中央大学博士論文

アルゴリズム論的アプローチによる
安定的・最適な財の配分

Hiroyuki Umeda
梅田　博之

博士（工学）

中 央 大 学 大 学 院
理 工 学 研 究 科
情 報 工 学 専 攻

平成３０年度
２０１９年3月

目 次

第1章　序論

財の配分とは，各プレイヤー（財を欲する主体）へ財（もしくはサービス）を配分することである [20]．この配分は大まかにいえば，次の設定で行われる．各プレイヤーは各財を得られたときのうれしさはどの程度か，という尺度：評価関数をもっている．財が配分されれば，評価関数をもとに効用が決定される．各プレイヤーは，自分の効用を大きくすることに関心がある，すなわち利己的な思惑をもつと考える．

このとき，財の配分は次のような過程で行われる．まず各プレイヤーは自分の評価関数をもとに戦略を決定する（例えば，オークションにおいては入札である）．次に提出された全プレイヤーの戦略をもとに事前に定めた仕組みで財の配分を決定する．

以上のような問題設定の下で，いかなる仕組みが最適であり，かつ安定であるか？という問いに答えることを，本論文の目的とする．

まず，最適である仕組みとは何かをのべる．これは目的関数の値を最大にするような財の配分を行う仕組みである．本論文であつかう目的関数は，各プレイヤーの効用の和である．

過去のアルゴリズム研究では最適であり，かつ計算量が少なくすることを主な目的として，アルゴリズムの設計が行われていた．

しかし，たとえ最適であっても，仕組みがプレイヤーの利己的な思惑を考慮していない場合，仕組みへ不満をもつプレイヤーがいる可能性がある．このようなプレイヤーがいる限りにおいては，仕組みを将来にわたって用いることは難しい．仕組みへ不満をもつプレイヤーがいる場合，仕組みが不安定であるという．逆に，仕組みへ不満をもつプレイヤーがいない場合，安定であるという．

では，安定とは何かをより詳しく説明する．まず，各プレイヤーが自分の戦略に対して不満がない，という状態を考える．すなわち，ある仕組みにおいて，各プレイヤーが自分の戦略を変更する誘因をもたないとき（変更しても効用が増えないとき），その戦略の組は弱安定である（ナッシュ均衡である）という．仕組みが弱安定であるとは，その仕組みにおいて，弱安定である戦略の組が存在することをいう．言い換えれば，ナッシュ均衡が存在することをいう．弱安定でない仕組みは常に自分の戦略に不満をもち，変更したいと考えるプレイヤーが存在することになる．

弱安定は，自分の戦略に対して，不満があるかどうかを考えた．次は，仕組みによる財の配分に対して不満がない状態，すなわち配分が公平である状態を考える．各プレイヤーの効用が他人の財を自分が得た時の効用以上であるとき，各プレイヤーは他人の割当を羨まない．従って，この配分に対して不満を持たないと考えられる．このとき，財の配分は公平であるという．ある仕組みにおいて，戦略の組が公平であるとは，それに対して公平である財の配分（戦略の組が決まると，財の配分が決まることに注意する）が行われることをいう．仕組みが強安定であるとは，弱安定であり，かつ公平な財の配分を行う戦略の組が存在することをさす．

このように，アルゴリズム理論の観点とともに，ゲーム理論の観点から安定性も考える分野が

近年登場している．本論文で行う，このようなアルゴリズム論的アプローチには大別して 2 種類ある．

1 つめは計算論的メカニズムデザインである [18]．メカニズムデザインとはミクロ経済学やゲーム理論の一分野である．目的は望ましい結果を得るルールを設計することである [19]．これに計算資源は有限である，というアルゴリズム理論の観点を取り入れたのが，計算論的メカニズムデザインである．

2 つめはアルゴリズム的ゲーム理論 [28] である．純粋なアルゴリズム研究は，各プレイヤーがアルゴリズムへ無条件に従うことを仮定している．しかし，実際の人々（プレイヤー）は自分の効用を大きくすることに関心がある（利己的な思惑をもつ）ため，アルゴリズムへ不満をもつ可能性がある．そこで，ゲーム理論の観点を取り入れて，アルゴリズムを設計する研究分野が生まれた．これがアルゴリズム的ゲーム理論である．

ところで，ある財に対して望ましい性質をみたす仕組みを設計できても，ほかの財に対しても有効である保証はない．これは財の性質によって，設計を変更する必要があることを意味する．

そこでここでは，財の性質として分割不可能である場合と分割可能な場合（ケーキのように任意の部分で切って分けることができる場合）の 2 つの場合を考える．そして各々に対し，安定的・最適な財の配分を行う仕組みを設計することを目的とする．

本論文では分割不可能な財を扱う問題の中で組合せオークションを扱う．これはオークションであるが，評価関数が財の部分集合へ与えられている問題である．このとき，いかなるルールを設定すればよい配分ができるかを考える問題である．

後者に対しては，パイ分割問題を扱う．これは始点と終点を同一視した半開区間であるパイを，いかに配分するかという問題である．このパイは任意の箇所で切って配分することができる．このような財を分割可能であるとよぶ．

次の節では，本論文の成果を概説する．

1.1 本論文の成果

この節では，本論文の成果について簡単にのべる．2 章から 4 章までは，組合せオークションについて扱い，5 章と 6 章では，ケーキ分割問題，パイ分割問題についてのべる．そこでまずは，組合せオークションの簡単な定義および背景と成果についてのべる．次にケーキ分割問題，パイ分割問題に対して同様のことをのべる．詳しい背景と定義については各章で改めてのべる．

組合せオークションに参加するプレイヤー（2-4 章では入札者とよぶ）の集合を $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ とおく．また，財（2-4 章では品物とよぶ）の集合を $M = \{1, 2, \ldots, m\}$ とする．各入札者 $i \in N$ は品物の集合 M の部分集合 S に対する評価額 $f_i(S)$ をもつ（すなわち，$f_i : 2^M \to \mathbf{R}_+$ への関数で評価関数とよばれる）．入札者 $i \in N$ へ割り当られた品物の集合を M_i とおく．この問題の目的は社会的幸福度 $\Sigma_{i \in N} f_i(M_i)$[37] を最大にするような割当 $(M_1, M_2, \cdots, M_n)$ が行われるルールを設計することである．

本論文の直接の対象は，G. Chrisodoulou, A. Kovács, and M. Schapira[9] によって提案されたメカニズム，品物別入札の組合せオークションである．これの割当と価格の決定ルールを簡単に

のべる．各入札者 $i \in N$ の品物 $j \in M$ への入札を $b_i(j)$ とかく．品物 j を割り当てられるのは，j への入札の中で最も高い入札を行った入札者である．品物 j の価格は，j への入札の中で 2 番目に高い入札額とする．

効用とは入札者 $i \in N$ が手に入れた品物 M_i への評価 $f_i(M_i)$ から価格を引いたものである．このような効用は準線形効用とよばれる [19]．

各入札者は自分の効用の最大化を目的とする．ナッシュ均衡とは，各入札者がどのように入札を変えても，自分の効用を増やせないような入札の組をいう．

ナッシュ均衡解が存在した場合，それは最適解と比べてどの程度目的関数を悪くするだろうか？この尺度が無秩序の対価（無秩序の代償とよばれることもある）である．これは,（最適解の値）/（最悪のナッシュ均衡解の値）と定義される．これはアルゴリズム理論における，近似率に対応する概念である．

品物別入札の組合せオークションに対する既存の結果として，評価関数が劣加法性をみたすとしたとき，無秩序の対価は 2 であることが知られている [4]．従って，ナッシュ均衡解が求まれば，目的関数の値は最適解の値の半分以上であることが，自動的に保証されることを意味する．

しかし，K. Bhawalkar and T. Roughgarden[4] はナッシュ均衡は必ず存在するとは限らず，さらにそれが存在する必要十分条件も不明であり，興味深い未解決問題である，とのべている．

そこで，本論文では，ナッシュ均衡が存在する必要十分条件を求めた．すなわち，メカニズムが弱安定である条件を明らかにした．さらにそのとき，ナッシュ均衡解を求めることを可能にした．これは，無秩序の対価が 2 であること [4] を利用すれば，最適解の値の半分以上の値をもつ解を求めることを可能にしたのと等価である．

次にパイ分割問題とは何かを簡単にのべ，本論文の貢献をのべる．

パイとは始点と終点とを同一視した半開区間である．これに対し，各プレイヤーはパイの中で欲しい部分，評価区間をもつ．これをもとに各プレイヤーは，自分の欲しい区間を申告する（必ずしも，真の評価区間を申告する必要はない）．この申告された区間を入力としてアルゴリズムはパイを配分し，各プレイヤーへの割当が決定する．割当が決まると，各プレイヤーの効用が決まる．効用とは，評価区間と割当の共通部分の大きさである．

この問題での大きな関心は無羨望性 [17]（公平な割当を保証する性質）をみたす配分を少ないカット数（配分を実行するために必要なパイを切る回数）でできるか？というものである．これに対し，J. B. Barbanel, S. J. Brams, and W. Stromquist はプレイヤー数が 3 以下の場合，無羨望性をみたし，かつカット数が最小である配分を行うメカニズムを提案した [3]．任意プレイヤー数に対し，無羨望性をみたす配分を行うものとしては，H. Aziz and S. Mackenzie の方法 [2] が知られているが，カット数はとても大きい．

そこで，本論文は類似問題のケーキ分割問題に注目した．R. Alijani et al. の研究 [1] では，ケーキ分割問題に対し無羨望性・カット数の最小性をみたし，さらに最適性・戦略的操作不可能性をみたすアルゴリズムが提案されている．

戦略的操作不可能性とは，各プレイヤーは自分の評価区間を申告することが，支配戦略であることである．この性質をもてば，支配戦略均衡が存在するため，ナッシュ均衡も存在する．従って，このアルゴリズムは弱安定であるといえる．さらに，各プレイヤーが自分の評価区間を報告

するとき，無羨望性から，割当は公平である．従って，強安定である．

それに加えて，最適性から，このアルゴリズムは常に目的関数の値を最大にするような配分を行う．ゆえに，最適でもある．効用が同じであれば，カット数が少ない方が望ましい．

このような望ましい性質をもつアルゴリズムを，本論文ではより一般的な問題である，パイ分割問題へも適用できるように拡張した．

以上の成果は，分割不可能な財および分割可能な財それぞれに対して，安定的・最適な財の配分を行う仕組みを提案したことになる．

第2章　品物別入札の組合せオークションの研究の背景と基本概念

2.1　品物別入札の組合せオークションの研究の背景

m 個の品物（財）の集合 $M = \{1, 2, \ldots, m\}$ と n 人の入札者（プレイヤー）の集合 $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ の組合せオークションでは，M の各部分集合 S に対する各入札者 $i \in N$ の非負の評価 $f_i(S)$ が入力として与えられて，目標は社会的幸福度

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(M_i)$$

を最大化するような入札者間での M の分割 $(M_1, M_2, \ldots, M_n)$ を求めることである．組合せオークションは，入札者の利己的な思惑が無視されるとき (すなわち，安定性を無視するとき) には，社会的幸福度最大化問題ともよばれる．利己的な入札者からなる組合せオークションに対して社会的幸福度を最大化するような M の分割 $(M_1, M_2, \ldots, M_n)$ は VCG (Vickrey-Clarke-Groves) メカニズムで求めることができる．しかしながら，その計算時間は m と n の指数時間である．実際，社会的幸福度最大化問題は，各評価 f_i $(i \in N)$ が劣モジュラー性をみたすときでも NP-困難であることが Lehmann, Lehmann and Nisan により示されている [26]．なお，関数 $f_i : 2^M \to \mathbf{R}_+$ は，すべての $S, T \subseteq M$ に対して $f_i(S \cup T) + f_i(S \cap T) \leq f_i(S) + f_i(T)$ が成立するとき劣モジュラーとよばれる．また，すべての $S, T \subseteq M$ に対して $f_i(S \cup T) \leq f_i(S) + f_i(T)$ が成立するとき関数 $f_i : 2^M \to \mathbf{R}_+$ は劣加法的であるとよばれる，

従って，社会的幸福度最大化問題（組合せオークション）に対して近似アルゴリズムが提案されてきている．各 f_i は M の 2^m 個のすべての部分集合の族上で定義されているので，提案されている多くの近似アルゴリズムはオラクルモデルを用いている．通常，バリュー問合せオラクルモデルとデマンド問合せオラクルモデルの二つがよく用いられる．さらに，提案されている多くの近似アルゴリズムでは，各 f_i に制約が課されている．代表的な制約としては，劣モジュラー性と劣加法性が挙げられる．

すべての f_i が劣モジュラー性をみたす社会的幸福度最大化問題に対しては，バリュー問合せオラクルモデルのもとで，以下のことが知られている．すなわち，$\frac{1}{2}$-近似アルゴリズムが Lehmann, Lehmann and Nisan により提案されている [26]．Khot et al. は，$\mathbf{P} = \mathbf{NP}$ でない限り，$1 - \frac{1}{e}$ より良い近似保証を達成することができないことを示している [22]．なお，e は自然対数の底である．Vondrák は乱択 $(1 - \frac{1}{e})$-近似アルゴリズムを提案している [36]．一方，より強力なデマンド問合せオラクルモデルのもとでは，すべての f_i が劣モジュラー性をみたす社会的幸福度最大化問題に対して，Dobzinski and Schapira により，より改善された $(1 - \frac{1}{e})$-近似アルゴリズムが提案されている [13].

より一般的な，すべての f_i が劣加法性をみたす社会的幸福度最大化問題に対しては，以下のことが知られている．バリュー問合せオラクルモデルのもとでは，Dobzinski, Nisan, and Schapira により，$\Omega(1/\log m)$-近似アルゴリズムが提案されている [12]．一方，より強力なデマンド問合せオラクルモデルのもとでは，$\frac{1}{2}$-近似アルゴリズムが Feige により提案されている [15]．同時に，Feige は，$\frac{1}{2}$ より良い近似保証を達成することは NP-困難であることも示している．さらに，Feige は，すべての f_i がフラクショナル劣加法性をみたす社会的幸福度最大化問題に対して，$(1-\frac{1}{e})$-近似アルゴリズムも与えている．なお，フラクショナル劣加法性は，劣モジュラー性より一般的で，劣加法性よりは限定的である．

上で概略をのべた社会的幸福度最大化問題では，決断を下す権利を有する中心的管理者がいる．中心的管理者は，すべての入札者からそれぞれの評価を集めて，近似アルゴリズムに基づいて集中計算をして，決断を下す．これにより，最適な財の配分は（近似的に）達成される．しかし，入札者の利己的な思惑を無視しているため，安定性が無視されているといえる．

これに対して，最近は，中心的管理者のいない，市場原理的な社会的幸福度最大化問題が活発に議論されてきている．これらの市場原理的な社会的幸福度最大化問題では，各入札者は自身の評価や品物の価格に基づいて決断を下すので，中心的管理はほとんどなくなる．価格により，実際の社会経済活動でも見られる市場原理的な効果が生じることになるのである．従って，中心的管理者の役割を品物における価格での管理で置き換えることにより，各入札者が自身の評価と市場価格による効用に基づいて行動できることになり，それが決断（戦略）につながる．従って，市場原理的な社会的幸福度最大化問題，すなわち，組合せオークションは，従来の社会的幸福度最大化問題のゲーム理論的版と見なすこともできる．このような方法により，入札者の利己的な思惑を考慮することが可能になったのである．各入札者は自身の評価と市場価格による効用のもとで，自身の獲得できる効用を最大化したいと考える．

従って，組合せオークションでは，品物に対する獲得競争が存在する．従来の社会的幸福度最大化問題に対するアルゴリズムで得られた解（M の分割 $(M_1, M_2, \ldots, M_n)$ で M_i が入札者 i の獲得した品物の集合）では，不満をもつ入札者も現れる可能性がある（すなわち，不安定である可能性がある）．従って，目的関数の値が大きく，かつすべての入札者が獲得した品物の集合に対して，納得できるような解が望まれる．これがナッシュ均衡の解につながることになる．すなわち，安定性・最適性の観点から，目的関数の値が大きい，良いナッシュ均衡の解が望まれる．従って，組合せオークションにおいては，ナッシュ均衡の存在判定と良いナッシュ均衡の解の計算に対する研究がきわめて重要であると考えられて，最近活発に研究が行われてきている．社会的幸福度最大の解の値と最悪のナッシュ均衡の値との比は，無秩序の対価とよばれる．それは，近似アルゴリズムにおける近似保証の概念に相当する概念である．

組合せオークションにおける M の分割 $(M_1, M_2, \ldots, M_n)$ に対して，各 M_i は入札者 $i \in N$ の獲得する品物の集合であり，価格 $\mathrm{price}(M_i)$ が付随する．このとき，入札者 i の効用 $u_i(M_i)$ は

$$u_i(M_i) = f_i(M_i) - \mathrm{price}(M_i) \tag{2.1}$$

と定義される．どの入札者 i も利己的で，自身の効用を最大化したいと考えている．実際の組合せオークションでは，VCG メカニズム以外のメカニズムが用いられている．たとえば，eBay などでは，m 個の品物が各品物ごとに独立に第二価格オークションを用いて行われている．従って，

組合せオークションのスキームにおいて，品物ごとのオークションが自然発生的に行われていて，この種のオークションは，品物別入札の組合せオークションとよばれている [9]．従って，m 個の各品物に対する入札からなる m 次元の入札ベクトルが各入札者の戦略となる．前にものべたように，どの入札者 i も利己的で自身の効用を最大化したいと考えている．すべての入札者の入札ベクトルの集合は，どの入札者も，ほかの入札者が入札ベクトルをそのままにして変えることはないという条件の下で，自身の入札ベクトルをたとえ変えたとしても効用が大きくなることがないとき，ナッシュ均衡であるとよばれる．

すべての入札者の評価が劣モジュラーであるような品物別入札の組合せオークションに対して，Christodoulou, Kovács, and Schapira は，どの入札者の入札ベクトルも超過入札にならないという仮定の下で，ナッシュ均衡が常に存在し，社会的幸福度が最大となる解の少なくとも半分以上の社会的幸福度を達成するナッシュ均衡の解を m と n の多項式時間で求める $\frac{1}{2}$-近似アルゴリズムを提案している [9]．さらに，彼らは，無秩序の対価が高々2 であることも示している．一方，Bhawalkar and Roughgarden は，すべての入札者の評価が劣加法的であるような品物別入札の組合せオークションに対して，どの入札者の入札ベクトルも超過入札にならないという仮定の下で，ナッシュ均衡が存在するときには，どのナッシュ均衡も社会的幸福度が最大となる解の少なくとも半分以上の社会的幸福度を達成することを示している [4]．従って，ナッシュ均衡が存在するときには，無秩序の対価が高々2 であることになる．さらに，すべての入札者の評価が劣加法的であるような品物別入札の組合せオークションにおけるナッシュ均衡が存在するための必要十分条件は，Bhawalkar and Roughgarden により未解決問題として提起されている [4]．

本論文では，すべての入札者の評価が劣加法的で対称的であるような品物別入札の組合せオークションにおいて，どの入札者の入札ベクトルも超過入札にならないという仮定の下で，ナッシュ均衡が存在するための必要十分条件を与える．これは，品物別入札の組合せオークションにおいて，弱安定（ナッシュ均衡が存在することをいう）である条件を示したことになる．さらに，ナッシュ均衡が存在するときは，ナッシュ均衡解を求めることを可能にした．無秩序の対価は 2 であることが知られているため [4]，これは最適解に対して $\frac{1}{2}$-近似であることが自動的に保証される．

なお，評価が $|S| = |T|$ をみたすすべての部分集合 $S, T \subseteq M$ に対して $f_i(S) = f_i(T)$ が成立するときその評価は対称的であるとよばれる．対称的な評価は文献 [26, 27] でも取り上げられている．対称的な評価からなるオークションは，複数ユニットオークションとよばれている．すなわち，同一の品物が複数個存在するオークションである．そして，いくつかの結果が知られている [5, 21, 25]．日本の長期国債のオークション [14] は複数ユニットオークションの一例と見なせる．

次節では，品物別入札の組合せオークションにおける基本的な概念と記法についての説明を与える．そして議論が明快になるようにするために，入札者数 n が 2 の場合のナッシュ均衡の存在を第 3 章で取り上げ，一般の入札者数 $n \geq 2$ の場合のナッシュ均衡の存在を第 4 章で取り上げる．

2.2 品物別入札の組合せオークションにおける基本的な概念

前にものべたように，組合せオークションでは，m 個の品物（財）の集合 $M = \{1, 2, \ldots, m\}$ と n 人の入札者（プレイヤー）の集合 $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ が入力として与えられる．各入札者 $i \in N$

は，品物の各部分集合 $S \subseteq M$ に対する非負の評価 $f_i(S)$ の評価関数 $f_i : 2^M \to R_+$ を持っている．n 人の入札者の評価関数プロファイルを $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ と表記する．

品物別組合せオークションでは，各入札者 $i \in N$ は各品物 $j \in M$ に対する非負の入札 $b_i(j)$ を持ち，i の入札は

$$b_i = (b_i(1), b_i(2), \ldots, b_i(m)) \tag{2.2}$$

と表記される．n 人の入札者の入札プロファイルを

$$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \tag{2.3}$$

と表記する．各 $i \in N$ に対して $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ から b_i を除いた入札を

$$\boldsymbol{b}_{-i} = (b_1, b_2, \ldots, b_{i-1}, b_{i+1}, \ldots, b_n) \tag{2.4}$$

と表記する．入札プロファイル $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ において，各入札者 $i \in N$ と各品物 $j \in M$ に対して，j に対する i 以外の入札者の入札額で最も高い入札額を $b_{-i}^{\max}(j)$ と表記する．すなわち，

$$b_{-i}^{\max}(j) = \max_{h \in N - \{i\}} \{b_h(j)\} \qquad (j \in M) \tag{2.5}$$

である．そして，各入札者 $i \in N$ に対して，

$$b_{-i}^{\max} = (b_{-i}^{\max}(1), b_{-i}^{\max}(2), \ldots, b_{-i}^{\max}(m)) \tag{2.6}$$

と表記する．

$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ の実行可能性（すなわち，無超過入札）は以下のように定義される．

定義 2.1 n 人の入札者の評価関数プロファイルと入札プロファイルを，それぞれ，$\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ と $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ とする．各 $i \in N$ に対して

$$\sum_{j \in S} b_i(j) > f_i(S) \tag{2.7}$$

となるような部分集合 $S \subseteq M$ が存在するときには b_i は**超過入札**であるとよばれる．そうでない（すなわち，すべての部分集合 $S \subseteq M$ に対して $\sum_{j \in S} b_i(j) \leq f_i(S)$ である）とき，b_i は**実行可能**（あるいは**無超過入札**）であるとよばれる．すべての b_i $(i \in N)$ が実行可能であるとき，入札プロファイル $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ は**実行可能**であるとよばれる． □

文献 [9],[4] による品物別入札の組合せオークションでは，第二価格オークションが用いられている．従って，品物は以下のように割り当てられる．入札プロファイル $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ において，各品物 $j \in M$ に対して，入札者 $i \in N$ の入札 $b_i(j)$ がほかの入札者の入札 $b_h(j)$ $(h \in N - \{i\})$ より高いときには，品物 j は i に割り当てられる．すなわち，$b_i(j) > b_h(j)$ $(h \in N - \{i\})$ ならば入札者 i が勝ち，品物 $j \in M$ を獲得する．このとき，品物 $j \in M$ の**価格**を $\mathrm{price}(j)$ と表記すると，$\mathrm{price}(j)$ はすべての入札者のうちで 2 番目に高い入札として定義される．従って，

$$\mathrm{price}(j) = b_{-i}^{\max}(j) = \max\{b_h(j) \mid h \in N - \{i\}\} \tag{2.8}$$

