき，アルゴリズムは任意の評価区間集合 $\mathbf{V}_N$ に対して**強安定**であるとよぶ．

定義 3.3 （最適性）割当ベクトル $\mathbf{A}(\mathbf{V}_N)$ の**効率**は，$\mathrm{EFF}(\mathbf{A}(\mathbf{V}_N)) = \sum_{i \in N} U_i(A_i(\mathbf{V}_N))$ で定義される．任意の $\mathbf{V}_N$ に対して，$\mathrm{EFF}(\mathbf{A}(\mathbf{V}_N)) = \psi(P) = 1$ であるとき，アルゴリズムは**最適性**をみたすとよばれる． □

定義 3.4 アルゴリズムは任意の評価区間集合 $\mathbf{V}_N$ に対して，$\mathrm{CUT}(\mathbf{A}(\mathbf{V}_N)) = \sum_{i \in N} |A_i(\mathbf{V}_N)| = n$ をみたすとき，**カット数の最小性**をみたすとよばれる． □

以上の議論より，これら 4 つの性質が同時に成り立つようなアルゴリズムは，強安定であり，最適であるといえる．博士論文 6 章では，P-EFISM アルゴリズムがこれら 4 つの性質をみたすことを証明している．

4 結論

本論文では，アルゴリズム論的アプローチによって，安定的・最適な財の配分を達成するメカニズム・アルゴリズムを論じた．オークションに関しては，定理 2.2 では，評価関数が対称性・劣加法性をもち，超過入札がない場合におけるナッシュ均衡の存在条件を示した．さらに定理 2.2 と 2.3 を用いることで，ナッシュ均衡解を求めることを可能にした．無秩序の対価は 2 である [3] ため，これは最適解の 1/2 近似である．

次にパイ分割問題に対して，戦略的操作不可能性・無羨望性・最適性・カット数の最小性をもつアルゴリズムを示した．これらをみたすことは，アルゴリズムが強安定かつ最適でカット数が最小であることに対応する．

参考文献

[1] R. Alijani, M. Farhadi, M. Ghodsi, M. Seddighin, and A. S. Tajik, Envy-free mechanisms with minimum number of cuts, *Proc. of 31st AAAI Conference on Artificial Intelligence*, pp. 312–318, 2017.

[2] J. B. Barbanel, S. J. Brams, and W. Stromquist, Cutting a pie is not a piece of cake, *The American Mathematical Monthly*, Vol. 116, pp. 496–514, 2009.

[3] K. Bhawalkar and T. Roughgarden, Welfare guarantees for combinatorial auctions with item bidding, *Proc. of 22nd Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, pp. 700–709, 2011.

[4] G. Christodoulou, A. Kovács, and M. Schapira, Bayesian combinatorial auctions, *Proc. of 35th ICALP*, pp.820–832, 2008.

[5] H. Umeda and T. Asano, Nash equilibria in combinatorial auctions with item bidding by two bidders, *Journal of Information Processing*, Vol.25, pp.745 – 754, 2017.

[6] H. Umeda and T. Asano, Nash equilibria in combinatorial auctions with item bidding and subadditive symmetric valuations, *IEICE Transactions on Fundamentals*, Vol.101-A(9) pp.1324–1333.

[7] 梅田 博之, 浅野 孝夫, “ホールケーキ分割問題に対するカット数最小の無羨望メカニズム”, IPSJ 第 80 回全国大会, 2018.