である．これは，入札者 $i \in N$ は $b_i(j) < b_{-i}^{\max}(j)$ であるときには，品物 $j \in M$ を獲得できないことを意味する．

品物 $j \in M$ に対して最高入札額の入札者が二人以上いたときには，オークションの主催者が権限を持ち，他の品物 $j' \in M - \{j\}$ に対する入札とは無関係に独立に，適切な系統的方法で，最高入札額の入札者の正確に一人だけを勝利者として選び，勝利者が品物 j を獲得する．このとき，もし i が勝てば，i が品物 j を獲得し，価格は $\mathrm{price}(j) = b_{-i}^{\max}(j) = b_i(j)$ となる．本論文では，各品物 $j \in M$ に対して少なくとも一人の入札者の入札が正であると仮定する（すべての入札者 $i \in N$ で $b_i(j) = 0$ となるような品物 j が存在するときでも本論文の議論を拡張して適用できる）．

実行可能入札プロファイル $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ に対して，各入札者 $i \in N$ に割り当てられる品物の集合を $X_i(\boldsymbol{b})$ とする．すると，上記の議論より，

$$\{j \in M \,|\, b_i(j) > b_{-i}^{\max}(j)\} \subseteq X_i(\boldsymbol{b}) \ \subseteq \ \{j \in M \,|\, b_i(j) \geq b_{-i}^{\max}(j)\} \tag{2.9}$$

である．入札者 $i \in N$ が獲得する品物の集合 $X_i(\boldsymbol{b})$ に対する i の**効用** $u_i(X_i(\boldsymbol{b}))$ は

$$u_i(X_i(\boldsymbol{b})) = f_i(X_i(\boldsymbol{b})) - \sum_{j \in X_i(\boldsymbol{b})} \mathrm{price}(j) \tag{2.10}$$

と定義される．

実行可能入札プロファイル $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ において，入札者 $i \in N$ のみが入札 b_i を b'_i に変更したとする．そして得られるすべての入札者の入札プロファイルを $\boldsymbol{b}'_i = (b_1, b_2, \ldots, b_{i-1}, b'_i, b_{i+1}, \ldots, b_n)$ とする．$\boldsymbol{b}'_i = (b_1, b_2, \ldots, b_{i-1}, b'_i, b_{i+1}, \ldots, b_n)$ を簡略化して

$$\boldsymbol{b}'_i = (b'_i, \boldsymbol{b}_{-i}) \tag{2.11}$$

と表記することもある．さらに，入札プロファイル $(b'_i, \boldsymbol{b}_{-i})$ において，i が勝ち割り当てられる品物の集合を $X_i(b'_i, \boldsymbol{b}_{-i})$ と表記する．（他のどの入札者も入札額を変えないという仮定の下で）入札者 i は入札 b_i をどのような実行可能入札 b'_i に変更したとしても $(b'_i, \boldsymbol{b}_{-i})$ における i の効用 $u(X_i(b'_i, \boldsymbol{b}_{-i}))$ が変更する前の効用 $u_i(X_i(\boldsymbol{b}))$ より真に大きくなることがない（すなわち，ゲーム理論の用語を用いると，入札者 i の入札（戦略）b_i は，i 以外の入札者の入札プロファイル（戦略プロファイル）$\boldsymbol{b}_{-i}$ に対する**最善反応**である）とする．すると，入札者 i は入札プロファイル $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ において自身の入札 b_i を変えたいとは思わない．

ナッシュ均衡は以下のように定義される．

定義 2.2 実行可能入札プロファイル $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ において，すべての入札者 $i \in N$ が自身の入札 b_i を変えたいとは思わないとき，すなわち，すべての入札者 $i \in N$ と上で定義されたすべての実行可能入札プロファイル $(b'_i, \boldsymbol{b}_{-i})$ および $X_i(b'_i, \boldsymbol{b}_{-i})$ で

$$u_i(X_i(\boldsymbol{b})) \geq u_i(X_i(b'_i, \boldsymbol{b}_{-i}))$$

が成立するとき，$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ は**純粋ナッシュ均衡**とよばれる（以下簡略化して**ナッシュ均衡**という）． □

次に，弱安定を定義する．ナッシュ均衡は，評価関数プロファイル $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ によっては存在しないことがある．そこで，評価関数プロファイル $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ は，ナッシュ均衡となるような実行可能入札プロファイル $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ をもつとき，弱安定とよぶことにする．

定義 2.3 評価関数プロファイル $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ は，$\boldsymbol{f}$ において，ナッシュ均衡となるような実行可能入札プロファイル $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ が存在するとき，**弱安定**とよばれる． □

弱安定でないときには，どのような入札プロファイルにおいても，常に自分の入札を変更したい入札者が存在することになる．

次に，強安定関連の定義をしていく．まず割当ベクトル $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{b}) = (X_1(\boldsymbol{b}), X_2(\boldsymbol{b}), \ldots, X_n(\boldsymbol{b}))$ が公平であるということを以下のように定義する．

定義 2.4 割当ベクトル $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{b}) = (X_1(\boldsymbol{b}), X_2(\boldsymbol{b}), \ldots, X_n(\boldsymbol{b}))$ は，どの入札者 $i \in N$ においても，現在の品物の価格のもとで，他のどの入札者 $h \in N - \{i\}$ に割り当てられた品物集合 $X_h(\boldsymbol{b})$ を羨ましいと思わないとき，すなわち，$X_h(\boldsymbol{b})$ の入札者 i における効用が，$X_i(\boldsymbol{b})$ の効用より，真に大きくなることがないとき，**公平**であるとよばれる．式で表現すると，

$$u_i(X_i(\boldsymbol{b})) \geq v_i(X_h(\boldsymbol{b})) - \sum_{j \in X_h(\boldsymbol{b})} b_{-h}^{\max}(j) \tag{2.12}$$

が成立するとき，割当ベクトル $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{b}) = (X_1(\boldsymbol{b}), X_2(\boldsymbol{b}), \ldots, X_n(\boldsymbol{b}))$ は公平であるとよばれる． □

割当ベクトルが公平であれば，各入札者は他人の割当（およびそれに付随する価格）を羨まない，といえる．

これで，強安定を定義する準備ができた．以下のように定義する．

定義 2.5 評価関数プロファイル $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ は，$\boldsymbol{f}$ において，ナッシュ均衡でありかつ割当ベクトル $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{b}) = (X_1(\boldsymbol{b}), X_2(\boldsymbol{b}), \ldots, X_n(\boldsymbol{b}))$ が公平であるような実行可能入札プロファイル $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ が存在するとき，**強安定**とよばれる． □

次に本論文おける，各評価関数 f_i $(i \in N)$ への仮定をのべる．

(i) （正規化）$f_i(\emptyset) = 0$.

(ii) （単調性）$\emptyset \neq S \subset T$ をみたすすべての $S, T \subseteq M$ に対して $0 < f_i(S) \leq f_i(T)$.

(iii) （劣加法性）すべての $S, T \subseteq M$ に対して $f_i(S \cup T) \leq f_i(S) + f_i(T)$.

(iv) （対称性）$|S| = |T|$ をみたすすべての $S, T \subseteq M$ に対して $f_i(S) = f_i(T)$.

従って，各部分集合 $S \subseteq M$ に対して $v_i(|S|) = f_i(S)$ として関数

$$v_i : \{0, 1, 2, \ldots, m\} \to \mathbf{R}_+$$

を定義できる．上記の仮定の f_i の対称性からこの v_i は矛盾なく定義されている．この対称的な評価関数 v_i を用いると，上記の仮定の (i), (ii), (iii) と効用は以下のように書ける．

仮定 2.1 評価関数プロファイル $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ の各 v_i $(i \in N)$ は以下をみたす．

1. （正規化）$v_i(0) = 0$.
2. （単調性）$1 \leq k < k' \leq m$ をみたすすべての k, k' に対して
   $0 < v_i(k) \leq v_i(k')$.
3. （劣加法性）$1 \leq k < k' \leq m$ をみたすすべての k, k' に対して
   $v_i(\min\{k + k', m\}) \leq v_i(k) + v_i(k')$. □

定義 2.6 n 人の入札者の評価関数プロファイルと入札プロファイルを，それぞれ，$\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ と $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ とする．入札者 $i \in N$ が獲得する品物の集合 $X_i(\boldsymbol{b})$ に対する i の効用 $u_i(X_i(\boldsymbol{b}))$ は

$$u_i(X_i(\boldsymbol{b})) = v_i(|X_i(\boldsymbol{b})|) - \sum_{j \in X_i(\boldsymbol{b})} \mathrm{price}(j) \tag{2.13}$$

と定義される． □

無超過入札の仮定の下でのナッシュ均衡の存在の特徴付けを与えたいので，最初に入札プロファイルの実行可能性について考える．

定義 2.7 各入札者 $i \in N$ の評価関数 v_i が仮定 2.1 をみたす評価関数プロファイル $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ において，各 w_i $(i \in N)$ は，$w_i(0) = 0$ および各 $k_i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ に対して

$$w_i(k_i) = k_i \min\left\{v_i(1), \frac{v_i(2)}{2}, \ldots, \frac{v_i(k_i - 1)}{k_i - 1}, \frac{v_i(k_i)}{k_i}\right\} \tag{2.14}$$

として定義される． □

本論文を通して以下の仮定を用いる．

仮定 2.2 評価関数プロファイル $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ においてすべての入札者 $i \in N$ の評価関数 v_i は仮定 2.1 を満たし，$\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ においてすべての w_i $(i \in N)$ は定義 2.7 で定義された関数である． □

すると，本論文の主たる定理の証明で中心的な役割を果たすことになる以下の補題と定理が得られる．

補題 2.1 各 w_i $(i \in N)$ は以下の性質をみたす．

$$\begin{aligned} &w_i(0) = v_i(0), \quad w_i(1) = v_i(1), \\ &w_i(k_i) \leq v_i(k_i) \quad (k_i = 2, 3, \ldots, m), \end{aligned} \tag{2.15}$$

$$w_i(k_i) = k_i \min\left\{\tfrac{w_i(k_i - 1)}{k_i - 1}, \tfrac{v_i(k_i)}{k_i}\right\} \qquad (k_i = 2, 3, \ldots, m), \tag{2.16}$$

$$w_i(1) \geq \frac{w_i(2)}{2} \geq \cdots \geq \frac{w_i(m)}{m}, \tag{2.17}$$

$$w_i(1) \le w_i(2) \le \cdots \le w_i(m) \tag{2.18}$$

である．さらに，$w_i(k_i) < v_i(k_i)$ ならば

$$w_i(k_i) = \frac{k_i}{k_i - 1} w_i(k_i - 1) \quad (k_i = 2, 3, \ldots, m) \tag{2.19}$$

である．

証明： $w_i(k_i)$ の定義より，$w_i(0) = v_i(0) = 0$ であり，かつすべての $k_i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ で

$$\frac{w_i(k_i)}{k_i} = \min\left\{v_i(1), \frac{v_i(2)}{2}, \ldots, \frac{v_i(k_i - 1)}{k_i - 1}, \frac{v_i(k_i)}{k_i}\right\} \le \frac{v_i(k_i)}{k_i}$$

であるので，

$$\begin{aligned} &w_i(0) = v_i(0), \quad w_i(1) = v_i(1), \\ &w_i(k_i) \le v_i(k_i) \quad (k_i = 2, 3, \ldots, m) \end{aligned}$$

である．すなわち，(2.15) が成立する．同様に，すべての $k_i \in \{2, 3, \ldots, m\}$ で

$$\begin{aligned} \frac{w_i(k_i)}{k_i} &= \min\left\{v_i(1), \frac{v_i(2)}{2}, \ldots, \frac{v_i(k_i - 1)}{k_i - 1}, \frac{v_i(k_i)}{k_i}\right\} \\ &= \min\left\{\min\left\{v_i(1), \frac{v_i(2)}{2}, \ldots, \frac{v_i(k_i - 1)}{k_i - 1}\right\}, \frac{v_i(k_i)}{k_i}\right\} \\ &= \min\left\{\frac{w_i(k_i - 1)}{k_i - 1}, \frac{v_i(k_i)}{k_i}\right\} \le \frac{w_i(k_i - 1)}{k_i - 1} \end{aligned}$$

であるので，

$$w_i(k_i) = k_i \min\left\{\frac{w_i(k_i - 1)}{k_i - 1}, \frac{v_i(k_i)}{k_i}\right\} \quad (k_i = 2, 3, \ldots, m)$$

かつ

$$w_i(1) \ge \frac{w_i(2)}{2} \ge \cdots \ge \frac{w_i(m)}{m}$$

である．すなわち，(2.16) と (2.17) が成立する．さらに，(2.16) より，$w_i(k_i) < v_i(k_i)$ ならば，

$$w_i(k_i) = \frac{k_i}{k_i - 1} w_i(k_i - 1) \quad (k_i = 2, 3, \ldots, m)$$

である．すなわち，(2.19) が成立する．最後に，(2.16) より各 $k_i \in \{2, 3, \ldots, m\}$ で，$w_i(k_i) = \frac{k_i}{k_i - 1} w_i(k_i - 1)$ であるか，あるいは $w_i(k_i) = v_i(k_i)$ であるので，

$$w_i(k_i) = w_i(k_i - 1) + \frac{1}{k_i - 1} w_i(k_i - 1) \ge w_i(k_i - 1)$$

であるか，あるいは v_i の単調性と (2.15) での $w_i(k_i - 1) \le v_i(k_i - 1)$ より，

$$w_i(k_i) = v_i(k_i) \ge v_i(k_i - 1) \ge w_i(k_i - 1)$$

であるので，

$$w_i(1) \le w_i(2) \le \cdots \le w_i(m)$$

である．すなわち，(2.18) が成立する． □

定理 2.1 入札プロファイル $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ において，各入札者 $i \in N$ の入札ベクトル $b_i = (b_i(1), b_i(2), \ldots, b_i(m))$ が，$M = \{1, 2, \ldots, m\}$ 上でのある置換 π_i を用いて

$$b_i(\pi_i(1)) \leq b_i(\pi_i(2)) \leq \cdots \leq b_i(\pi_i(m)) \tag{2.20}$$

と入札額の小さい順に並べられているとする．このとき，入札者 $i \in N$ の入札ベクトル $b_i = (b_i(1), b_i(2), \ldots, b_i(m))$ が実行可能であるための必要十分条件は，

$$\sum_{j=m-k_i+1}^{m} b_i(\pi_i(j)) \leq w_i(k_i) \quad (k_i = 1, 2, \ldots, m) \tag{2.21}$$

が成立することである．すなわち，すべての $k_i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ で $b_i = (b_i(1), b_i(2), \ldots, b_i(m))$ の入札額の高いほうから k_i 番目までの入札額の和が高々$w_i(k_i)$ であることである．従って，入札プロファイル $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ が実行可能であるための必要十分条件は，すべての $i \in N$ とすべての $k_i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ で不等式 (2.21) が成立することである．

証明： （十分性）$i \in N$ とすべての $k_i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ に対して (2.21) が成立するとする．任意の部分集合 $M_i \subseteq M$ に対して $k_i = |M_i|$ とする．すると，入札ベクトル $b_i = (b_i(1), b_i(2), \ldots, b_i(m))$ において，$b_i = (b_i(1), b_i(2), \ldots, b_i(m))$ の M_i に含まれる品物に対する入札額の和は，高々$b_i = (b_i(1), b_i(2), \ldots, b_i(m))$ の入札額の高いほうから k_i 番目までの入札額の和であるので，(2.20) より，

$$\sum_{j \in M_i} b_i(j) \leq \sum_{j=m-k_i+1}^{m} b_i(\pi_i(j))$$

が得られる．従って，(2.21) と (2.15) （すなわち，$w_i(k_i) \leq v_i(k_i)$）より，

$$\sum_{j \in M_i} b_i(j) \leq \sum_{j=m-k_i+1}^{m} b_i(\pi_i(j)) \leq w_i(k_i) \leq v_i(k_i)$$

が得られ，$b_i = (b_i(1), b_i(2), \ldots, b_i(m))$ は，定義 3.1 より，実行可能である．

（必要性）$i \in N$ の入札ベクトル $b_i = (b_i(1), b_i(2), \ldots, b_i(m))$ が実行可能であるとする．すると，$k_i = |M_i| \in \{1, 2, \ldots, m\}$ をみたす任意の部分集合 $M_i \subseteq M$ に対して

$$\sum_{j \in M_i} b_i(j) \leq v_i(k_i)$$

である．とくに，$M_i = \{\pi_i(m - k_i + 1), \pi_i(m - k_i + 2), \ldots, \pi_i(m)\}$ とする．すると，すべての $k_i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ で

$$\sum_{j=m-k_i+1}^{m} b_i(\pi_i(j)) \leq v_i(k_i) \tag{2.22}$$

であり，かつ

$$\frac{1}{k_i} \sum_{j=m-k_i+1}^{m} b_i(\pi_i(j)) \leq \frac{v_i(k_i)}{k_i} \tag{2.23}$$

である．さらに，$b_i = (b_i(1), b_i(2), \ldots, b_i(m))$ において，すべての $k_i' \in \{2, 3, \ldots, k_i\}$ で，入札額の高いほうから k_i' 番目までの入札額の平均は，高々入札額の高いほうから $k_i' - 1$ 番目までの入札

額の平均であるので，(2.20) より

$$\frac{1}{k'_i}\sum_{j=m-k'_i+1}^{m} b_i(\pi_i(j)) \leq \frac{1}{k'_i-1}\sum_{j=m-k'_i+2}^{m} b_i(\pi_i(j))$$

が成立する．従って，

$$\begin{aligned}\frac{1}{k_i}\sum_{j=m-k_i+1}^{m} b_i(\pi_i(j)) &\leq \frac{1}{k_i-1}\sum_{j=m-k_i+2}^{m} b_i(\pi_i(j))\\ &\leq \cdots\\ &\leq \frac{1}{2}\sum_{j=m-1}^{m} b_i(\pi_i(j))\\ &\leq b_i(\pi_i(m))\end{aligned}$$

が得られる．これと (2.23) を合わせると，すべての $k'_i = 1, 2, \ldots, k_i$ で

$$\frac{1}{k_i}\sum_{j=m-k_i+1}^{m} b_i(\pi_i(j)) \leq \frac{1}{k'_i}\sum_{j=m-k'_i+1}^{m} b_i(\pi_i(j)) \leq \frac{v_i(k'_i)}{k'_i} \tag{2.24}$$

であることが得られる．従って，これと (2.14) における w_i の定義から，すべての $k_i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ で

$$\frac{1}{k_i}\sum_{j=m-k_i+1}^{m} b_i(\pi_i(j)) \leq \min\left\{v_i(1), \frac{v_i(2)}{2}, \ldots, \frac{v_i(k_i)}{k_i}\right\} = \frac{w_i(k_i)}{k_i}$$

が成立し，(2.21) が得られる． □

定理 2.1 より，以下の系が得られる．

系 2.1 n 人の入札プロファイル $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ が実行可能であるかどうかは，すべての入札者 $i \in N$ の入札ベクトル b_i における入札額が (2.20) にあるように前もってソートされていれば，$O(mn)$ 時間で判定できる． □

これらの準備に基づいて，これ以降，品物別入札の組合せオークションにおけるナッシュ均衡の存在について議論する．なお，理解の容易性のために，次章では $n = 2$ の二人の入札者による品物別入札の組合せオークションにおけるナッシュ均衡を議論する．その次の章で，一般の $n \geq 2$ における n 人の入札者による品物別入札の組合せオークションにおけるナッシュ均衡を議論する．

第3章　二人の入札者による品物別入札の組合せオークションのナッシュ均衡

前にものべたように，本章では $n=2$ の二人の入札者による品物別入札の組合せオークションにおけるナッシュ均衡を議論する．従って，$N=\{1,2\}$ である．各入札者 $i \in N$ は，品物の各部分集合 $S \subseteq M$ に対する非負の評価 $f_i(S)$ の評価関数 $f_i: 2^M \to R_+$ を持っている．二人の評価関数プロファイルを $\boldsymbol{f}=(f_1,f_2)$ と表記する．なお，評価関数 f_i $(i=1,2)$ はともに対称的であるとする．すなわち，$|S|=|T|$ をみたすすべての部分集合 $S,T \subseteq M$ に対して $f_i(S)=f_i(T)$ が成立するとする．従って，各部分集合 $S \subseteq M$ に対して $v_i(|S|)=f_i(S)$ として関数

$$v_i : \{0,1,2,\ldots,m\} \to \mathbf{R}_+$$

を定義できる．これ以降，対称的な評価関数のプロファイル $\boldsymbol{f}=(f_1,f_2)$ を $\boldsymbol{v}=(v_1,v_2)$ と表記する．本章では，各評価関数 v_i $(i=1,2)$ に対して以下の仮定をする．

仮定 3.1 評価関数プロファイル $\boldsymbol{v}=(v_1,v_2)$ の各 v_i $(i \in N=\{1,2\})$ は以下をみたす．

1. （正規化）$v_i(0)=0$.
2. （単調性）$1 \leq k < k' \leq m$ をみたすすべての k,k' に対して
   $0 < v_i(k) \leq v_i(k')$.
3. （劣加法性）$1 \leq k < k' \leq m$ をみたすすべての k,k' に対して
   $v_i(\min\{k+k',m\}) \leq v_i(k)+v_i(k')$. □

品物別入札の組合せオークションでは，各入札者（プレイヤー）$i \in N=\{1,2\}$ は各品物（財）$j \in M$ に対する非負の入札 $b_i(j)$ を持ち，i の入札は

$$b_i=(b_i(1),b_i(2),\ldots,b_i(m)) \tag{3.1}$$

と表記される．二人の入札者の入札プロファイルを

$$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2) \tag{3.2}$$

と表記する．各 $i \in N=\{1,2\}$ に対して $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2)$ から b_i を除いた入札を b_{-i} と表記する．従って，$b_{-1}=b_2$ かつ $b_{-2}=b_1$ である．

前章の繰り返しになるが，前章で一般の n のときに与えた定義・仮定・定理・系に対して，$n=2$ に限定した対応する定義・仮定・定理・系を再度与える．

$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2)$ の実行可能性（すなわち，無超過入札）は以下のように定義される．

定義 3.1 二人の入札者の評価関数プロファイルと入札プロファイルを，それぞれ，$\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$ と $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$ とする．各 $i \in N = \{1, 2\}$ に対して

$$\sum_{j \in S} b_i(j) > v_i(|S|) \tag{3.3}$$

となるような部分集合 $S \subseteq M$ が存在するときには b_i は**超過入札**であるとよばれる．そうでない（すなわち，すべての部分集合 $S \subseteq M$ に対して $\sum_{j \in S} b_i(j) \leq v_i(|S|)$ である）とき，b_i は**実行可能**（すなわち，**無超過入札**）であるとよばれる．両方の b_i $(i \in N = \{1, 2\})$ が実行可能であるとき，入札プロファイル $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$ は**実行可能**であるとよばれる． □

二人の入札者の品物別入札の組合せオークションでは，第二価格オークションが用いられる．従って，品物は以下のように割り当てられる．入札プロファイル $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$ において，品物 $j \in M$ に対する入札者 $i \in N = \{1, 2\}$ の入札 $b_i(j)$ がほかの入札者の入札 $b_{-i}(j)$ より高いときには，品物 j は i に割り当てられる．すなわち，$b_i(j) > b_{-i}(j)$ ならば入札者 i が勝ち，品物 $j \in M$ を獲得する．このとき，品物 $j \in M$ の**価格**を $\text{price}(j)$ と表記すると，$\text{price}(j)$ はすべての入札者のうちで 2 番目に高い入札として定義される．従って，

$$\text{price}(j) = b_{-i}(j) \tag{3.4}$$

である．これは，入札者 $i \in N = \{1, 2\}$ は $b_i(j) < b_{-i}(j)$ であるときには，品物 $j \in M$ を獲得できないことを意味する．品物 $j \in M$ に対して二人の入札が等しいときには，正確に一人だけが勝ち，品物 j を獲得する．このとき，もし i が勝てば，i が品物 j を獲得し，価格は $\text{price}(j) = b_{-i}(j) = b_i(j)$ となる．

入札プロファイル $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$ において，各入札者 $i \in N = \{1, 2\}$ に対して i が勝ち割り当てられる品物の集合を $X_i(\boldsymbol{b})$ と表記する．すると，上記の議論より，

$$\{j \in M \,|\, b_i(j) > b_{-i}(j)\} \subseteq X_i(\boldsymbol{b}) \subseteq \{j \in M \,|\, b_i(j) \geq b_{-i}(j)\} \tag{3.5}$$

である．入札者 $i \in N = \{1, 2\}$ が獲得する品物の集合 $X_i(\boldsymbol{b})$ に対する i の**効用** $u_i(X_i(\boldsymbol{b}))$ は

$$u_i(X_i(\boldsymbol{b})) = v_i(|X_i(\boldsymbol{b})|) - \sum_{j \in X_i(\boldsymbol{b})} \text{price}(j) \tag{3.6}$$

と定義される．

入札者 1 のみが入札 b_1 を b'_1 に変えると入札プロファイルは $\boldsymbol{b}'_1 = (b'_1, b_2)$ となる．同様に，入札者 2 のみが入札 b_2 を b'_2 に変えると入札プロファイルは $\boldsymbol{b}'_2 = (b_1, b'_2)$ となる．便宜上，入札者 $i \in N = \{1, 2\}$ のみが入札を b_i から b'_i に変えたときに得られる入札プロファイルを $\boldsymbol{b}'_i = (b'_i, b_{-i})$ と表記する．さらに，このとき i が勝ち割り当てられる品物の集合を $X_i(\boldsymbol{b}'_i)$ と表記する．

入札プロファイル $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$ において入札者 i のみが入札 b_i をどのような入札 b'_i に変えたとしても $\boldsymbol{b}'_i = (b'_i, b_{-i})$ における i の効用 $u_i(X_i(\boldsymbol{b}'_i))$ が変える前の効用 $u_i(X_i(\boldsymbol{b}))$ より真に大きくなることがない（すなわち，ゲーム理論の用語を用いると，入札者 i の入札（戦略）b_i は，i 以外の入札者の入札（戦略）b_{-i} に対する**最善反応**である）とする．すると，入札者 i は入札プロファイル $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$ において自身の入札 b_i を変えたいとは思わない．

実行可能入札プロファイル $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2)$ において，どの入札者 $i\in N=\{1,2\}$ も自身の入札 b_i をどのような実行可能入札 b'_i にも変えたいと思わないとき，すなわち，どの入札者 $i\in N=\{1,2\}$ でも上述のすべての実行可能入札 $\boldsymbol{b}'_i=(b'_i,b_{-i})$ と $X_i(\boldsymbol{b}'_i)$ に対して $u_i(X_i(\boldsymbol{b}))\geq u_i(X_i(\boldsymbol{b}'_i))$ であるとき，入札プロファイル $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2)$ は**純粋ナッシュ均衡**とよばれる（以下簡略化して**ナッシュ均衡**という）.

仮定 2.2 と定理 2.1 の n を $n=2$ とすると以下の仮定と定理が得られる.

仮定 3.2 $\boldsymbol{v}=(v_1,v_2)$ において各 v_i $(i\in N=\{1,2\})$ は仮定 2.1 を満たし，$\boldsymbol{w}=(w_1,w_2)$ において各 w_i $(i\in N=\{1,2\})$ は定義 2.7 で定義された w_i とする．すなわち，各 w_i $(i\in N=\{1,2\})$ は，$w_i(0)=0$ および各 $k_i\in\{1,2,\ldots,m\}$ に対して

$$w_i(k_i)=k_i\min\left\{v_i(1),\frac{v_i(2)}{2},\ldots,\frac{v_i(k_i-1)}{k_i-1},\frac{v_i(k_i)}{k_i}\right\} \tag{3.7}$$

として定義される. □

定理 3.1 入札プロファイル $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2)$ において，各入札者 $i\in N=\{1,2\}$ の入札ベクトル $b_i=(b_i(1),b_i(2),\ldots,b_i(m))$ が，$M=\{1,2,\ldots,m\}$ 上でのある置換 π_i を用いて

$$b_i(\pi_i(1))\leq b_i(\pi_i(2))\leq\cdots\leq b_i(\pi_i(m)) \tag{3.8}$$

と入札額の小さい順に並べられているとする．すると，入札者 $i\in N=\{1,2\}$ の入札ベクトル $b_i=(b_i(1),b_i(2),\ldots,b_i(m))$ が実行可能であるための必要十分条件は，

$$\sum_{j=m-k_i+1}^{m} b_i(\pi_i(j))\leq w_i(k_i)\quad(k_i=1,2,\ldots,m) \tag{3.9}$$

が成立することである．従って，入札プロファイル $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2)$ が実行可能であるための必要十分条件は，すべての $i\in N=\{1,2\}$ とすべての $k_i\in\{1,2,\ldots,m\}$ で (3.9) が成立することである. □

定理 3.1 より，以下の系が得られる.

系 3.1 二人の入札プロファイル $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2)$ が実行可能であるかどうかは，すべての入札者 $i\in N=\{1,2\}$ の入札ベクトル b_i における入札額が (3.8) にあるように前もってソートされていれば，$O(m)$ 時間で判定できる. □

3.1 ナッシュ均衡の存在

本節では，ナッシュ均衡が存在するための必要十分条件をのべる．これは定義 2.3 より，評価関数プロファイル $\boldsymbol{v}=(v_1,v_2)$ が弱安定である条件を示したことを意味する．結果を説明するための用語と補題を与えてから，その後に結果の証明を行う.

定義 3.2 $P=(M_1,M_2)$ を品物の集合 M の二つの部分集合への分割とする．すなわち，

$$M_1\cap M_2=\emptyset,\quad M_1\cup M_2=M$$

である．各 $i \in N$ に対して $d_i = (d_i(1), d_i(2), \ldots, d_i(m))$ を

$$d_i(j) = \begin{cases} \frac{w_i(|M_i|)}{|M_i|} & (j \in M_i \text{ のとき}), \\ 0 & (\text{それ以外のとき}) \end{cases} \tag{3.10}$$

として定義する．

すると，以下の補題と主要定理が得られる．

補題 3.1 式 (3.10) で定義される入札プロファイル $\boldsymbol{d} = (d_1, d_2)$ は，実行可能であり，さらに，各入札者 $i \in N$ に対して $X_i(\boldsymbol{d}) = M_i$ である（すなわち，$\boldsymbol{d} = (d_1, d_2)$ で i が勝ち獲得する品物の集合は M_i である）．

証明： $P = (M_1, M_2)$ が品物の集合 M の二つの部分集合への分割であり，さらに式 (3.10) より，各 $i \in N$ と各 $j \in M_i$ に対して $d_{-i}(j) = 0$ であるので，明らかに $X_i(\boldsymbol{d}) = M_i$ である．

$\boldsymbol{d} = (d_1, d_2)$ が実行可能であることから証明する．議論をわかりやすくするために，$i = 1$ における証明のみを与える．対称性より，$i = 2$ における証明も同様に得られる．

$k_1 = |M_1|$ とし，入札ベクトル d_1 の入札額が M 上のある置換 σ_1 を用いて

$$d_1(\sigma_1(1)) \leq d_1(\sigma_1(2)) \leq \cdots \leq d_1(\sigma_1(m)) \tag{3.11}$$

と並べられているとする．すると，

$$\begin{aligned} & d_1(\sigma_1(1)) = d_1(\sigma_1(2)) = \cdots = d_1(\sigma_1(m - k_1)) = 0, \\ & d_1(\sigma_1(m - k_1 + 1)) = \cdots = d_1(\sigma_1(m)) = \tfrac{w_1(k_1)}{k_1} \end{aligned} \tag{3.12}$$

であり，$1 \leq k' \leq k_1$ をみたすすべての k' で

$$\sum_{j=m-k'+1}^{m} d_1(\sigma_1(j)) = \frac{k'}{k_1} w_1(k_1) \tag{3.13}$$

が成立する．d_1 の実行可能性は以下のように得られる．

(2.17) より $w_1(1) \geq \frac{w_1(2)}{2} \geq \cdots \geq \frac{w_1(m)}{m}$ であるので，(3.13) より各 $k'' \leq k_1$ に対して

$$\sum_{j=m-k''+1}^{m} d_1(\sigma_1(j)) = \frac{k''}{k_1} w_1(k_1) \leq w_1(k'')$$

である．

一方，各 $k'' > k_1$ に対して (3.12) より $d_1(\sigma_1(m - k'' + 1)) = d_1(\sigma_1(m - k'' + 2)) = \cdots = d_1(\sigma_1(m - k_1)) = 0$ であるので，

$$\sum_{j=m-k''+1}^{m} d_1(\sigma_1(j)) = \sum_{j=m-k_1+1}^{m} d_1(\sigma_1(j)) = w_1(k_1) \leq w_1(k'')$$

である．なお，最後の不等式は (2.18) から得られる．従って，定理 3.1 より d_1 は実行可能である．

□

定理 3.2 仮定 3.1 をみたす評価関数プロファイル $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$ がナッシュ均衡を持つための必要十分条件は，式 (3.10) で定義される二人の実行可能入札ベクトル $\boldsymbol{d} = (d_1, d_2)$ がナッシュ均衡となるような品物集合 M の二つの部分集合への分割 $P = (M_1, M_2)$ が存在することである．これは，定義 2.3 より，評価関数プロファイル $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$ が弱安定である条件ともいえる．

それでは次に，定理 3.2 の証明を与える前に，簡単な例を与える．

例題 3.1 ここでは，以下の例に対し，ナッシュ均衡が存在しないことを定理 3.2 を用いて示す．$N = \{1, 2\}$, $M = \{1, 2, 3\}$ とし，

$$\begin{aligned} &v_1(0) = 0, \quad v_1(1) = v_1(2) = 3, \quad v_1(3) = 6, \\ &v_2(0) = 0, \quad v_2(1) = v_2(2) = 2, \quad v_2(3) = 4 \end{aligned} \tag{3.14}$$

とする．すると，各 v_i $(i \in N)$ は仮定 3.1 を満たし，

$$\begin{aligned} &w_1(0) = 0, \quad w_1(1) = 3, \quad \tfrac{w_1(2)}{2} = 1.5, \quad \tfrac{w_1(3)}{3} = 1.5, \\ &w_2(0) = 0, \quad w_2(1) = 2, \quad \tfrac{w_2(2)}{2} = 1, \qquad \tfrac{w_2(3)}{3} = 1 \end{aligned}$$

である．このとき，定理 3.2 より，以下のようにナッシュ均衡が存在しないことがわかる．

対称性より，各 $k = 0, 1, 2, 3$ に対して

$$M_1^{(k)} = \{j \in M \mid j \leq k\}, \quad M_2^{(k)} = M - M_1^{(k)}$$

として定義される M の以下の 4 個の分割 $P^{(k)} = (M_1^{(k)}, M_2^{(k)})$ を考えれば十分である．従って，

$$M_1^{(0)} = \emptyset, \quad M_1^{(1)} = \{1\}, \quad M_1^{(2)} = \{1, 2\}, \quad M_1^{(3)} = \{1, 2, 3\}$$

である．M の分割 $P^{(k)} = (M_1^{(k)}, M_2^{(k)})$ に対応して式 (3.10) で定義される実行可能入札ベクトル $\boldsymbol{d}^{(k)} = (d_1^{(k)}, d_2^{(k)})$ は，

$$\begin{aligned} &d_1^{(0)} = (0, 0, 0), && d_2^{(0)} = (1, 1, 1), \\ &d_1^{(1)} = (3, 0, 0), && d_2^{(1)} = (0, 1, 1), \\ &d_1^{(2)} = (1.5, 1.5, 0), && d_2^{(2)} = (0, 0, 2), \\ &d_1^{(3)} = (1.5, 1.5, 1.5), && d_2^{(3)} = (0, 0, 0) \end{aligned}$$

である．従って，すべての $k = 0, 1, 2, 3$ とすべての $i = 1, 2$ に対して $X_i(\boldsymbol{d}^{(k)}) = M_i^{(k)}$ である．ここで，各 $k = 0, 1, 2$ において，入札者 1 が入札ベクトル $d_1^{(k)}$ を

$$d_1'^{(0)} = (3, 0, 0), \quad d_1'^{(1)} = (0.8, 1.1, 1.1), \quad d_1'^{(2)} = (0.4, 0.4, 2.2)$$

として定義される入札ベクトル $d_1'^{(k)}$ に変えたとする．すると，実行可能入札プロファイル $\boldsymbol{d}'^{(k)} = (d_1'^{(k)}, d_2^{(k)})$ において，入札者 1 の効用を真に大きくなることになる．実際，各 $k = 0, 1, 2$ に対する入札者 1 の獲得する品物の集合 $X_1(\boldsymbol{d}'^{(k)})$ とその効用 $u_1(X_1(\boldsymbol{d}'^{(k)}))$ は，

$$X_1(\boldsymbol{d}'^{(0)}) = \{1\}, \quad u_1(X_1(\boldsymbol{d}'^{(0)})) = 3 - 1 > u_1(X_1(\boldsymbol{d}^{(0)})) = 0$$

となり，$k=1,2$ のときは

$$X_1(\boldsymbol{d}'^{(k)}) = \{1,2,3\}, \quad u_1(X_1(\boldsymbol{d}'^{(k)})) = 6-2 > u_1(X_1(\boldsymbol{d}^{(k)})) = 3$$

となる．同様に $k=3$ のときには，入札者 2 が入札ベクトル $d_2^{(3)}$ を $d_2'^{(3)} = (0,0,2)$ に変えると，実行可能入札プロファイル $\boldsymbol{d}_2'^{(3)} = (d_1^{(3)}, d_2'^{(3)})$ において入札者 2 の効用は 0 から 0.5 に真に大きくなることになる．実際，入札者 2 の獲得する品物の集合 $X_2(\boldsymbol{d}'^{3)})$ とその効用 $u_2(X_2(\boldsymbol{d}'^{(3)}))$ は，

$$X_2(\boldsymbol{d}'^{(3)}) = \{3\}, \quad u_2(X_2(\boldsymbol{d}'^{(3)})) = 2-1.5 > u_2(X_2(\boldsymbol{d}^{(3)})) = 0$$

となる．

従って，定理 3.2 より，式 (3.14) の評価関数プロファイル $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$ はナッシュ均衡を持たない． □

次の例は，定理 3.2 を適用し，ナッシュ均衡が存在すると示した例であると同時に，定理 3.2 は入札プロファイル $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$ が強安定（定義 2.5）である条件ではないことを示す例でもある（すなわち，ナッシュ均衡であり，かつ割当が公平であるような入札プロファイル $\boldsymbol{b}$ を求めることができない）．それを以下の例で示す．

例題 3.2 ここでは，以下の例に対し，ナッシュ均衡が存在することを定理 3.2 を用いて示す．しかし，これで得られるすべてのナッシュ均衡解による割当は公平でない．従って，定理 3.2 は，入札プロファイル $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$ が弱安定である条件ではあるが，強安定である条件ではない．

$N = \{1,2\}$, $M = \{1,2,3,4,5\}$ とし，各 $i \in N$ に対して

$$v_i(0) = 0, \quad v_i(1) = v_i(2) = v_i(3) = 3, \quad v_i(4) = v_i(5) = 6$$

とする．すると，各 v_i $(i \in N)$ は仮定 3.1 を満たし，

$$w_i(0) = 0, \quad w_i(1) = 3, \quad \tfrac{w_i(2)}{2} = 1.5, \quad \tfrac{w_i(3)}{3} = \tfrac{w_i(4)}{4} = \tfrac{w_i(5)}{5} = 1$$

である．例題 3.1 のときと同様に，$k=3$ のときの

$$M_1^{(3)} = \{1,2,3\}, \quad M_2^{(3)} = \{4,5\}$$

での M の分割において式 (3.10) で定義される実行可能入札ベクトル $\boldsymbol{d}^{(3)} = (d_1^{(3)}, d_2^{(3)})$ は

$$d_1^{(3)} = (1,1,1,0,0), \qquad d_2^{(3)} = (0,0,0,1.5,1.5)$$

となる．この分割 $X_1^{(3)}(\boldsymbol{d}^{(3)}) = M_1^{(3)} = \{1,2,3\}$ と $X_2^{(3)}(\boldsymbol{d}^{(3)}) = M_2^{(3)} = \{4,5\}$ に対応する実行可能入札ベクトル $\boldsymbol{d}^{(3)} = (d_1^{(3)}, d_2^{(3)})$ はナッシュ均衡ではない．入札者 2 が $d_2^{(3)}$ を $d_2'^{(3)} = (0,1.2,1.2,0.3,0.3)$ に変えると

$$X_2(\boldsymbol{d}'^{(3)}) = \{2,3,4,5\}, \quad u_2(X_2(\boldsymbol{d}'^{(3)})) = 6-2 > u_2(X_2(\boldsymbol{d}^{(3)})) = 3$$

となるので，入札プロファイル $\boldsymbol{d}_2'^{(3)} = (d_1^{(3)}, d_2'^{(3)})$ において自身の効用を 3 から 4 に大きくすることができるからである．

しかしながら，

$$\begin{aligned}
&d_1^{(1)} = (3,0,0,0,0), && d_2^{(1)} = (0,1,1,1,1)\\
&(M_1^{(1)} = \{1\}, && M_2^{(1)} = \{2,3,4,5\})\\
&(u_1(X_1(\boldsymbol{d}^{(1)})) = u_1(M_1^{(1)}) = 3, && u_2(X_2(\boldsymbol{d}^{(1)})) = u_2(M_2^{(1)}) = 6)
\end{aligned}$$

となる実行可能入札プロファイルの $\boldsymbol{d}^{(1)} = (d_1^{(1)}, d_2^{(1)})$ と

$$\begin{aligned}
&d_1^{(4)} = (1,1,1,1,0), && d_2^{(4)} = (0,0,0,0,3)\\
&(M_1^{(4)} = \{1,2,3,4\}, && M_2^{(4)} = \{5\})\\
&(u_1(X_1(\boldsymbol{d}^{(4)})) = u_1(M_1^{(4)}) = 6, && u_2(X_2(\boldsymbol{d}^{(4)})) = u_2(M_2^{(4)}) = 3)
\end{aligned}$$

となる実行可能入札プロファイル $\boldsymbol{d}^{(4)} = (d_1^{(4)}, d_2^{(4)})$ は，ともにナッシュ均衡である．しかし，ともに割当は公平でない（このことは，評価関数が全く同じことから，定義 2.4 より容易に得られる）．従って，定理 3.2 は弱安定である条件であるが，強安定の条件ではない． □

それでは次に，以下の記法を用いて，定理 3.2 の証明の概略を与える．

定義 3.3 入札プロファイル $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$ において各入札者 i $(i = 1, 2)$ が獲得する品物の集合を $Y_i = X_i(\boldsymbol{b})$ とし，$y_i = |Y_i|$ とする．すると，明らかに $P = (Y_1, Y_2)$ は M の二つの部分集合への分割である．すなわち，

$$Y_1 \cap Y_2 = \emptyset, \quad Y_1 \cup Y_2 = M, \quad y_1 + y_2 = m \tag{3.15}$$

である．このとき，各 $c_i = (c_i(1), c_i(2), \ldots, c_i(m))$ $(i \in N)$ は

$$c_i(j) = \begin{cases} \frac{w_i(y_i)}{y_i} & (j \in Y_i \text{ のとき}), \\ 0 & (\text{それ以外のとき}) \end{cases} \tag{3.16}$$

として定義される．

$M_i = Y_i$ と置けば，$c_i = (c_i(1), c_i(2), \ldots, c_i(m))$ は定義 3.2 の式 (3.10) で定義された入札ベクトル d_i になる．従って，以下の補題が得られる．なお，この証明は 3.3 節で与えることにする．

補題 3.2 仮定 3.1 をみたす評価関数プロファイル $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$ において，実行可能入札プロファイル $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$ がナッシュ均衡ならば，式 (3.16) で定義される $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2)$ もナッシュ均衡である． □

この補題を用いると定理 3.2 の証明を以下のように容易に与えることができる．

定理 3.2 の証明： （必要性）ナッシュ均衡の実行可能入札プロファイル $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$ が存在すれば，補題 3.2 より，式 (3.16) で定義される $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2)$ もナッシュ均衡である．従って，各 $i \in N$ で $M_i = Y_i$ かつ $d_i = c_i$ と置くことにより，所望の M に対する二つの集合への分割が得られ，定理 3.2 の必要性が証明された．

（十分性）式 (3.10) で定義される実行可能入札プロファイル $\boldsymbol{d} = (d_1, d_2)$ がナッシュ均衡となるような M に対する二つの集合への分割 $P = (M_1, M_2)$ が存在するならば，それは明らかに評価関数プロファイル $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$ におけるナッシュ均衡である． □

3.2 実行可能入札プロファイル $\boldsymbol{b}$ の基本的な性質

入札プロファイル $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$ がナッシュ均衡かどうかの判定は，全探索で行うことはできない（b_1, b_2 共に実数であるため）．そこで，ナッシュ均衡判定の計算を効率的にするため，準安定性と安定性の概念を導入する．また，本節の議論を用いて，補題 3.2 の証明も可能になる．

まず，準安定性を定義する．

定義 3.4 実行可能な入札プロファイル $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$ に対して，各入札者 $i \in N$ が獲得する品物の集合を $Y_i = X_i(\boldsymbol{b})$ とし，$y_i = |Y_i|$ とする．このとき，$M = \{1, 2, \ldots, m\}$ の置換 π_{-i} として，各入札者 $i \in N$ に対し

$$b_{-i}(\pi_{-i}(1)) \leq b_{-i}(\pi_{-i}(2)) \leq \cdots \leq b_{-i}(\pi_{-i}(m)) \tag{3.17}$$

と

$$Y_i = \{\pi_{-i}(1), \pi_{-i}(2), \ldots, \pi_{-i}(y_i)\} \tag{3.18}$$

が同時に成立するように適切に選ぶことができる場合，$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$ は**準安定**であるとよぶ．また，$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$ が準安定であれば，各入札者 $i \in N$ の効用は，$\boldsymbol{b}'_i = (b'_1, b_2)$ とすると，

$$u_i(Y_i) = v_i(y_i) - \sum_{j=1}^{y_i} b_{-i}(\pi_{-i}(j)) = \max_{|X(\boldsymbol{b}'_i)|=y_i} u_i(X(\boldsymbol{b}'_i)) \tag{3.19}$$

である．

入札プロファイル $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$ が準安定でないときには，$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$ はナッシュ均衡ではないことに注意しよう．さらに，系 3.1 でのべたように，与えられた入札プロファイル $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$ が実行可能であるかどうかは，ソーティングにかかる $O(m \log m)$ の計算時間を除けば，$O(m)$ 時間で判定できる．また，与えられた実行可能入札プロファイル $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$ が準安定であるかどうかも，定義 3.4 に基づいて $O(m)$ 時間で判定できる．

次に，安定の概念を以下のように定義する．

定義 3.5 実行可能な入札プロファイル $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$ おいて，各入札者 $i \in N$ に対し，$M = \{1, 2, \ldots, m\}$ の置換 π_{-i} は (3.17) をみたすとする．また，$Y_i = X_i(\boldsymbol{b})$ は各入札者 $i \in N$ が獲得する品物の集合であり，$y_i = |Y_i|$ であるとする．従って，$P = (Y_1, Y_2)$ は M の二つの部分集合への分割であり，$y_1 + y_2 = m$ である．このとき，各 $1 \leq k \leq m$ をみたすすべての k で

$$v_i(k) - \sum_{j=1}^{k} b_{-i}(\pi_{-i}(j)) \leq v_i(y_i) - \sum_{j=1}^{y_i} b_{-i}(\pi_{-i}(j)) \tag{3.20}$$

であるとき，b_{-i} は $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$ で**安定**であるとよばれる．そうでないときには**不安定**であるとよばれる．b_1 と b_2 が $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$ でともに安定であるとき，$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$ は**安定**であるとよばれる．

入札プロファイル $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$ が準安定かつ安定ならば，入札者 i が入札 b_i をどのような入札 b'_i に変えようとも，b'_i は実行可能入札であっても実行可能でない入札であっても，(b'_i, b_{-i}) において，入札者 i の効用が大きくなることはないことに注意しよう．これは，(3.19), (3.20) および入札者 i

の効用の定義から得られる．従って，入札プロファイル $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$ が準安定かつ安定ならば，それはナッシュ均衡である．実は逆も成立するので，以下の定理が得られる．証明は，本章の最後で与えることにする．

定理 3.3 仮定 3.1 をみたす評価関数プロファイル $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$ において，実行可能な入札プロファイル $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$ がナッシュ均衡であるための必要十分条件は，実行可能な入札プロファイル $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$ が準安定かつ安定であることである．

定理 3.3 と定義 3.4 および，定義 3.5 より，以下の系をのべることができる．

系 3.2 仮定 3.1 をみたす評価関数プロファイル $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$ において，入札プロファイル $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$ がナッシュ均衡であるかどうかは $O(m)$ 時間で判定できる．

さらに，これと定理 3.2 を組み合わせることにより，以下の系が得られる．

系 3.3 仮定 3.1 をみたす評価関数プロファイル $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$ がナッシュ均衡を持つかどうかは $O(m^2)$ 時間で判定できる．さらに，ナッシュ均衡を持つときには，ナッシュ均衡を $O(m^2)$ 時間で求めることができる．

以上の議論から，ナッシュ均衡をもつかどうか判定を $O(m^2)$ できるようになったといえる．さらにナッシュ均衡をもつ場合，ナッシュ均衡解を求めることが $O(m^2)$ で可能になったといえる．従って無秩序の対価は 2 であること [4] を用いれば，近似解を得られることと等価である．従って，最適な財の配分の近似を行えたことになる．また，この定理から補題 3.2 の証明もそれほど困難でなく得られる．

3.3 補題 3.2 の証明

最後に，(3.16) で定義された $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2)$ の性質を調べて，補題 3.2 の証明を完成することにしよう．なお，各 $i \in N$ で $Y_i = X_i(\boldsymbol{b})$ かつ $y_i = |Y_i|$ であることに注意しよう．各 $X_i(\boldsymbol{c})$ $(i \in N)$ は $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2)$ において入札者 i が獲得する品物の集合である．従って，(3.16) での $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2)$ の定義より，

$$X_i(\boldsymbol{c}) = Y_i, \quad |X_i(\boldsymbol{c})| = y_i \quad (i \in N), \tag{3.21}$$

$$y_1 + y_2 = m \tag{3.22}$$

が得られる．$X_i(\boldsymbol{c})$ に含まれない品物を b_{-i} における入札額の小さい順に並べる．従って，

$$X_{-i}(\boldsymbol{c}) = Y_{-i} = M - X_i(\boldsymbol{c}) = \{j_1^{(-i)}, j_2^{(-i)}, \ldots, j_{m-y_i}^{(-i)}\} \tag{3.23}$$

の品物は

$$b_{-i}(j_1^{(-i)}) \leq b_{-i}(j_2^{(-i)}) \leq \cdots \leq b_{-i}(j_{m-y_i}^{(-i)}) \tag{3.24}$$

と並べられていると仮定できる．同様に，c_{-i} を考え，$Y_{-i} = \{j_1^{(-i)}, j_2^{(-i)}, \ldots, j_{m-y_i}^{(-i)}\}$ の品物を置換 σ_{-i} を用いて

$$c_{-i}(\sigma_{-i}(j_1^{(-i)})) \leq c_{-i}(\sigma_{-i}(j_2^{(-i)})) \leq \cdots \leq c_{-i}(\sigma_{-i}(j_{m-y_i}^{(-i)})) \tag{3.25}$$

と c_{-i} における入札額の小さい順に並べる．すると，以下の補題が成立する（その証明は本章の最後の節で与える）．

補題 3.3 各 $i \in N$ に対して $k_i \le m - y_i$ は非負の整数とする．すると，

$$\sum_{h=1}^{k_i} b_{-i}(j_h^{(-i)}) \le \sum_{h=1}^{k_i} c_{-i}(\sigma_{-i}(j_h^{(-i)})) \tag{3.26}$$

である．すなわち，$Y_{-i} = \{j_1^{(-i)}, j_2^{(-i)}, \ldots, j_{m-y_i}^{(-i)}\}$ に含まれる品物のうちで，b_{-i} において入札額の小さいほうから k_i 番目までの品物の入札額の和は，c_{-i} において入札額の小さいほうから k_i 番目までの品物の入札額の和以下である． □

この補題と定理 3.3 を用いて，補題 3.2 の証明を与えることができる．

補題 3.2 の証明： 背理法で証明する．

$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$ がナッシュ均衡であったのに，$\boldsymbol{c} = (c_1, c_2)$ がナッシュ均衡でなかったと仮定する．すると，$\boldsymbol{c} = (c_1, c_2)$ において入札者 $i \in N$ が入札ベクトルを実行可能入札ベクトル c_i' に変更すると結果として得られる入札プロファイル $\boldsymbol{c}_i' = (c_i', c_{-i})$ において入札者 $i \in N$ の効用が大きくなるというような入札者 $i \in N$ が存在することになる．対称性より，$i = 1$ であると仮定できる．従って，入札者 1 が c_1 を適切な c_1' に変更すると，入札プロファイル $\boldsymbol{c}_1' = (c_1', c_2)$ において入札者 1 が獲得する品物の集合 $X_1(\boldsymbol{c}_1')$ の効用 $u_1(X_1(\boldsymbol{c}_1'))$ が入札プロファイル $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2)$ における入札者 1 が獲得する品物の集合 $X_1(\boldsymbol{c})$ の効用 $u_1(X_1(\boldsymbol{c}))$ よりも大きくなる．従って，

$$\begin{aligned} u_1(X_1(\boldsymbol{c}_1')) &= v_1(|X_1(\boldsymbol{c}_1')|) - \sum_{j \in X_1(\boldsymbol{c}_1')} c_2(j) \\ &> u_1(X_1(\boldsymbol{c})) = v_1(y_1) \end{aligned} \tag{3.27}$$

が得られる．これが矛盾につながることを以下で示すことにする．

一般性を失うここなく，

$$X_1(\boldsymbol{c}_1') \supseteq X_1(\boldsymbol{c}) \tag{3.28}$$

と仮定できる．なぜなら，$\boldsymbol{c}$ の定義より，各 $j \in X_1(\boldsymbol{c})$ に対して $c_2(j) = 0$ であり，さらに，v_1 の単調性より，必要ならば $X_1(\boldsymbol{c}_1') - X_1(\boldsymbol{c})$ に含まれるいずれかの品物への入札額を減らして，$u_1(X_1(\boldsymbol{c}_1'))$ の値を小さくすることなく $X_1(\boldsymbol{c}_1')$ が j を含むように $c_1'(j)$ を修正することができるからである．ここで，

$$Y_2' = X_1(\boldsymbol{c}_1') - X_1(\boldsymbol{c}) \subseteq Y_2, \quad k_1 = |Y_2'| \tag{3.29}$$

とする．すると，

$$u_1(X_1(\boldsymbol{c}_1')) = v_1(|X_1(\boldsymbol{c}_1')|) - \sum_{j \in Y_2'} c_2(j) \tag{3.30}$$

と書ける．

$$X_1(\boldsymbol{c}_1') = X_1(\boldsymbol{c}) \cup Y_2', \quad |X_1(\boldsymbol{c}_1')| = |X_1(c_1)| + |Y_2'| = y_1 + k_1 \tag{3.31}$$

であるので，補題 3.3 を用いると式 (3.30) より

$$
\begin{aligned}
u_1(X_1(\boldsymbol{c}'_1)) &= v_1(|X_1(\boldsymbol{c}'_1)|) - \sum_{j \in Y'_2} c_2(j) \\
&\leq v_1(|X_1(\boldsymbol{c}'_1)|) - \sum_{h=1}^{k_1} b_2(j_h^{(2)}) \\
&= v_1(y_1 + k_1) - \sum_{h=1}^{k_1} b_2(j_h^{(2)})
\end{aligned}
$$

が得られる．さらに，$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$ がナッシュ均衡であるので，定義 3.5 と定理 3.3 より

$$
v_1(y_1 + k_1) - v_1(y_1) \leq \sum_{h=1}^{k_1} b_2(j_h^{(2)})
$$

が得られる．これらを組み合わせると $u_1(X_1(\boldsymbol{c}'_1)) \leq v_1(y_1)$ が得られる．しかし，これは (3.27) の

$$
u_1(X_1(\boldsymbol{c}'_1)) > u_1(X_1(\boldsymbol{c})) = v_1(y_1)
$$

に矛盾する．

従って，$\boldsymbol{c} = (c_1, c_2)$ はナッシュ均衡である． □

3.4 本章のむすび

本章では，仮定 3.1 をみたす評価関数プロファイル $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$ がナッシュ均衡を持つための必要十分条件を定理 3.2 で与えた．定義 2.3 より，二人の入札者による品物別入札の組合せオークションが弱安定である条件を求めたといえる．さらに，定理 3.2・定理 3.3 を用いることで得られる系 3.3 より，ナッシュ均衡の存在判定および，求解が $O(m^2)$ でできることを示した．これと，無秩序の対価が 2 であること [4] を用いれば，最適解の $\frac{1}{2}$ 近似である解を $O(m^2)$ で得られることになる．

次章でのべるように，本章の結果は $n \geq 3$ のケースにまで一般化できる．すなわち，n が固定された定数であるときには，すべての評価関数 v_i が劣加法的で対称的ならば，品物別入札の組合せオークションがナッシュ均衡を持つかどうかは多項式時間で判定できる [35]．しかしながら，n が定数でないときには，このアルゴリズムは n に関して指数時間となる．

3.5 補題 3.3・定理 3.3 の証明

3.5.1 補題 3.3 の証明

議論をわかりやすくするために，$i = 1$ に対してのみ証明を与える．従って，

$$
b_i = b_1,\ c_i = c_1,\ \pi_i = \pi_1,\ \sigma_i = \sigma_1,\ b_{-i} = b_2,\ c_{-i} = c_2,\ \pi_{-i} = \pi_2,\ \sigma_{-i} = \sigma_2
$$

である．対称性より，$i = 2$ に対する証明も同様に行えるので，その証明は省略する．

Y_2' は $Y_2 = X_2(\boldsymbol{c}) = M - X_1(\boldsymbol{c})$ の品物のうちで，c_2 において入札額の小さいほうの k_1 番目までの k_1 個の品物の集合であるとする．すなわち，

$$Y_2' = \{\sigma_2(j_1^{(2)}), \sigma_2(j_2^{(2)}), \ldots, \sigma_2(j_{k_1}^{(2)})\} \subseteq Y_2 \tag{3.32}$$

である．なお，各 $j \in Y_2 = X_2(\boldsymbol{c})$ で $c_2(j) = \frac{w_2(y_2)}{y_2}$ であることに注意しよう．従って，

$$\sum_{j \in Y_2'} c_2(j) = k_1 \frac{w_2(y_2)}{y_2} \tag{3.33}$$

である．

$Y_2 = X_2(\boldsymbol{b})$ であり，b_2 が実行可能であるので，Y_2 の品物のうちで b_2 における入札額の小さいほうから k_1 番目までの入札額の和は，高々$k_1 \frac{w_2(y_2)}{y_2}$ である．実際には，これは以下のようにして得ることができる．Y_2 の品物のうちで b_2 における入札額の小さいほうから k_1 番目までの入札額の和が $k_1 \frac{w_2(y_2)}{y_2}$ より大きかったとすると，Y_2 の品物に対する k_1 番目に小さい入札額は $\frac{w_2(y_2)}{y_2}$ より大きくなり，Y_2 のそれより大きい入札額はいずれも $\frac{w_2(y_2)}{y_2}$ より大きくなって，$\sum_{j \in Y_2} b_2(j) > y_2 \frac{w_2(y_2)}{y_2} = w_2(y_2)$ が得られてしまう．しかし，これは b_2 が実行可能であることに矛盾する．

従って，Y_2 の品物のうちで b_2 における入札額の小さいほうから k_1 番目までの入札額の和は，高々

$$\sum_{j \in Y_2'} c_2(j) = k_1 \frac{w_2(y_2)}{y_2}$$

であることになり，$i = 1$ に対する (3.26) が得られた． □

3.5.2 定理 3.3 の証明

ここでは，定理 3.3 の証明を行う．まずは，ナッシュ均衡ならば，準安定であることを示す．次に，ナッシュ均衡ならば，安定であることを示す．これにより，定理が示されることになる．

補題 3.4 入札プロファイル $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$ がナッシュ均衡ならば，入札プロファイル $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$ は準安定である．

補題 3.4 の証明： $Y_i \neq \{\pi_{-i}(1), \pi_{-i}(2), \ldots, \pi_{-i}(y_i)\}$ であったとする．すると，$\pi_{-i}(j) \notin Y_i$ かつ $\pi_{-i}(j') \in Y_i$ となるような $j \in \{1, 2, \ldots, y_i\}$ と $j' \in \{y_i + 1, y_i + 2, \ldots, m\}$ が存在する．従って，

$$\begin{aligned} & j < j', \quad b_{-i}(\pi_{-i}(j)) \le b_{-i}(\pi_{-i}(j')), \\ & b_i(\pi_{-i}(j)) \le b_{-i}(\pi_{-i}(j)), \qquad b_{-i}(\pi_{-i}(j')) \le b_i(\pi_{-i}(j')) \end{aligned}$$

である．このとき，$b_{-i}(\pi_{-i}(j)) = b_{-i}(\pi_{-i}(j'))$ が成立することをあとで示すことにして，ここではこれが成立するものとして議論を進める．

そこで，$b_{-i}(\pi_{-i}(j)) = b_{-i}(\pi_{-i}(j'))$ であるとして，$\pi_{-i}(j \leftrightarrow j')$ は，π_{-i} から $\pi_{-i}(j)$ と $\pi_{-i}(j')$ を交換して得られる置換であるとする．従って，

$$\pi_{-i}(j \leftrightarrow j')(j'') = \begin{cases} \pi_{-i}(j'') & (j'' \neq j, j'), \\ \pi_{-i}(j) & (j'' = j'), \\ \pi_{-i}(j') & (j'' = j) \end{cases}$$

である．$\pi_{-i} = \pi_{-i}(j \leftrightarrow j')$ と更新することにより，$\pi_{-i}(j) \in Y_i$ と $\pi_{-i}(j') \notin Y_i$ となる．このプロセスにおいては，π_{-i} が変化するだけで，b_1, b_2, Y_1, Y_2 と π_i のいずれも変化することはないので，(3.17) が常に成立し続けることに注意しよう．このプロセスを繰り返すことにより，最終的に (3.17) と (3.18) をみたす置換 π_{-i} を得ることができる．

ここで先延ばししていた $b_{-i}(\pi_{-i}(j)) = b_{-i}(\pi_{-i}(j'))$ の証明を与える．背理法で証明する．$b_{-i}(\pi_{-i}(j)) < b_{-i}(\pi_{-i}(j'))$ であったと仮定する．$b'_i = b_i(\pi_{-i}(j) \leftrightarrow \pi_{-i}(j'))$ は b_i から $b_i(\pi_{-i}(j))$ と $b_i(\pi_{-i}(j'))$ を交換して得られる入札ベクトルとする．すると，$\boldsymbol{b}'_i = (b'_i, b_{-i})$ は実行可能入札プロファイルであり，

$$b'_i(\pi_{-i}(j')) \leq b_{-i}(\pi_{-i}(j)) < b_{-i}(\pi_{-i}(j')) \leq b'_i(\pi_{-i}(j))$$

が成立する．従って，$X_i(\boldsymbol{b}'_i) = X_i(\boldsymbol{b}) - \{\pi_{-i}(j')\} \cup \{\pi_{-i}(j)\}$ かつ $|X_i(\boldsymbol{b}'_i)| = |X_i(\boldsymbol{b})|$ となり，

$$u_i(X_i(\boldsymbol{b}'_i)) = u_i(X_i(\boldsymbol{b})) + b_{-i}(\pi_{-i}(j')) - b_{-i}(\pi_{-i}(j)) > u_i(X_i(\boldsymbol{b}))$$

が得られる．しかし，b_i が準安定であるのでこれは矛盾である．

従って，$b_{-i}(\pi_{-i}(j)) = b_{-i}(\pi_{-i}(j'))$ が得られた．

ここで $i = 1$ とし，必要ならば品物のラベルを変更して，一般性を失うことなく，π_2 は恒等置換（すなわち，すべての $j = 1, 2, \ldots, m$ で $\pi_2(j) = j$）であるであると仮定できる．従って，(3.17) と (3.18) から π_1 を適切に選ぶことにより，

$$b_2(1) \leq b_2(2) \leq \cdots \leq b_2(m), \quad Y_1 = \{1, 2, \ldots, y_1\} \tag{3.34}$$

と

$$\begin{aligned} &b_1(\pi_1(1)) \leq b_1(\pi_1(2)) \leq \cdots \leq b_1(\pi_1(m)), \\ &Y_2 = \{\pi_1(1), \pi_1(2), \ldots, \pi_1(y_2)\} \qquad\qquad (y_2 = m - y_1) \end{aligned} \tag{3.35}$$

が得られる．そのような π_1 は，上記の議論と同一の議論により，選ぶことができる． □

補題 3.4 を示すことができたため，次にナッシュ均衡であれば，安定であることを示す．すなわち，以下を示す．

補題 3.5 入札プロファイル $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$ がナッシュ均衡ならば，入札プロファイル $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$ は安定である．

補題 3.5 を証明するために必要な概念をまず与えるまず，式 (3.17)，すなわち，

$$b_{-i}(\pi_{-i}(1)) \leq b_{-i}(\pi_{-i}(2)) \leq \cdots \leq b_{-i}(\pi_{-i}(m))$$

を仮定する．次に，以下を定義する．

定義 3.6 実行可能入札プロファイル $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$ に対して，$g_i(b_{-i})$ $(i = 1, 2)$ は，入札者 $i \in N$ が自身の実行可能入札ベクトル b'_i を適切に選ぶことにより，獲得できる可能性のある品物の個数の最大値とする．すなわち，入札者 $i \in N$ は $g_i(b_{-i})$ 個の品物を獲得できる可能性のある実行可能入札ベクトル b'_i を選ぶことができるが，どのような実行可能入札ベクトル b''_i を選んでも $g_i(b_{-i}) + 1$ 個以上の品物は獲得できない． □

実行可能入札プロファイル $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2)$ において，記法 $g_i(b_{-i})$ $(i\in N)$ を用いて，入札者 $i\in N$ に $g_i\le g_i(b_{-i})$ 個の品物は**割り当て可能**であるが，$h_i\ge g_i(b_{-i})+1$ 個の品物は**割り当て不可能**であるという．すると，以下の補題が得られる．

補題 3.6 実行可能入札プロファイル $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2)$ において，各 $i\in N$ に対して入札者 i に $g_i(b_{-i})$ 個の品物は割り当て可能であるが，$g_i(b_{-i})+1$ 個の品物は割り当て不可能であるとする．すると，$1\le h_i\le g_i(b_{-i})+1$ であり，かつ

$$\sum_{j=0}^{h_i-1} b_{-i}(\pi_{-i}(g_i(b_{-i})+1-j)) > w_i(h_i)$$

をみたすような整数 h_i が存在する．そのような整数 h_i で最小の整数を g_i' とする．すると，

$$1\le g_i'\le g_i(b_{-i})+1, \tag{3.36}$$

$$w_i(g_i')=v_i(g_i'), \tag{3.37}$$

$$\sum_{j=0}^{g_i'-1} b_{-i}(\pi_{-i}(g_i(b_{-i})+1-j)) > w_i(g_i') \tag{3.38}$$

であり，さらにすべての $k\le g_i'-1$ で

$$\sum_{j=0}^{k-1} b_{-i}(\pi_{-i}(g_i(b_{-i})+1-j)) \le w_i(k) \tag{3.39}$$

が成立する．

証明： 議論をわかりやすくするために，$i=1$ に対する証明のみを与える．従って，

$$b_i=b_1,\ \pi_i=\pi_1,\ b_{-i}=b_2,\ \pi_{-i}=\pi_2$$

である．対称性から，$i=2$ に対する証明も同様に得られる．さらに，必要ならば品物のラベルを変更して，一般性を失うことなく，π_2 は恒等置換ですべての $j=1,2,\ldots,m$ で $\pi_2(j)=j$ であると仮定できる．従って，(3.17) は

$$b_2(1)\le b_2(2)\le\cdots\le b_2(m) \tag{3.40}$$

と書ける．

そのような $1\le h_1\le g_1(b_2)+1$ をみたす h_1 が存在しなかったと仮定する．すると，すべての $h_1=1,2,\ldots,g_1(b_2)+1$ に対して

$$\sum_{j=0}^{h_1-1} b_2(g_1(b_2)+1-j)\le w_1(h_1) \tag{3.41}$$

であることになる．b_1' と π_1' は

$$b_1'(j)=\begin{cases} b_2(j) & (j=1,2,\ldots,g_1(b_2)+1),\\ 0 & (j=g_1(b_2)+2,g_1(b_2)+3,\ldots,m),\end{cases}$$

$$\pi_1'(j) = \begin{cases} j + g_1(b_2) + 1 & (j = 1, 2, \ldots, m - g_1(b_2) - 1), \\ j - (m - g_1(b_2)) + 1 & (j = m - g_1(b_2), \ldots, m) \end{cases}$$

として定義されるとする．すると，

$$\begin{aligned} & b_1'(\pi_1'(1)) \leq b_1'(\pi_1'(2)) \leq \cdots \leq b_1'(\pi_1'(m)), \\ & b_1'(\pi_1'(m-j)) = b_2(g_1(b_2) + 1 - j) \qquad (j = 0, 1, \ldots, g_1(b_2)), \\ & b_1'(\pi_1'(m-j)) = 0 \qquad (j = g_1(b_2) + 1, g_1(b_2) + 2, \ldots, m-1) \end{aligned}$$

となる．従って，$1 \leq h_1 \leq g_1(b_2) + 1$ なるすべての h_1 に対して

$$\sum_{j=0}^{h_1-1} b_1'(\pi_1'(m-j)) = \sum_{j=0}^{h_1-1} b_2(g_1(b_2) + 1 - j) \leq w_1(h_1)$$

であり，かつ $g_1(b_2) + 2 \leq h_1 \leq m$ なるすべての h_1 に対して

$$\sum_{j=0}^{h_1-1} b_1'(\pi_1'(m-j)) = \sum_{j=0}^{g_1(b_2)} b_2(g_1(b_2) + 1 - j) \leq w_1(g_1(b_2) + 1)$$

であることになり，定理 3.1 より，b_1' は入札者 1 の実行可能入札ベクトルとなる．従って，実行可能入札プロファイル $\boldsymbol{b}' = (b_1', b_2)$ において $g_1(b_2) + 1$ 個の品物が入札者 1 に割り当て可能になってしまう．しかしながら，これは矛盾である．入札者 1 へは $g_1(b_2) + 1$ 個の品物は割り当て不可能であるからである．従って，$1 \leq g_1' \leq g_1(b_2) + 1$ をみたすそのような h_1 が存在し，(3.38) と (3.39) が成立する．

次に，$w_1(g_1') = v_1(g_1')$ を証明する．$g_1' = 1$ のときには，w_1 の定義により，$w_1(g_1') = w_1(1) = v_1(1) = v_1(g_1')$ は明らかである．従って，これ以降，$g_1' \geq 2$ であると仮定できる．ここで，$w_1(g_1') \neq v_1(g_1')$ であったと仮定してみる．すると，(2.15) より $w_1(g_1') < v_1(g_1')$ となる．従って，式 (2.19)，すなわち，

$$w_1(g_1') = g_1' \frac{w_1(g_1' - 1)}{g_1' - 1} \tag{3.42}$$

が得られる．一方，g_1' の選び方より，

$$w_1(g_1' - 1) \geq \sum_{j=0}^{g_1'-2} b_2(g_1(b_2) + 1 - j)$$

が得られる．さらに，不等式 (3.40) と式 (3.42) より，

$$\begin{aligned} \frac{w_1(g_1')}{g_1'} = \frac{w_1(g_1' - 1)}{g_1' - 1} & \geq \frac{\sum_{j=0}^{g_1'-2} b_2(g_1(b_2) + 1 - j)}{g_1' - 1} \\ & \geq b_2(g_1(b_2) - g_1' + 3) \\ & \geq b_2(g_1(b_2) - g_1' + 2) \end{aligned}$$

が得られる．従って，

$$\begin{aligned} w_1(g_1') &= g_1' \frac{w_1(g_1'-1)}{g_1'-1} = (g_1'-1)\frac{w_1(g_1'-1)}{g_1'-1} + \frac{w_1(g_1'-1)}{g_1'-1} \\ &\geq \left(\sum_{j=0}^{g_1'-2} b_2(g_1(b_2)+1-j) \right) + \ b_2(g_1(b_2)-g_1'+2) \\ &= \sum_{j=0}^{g_1'-1} b_2(g_1(b_2)+1-j) \end{aligned}$$

が得られる．しかしながら，これは g_1' の選び方に矛盾する．上で示したように，(3.38) が成立するからである．なお上記の議論における (3.38) は

$$\sum_{j=0}^{g_1'-1} b_2(g_1(b_2)+1-j) > w_1(g_1')$$

であることに注意しよう．

従って，$w_1(g_1') = v_1(g_1')$ が得られた． □

これで補題 3.4 を証明するための準備ができた．

補題 3.4 の証明：

背理法で証明する．$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$ がナッシュ均衡である（従って，準安定である）にもかかわらず安定でなかったと仮定する．すると，(3.20) が成立しなくなるような $i \in N$ と k $(1 \leq k \leq m)$ が存在する．なお，$y_1 + y_2 = m$ である．

議論をわかりやすくするために，$i = 1$ に対する証明のみを与える．従って，

$$b_i = b_1,\ \pi_i = \pi_1,\ b_{-i} = b_2,\ \pi_{-i} = \pi_2$$

である．対称性より，$i = 2$ に対する証明も同様に得られるので，ここでは省略する．さらに，必要ならば品物のラベルを変更して，一般性を失うことなく，π_2 は恒等置換ですべての $j = 1, 2, \ldots, m$ で $\pi_2(j) = j$ であると仮定できる．従って，(3.17) と (3.18) は

$$b_2(1) \leq b_2(2) \leq \cdots \leq b_2(m), \quad Y_1 = \{1, 2, \ldots, y_1\} \tag{3.43}$$

と書ける．また，証明の都合上，不安定（安定でないこと）を以下の二式に書き直す．すなわち，

$$v_1(y_1+k) - v_1(y_1) > \sum_{j=1}^{k} b_2(y_1+j) \tag{3.44}$$

となるような $1 \leq k \leq m - y_1$ なる k が存在するか，あるいは

$$v_1(y_1-k') > v_1(y_1) - \sum_{j=0}^{k'-1} b_2(y_1-j) \tag{3.45}$$

となるような $1 \leq k' \leq y_1$ なる k' が存在する，とする．

ここで，準安定な入札プロファイル $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$ において，入札者 1 に $g_1(b_2)$ 個の品物は割り当て可能であるが，$g_1(b_2)+1$ 個の品物は割り当て不可能であると仮定できる．従って，$y_1 \leq g_1(b_2)$ である．また，$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$ がナッシュ均衡であり，$Y_1 = X_1(\boldsymbol{b}) = \{1, 2, \ldots, y_1\}$ かつ任意の実行可能入札プロファイル $\boldsymbol{b}' = (b'_1, b_2)$ に対して

$$\begin{aligned} u_1(Y_1) &= v_1(y_1) - \sum_{j \in Y_1} b_2(j) \\ &\geq u_1(X_1(\boldsymbol{b}')) = v_1(|X_1(\boldsymbol{b}')|) - \sum_{j \in X_1(\boldsymbol{b}')} b_2(j) \end{aligned}$$

であるので，すべての $1 \leq k \leq g_1(b_2) - y_1$ で

$$v_1(y_1 + k) - v_1(y_1) \leq \sum_{j=1}^{k} b_2(y_1 + j) \tag{3.46}$$

であり，かつすべての $1 \leq k' \leq y_1$ で

$$v_1(y_1 - k') + \sum_{j=0}^{k'-1} b_2(y_1 - j) \leq v_1(y_1) \tag{3.47}$$

であると仮定できる．従って，(3.45) が成立することはない．同様に，$1 \leq k \leq g_1(b_2) - y_1$ をみたすどの k でも (3.44) が成立することはない．従って，$g_1(b_2) - y_1 + 1 \leq k \leq m - y_1$ となるある k で (3.44) が成立することになる．これは $g_1(b_2) < m$ であることも意味する．

そのような整数 k のうちで最小のものを k^* とする．従って，

$$g_1(b_2) - y_1 + 1 \leq k^* \leq m - y_1, \tag{3.48}$$

$$v_1(y_1 + k^*) - v_1(y_1) > \sum_{j=1}^{k^*} b_2(y_1 + j) \tag{3.49}$$

であり，かつすべての $0 \leq k \leq k^* - 1$ で

$$v_1(y_1 + k) - v_1(y_1) \leq \sum_{j=1}^{k} b_2(y_1 + j) \tag{3.50}$$

である．最後の二つの不等式からすべての $0 \leq k \leq k^* - 1$ で

$$v_1(y_1 + k^*) - v_1(y_1 + k) > \sum_{j=k+1}^{k^*} b_2(y_1 + j) \tag{3.51}$$

が成立する．同様に，不等式 (3.47) と (3.49) からすべての $1 \leq k' \leq y_1$ で

$$v_1(y_1 + k^*) - v_1(y_1 - k') > \sum_{j=1}^{k'} b_2(y_1 - k' + j) + \sum_{j=1}^{k^*} b_2(y_1 + j) \tag{3.52}$$

が成立する．これは，すべての $0 \leq k' \leq y_1 - 1$ で

$$v_1(y_1 + k^*) - v_1(k') > \sum_{j=k'+1}^{y_1+k^*} b_2(j) \tag{3.53}$$

であることと等価である．不等式 (4.44) と不等式 (3.53) を組み合わせて，すべての $0 \leq k' \leq y_1 + k^* - 1$ で

$$v_1(y_1 + k^*) - v_1(k') > \sum_{j=k'+1}^{y_1+k^*} b_2(j) \tag{3.54}$$

であることが得られる．

一方，準安定な入札プロファイル $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$ において，入札者 1 へは $g_1(b_2)$ 個の品物が割り当て可能であるが，$g_1(b_2) + 1$ 個の品物は割り当て不可能である．従って，補題 3.6 で定義した g_1' を考えることができる．すなわち，g_1' は $1 \leq k'' \leq g_1(b_2) + 1$ のうちで

$$b_2(g_1(b_2) - k'' + 2) + b_2(g_1(b_2) - k'' + 3) + \cdots + b_2(g_1(b_2) + 1) > w_1(k'')$$

となるような最小の整数 k'' である．従って，

$$1 \leq g_1' \leq g_1(b_2) + 1, \tag{3.55}$$

$$w_1(g_1') = v_1(g_1'), \tag{3.56}$$

$$\sum_{j=1}^{g_1'} b_2(g_1(b_2) + 1 - g_1' + j) > w_1(g_1') \tag{3.57}$$

およびすべての $1 \leq k \leq g_1' - 1$ で

$$\sum_{j=1}^{k} b_2(g_1(b_2) + 1 - g_1' + j) \leq w_1(k) \tag{3.58}$$

であることになる．さらに，入札者 1 に $g_1(b_2)$ 個の品物が割り当て可能であるので，すべての $1 \leq k \leq g_1(b_2)$ で

$$\sum_{j=1}^{k} b_2(g_1(b_2) - k + j) \leq w_1(k) \tag{3.59}$$

である．

ここで，$y_1 + k^*$ から g_1' を何回か引く．具体的には，g_1' 個の整数からなる区間 $[g_1(b_2)+1-g_1', g_1(b_2)]$ に $y_1 + k^* - qg_1'$ が入るようになるまで $q \geq 1$ 回引く．そして，$k' = y_1 + k^* - qg_1'$ とする．すると，

$$g_1(b_2) + 1 - g_1' \leq k' = y_1 + k^* - qg_1' \leq g_1(b_2) \tag{3.60}$$

となる．(3.57) より，$\sum_{j=1}^{g_1'} b_2(g_1(b_2) + 1 - g_1' + j) > w_1(g_1')$ であり，(3.60) より $g_1(b_2) + 1 - g_1' \leq k' = y_1 + k^* - qg_1'$ であり，(3.48) より $y_1 + k^* \geq g_1(b_2) + 1$ であるので，(3.43) と $0 \leq k' \leq y_1 + k^* - 1$

より，

$$\begin{aligned}
qw_1(g_1') &< q\sum_{j=1}^{g_1'} b_2(g_1(b_2)+1-g_1'+j) \\
&\le q\sum_{j=1}^{g_1'} b_2(y_1+k^*-qg_1'+j) \\
&\le \sum_{j=1}^{qg_1'} b_2(y_1+k^*-qg_1'+j) \\
&= \sum_{j=1}^{qg_1'} b_2(k'+j) = \sum_{j=k'+1}^{y_1+k^*} b_2(j)
\end{aligned}$$

が得られる．従って，不等式 (3.54) により，

$$qw_1(g_1') < \sum_{j=k'+1}^{y_1+k^*} b_2(j) < v_1(y_1+k^*) - v_1(k') \tag{3.61}$$

が得られる．さらに，v_1 が劣加法的であり $y_1+k^*-k' = qg_1'$ であるので，

$$v_1(y_1+k^*) - v_1(k') \le v_1(y_1+k^*-k') = v_1(qg_1') \le qv_1(g_1'),$$

$$qw_1(g_1') < \sum_{j=k'+1}^{y_1+k^*} b_2(j) < v_1(y_1+k^*) - v_1(k') \le qv_1(g_1') \tag{3.62}$$

および

$$w_1(g_1') < v_1(g_1') \tag{3.63}$$

が得られる．しかし，これは (3.56) の $w_1(g_1') = v_1(g_1')$ に矛盾する．

従って，$i=1$ に対して (3.20) が成立することが得られた．対称性から，$i=2$ に対しても (3.20) が成立することが得られる．従って，$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$ が安定であることが得られた． □

以上の議論より，補題 3.5 が成立することが示せた．従って，補題 3.4 と補題 3.5 より，定理 3.3 を証明できる．

第4章　n 人の入札者による品物別入札の組合せオークションのナッシュ均衡

本章では，前章の結果を一般の $n \geq 3$ における結果に拡張する．

4.1　ナッシュ均衡の存在

本節では，ナッシュ均衡が存在するための必要十分条件をのべる．これは定義 2.3 より，評価関数プロファイル $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ が弱安定である条件を示したともいえる．論文の主要成果を説明するための用語と補題を与えてから，その後に結果の証明を行う．

$P = (M_1, M_2, \ldots, M_n)$ を品物の集合 M の n 個の部分集合への分割とする．すなわち，

$$\begin{aligned} &M_i \cap M_h = \emptyset \qquad (i, h \in N,\, i \neq h), \\ &M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_n = M \end{aligned} \tag{4.1}$$

である．各 $i \in N$ に対して $d_i = (d_i(1), d_i(2), \ldots, d_i(m))$ を

$$d_i(j) = \begin{cases} \frac{w_i(|M_i|)}{|M_i|} & (j \in M_i \text{ のとき}), \\ 0 & (\text{それ以外のとき}) \end{cases} \tag{4.2}$$

として定義する．すると，以下の補題と主要定理が得られる．なお補題の証明は省略する．前章の二人の入札者に対する対応する補題 3.1 の証明における議論が任意の $n \geq 2$ 人の入札者に対する上記の補題でもそのまま成立するからである．

補題 4.1 式 (4.2) で定義される入札プロファイル $\boldsymbol{d} = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ は，実行可能であり，さらに，各入札者 $i \in N$ に対して $X_i(\boldsymbol{d}) = M_i$ である（すなわち，$\boldsymbol{d} = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ で i が勝ち獲得する品物の集合は M_i である）． □

定理 4.1 仮定 2.1 をみたす評価関数プロファイル $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ がナッシュ均衡を持つための必要十分条件は，式 (4.2) で定義される n 人の実行可能入札ベクトル $\boldsymbol{d} = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ がナッシュ均衡となるような品物集合 M の n 個の部分集合への分割 $P = (M_1, M_2, \ldots, M_n)$ が存在することである．これは，定義 2.3 より，評価関数プロファイル $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ が弱安定である条件ともいえる． □

それでは次に，定理 4.1 の証明を与える前に，簡単な例を与える．

例題 4.1 ここでは，定理 4.1 を用いて，評価関数プロファイル $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ がナッシュ均衡をもたないことを示す．$N = \{1,2,3\}$, $M = \{1,2,3,4\}$, $v_1(0) = v_2(0) = v_3(0) = 0$,

$$\begin{aligned} &v_1(1) = v_1(2) = 6, \quad v_1(3) = v_1(4) = 12, \\ &v_i(1) = v_i(2) = 4, \quad v_i(3) = v_i(4) = 8 \quad (i = 2,3) \end{aligned} \tag{4.3}$$

とする．すると，各 v_i $(i \in N)$ は仮定 2.1 を満たし，$w_1(0) = w_2(0) = w_3(0) = 0$,

$$w_1(1) = 6, \quad \tfrac{w_1(2)}{2} = \tfrac{w_1(3)}{3} = \tfrac{w_1(4)}{4} = 3,$$

$$w_i(1) = 4, \quad \tfrac{w_i(2)}{2} = \tfrac{w_i(3)}{3} = \tfrac{w_i(4)}{4} = 2, \quad (i = 2,3)$$

である．このとき，以下のようにナッシュ均衡が存在しないことがわかる．

対称性より，M の 3 個の部分集合への分割 $P = (M_1, M_2, M_3)$ における M_1 の 5 個のケースの

$$M_1 = M_1^{(k)} = \{j \in M \mid j \le k\}, \quad (k = 0,1,2,3,4)$$

を考えれば十分である．従って，

$$M_1^{(0)} = \emptyset,\ M_1^{(1)} = \{1\},\ M_1^{(2)} = \{1,2\},\ M_1^{(3)} = \{1,2,3\}, M_1^{(4)} = \{1,2,3,4\}$$

である．M の分割 $P^{(k)} = (M_1^{(k)}, M_2, M_3)$ に対応して，式 (4.2) で定義される実行可能入札ベクトル $\boldsymbol{d}^{(k)} = (d_1^{(k)}, d_2, d_3)$ は，

$$\begin{aligned} &d_1^{(0)} = (0,0,0,0),\ d_1^{(1)} = (6,0,0,0),\ d_1^{(2)} = (3,3,0,0), \\ &d_1^{(3)} = (3,3,3,0),\ d_1^{(4)} = (3,3,3,3) \end{aligned}$$

となる．たとえば，$k = 2$, $M_2 = \{3\}$, $M_3 = \{4\}$ とすると，式 (4.2) で定義される実行可能入札プロファイル $d_1^{(2)}, d_2, d_3$ は

$$d_1^{(2)} = (3,3,0,0), \quad d_2 = (0,0,4,0), \quad d_3 = (0,0,0,4)$$

となる．このとき，入札者 1 が入札 $d_1^{(2)}$ を実行可能入札 $d_1'^{(2)} = (1,1,5,0)$ に変更すると実行可能入札プロファイル $\boldsymbol{d}_1'^{(2)} = (d_1'^{(2)}, d_2, d_3)$ において，入札者 1 は効用が 6 から 8 に改善される．$X_1(\boldsymbol{d}_1'^{(2)}) = \{1,2,3\}$ かつ $u_1(X_1(\boldsymbol{d}_1'^{(2)}) = v_1(|X_1(\boldsymbol{d}_1'^{(2)})|) - \sum_{j \in X_1(\boldsymbol{d}_1'^{(2)})} price(j) = v_1(3) - (price(1) + price(2) + price(3)) = 12 - (0+0+4) = 8$ となるからである．M のほかのどの分割 $P^{(k)} = (M_1^{(k)}, M_2, M_3)$ に対しても式 (4.2) で定義される実行可能入札プロファイル $\boldsymbol{d}^{(k)} = (d_1^{(k)}, d_2, d_3)$ はナッシュ均衡ではないことが容易に確認できる．

したがが って，定理 4.1 より，式 (4.3) の評価関数プロファイル $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ はナッシュ均衡を持たないことが得られる．

一方，入札者 3 がいなかったと仮定してみる．すなわち，入札者は 1 と 2 の二人だけであるとする．すると，$M_1 = \{1,2,3\}$，$M_2 = \{4\}$ からなる M の分割 $P = (M_1, M_2)$ で式 (4.2) 定義される実行可能入札プロファイル $\boldsymbol{d} = (d_1, d_2)$ は

$$d_1 = (3,3,3,0), \quad d_2 = (0,0,0,4)$$

となり，ナッシュ均衡である．従って，評価関数プロファイル $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$ はナッシュ均衡を持つ．

□

次の例は，定理 4.1 を適用し，ナッシュ均衡が存在すると示した例であると同時に，定理 4.1 は入札プロファイル $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ が強安定（定義 2.5）である条件ではないことを示す例でもある（すなわち，ナッシュ均衡であり，かつ割当が公平であるような入札プロファイル $\boldsymbol{b}$ を求めることができない）．それを以下の例で示す．

例題 4.2 $N = \{1, 2, 3\}$, $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ とし，各 $i \in N$ に対して $v_i(0) = 0$,

$$\begin{aligned} &v_i(1) = v_i(2) = v_i(3) = 3, \\ &v_i(4) = v_i(5) = v_i(6) = 6, \\ &v_i(7) = v_i(8) = 8, \quad v_i(9) = 9 \end{aligned} \tag{4.4}$$

とする．すると，各 $i \in N$ に対して v_i は仮定 2.1 を満たし，$w_i(0) = 0$,

$$w_i(1) = 3, \quad \tfrac{w_i(2)}{2} = 1.5, \quad \tfrac{w_i(k)}{k} = 1 \ \ (k = 3, 4, \ldots, 9)$$

である．例題 4.1 のときと同様に，

$$M_1 = \{1, 2, 3\}, \quad M_2 = \{4, 5, 6\}, \quad M_3 = \{7, 8, 9\}$$

での M の分割において式 (4.2) で定義される実行可能入札ベクトル $\boldsymbol{d} = (d_1, d_2, d_3)$ は

$$\begin{aligned} &d_1 = (1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0), \ \ d_2 = (0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0), \\ &d_3 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1) \end{aligned}$$

となる．しかしながら，M の分割 $M_1 = \{1, 2, 3\}$，$M_2 = \{4, 5, 6\}$，$M_3 = \{7, 8, 9\}$ に対応するこの実行可能入札プロファイル $\boldsymbol{d} = (d_1, d_2, d_3)$ はナッシュ均衡ではない．一方，M の分割 $M_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $M_2 = \{8\}, M_3 = \{9\}$ に対応する式 (4.2) の実行可能入札プロファイル $\boldsymbol{d} = (d_1, d_2, d_3)$ は

$$\begin{aligned} &d_1 = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0), \ \ d_2 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 3, 0), \\ &d_3 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 3) \end{aligned}$$

となり，ナッシュ均衡であることが容易に確かめられる．しかし，割当は公平でない（このことは，評価関数が全く同じことから，定義 2.4 より容易に得られる）．従って，定理 4.1 は弱安定である条件であるが，強安定の条件ではない． □

以下の記法を用いて，定理 4.1 の証明の概略を与える．証明のアイデアは定理 3.2 の証明と同様のものであるが，入札者数が 2 から一般の n になるのでそれに対する対処が必要になる．

入札プロファイル $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ において各入札者 i $(i \in N)$ が獲得する品物の集合を $Y_i = X_i(\boldsymbol{b})$ とし，$y_i = |Y_i|$ とする．すると，明らかに

$$\begin{aligned} &Y_i \cap Y_h = \emptyset \qquad (i, h \in N, \, i \neq h), \\ &Y_1 \cup Y_2 \cup \cdots \cup Y_n = M, \\ &y_1 + y_2 + \cdots + y_n = m \end{aligned}$$

である．従って，$P=(Y_1,Y_2,\ldots,Y_n)$ は M の n 個の部分集合への分割であり，$M_i=Y_i$ と置けば式 (4.1) が満たされる．さらに，$c_i=(c_i(1),c_i(2),\ldots,c_i(m))$ を式 (4.2) で定義される入札者 i の入札 d_i とする．従って，$c_i=(c_i(1),c_i(2),\ldots,c_i(m))$ は

$$c_i(j)=\begin{cases}\frac{w_i(y_i)}{y_i} & (j\in Y_i),\\ 0 & (j\in M-Y_i)\end{cases} \tag{4.5}$$

と書ける．すると，以下の補題が得られる．なお，この証明は 4.3 節で与えることにする．

補題 4.2 仮定 2.1 をみたす評価関数プロファイル $\boldsymbol{v}=(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ において，実行可能入札プロファイル $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\ldots,b_n)$ がナッシュ均衡ならば，式 (4.5) で定義される $\boldsymbol{c}=(c_1,c_2,\ldots,c_n)$ もナッシュ均衡である． □

この補題を用いると定理 4.1 の証明を以下のように容易に与えることができる．

定理 4.1 の証明：（必要性）評価関数プロファイル $\boldsymbol{v}=(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ がナッシュ均衡を持ち，実行可能入札プロファイル $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\ldots,b_n)$ がナッシュ均衡であるとする．すると，補題 4.2 より，式 (4.5) で定義される $\boldsymbol{c}=(c_1,c_2,\ldots,c_n)$ もナッシュ均衡である．従って，各 $i\in N$ で $M_i=Y_i$ かつ $d_i=c_i$ と置くことにより，所望の M に対する n 個の部分集合への分割が得られ，定理 4.1 の必要性が証明された．

（十分性）M の n 個の部分集合への分割 $P=(M_1,M_2,\ldots,M_n)$ が存在し，式 (4.2) で定義される実行可能入札プロファイル $\boldsymbol{d}=(d_1,d_2,\ldots,d_n)$ がナッシュ均衡であれば，それは明らかに評価関数プロファイル $\boldsymbol{v}=(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ におけるナッシュ均衡である．従って，評価関数プロファイル $\boldsymbol{v}=(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ はナッシュ均衡を持つ． □

4.2 実行可能入札プロファイル $\boldsymbol{b}$ の基本的な性質

入札プロファイル $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\ldots,b_n)$ がナッシュ均衡かどうかの判定は，全探索で行うことはできない（各 b_i が実数であるため）．そこで，ナッシュ均衡判定の計算を効率的にするため，準安定性と安定性の概念を導入する．また，本節の議論を用いて，補題 4.2 の証明も可能になる．

ここでは，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\ldots,b_n)$ は n 人の入札者の実行可能入札プロファイルであり，さらに前にものべたように，各 b_i $(i\in N)$ の入札は，$M=\{1,2,\ldots,m\}$ 上の置換 π_i を用いて，

$$b_i(\pi_i(1))\le b_i(\pi_i(2))\le\cdots\le b_i(\pi_i(m)) \tag{4.6}$$

と入札額の小さい順に並べられていると仮定する．前章の $n=2$ のときの議論を一般の $n\ge 2$ のときの議論にする際のキーアイデアは，式 (2.6) で定義された

$$b_{-i}^{\max}=(b_{-i}^{\max}(1),b_{-i}^{\max}(2),\ldots,b_{-i}^{\max}(m)),\quad (i\in N)$$

を用いることである．$n=2$（すなわち，$N=\{1,2\}$）のときには $b_{-i}^{\max}=\boldsymbol{b}_{-i}$（すなわち，$b_{-1}^{\max}=b_2$ かつ $b_{-2}^{\max}=b_1$）であったので，前章の議論はかなり単純であった．一般の $n\ge 2$ においては，議

論は少し複雑になるが，キーアイデアはほぼ同じである．なお，$n \geq 3$ では $b_{-i}^{\max} \neq \boldsymbol{b}_{-i}$ であることを注意しておく．

補題 4.2 の証明するために，前章で導入した準安定性と安定性の概念を一般化する．

定義 4.1 実行可能な入札プロファイル $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ に対して，各入札者 $i \in N$ が獲得する品物の集合を $Y_i = X_i(\boldsymbol{b})$ とし，$y_i = |Y_i|$ とする．このとき，$M = \{1, 2, \ldots, m\}$ の置換 π_{-i} として

$$b_{-i}^{\max}(\pi_{-i}(1)) \leq b_{-i}^{\max}(\pi_{-i}(2)) \leq \cdots \leq b_{-i}^{\max}(\pi_{-i}(m)), \tag{4.7}$$

と

$$Y_i = \{\pi_{-i}(1), \pi_{-i}(2), \ldots, \pi_{-i}(y_i)\} \tag{4.8}$$

が同時に成立するように適切に選ぶことができる場合，$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ は**準安定**であるとよぶ．また，$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ が準安定であれば，各入札者 $i \in N$ の効用は，$\boldsymbol{b}'_i = (b'_i, b_{-i})$ とすると，

$$u_i(X_i(\boldsymbol{b})) = v_i(|X_i(\boldsymbol{b})|) - \sum_{j=1}^{y_i} b_{-i}(\pi_{-i}(j)) = \max_{|X(\boldsymbol{b}'_i)|=y_i} u_i(X(\boldsymbol{b}'_i)) \tag{4.9}$$

である．

定義により，準安定な入札プロファイル $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ は常に実行可能であり，$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ が準安定でないときには，$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ はナッシュ均衡ではないことに注意しよう．

さらに，系 2.1 でのべたように，与えられた入札プロファイル $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ が実行可能であるかどうかは，ソーティングにかかる $O(mn \log m)$ の計算時間を除けば，$O(mn)$ 時間で判定できる．また，与えられた実行可能入札プロファイル $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ が準安定であるかどうかも，定義 4.1 に基づいて $O(mn)$ 時間で判定できる．

次に安定性を以下のように定義する．

定義 4.2 実行可能な入札プロファイル $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ おいて，各入札者 $i \in N$ に対し，$M = \{1, 2, \ldots, m\}$ の置換 π_{-i} は (4.7) をみたすとする．また，$Y_i = X_i(\boldsymbol{b})$ は各入札者 $i \in N$ が獲得する品物の集合であり，$y_i = |Y_i|$ であるとする．従って，$P = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ は M の n 個の部分集合への分割であり，$y_1 + y_2 + \cdots + y_n = m$ である．このとき，各 $1 \leq k \leq m$ をみたすすべての k で

$$v_i(k) - \sum_{j=1}^{k} b_{-i}^{\max}(\pi_{-i}(j)) \leq v_i(y_i) - \sum_{j=1}^{y_i} b_{-i}^{\max}(\pi_{-i}(j)) \tag{4.10}$$

であるとき，$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ は**安定**であるとよばれ，そうでないときには**不安定**であるとよばれる．

入札プロファイル $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ が準安定かつ安定ならば，入札者 i が入札 b_i をどのような入札 b'_i に変えようとも，b'_i は実行可能入札であっても実行可能でない入札であっても，$(b'_i, \boldsymbol{b}_{-i})$ において，入札者 i の効用が大きくなることはないことに注意しよう．これは，(4.10) および入札者 i の効用の定義から得られる．従って，入札プロファイル $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ が準安定かつ安定ならば，それはナッシュ均衡である．実は逆も成立するので，以下の定理が得られる．証明は，本章の最後の節で与えることにする．

定理 4.2 仮定2.1をみたす評価関数プロファイル $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ において，$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ がナッシュ均衡である必要十分条件は，$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ が準安定かつ安定であることである．

定理 4.2 より，ナッシュ均衡かどうか判定するための計算時間は，以下のようになる．

系 4.1 仮定 2.1 をみたす評価関数プロファイル $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ において，入札プロファイル $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ がナッシュ均衡であるかどうかは $O(mn)$ 時間で判定できる．

さらに，これと定理 4.1 を組み合わせることにより，以下をのべることができる．

系 4.2 仮定 2.1 をみたす評価関数プロファイル $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ がナッシュ均衡を持つかどうかは $O(mn\binom{m+n-1}{n-1})$ 時間で判定できる．さらに，ナッシュ均衡を持つときには，ナッシュ均衡を $O(mn\binom{m+n-1}{n-1})$ 時間で求めることができる．

以上の議論から，ナッシュ均衡をもつかどうか判定ができるようになったといえる．さらにナッシュ均衡をもつ場合，ナッシュ均衡解を求めることが可能になったといえる（n が定数であれば，多項式時間で求めることができる）．従って無秩序の対価は 2 であること [4] を用いれば，近似解を得られることと等価である．従って，最適な財の配分の近似を行えたことになる．また，この定理から補題 4.2 の証明もそれほど困難でなく得られる．

4.3 補題 4.2 の証明

最後に，(4.5) で定義された $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ の性質を調べて，補題 4.2 の証明を完成することにしよう．なお，各 $i \in N$ で $Y_i = X_i(\boldsymbol{b})$ かつ $y_i = |Y_i|$ であることに注意しよう．各 $X_i(\boldsymbol{c})$ $(i \in N)$ は $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ において入札者 i が獲得する品物の集合である．従って，(4.5) での $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ の定義より，

$$\begin{aligned} & X_i(\boldsymbol{c}) = Y_i, \quad |X_i(\boldsymbol{c})| = y_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \\ & y_1 + y_2 + \cdots + y_n = m \end{aligned} \tag{4.11}$$

が得られる．$X_i(\boldsymbol{c})$ に含まれない品物を $b_{-i}^{\max}$ における入札額の小さい順に並べる．従って，

$$M - X_i(\boldsymbol{c}) = \{j_1, j_2, \ldots, j_{m-y_i}\} \tag{4.12}$$

の品物は

$$b_{-i}^{\max}(j_1) \leq b_{-i}^{\max}(j_2) \leq \cdots \leq b_{-i}^{\max}(j_{m-y_i}) \tag{4.13}$$

と並べられていると仮定できる．同様に，各 $j \in M$ で

$$c_{-i}^{\max}(j) = \max_{h \in N - \{i\}} \{c_h(j)\}$$

として定義される $c_{-i}^{\max}$ を考え，$M - X_i(\boldsymbol{c}) = \{j_1, j_2, \ldots, j_{m-y_i}\}$ の品物を置換 $c_{-i}^{\max}$ を用いて

$$c_{-i}^{\max}(\sigma(j_1)) \leq c_{-i}^{\max}(\sigma(j_2)) \leq \cdots \leq c_{-i}^{\max}(\sigma(j_{m-y_i})) \tag{4.14}$$

と $c_{-i}^{\max}$ における入札額の小さい順に並べる．すると，以下の補題が成立する（その証明は本章の最後の節で与える）．

補題 4.3 各 $i \in N$ に対して $k_i \leq m - y_i$ は非負の整数とする．すると，

$$\sum_{h=1}^{k_i} b_{-i}^{\max}(j_h) \leq \sum_{h=1}^{k_i} c_{-i}^{\max}(\sigma(j_h)) \tag{4.15}$$

である．すなわち，$M - X_i(\boldsymbol{c}) = \{j_1, j_2, \ldots, j_{m-y_i}\}$ に含まれる品物のうちで，$b_{-i}^{\max}$ において入札額の小さいほうから k_i 番目までの品物の入札額の和は，$c_{-i}^{\max}$ において入札額の小さいほうから k_i 番目までの品物の入札額の和以下である． □

この補題と定理 4.2 を用いて，補題 4.2 の証明を与えることができる．

補題 4.2 の証明： 背理法で証明する．

$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ がナッシュ均衡であったのに，$\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ がナッシュ均衡でなかったと仮定する．すると，入札者 $i \in N$ が入札ベクトルを変更すると結果として得られる入札プロファイルにおいて入札者 $i \in N$ の効用が大きくなるというような入札者 $i \in N$ が存在することになる．対称性より，$i = 1$ であると仮定できる．従って，入札者 1 が c_1 を適切な c'_1 に変更すると，入札プロファイル $(c'_1, \boldsymbol{c}_{-1})$ において入札者 1 が獲得する品物の集合 $X_1(c'_1, \boldsymbol{c}_{-1})$ の効用 $u_1(X_1(c'_1, \boldsymbol{c}_{-1}))$ が入札プロファイル $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ における入札者 1 が獲得する品物の集合 $X_1(\boldsymbol{c})$ の効用 $u_1(X_1(\boldsymbol{c}))$ よりも大きくなる．従って，

$$u_1(X_1(c'_1, \boldsymbol{c}_{-1})) = v_1(|X_1(c'_1, \boldsymbol{c}_{-1})|) - \sum_{j \in X_1(c'_1, \boldsymbol{c}_{-1})} c_{-1}^{\max}(j) > u_1(X_1(\boldsymbol{c})) = v_1(y_1) \tag{4.16}$$

が得られる．これが矛盾につながることを以下で示すことにする．

一般性を失うここなく，

$$X_1(c'_1, \boldsymbol{c}_{-1}) \supseteq X_1(\boldsymbol{c}) \tag{4.17}$$

と仮定できる．なぜなら，$\boldsymbol{c}$ の定義より，各 $j \in X_1(\boldsymbol{c})$ に対して $c_{-1}^{\max}(j) = 0$ であり，さらに，v_1 の単調性より，必要ならば $X_1(\boldsymbol{c}) - X_1(c'_1, \boldsymbol{c}_{-1})$ に含まれるいずれかの品物への入札額を減らして，$u_1(X_1(c'_1, \boldsymbol{c}_{-1}))$ の値を小さくすることなく $X_1(c'_1, \boldsymbol{c}_{-1})$ が j を含むように $c'_1(j)$ を修正することができるからである．ここで，

$$M_{-1} = X_1(c'_1, \boldsymbol{c}_{-1}) - X_1(\boldsymbol{c}), \quad k_1 = |M_{-1}| \tag{4.18}$$

とする．すると，

$$u_1(X_1(c'_1, \boldsymbol{c}_{-1})) = v_1(|X_1(c'_1, \boldsymbol{c}_{-1})|) - \sum_{j \in M_{-1}} c_{-1}^{\max}(j) \tag{4.19}$$

と書ける．

$$X_1(c'_1, \boldsymbol{c}_{-1}) = X_1(\boldsymbol{c}) \cup M_{-1}, \quad |X_1(c'_1, \boldsymbol{c}_{-1})| = |X_1(\boldsymbol{c}_1)| + |M_{-1}| = y_1 + k_1 \tag{4.20}$$

であるので，補題 4.3 を用いると式 (4.19) より

$$\begin{aligned}
& u_1(X_1(c'_1, \boldsymbol{c}_{-1})) \\
= \; & v_1(|X_1(c'_1, \boldsymbol{c}_{-1})|) - \sum_{j \in M_{-1}} c^{\max}_{-1}(j) \\
\leq \; & v_1(|X_1(c'_1, \boldsymbol{c}_{-1})|) - \sum_{h=1}^{k_1} b^{\max}_{-1}(j_h) \\
= \; & v_1(y_1 + k_1) - \sum_{h=1}^{k_1} b^{\max}_{-1}(j_h)
\end{aligned}$$

が得られる．さらに，$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ がナッシュ均衡であるので，定義 4.2 と定理 4.2 より

$$v_1(y_1 + k_1) - v_1(y_1) \leq \sum_{h=1}^{k_1} b^{\max}_{-1}(j_h)$$

が得られる．これらを組み合わせると $u_1(X_1(c'_1, \boldsymbol{c}_{-1})) \leq v_1(y_1)$ 得られる．しかし，これは (4.16) の

$$u_1(X_1(c'_1, \boldsymbol{c}_{-1})) > u_1(X_1(\boldsymbol{c})) = v_1(y_1)$$

に矛盾する．

従って，$\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ はナッシュ均衡である． □

4.4 本章のむすび

本論文では，仮定 2.1 をみたす評価関数プロファイル $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ がナッシュ均衡を持つための必要十分条件を定理 4.1 で与えた．定義 2.3 より，品物別入札の組合せオークションが弱安定である条件を求めたといえる．さらに，定理 4.2 を用いることで得られる系 4.2 より，ナッシュ均衡の存在判定および，求解が有限時間，すなわち $O(mn\binom{m+n-1}{n-1})$ でできることを示した [34]．これと，無秩序の対価が 2 であること [4] を用いれば，最適解の $\frac{1}{2}$ 近似である解を有限時間，すなわち $O(mn\binom{m+n-1}{n-1})$ で得られることになる．ここでいくつかの注意を以下で与える．

すべての評価関数 v_i が劣モジュラーでかつ対称的ならば，社会的幸福度を最大化する最適解でかつナッシュ均衡である解を n と m の多項式時間で得ることができるが，無秩序の対価は 2 のままであることを注意しておく．このことは，評価関数を対称的に限定しても，無秩序の対価は良くできないことを示している．なお，これについては，$n = 2$ のときに限定した議論を 4.6 節で取り上げる．一般の $n \geq 2$ にも困難なく一般化できることも注意しておく．

本章の結果は $n \geq 3$ のケースにまで一般化できる．すなわち，n が固定された定数であるときには，すべての評価関数 v_i が劣加法的で対称的ならば，品物別入札の組合せオークションがナッシュ均衡を持つかどうかは多項式時間で判定できる [35]．しかしながら，n が定数でないときには，このアルゴリズムは n に関して指数時間となる．したがって，以下の問題が提起される．一般の $n \geq 3$ において本章のモデルの組合せオークションがナッシュ均衡を持つかどうかを多項式時間で判定するアルゴリズムは存在するのであろうか．評価関数における対称性の制約を除去し

て，Bhawalkar and Roughgarden [4] で提起された未解決問題に対する解答につながるような本章の結果と類似の結果を得ることはできるのであろうか．

Dobzinski, Fu, and Kleinberg による最近の論文 [11] では，すべての評価関数が劣加法的である組合せオークションの実行可能なナッシュ均衡を求めるためには，そのようなナッシュ均衡が存在することが前もってわかっていても，指数回のコミュニケーション（通信）が必要であることが示されている．しかしながら，これは Bhawalkar and Roughgarden [4] で提起された未解決問題を解決することとは直接的な関係はない．さらに，これは，すべての評価関数が劣加法的である組合せオークションにおいて，実行可能なナッシュ均衡が存在するかどうかを判定するアルゴリズムとも直接的な関係はない．

4.5 補題 4.3・定理 4.2 の証明

4.5.1 補題 4.3 の証明

各 $i \in N$ と任意の正整数 k_i に対して M_{-i} を $M - X_i(\boldsymbol{c})$ の品物のうちで $c_{-i}^{\max}$ において入札額の小さいほうから k_i 個までの k_i 個の品物の集合とする．すなわち，

$$M_{-i} = \{\sigma(j_1), \sigma(j_2), \ldots, \sigma(j_{k_i})\} \tag{4.21}$$

である．各 $h \in N - \{i\}$ に対して $Y_h = X_h(\boldsymbol{c})$ とし，

$$Y'_h = M_{-i} \cap Y_h \tag{4.22}$$

とする．従って，$y'_h = |Y'_h|$ とすると，

$$M_{-i} = \bigcup_{h \in N - \{i\}} Y'_h \quad \text{and} \quad k_i = \sum_{h \in N - \{i\}} y'_h \tag{4.23}$$

である．各 $h \neq i$ と各 $j \in Y_h = X_h(\boldsymbol{c}) \neq \emptyset$ に対して $c_{-i}^{\max}(j) = c_h(j) = \frac{w_h(y_h)}{y_h}$ となることに注意しよう．従って，$Y'_h \neq \emptyset$ に対して

$$\sum_{j \in Y'_h} c_{-i}^{\max}(j) = \sum_{j \in Y'_h} c_h(j) = y'_h \frac{w_h(y_h)}{y_h}$$

であり，

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^{k_i} c_{-i}^{\max}(\sigma(j_p)) &= \sum_{h \in N - \{i\}} \sum_{j \in Y'_h} c_{-i}^{\max}(j) \\ &= \sum_{h \in N - \{i\} : Y'_h \neq \emptyset} y'_h \frac{w_h(y_h)}{y_h} \end{aligned} \tag{4.24}$$

が得られる．

Y_h は $Y_h = X_h(\boldsymbol{b})$ でもあるので，各 $j \in Y_h = X_h(\boldsymbol{c}) \neq \emptyset$ で $b_{-i}^{\max}(j) = b_h(j)$ である．従って，b_h の実行可能性より，Y_h の品物のうちで b_h において入札額の小さいほうから y'_h 個までの入札額

の和は高々$y'_h \frac{w_h(y_h)}{y_h}$ である．実際，これは以下のようにして得られる．Y_h の品物のうちで b_h において入札額の小さいほうから y'_h 個までの入札額の和が $y'_h \frac{w_h(y_h)}{y_h}$ より大きかったとすると，Y_h に含まれる品物のうちで b_h において y'_h 番目に小さい入札額は $\frac{w_h(y_h)}{y_h}$ より大きくなり，従って，Y_h の品物の入札額がそれ以上の入札額も $\frac{w_h(y_h)}{y_h}$ より大きくなり，$\sum_{j \in Y_h} b_h(j) > y_h \frac{w_h(y_h)}{y_h} = w_h(y_h)$ が得られてしまうことになる．しかしながら，これは b_h が実行可能であることに矛盾する．従って，定理 2.1 が満たされる．

従って，Y_h の品物のうちで b_h において入札額の小さいほうから y'_h 個までの入札額の和のすべての $h \in N - \{i\}$ での総和は高々$\sum_{h \in N - \{i\}: Y'_h \neq \emptyset} y'_h \frac{w_h(y_h)}{y_h}$ である．さらに，(4.13) の $b^{\max}_{-i}$ における入札額の小さいほうから k_i 個までの入札額の和は，Y_h の品物のうちで b_h において入札額の小さいほうから y'_h 個までの入札額の和のすべての $h \in N - \{i\}$ での総和以下である．従って，(4.13) の $b^{\max}_{-i}$ における入札額の小さいほうから k_i 個までの入札額の和は，式 (4.24) より，

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^{k_i} b^{\max}_{-i}(j_p) &\leq \sum_{h \in N - \{i\}: Y'_h \neq \emptyset} y'_h \frac{w_h(y_h)}{y_h} \\ &= \sum_{p=1}^{k_i} c^{\max}_{-i}(\sigma(j_p)) \end{aligned} \tag{4.25}$$

をみたす． □

例題 4.3 前述の例題 4.2 を用いて上記の議論を振り返ってみよう．従って，$N = \{1, 2, 3\}$, $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ であり，各 $i \in N$ に対して

$$w_i(1) = 3, \quad \frac{w_i(2)}{2} = 1.5, \quad \frac{w_i(k)}{k} = 1 \quad (k = 3, 4, \ldots, 9)$$

である．$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$ は

$$b_1 = (1,\, 1,\, 1,\, 1,\, 0,\, 0,\, 0,\, 0,\, 0),$$

$$b_2 = (0,\, 0, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{3}{5}, 1, \tfrac{7}{5}, 0, 0),$$

$$b_3 = (\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}, 0, 0, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, 2)$$

である実行可能入札プロファイルとする．すると，

$$Y_1 = \{1, 2, 3, 4\},\ Y_2 = \{5, 6, 7\},\ Y_3 = \{8, 9\} \quad (y_1 = 4,\ y_2 = 3,\ y_3 = 2)$$

であり，(4.5) の $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, c_3)$ は

$$\begin{aligned} &c_1 = (1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0), \quad c_2 = (0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0), \\ &c_3 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}) \end{aligned}$$

である．$i = 1$ とする．すると，(4.12) の $X_i(\boldsymbol{c}) = Y_1$ と $M - X_i(\boldsymbol{c})$ は，

$$M - X_1(\boldsymbol{c}) = \{j_1, j_2, \ldots, j_5\} = \{5, 6, 7, 8, 9\} \tag{4.26}$$

である．従って，

$$b^{\max}_{-1}(5)=\frac{3}{5},\ b^{\max}_{-1}(6)=1,\ b^{\max}_{-1}(7)=\frac{7}{5},\ b^{\max}_{-1}(8)=\frac{2}{3},\ b^{\max}_{-1}(9)=2$$

は

$$b^{\max}_{-1}(5)\le b^{\max}_{-1}(8)\le b^{\max}_{-1}(6)\le b^{\max}_{-1}(7)\le b^{\max}_{-1}(9) \tag{4.27}$$

のように並べられる．すなわち，

$$j_1=5,\ j_2=8,\ j_3=6,\ j_4=7,\ j_5=9$$

である．同様に，

$$c^{\max}_{-1}(5)=c^{\max}_{-1}(6)=c^{\max}_{-1}(7)=1,\quad c^{\max}_{-1}(8)=c^{\max}_{-1}(9)=\frac{3}{2}$$

であり，

$$\sigma(j_1)=5,\ \sigma(j_2)=6,\ \sigma(j_3)=7,\ \sigma(j_4)=8,\ \sigma(j_5)=9$$

となる．$k_1=3$ とする．すると，$M-X_1(\boldsymbol{c})=\{5,6,7,8,9\}$ の品物のうちで $c^{\max}_{-1}$ において入札額の小さいほうから k_1 個までの k_1 個の品物の集合は

$$M_{-1}=\{5,6,7\}=\{\sigma(j_1),\ \sigma(j_2),\ \sigma(j_3)\}$$

であり，$Y'_2=\{5,6,7\}$ かつ $Y'_3=\emptyset$ ($y'_2=3$ かつ $y'_3=0$) である．$M-X_1(\boldsymbol{c})=\{5,6,7,8,9\}$ の品物のうちで $c^{\max}_{-1}$ において入札額の小さいほうから $k_1=3$ 個までの入札額の和は

$$c^{\max}_{-1}(5)+c^{\max}_{-1}(6)+c^{\max}_{-1}(7)=3$$

となり，それは

$$b^{\max}_{-1}(5)+b^{\max}_{-1}(6)+b^{\max}_{-1}(7)=\frac{3}{5}+1+\frac{6}{5}=\frac{14}{5}$$

以上である．$b^{\max}_{-1}$ において入札額の小さいほうから $k_1=3$ 個までの入札額の和は

$$b^{\max}_{-1}(5)+b^{\max}_{-1}(8)+b^{\max}_{-1}(6)=\frac{3}{5}+\frac{2}{3}+1=\frac{34}{15}<\frac{14}{5}$$

である．従って，このケースでは，$b^{\max}_{-1}$ において入札額の小さいほうから $k_1=3$ 個までの入札額の和は

$$\sum_{p=1}^{k_1} b^{\max}_{-1}(j_p)\le\sum_{p=1}^{k_1} c^{\max}_{-1}(\sigma(j_p))$$

をみたす． □

4.5.2 定理 4.2 の証明

ここでは，定理 4.2 の証明を行う．まずは，ナッシュ均衡ならば，準安定であることを示す．次に，ナッシュ均衡ならば，安定であることを示す．これにより，定理が示されることになる．

補題 4.4 入札プロファイル $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ がナッシュ均衡ならば，入札プロファイル $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ は準安定である．

補題 4.4 の証明： ある $i \in N$ で $Y_i \neq \{\pi_{-i}(1), \pi_{-i}(2), \ldots, \pi_{-i}(y_i)\}$ であったとする．議論を単純化するために，対称性から，$i = 1$ であり，必要ならば品物のラベルを変えて π_{-1} は恒等置換であると仮定する．従って，すべての $j = 1, 2, \ldots, m$ で $\pi_{-1}(j) = j$ である．すると，$j \notin Y_1$ かつ $j' \in Y_1$ となるような $j \in \{1, 2, \ldots, y_i\}$ と $j' \in \{y_i + 1, y_i + 2, \ldots, m\}$ が存在する．従って，

$$
\begin{aligned}
& j < j', \quad b_{-1}^{\max}(j) \leq b_{-1}^{\max}(j'), \\
& b_1(j) \leq b_{-1}^{\max}(j), \qquad b_{-1}^{\max}(j') \leq b_1(j')
\end{aligned}
$$

である．このとき，$b_{-1}^{\max}(j) = b_{-1}^{\max}(j')$ が成立することをあとで示すことにして，ここではこれが成立するものとして議論を進める．

そこで，$b_{-1}^{\max}(j) = b_{-1}^{\max}(j')$ であるとして，$\pi_{-1}(j \leftrightarrow j')$ は π_{-1} の j と j' を交換して得られる置換とする．従って，π_{-1} が恒等置換であるので，$j'' \neq j, j'$ ならば $\pi_{-1}(j \leftrightarrow j')(j'') = j''$ であり，$\pi_{-1}(j \leftrightarrow j')(j) = j'$ かつ $\pi_{-1}(j \leftrightarrow j')(j') = j$ である．すると，$\pi_{-1} = \pi_{-1}(j \leftrightarrow j')$ と更新することにより，$j \in Y_1$ かつ $j' \notin Y_1$ となる．このプロセスにおいては，π_{-1} が変化するだけで，それ以外の $b_i, Y_i, \pi_i, \pi_{-i}$ $(i \in N)$ のいずれも変化することはないので，(4.7) が常に成立し続けることに注意しよう．このプロセスを繰り返すことにより，最終的に (4.7) と (4.8) をみたす置換 π_{-1} を得ることができる．

ここで先延ばししていた $b_{-1}^{\max}(j) = b_{-1}^{\max}(j')$ の証明を与える．背理法で証明する．

$b_{-1}^{\max}(j) < b_{-1}^{\max}(j')$ であったと仮定する．$b'_1 = b_1(j \leftrightarrow j')$ は b_1 から $b_1(j)$ と $b_1(j')$ を交換して得られる入札ベクトルであるとする．すると，$\boldsymbol{b}'_1 = (b'_1, \boldsymbol{b}_{-1})$ は実行可能入札プロファイルであり，

$$
b_1(j) = b'_1(j') \leq b_{-1}^{\max}(j) < b_{-1}^{\max}(j') \leq b'_1(j) = b_1(j')
$$

が成立する．従って，$X_1(\boldsymbol{b}'_1) = X_1(\boldsymbol{b}) - \{j'\} \cup \{j\}$ かつ $|X_1(\boldsymbol{b}'_1)| = |X_1(\boldsymbol{b})|$ となり，

$$
u_1(X_1(\boldsymbol{b}'_1)) = u_1(X_1(\boldsymbol{b})) + b_{-1}^{\max}(j') - b_{-1}^{\max}(j) > u_1(X_1(\boldsymbol{b}))
$$

が得られる．しかし，$\boldsymbol{b}$ が準安定であるのでこれは矛盾である．

従って，$b_{-1}^{\max}(j) = b_{-1}^{\max}(j')$ であることが得られた． □

補題 4.4 を示すことができたため，次にナッシュ均衡であれば，安定であることを示す．すなわち，以下を示す．

補題 4.5 入札プロファイル $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ がナッシュ均衡ならば，入札プロファイル $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ は安定である．

補題 4.5 を証明するために必要な概念をまず与える．

n 人の入札者の実行可能入札プロファイル $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ に対して，前にものべたように，各 b_i $(i \in N)$ のすべての品物に対する入札は $M = \{1, 2, \ldots, m\}$ 上の置換 π_i を用いて

$$
b_i(\pi_i(1)) \leq b_i(\pi_i(2)) \leq \cdots \leq b_i(\pi_i(m)) \tag{4.28}
$$

と並べられているとする．

式 (2.6) で定義される各 $b_{-i}^{\max} = (b_{-i}^{\max}(1), b_{-i}^{\max}(2), \ldots, b_{-i}^{\max}(m))$ $(i \in N)$ のすべての品物に対する入札も $M = \{1, 2, \ldots, m\}$ 上の置換 π_{-i} を用いて

$$b_{-i}^{\max}(\pi_{-i}(1)) \leq b_{-i}^{\max}(\pi_{-i}(2)) \leq \cdots \leq b_{-i}^{\max}(\pi_{-i}(m)) \tag{4.29}$$

と並べられているとする．$g_i(\boldsymbol{b}_{-i})$ は入札者 i が自身の実行可能入札ベクトル b_i' を適切に選ぶことで獲得できる可能性のある品物の最大数とする．すなわち，$(b_i', \boldsymbol{b}_{-i})$ において，

$$b_{-i}^{\max}(\pi_{-i}(j)) \leq b_i'(\pi_{-i}(j)) \quad (j = 1, 2, ..., g_i(\boldsymbol{b}_{-i})) \qquad \text{かつ}$$

$$b_{-i}^{\max}(\pi_{-i}(j')) > b_i'(\pi_{-i}(j')) \quad (j' = g_i(\boldsymbol{b}_{-i}) + 1, ..., m)$$

であるが，どのような実行可能入札ベクトル b_i'' と入札プロファイル $(b_i'', \boldsymbol{b}_{-i})$ においても，$b_{-i}^{\max}(j'') > b_i''(j'')$ となるような少なくとも $m - g_i(\boldsymbol{b}_{-i})$ 個の品物 j'' が存在する．このようなとき，実行可能入札プロファイル $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ において，入札者 i に $h_i \leq g_i(\boldsymbol{b}_{-i})$ 個の品物が割り当て可能であるが，入札者 i に $h_i' \geq g_i(\boldsymbol{b}_{-i}) + 1$ 個の品物が割り当て不可能であるという．

補題 4.5 は以下の補題を用いると証明できる．

補題 4.6 実行可能入札プロファイル $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ において，$g_i(\boldsymbol{b}_{-i})$ 個の品物は割り当て可能であるが，$g_i(\boldsymbol{b}_{-i}) + 1$ 個の品物は割り当て不可能であるとする．すると，

$$\sum_{j=0}^{h-1} b_{-i}^{\max}(\pi_{-i}(g_i(\boldsymbol{b}_{-i}) + 1 - j)) > w_i(h)$$

となるような $1 \leq h \leq g_i(\boldsymbol{b}_{-i}) + 1$ をみたす整数 h が存在する．g_i' をそのような整数 h のうちで最小の値とする．すると，$1 \leq g_i' \leq g_i(\boldsymbol{b}_{-i}) + 1$ かつ

$$\sum_{j=0}^{g_i'-1} b_{-i}^{\max}(\pi_{-i}(g_i(\boldsymbol{b}_{-i}) + 1 - j)) > w_i(g_i') \tag{4.30}$$

となる．さらに，$w_i(g_i') = v_i(g_i')$ かつすべての非負数 $k \leq g_i' - 1$ に対して

$$\sum_{j=0}^{k-1} b_{-i}^{\max}(\pi_{-i}(g_i(\boldsymbol{b}_{-i}) + 1 - j)) \leq w_i(k) \tag{4.31}$$

となる．

証明： 対称性より，$i = 1$ であり，かつ必要ならば品物のラベルを変更して，π_{-1} が恒等置換であると仮定できる．従って，すべての $j = 1, 2, \ldots, m$ で $\pi_{-1}(j) = j$ である．

そのような h が存在しなかったと仮定する．すると，すべての $1 \leq h \leq g_1(\boldsymbol{b}_{-1}) + 1$ で

$$\sum_{j=0}^{h-1} b_{-1}^{\max}(g_1(\boldsymbol{b}_{-1}) + 1 - j) \leq w_1(h) \tag{4.32}$$

となる．b'_1 は

$$b'_1(j) = \begin{cases} b^{\max}_{-1}(j) & (j = 1, \ldots, g_1(\boldsymbol{b}_{-1}) + 1), \\ 0 & (j = g_1(\boldsymbol{b}_{-1}) + 2, \ldots, m) \end{cases}$$

として定義されるとする．すると，

$$\begin{aligned} 0 &= b'_1(g_1(\boldsymbol{b}_{-1}) + 2)) = \cdots = b'_1(m) \\ &\leq b'_1(1) \leq \cdots \leq b'_1(g_1(\boldsymbol{b}_{-1}) + 1)) \end{aligned}$$

であり，かつ $b'_1 = (b'_1(1), \ldots, b'_1(m))$ において，すべての $k_1 = 1, 2, \ldots, m$ で入札額の大きいほうからの k_1 番目までの入札額の和は，(4.32) と (2.18) より，高々$w_1(k_1)$ である．すなわち，すべての $1 \leq k < k' \leq m$ で $w_1(k) \leq w_1(k')$ である．従って，定理 2.1 より，b'_1 は入札者 1 の実行可能入札ベクトルであり，入札者 1 に $g_1(\boldsymbol{b}_{-1}) + 1$ 個の品物が割り当て可能になってしまう．これは補題の仮定に矛盾する．

従って，そのような h が存在し，$1 \leq g'_1 \leq g_1(\boldsymbol{b}_{-1}) + 1$ でありかつ (4.30) と (4.31) が成立する．すなわち，

$$\sum_{j=0}^{g'_1-1} b^{\max}_{-1}(g_1(\boldsymbol{b}_{-1}) + 1 - j) > w_1(g'_1) \tag{4.33}$$

かつ

$$\text{すべての } k \leq g'_1 - 1 \text{ で } \sum_{j=0}^{k-1} b^{\max}_{-1}(g_1(\boldsymbol{b}_{-1}) + 1 - j) \leq w_1(k) \tag{4.34}$$

が成立する．

次に，$w_1(g'_1) = v_1(g'_1)$ を証明する．

$g'_1 = 1$ ならば，w_1 の定義より，明らかに $w_1(g'_1) = w_1(1) = v_1(1) = v_1(g'_1)$ が成立する．

そこで，$g'_1 \geq 2$ であり，$w_1(g'_1) \neq v_1(g'_1)$ であったと仮定する．すると，w_1 の定義より，$w_1(g'_1) < v_1(g'_1)$ となる．従って，補題 2.1 の式 (2.19) より，

$$w_1(g'_1) = g'_1 \frac{w_1(g'_1 - 1)}{g'_1 - 1} \tag{4.35}$$

が得られる．一方，(4.34) より，

$$w_1(g'_1 - 1) \geq \sum_{j=0}^{g'_1-2} b^{\max}_{-1}(g_1(\boldsymbol{b}_{-1}) + 1 - j)$$

も得られる．さらに，不等式 (4.29) と (4.35) より，

$$\begin{aligned} \frac{w_1(g'_1)}{g'_1} &= \frac{w_1(g'_1 - 1)}{g'_1 - 1} \\ &\geq \frac{\sum_{j=0}^{g'_1-2} b^{\max}_{-1}(g_1(\boldsymbol{b}_{-1}) + 1 - j)}{g'_1 - 1} \\ &\geq b^{\max}_{-1}(g_1(\boldsymbol{b}_{-1}) - g'_1 + 3) \\ &\geq b^{\max}_{-1}(g_1(\boldsymbol{b}_{-1}) - g'_1 + 2) \end{aligned}$$

が得られる．従って，

$$\begin{aligned} w_1(g_1') &= g_1' \frac{w_1(g_1'-1)}{g_1'-1} \\ &= (g_1'-1)\frac{w_1(g_1'-1)}{g_1'-1} + \frac{w_1(g_1'-1)}{g_1'-1} \\ &\geq \left(\sum_{j=0}^{g_1'-2} b_{-1}^{\max}(g_1(\boldsymbol{b}_{-1})+1-j) \right) \\ &\quad + b_{-1}^{\max}(g_1(\boldsymbol{b}_{-1})-g_1'+2) \\ &= \sum_{j=0}^{g_1'-1} b_{-1}^{\max}(g_1(\boldsymbol{b}_{-1})+1-j) \end{aligned}$$

が得られる．しかし，これは (4.33) に矛盾する．

従って，$w_1(g_1') = v_1(g_1')$ が得られた． □

補題 4.5 の証明：

背理法で証明する．$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ がナッシュ均衡である（従って，準安定である）にもかかわらず安定でなかったと仮定する．すると，(4.10) が成立しなくなるような $i \in N$ と k, k' $(1 \leq k \leq m - y_i, 1 \leq k' \leq y_i)$ が存在する．なお，$y_1 + y_2 + \cdots + y_n = m$ である．

議論をわかりやすくするために，対称性から $i = 1$ に対する証明のみを与える．さらに，π_{-1} が恒等置換であるとする．従って，すべての $j = 1, 2, \ldots, m$ で $\pi_{-1}(j) = j$ である．対称性より，$i = 2$ に対する証明も同様に得られるので，ここでは省略する．従って，(4.29) は

$$b_{-1}^{\max}(1) \leq b_{-1}^{\max}(2) \leq \cdots \leq b_{-1}^{\max}(m) \tag{4.36}$$

と書ける．また，証明の都合上，不安定（安定でないこと）を以下の二式に書き直す．すなわち，$1 \leq k \leq m - y_1$ をみたすある,k で

$$v_1(y_1 + k) - v_1(y_1) > \sum_{j=1}^{k} b_{-1}^{\max}(y_1 + j) \tag{4.37}$$

であるかあるいは $1 \leq k' \leq y_1$ をみたすある k' で

$$v_1(y_1 - k') > v_1(y_1) - \sum_{j=0}^{k'-1} b_{-1}^{\max}(y_1 - j) \tag{4.38}$$

である，とする．ここで，準安定な入札プロファイル $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ において，入札者 1 に $g_1(\boldsymbol{b}_{-1})$ 個の品物は割り当て可能であるが，$g_1(\boldsymbol{b}_{-1}) + 1$ 個の品物は割り当て不可能であると仮定できる．$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ がナッシュ均衡（従って準安定）であり，$Y_1 = X_1(\boldsymbol{b}) = \{1, 2, \ldots, y_1\}$ かつ任意の実行可能入札プロファイル $\boldsymbol{b}' = (b_1', b_2)$ に対して補題 4.4 より $X_1(\boldsymbol{b}) = \{1, 2, \ldots, y_1\}$ と仮定でき，さらに，すべての $1 \leq k \leq g_1(\boldsymbol{b}_{-1}) - y_1$ で

$$v_1(y_1 + k) - v_1(y_1) \leq \sum_{j=1}^{k} b_{-1}^{\max}(y_1 + j) \tag{4.39}$$

であり，すべての $1 \leq k' \leq y_1$ で

$$v_1(y_1 - k') + \sum_{j=0}^{k'-1} b_{-1}^{\max}(y_1 - j) \leq v_1(y_1) \tag{4.40}$$

である．従って，(4.38) が成立することは決してない．同様に，$1 \leq k \leq g_1(\boldsymbol{b}_{-1}) - y_1$ なるすべての k で (4.37) が成立しない．従って，$g_1(\boldsymbol{b}_{-1}) - y_1 + 1 \leq k \leq m - y_1$ なるいずれかの k でも (4.37) は成立しない．これから $g_1(\boldsymbol{b}_{-1}) \neq m$ となる．

そのような整数 k のうちで最小のものを k^* とする．従って，

$$g_1(\boldsymbol{b}_{-1}) - y_1 + 1 \leq k^* \leq m - y_1, \tag{4.41}$$

$$v_1(y_1 + k^*) - v_1(y_1) > \sum_{j=1}^{k^*} b_{-1}^{\max}(y_1 + j) \tag{4.42}$$

であり，すべての $0 \leq k \leq k^* - 1$ で

$$v_1(y_1 + k) - v_1(y_1) \leq \sum_{j=1}^{k} b_{-1}^{\max}(y_1 + j) \tag{4.43}$$

が成立する．最後の二つの不等式からすべての $0 \leq k \leq k^* - 1$ で

$$v_1(y_1 + k^*) - v_1(y_1 + k) > \sum_{j=k+1}^{k^*} b_2(y_1 + j) \tag{4.44}$$

が成立する．これは，すべての $y_1 \leq k' \leq y_1 + k^* - 1$ で

$$v_1(y_1 + k^*) - v_1(k') > \sum_{j=k'+1}^{y_1+k^*} b_{-1}^{\max}(j) \tag{4.45}$$

であることと等価である．同様に，不等式 (4.40) と (4.42) より，すべての $1 \leq k' \leq y_1$ で

$$v_1(y_1 + k^*) - v_1(y_1 - k') > \sum_{j=1}^{k'} b_{-1}^{\max}(y_1 - k' + j) + \sum_{j=1}^{k^*} b_{-1}^{\max}(y_1 + j)$$

となる．これはすべての $0 \leq k' \leq y_1 - 1$ で

$$v_1(y_1 + k^*) - v_1(k') > \sum_{j=k'+1}^{y_1+k^*} b_{-1}^{\max}(j) \tag{4.46}$$

であることと等価である．不等式 (4.45) と (4.46) を組み合わせて，すべての $0 \leq k' \leq y_1 + k^* - 1$ で

$$v_1(y_1 + k^*) - v_1(k') > \sum_{j=k'+1}^{y_1+k^*} b_{-1}^{\max}(j) \tag{4.47}$$

であることが得られる．

一方，実行可能入札プロファイル $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ において，入札者 1 に $g_1(\boldsymbol{b}_{-1})$ 個の品物は割り当て可能であるが，$g_1(\boldsymbol{b}_{-1}) + 1$ 個の品物は割り当て不可能である．従って，補題 4.6 で定義された g_1' を考えることができる．すなわち，g_1' は $1 \leq h \leq g_1(\boldsymbol{b}_{-1}) + 1$ および

$$\sum_{j=0}^{h-1} b_{-1}^{\max}(g_1(\boldsymbol{b}_{-1}) + 1 - j) > w_1(h)$$

をみたすような最小の h である．従って，

$$\sum_{j=1}^{g_1'} b_{-1}^{\max}(g_1(\boldsymbol{b}_{-1}) + 1 - g_1' + j) > w_1(g_1') \tag{4.48}$$

かつ

$$w_1(g_1') = v_1(g_1') \tag{4.49}$$

である．さらに，入札者 1 に $g_1(\boldsymbol{b}_{-1})$ 個の品物が割り当て可能であるので，すべての $1 \leq k \leq g_1(\boldsymbol{b}_{-1})$ で

$$\sum_{j=1}^{k} b_{-1}^{\max}(g_1(\boldsymbol{b}_{-1}) - k + j) \leq w_1(k) \tag{4.50}$$

が成立する．

ここで，$y_1 + k^*$ から g_1' を何回か引く．具体的には，g_1' 個の整数からなる区間 $[g_1(\boldsymbol{b}_{-1}) + 1 - g_1', g_1(\boldsymbol{b}_{-1})]$ に $y_1 + k^* - qg_1'$ が入るようになるまで $q \geq 1$ 回引く．そして，$k' = y_1 + k^* - qg_1'$ とする．すると，

$$g_1(\boldsymbol{b}_{-1}) + 1 - g_1' \leq k' = y_1 + k^* - qg_1' \leq g_1(\boldsymbol{b}_{-1}) \tag{4.51}$$

となる．(4.48) より $\sum_{j=1}^{g_1'} b_{-1}^{\max}(g_1(\boldsymbol{b}_{-1}) + 1 - g_1' + j) > w_1(g_1')$ であり，(4.51) より $g_1(\boldsymbol{b}_{-1}) + 1 - g_1' \leq k' = y_1 + k^* - qg_1'$ であり，(4.41) より $y_1 + k^* \geq g_1(\boldsymbol{b}_{-1}) + 1$ であるので，(4.36) と $0 \leq k' = y_1 + k^* - qg_1' \leq y_1 + k^* - 1$ より

$$\begin{aligned}
qw_1(g_1') &< q\sum_{j=1}^{g_1'} b_{-1}^{\max}(g_1(\boldsymbol{b}_{-1}) + 1 - g_1' + j) \\
&\leq q\sum_{j=1}^{g_1'} b_{-1}^{\max}(y_1 + k^* - qg_1' + j) \\
&\leq \sum_{j=1}^{qg_1'} b_{-1}^{\max}(y_1 + k^* - qg_1' + j) \\
&= \sum_{j=1}^{qg_1'} b_{-1}^{\max}(k' + j) = \sum_{j=k'+1}^{y_1+k^*} b_{-1}^{\max}(j)
\end{aligned}$$

が得られる．従って，不等式 (4.47) により，

$$qw_1(g_1') < \sum_{j=k'+1}^{y_1+k^*} b_{-1}^{\max}(j) < v_1(y_1 + k^*) - v_1(k') \tag{4.52}$$

が得られる．さらに，v_1 が劣加法的であり $y_1+k^*-k'=qg'_1$ であるので，

$$v_1(y_1+k^*)-v_1(k')\le v_1(y_1+k^*-k')=v_1(qg'_1)\le qv_1(g'_1),$$

$$qw_1(g'_1)<\sum_{j=k'+1}^{y_1+k^*}b_{-1}^{\max}(j)<v_1(y_1+k^*)-v_1(k')\le qv_1(g'_1),$$

$$w_1(g'_1)<v_1(g'_1)$$

が得られる．しかし，これは (4.49) の $w_1(g'_1)=v_1(g'_1)$ に矛盾する． □

以上の議論より，補題 4.5 が成立することが示せた．従って，補題 4.4 と補題 4.5 より，定理 4.2 を証明できる．

4.6 評価関数が対称的な劣モジュラー関数のとき

簡単のため，$n=2$ のときのみ取り上げる．一般の $n\ge 2$ のときの議論もそれほど困難なくできる．品物集合を $M=\{1,2,3,4,5,6\}$ $(m=6)$ とする．そして，以下の劣モジュラーで対称的な評価関数を考える．入札者 1 の評価関数 v_1 は，

$$v_1(1)=v_1(2)=v_1(3)=v_1(4)=v_1(5)=v_1(6)=6 \tag{4.53}$$

であり，入札者 2 の評価関数 v_2 は，

$$v_2(1)=1,\ v_2(2)=2,\ v_2(3)=3,\ v_2(4)=4,\ v_2(5)=5,\ v_2(6)=6 \tag{4.54}$$

であるとする．v_1 と v_2 はともに劣モジュラーで対称的な評価関数である．さらに，以下のような二人の入札者の実行可能な入札プロファイル $\boldsymbol{b}^1=(b_1^1,b_2^1)$ を考える．入札者 1 の入札ベクトル $b_1^1=(b_1^1(1),b_1^1(2),b_1^1(3),b_1^1(4),b_1^1(5),b_1^1(6))$ は，

$$b_1^1(1)=6,\ b_1^1(2)=b_1^1(3)=b_1^1(4)=b_1^1(5)=b_1^1(6)=0 \tag{4.55}$$

であり，入札者 2 の入札ベクトル $b_2^1=(b_2^1(1),b_2^1(2),b_2^1(3),b_2^1(4),b_2^1(5),b_2^1(6))$ は，

$$b_2^1(1)=0,\ b_2^1(2)=b_2^1(3)=b_2^1(4)=b_2^1(5)=b_2^1(6)=1 \tag{4.56}$$

であるとする．すると，

$$X_1^1(\boldsymbol{b}^1)=\{1\},\quad X_2^1(\boldsymbol{b}^1)=\{2,3,4,5,6\}$$

となり，入札者 1 と入札者 2 の利得は，それぞれ，

$$u_1(X_1^1(\boldsymbol{b}^1))=6-0=6,\quad u_2(X_2^1(\boldsymbol{b}^1))=5-0=5$$

となる．この解 $(X_1^1(\boldsymbol{b}^1),X_2^1(\boldsymbol{b}^1))$ の社会的幸福度は $6+5=11$ となり最適である．

同様に，以下の実行可能な入札プロファイル $\boldsymbol{b}^2=(b_1^2,b_2^2)$ を考える．入札者 1 の入札ベクトル $b_1^2=(b_1^2(1),b_1^2(2),b_1^2(3),b_1^2(4),b_1^2(5),b_1^2(6))$ は，

$$b_1^2(1)=b_1^2(2)=b_1^2(3)=b_1^2(4)=b_1^2(5)=1.2,\quad b_1^2(6)=0$$

であり，入札者 2 の入札ベクトル $b_2^2 = (b_2^2(1), b_2^2(2), b_2^2(3), b_2^2(4), b_2^2(5), b_2^2(6))$ は，

$$b_2^2(1) = b_2^2(2) = b_2^2(3) = b_2^2(4) = b_2^2(5) = 0, \quad b_2^2(6) = 1$$

である．すると，

$$X_1^2(\boldsymbol{b}^2) = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad X_2^2(\boldsymbol{b}^2) = \{6\}$$

となり，入札者 1 と入札者 2 の利得は，それぞれ，

$$u_1(X_1^2(\boldsymbol{b}^2)) = 6 - 0 = 6, \quad u_2(X_2^2(\boldsymbol{b}^2)) = 1 - 0 = 1$$

となる．この解 $(X_1^2(\boldsymbol{b}^2), X_2^2(\boldsymbol{b}^2))$ の社会的幸福度は $6 + 1 = 7$ となる．

入札プロファイル $\boldsymbol{b}^1 = (b_1^1, b_2^1)$ と解 $(X_1^1(\boldsymbol{b}^1), X_2^1(\boldsymbol{b}^1))$ および入札プロファイル $\boldsymbol{b}^2 = (b_1^2, b_2^2)$ と解 $(X_1^2(\boldsymbol{b}^2), X_2^2(\boldsymbol{b}^2))$ はともにナッシュ均衡であることが確認できる．したがって，無秩序の対価は 11/7 以上となる．

上記の議論は，m 個の品物集合 $M = \{1, 2, \ldots, m\}$ にまで一般化でき，そのときの無秩序の対価は $(m + m - 1)/(m + 1)$ 以上となる．したがって，m が十分大きくなるに従い，無秩序の対価は，限りなく 2 に近づく．

一方，評価関数がすべて劣モジュラーであるときには，G. Chrisodoulou, A. Kovács, and M. Schapira, [9] でも示されているように，無秩序の対価は高々2 である．

次に，m 個の品物集合 $M = \{1, 2, \ldots, m\}$ に対する二人の入札者 $N = \{1, 2\}$ の劣モジュラーで対称的な評価関数 v_1, v_2 を考える．そして，各 $i \in N$ に対して

$$a_i(j) = v_i(j) - v_i(j-1) \quad (j = 1, 2, ..., m) \tag{4.57}$$

とする．v_i $(i = 1, 2)$ が対称的な劣モジュラー関数であるので，

$$a_i(1) \geq a_i(2) \geq \cdots \geq a_i(m) \quad (j = 1, 2, ..., m) \tag{4.58}$$

が成立する．そこで，$2m$ 個の $a_i(j)$ $(i = 1, 2,\ j = 1, 2, \ldots, m)$ を大きい順にソートして

$$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_{2m} \tag{4.59}$$

と並べる．そして，各品物 $j \in M$ を以下のようにして入札者 1,2 に割り当てる．

すなわち，a_j が $(a_1(1), a_1(2), ..., a_1(m))$ からのものであるときには，$b_1(j) = a_j$，$b_2(j) = 0$ とし，そうでないとき（すなわち，a_j が $(a_2(1), a_2(2), ..., a_2(m))$ からのものであるときには，$b_2(j) = a_j$，$b_1(j) = 0$ とする．

この入札プロファイル $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$ は実行可能であり，かつ入札プロファイル $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$ による $(X_1(\boldsymbol{b}), X_2(\boldsymbol{b}))$ は最適であることが容易に得られる．なお，式 (4.55) と式 (4.56) で定まる $\boldsymbol{b}^1 = (b_1^1, b_2^1)$ は，この入札プロファイル $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$ に一致することに注意しよう．したがって，最適解が多項式時間で得られることになる．

第5章　ケーキ分割問題

5.1　ケーキ分割問題・パイ分割問題の研究背景

ケーキとは，任意の箇所で切って分けることができる財である．プレイヤー $N=\{1,2,\ldots,n\}$ はケーキの任意の部分への評価関数 f_i をもつ．このとき，ケーキをどのように分割し，各プレイヤー i に割り当てるかを考える問題がケーキ分割問題 [29] である．

一方，パイ分割問題とは，ケーキでなくパイを考える．パイとは，始点と終点を同一視した半開区間 $(0,1]$ である．これをケーキ分割問題と同様に，分割して各プレイヤー $i\in N$ へ割り当てる [16].

割当がみたすべき性質としては，無羨望性 [17] がある．これは割当が公平であることを保証する．割当のためにケーキを切る回数，すなわちカット数も重要な概念である．こちらは少ない方が好ましい．カット数が多いとパイを細切れにして，各プレイヤーに割り当てることになるからである．

ケーキ分割問題に対して，この二つを同時にみたす方法として有名なものが Divide and Choose 法 [7] である．これはプレイヤー数が 2 のとき，無羨望性・カット数の最小性をみたす割当を達成するメカニズムである．

カット数は最小でないが，無羨望性をみたすメカニズムとしては，次にのべる方法がよく知られている．プレイヤー数が 3 のときは，カット数は 5 であり，無羨望性をみたす割当を返すメカニズムとして，Selfridge-Conway[7] の方法が有名である．プレイヤー数が 4 のときは，Brams-Taylor-Zwicker procedure[7] が知られており，カット数は 11 である．任意のプレイヤー数に対して有効な方法は，Brams-Taylor procedure[6] がある．しかし，カット数は非有界である．これに対し H. Aziz and S. Mackenzie[2] は，任意のプレイヤー数に対して無羨望性をみたす割当を $n^{n^{n^{n^{n^{n}}}}}$ カットで達成するメカニズムを提案している．これらのメカニズムは分割する対象の形に関わらず，実行できることに注意する．すなわち，これらはパイ分割問題へも適用することが可能な一般的なものである．

執筆現在は，無羨望性をみたすようにケーキを分割するには，膨大なカット数が必要と考えられている．しかし，このような膨大なカットは現実では実行できない．そこで解決策として，ケーキの形を制約することが行われている．たとえば，形がパイ（始点と終点を同一視した半開区間）であると仮定した場合，すなわちパイ分割問題に対し，J. B. Barbanel, S. J. Brams, and W. Stromquist[3] はプレイヤー数が 3 のとき，無羨望性を満たし，カット数が最小である分割を達成するメカニズムを提案している．しかし，同時に彼らはそのような分割を達成するには困難があることものべている．実際，3 プレイヤー以上のとき，評価関数を加法的と制約しても，無羨望性を満たし，かつパレート最適な分割が存在しないような例があることを示した．

一方，ケーキの形を半開区間 $(0,1]$ とした場合は，Stromquist の存在定理 [31] が知られている．半開区間に対するケーキ分割問題に対し，任意のプレイヤー数において，無羨望性を満たし，カット数最小な分割が存在する，という定理である．そのような分割を実際に求めるアルゴリズムが F. E. Su[32] によって示されている．しかし，これは PPAD 完全であることも示されていて [10]，計算量的な困難性が依然残る．

では，多項式時間でカット数最小かつ無羨望な割当を求めるにはどうしたらよいか？1 つの答えは評価関数を制約することである．Chen et al. [8] は，評価関数として区分的一様 (Piecewise Uniform) と区分的一定 (Piecewise Constant) を定義した．そして彼らは同論文にて評価関数が区分的一様なケーキ分割問題に対し，無羨望性をみたす分割を返し，かつ戦略的操作不可能性をみたす多項式時間アルゴリズムを提案した．これを受けて Alijani et al. [1] は，評価関数を区分的一様かつ区間数を 1 としたときに，無羨望性・カット数最小性・最適性・戦略的操作不可能性をみたす多項式時間アルゴリズムを提案した．

そこで，本論文では彼らの結果を一般化し，パイ分割問題に対して無羨望性・カット数最小性・最適性・戦略的操作不可能性をみたす多項式時間アルゴリズムを提案する．

これらが成り立つと，アルゴリズムが強安定であり，かつ最適であることを意味する．なぜなら，戦略的操作不可能性は支配戦略均衡の存在を意味する．すなわち，ナッシュ均衡も存在する．そして，無羨望性が成り立つと，公平な割当を行う．従って，この二つの性質が同時に成り立つとき，アルゴリズムは強安定である．また最適性は，常に目的関数の値を最大化するような解を保証する．従って，最適な財の配分も可能である．目的関数の値が同じであれば，カット数は小さい方が望ましい．

5.2 本章で取り上げるケーキ分割問題の定義と基本的用語

本節では，本章で取り上げるケーキ分割問題の定義と基本的用語を与える．

ケーキ $C = (0,1]$ を n 人のプレイヤー集合 $N = \{1,2,\dots n\}$ の間で分割する問題では，各 $i \in N$ に対して

$$0 \le \alpha_i < \beta_i \le 1$$

をみたすプレイヤー i の評価区間 $V_i = (\alpha_i, \beta_i]$ が与えられる．従って，評価区間 V_i の大きさ $\psi(V_i)$ は

$$\psi(V_i) = \beta_i - \alpha_i > 0$$

である．任意のプレイヤーの部分集合 $R \subseteq N$ に対して R のすべてのプレイヤーの評価区間の集合を $\mathbf{V}_R$ と表記する．すなわち，

$$\mathbf{V}_R = \{V_i \mid i \in R\}$$

である．

本章では，プレイヤー集合 $N = \{1,2,\dots n\}$ の評価区間集合 $\mathbf{V}_N$ は以下の仮定をみたすものとする．

仮定 5.1 プレイヤー集合 $N = \{1, 2, \ldots n\}$ の評価区間集合 $\mathbf{V}_N = \{V_i = (\alpha_i, \beta_i] \mid i \in N\}$ は以下の性質をみたす．

1. （非零性）各評価区間 $V_i = (\alpha_i, \beta_i] \in \mathbf{V}_N$ の大きさ $\psi(V_i)$ は正である．すなわち，$\psi(V_i) = \beta_i - \alpha_i > 0$ である．

2. （被覆性）すべての評価区間の和集合はケーキ全体に一致する．すなわち，$\bigcup_{i \in N} (\alpha_i, \beta_i] = (0, 1]$ である．

3. （順序性）任意の異なる $i, j \in N$ に対して，$\alpha_i < \alpha_j$ ならば $\beta_i \leq \beta_j$ である．

   さらに，評価区間 $V_i = (\alpha_i, \beta_i]$ の集合 $\mathbf{V}_N = \{V_i = (\alpha_i, \beta_i] \mid i \in N\}$ は，各 $V_i = (\alpha_i, \beta_i]$ を 2 次元 (α, β)-平面上の点 (α_i, β_i) と見なして，辞書式順 $\preceq$ でソートされているとする．すなわち，$i < j$ ならば $(\alpha_i, \beta_i] \preceq (\alpha_j, \beta_j]$ （すなわち（$\alpha_i < \alpha_j$）あるいは（$\alpha_i = \alpha_j$ かつ $\beta_i \leq \beta_j$））である． □

ケーキ $C = (0, 1]$ を n 人のプレイヤー集合 $N = \{1, 2, \ldots n\}$ の間で分割する本章の問題では，上記の仮定 5.1 をみたす各プレイヤー $i \in N$ の評価区間 $V_i = (\alpha_i, \beta_i]$ の集合 $\mathbf{V}_N$ があり，各プレイヤー $i \in N$ が評価区間をアルゴリズムへ申告する．そしてアルゴリズムは各プレイヤー i への割当 $A_i(\mathbf{V}_N)$ を決定する．

各プレイヤー $i \in N$ へ割り当てられた $A_i(\mathbf{V}_N)$ はケーキの互いに共通部分を持たない大きさが正のいくつかの部分からなるので，

$$A_i(\mathbf{V}_N) = \{(a_i^1, b_i^1], (a_i^2, b_i^2], \ldots, (a_i^{k_i}, b_i^{k_i}]\}$$

と表記できる．従って，すべての $1 \leq j \leq k_i$ で $\psi((a_i^j, b_i^j]) = b_i^j - a_i^j > 0$ であり，かつすべての $1 \leq j < k \leq k_i$ に対して $(a_i^j, b_i^j] \cap (a_i^k, b_i^k] = \emptyset$ である．すべてのプレイヤー $i \in N$ への割当 $A_i(\mathbf{V}_N)$ からなる

$$\mathbf{A}(\mathbf{V}_N) = (A_1(\mathbf{V}_N), A_2(\mathbf{V}_N), \ldots, A_n(\mathbf{V}_N))$$

を**割当ベクトル**という．

ケーキ分割問題であるので，割当ベクトル $\mathbf{A}(\mathbf{V}_N) = (A_1(\mathbf{V}_N), A_2(\mathbf{V}_N), \ldots, A_n(\mathbf{V}_N))$ は以下の性質をみたすことが必要である．

性質 5.1 割当ベクトル $\mathbf{A}(\mathbf{V}_N) = (A_1(\mathbf{V}_N), A_2(\mathbf{V}_N), \ldots, A_n(\mathbf{V}_N))$ は以下の性質をみたす．

1. （非空）どのプレイヤー $i \in N$ もケーキの部分が割り当てられる．すなわち，

$$A_i(\mathbf{V}_N) \neq \emptyset$$

   である．

2. （互いに素）任意の異なる $i, j \in N$ および任意の $(a_i, b_i] \in A_i(\mathbf{V}_N)$, $(a_j, b_j] \in A_j(\mathbf{V}_N)$ に対して，

$$(a_i, b_i] \cap (a_j, b_j] = \emptyset$$

   である．

3. （完全性） ケーキは割当ベクトル $\mathbf{A}(\mathbf{V}_N) = (A_1(\mathbf{V}_N), A_2(\mathbf{V}_N), \ldots, A_n(\mathbf{V}_N))$ で被覆される．すなわち，

$$\bigcup_{i \in N} \bigcup_{(a_i,b_i] \in A_i(\mathbf{V}_N)} (a_i, b_i] = (0, 1]$$

が成立する． □

定義 5.1 割当ベクトル $\mathbf{A}(\mathbf{V}_N)$ は，性質 5.1 の（非空）と（互いに素）の性質をみたすとき，実行可能とよばれる．さらに，性質 5.1 の（完全性）もみたすときは，実行可能な完全割当ベクトルとよばれる． □

定義 5.2 （効用）各プレイヤー $i \in N$ へ半開区間の集合 $X = \{(a_1, b_1], (a_2, b_2], \ldots, (a_x, b_x]\}$ が割り当てられたときの効用 $U_i(X)$ は，評価区間 V_i と X の共通部分の大きさとして定義される．すなわち，

$$U_i(X) = \sum_{(a_i,b_o] \in X} \psi(V_i \cap (a_i, b_i])$$

である．従って，各プレイヤー $i \in N$ の自分への割当 $A_i(\mathbf{V}_N)$ に対する効用は，

$$U_i(A_i(\mathbf{V}_N)) = \sum_{(a_i,b_i] \in A_i(\mathbf{V}_N)} \psi(V_i \cap (a_i, b_i])$$

と定義される． □

アルゴリズムに望まれる性質を四つのべる．それらをのべた後，四つの性質をみたすことは，アルゴリズムが強安定でありかつ最適な財の配分を行うことと等価であることを説明する．四つの性質は，後述する EFISM アルゴリズムおよびアルゴリズム P-EFISM において成立する．

定義 5.3 （無羨望性）

実行可能な割当ベクトル $\mathbf{A}(\mathbf{V}_N)$ は，どのプレイヤー $i \in N$ に対しても，自分に割り当てられた $A_i(\mathbf{V}_N)$ の効用 $U_i(A_i(\mathbf{V}_N))$ が，他のどのプレイヤー $j \in N - \{i\}$ に割り当てられた $A_j(\mathbf{V}_N)$ に対する自分の効用 $U_i(A_j(\mathbf{V}_N)) = \sum_{(a_j,b_j] \in A_j(\mathbf{V}_N)} \psi(V_i \cap (a_j, b_j])$ よりも小さくならないとき，無羨望性をもつという．すなわち，すべての $i, j \in N$ で

$$U_i(A_j(\mathbf{V}_N)) = \sum_{(a_j,b_j] \in A_j(\mathbf{V}_N)} \psi(V_i \cap (a_j, b_j]) \leq \sum_{(a_i,b_i] \in A_i(\mathbf{V}_N)} \psi(V_i \cap (a_i, b_i]) = U_i(A_i(\mathbf{V}_N))$$

が成立するとき実行可能な割当ベクトル $\mathbf{A}(\mathbf{V}_N)$ は無羨望性をもつ．無羨望性をもつ割当ベクトルは，**公平**であるともよばれる．

アルゴリズムは，無羨望性をみたす実行可能な割当を常に返すとき無羨望性をもつとよばれる． □

割当が（完全性）を満たさなくてもよい場合は，無羨望性をみたす自明な割当ベクトル $\mathbf{A}(\mathbf{V}_N)$ が存在することも注意する．これは，すべてのプレイヤー $i \in N$ に対して

$$A_i(\mathbf{V}_N) = \emptyset$$

とすればよい．しかし，このような割当は全員の効用が 0 であり，ケーキを無駄にしていることになる．従って，興味があるのは割当ベクトル $\mathbf{A}(\mathbf{V}_N)$ が実行可能で完全であり，かつ無羨望性をみたすものである．

割当ベクトル $\mathbf{A}(\mathbf{V}_N)$ を得るためにケーキ $C=(0,1]$ を切る総回数をカット数という．割当ベクトル $\mathbf{A}(\mathbf{V}_N)$ では，ケーキ $C=(0,1]$ を $\sum_{i\in N}|A_i(\mathbf{V}_N)|$ 個の区間に分割するので，$\sum_{i\in N}|A_i(\mathbf{V}_N)|-1$ 回切ることになる．さらに，$\mathbf{A}(\mathbf{V}_N)$ が実行可能であるときには，すべての $i\in N$ で $|A_i(\mathbf{V}_N)|\geq 1$ であるので，カット数は最小で $n-1$ である．従ってに，カット数の最小性は以下のように定義できる．

定義 5.4 （カット数の最小性）

実行可能で完全な割当ベクトル $\mathbf{A}(\mathbf{V}_N)$ のカット数は，

$$\mathrm{CUT}(\mathbf{A}(\mathbf{V}_N))=\sum_{i\in N}|A_i(\mathbf{V}_N)|-1$$

と定義される．実行可能で完全な割当ベクトル $\mathbf{A}(\mathbf{V}_N)$ のカット数が $\mathrm{CUT}(\mathbf{A}(\mathbf{V}_N))=n-1$ であるとき，カット数は最小性をみたすとよばれる．アルゴリズムは，仮定 5.1 をみたす任意の $\mathbf{V}_N$ に対して，常にカット数が最小である実行可能で完全な割当を返すとき，カット数の最小性をもつとよばれる． □

定義 5.5 （効率）

実行可能な割当ベクトル $\mathbf{A}(\mathbf{V}_N)$ の効率は，

$$\mathrm{EFF}(\mathbf{A}(\mathbf{V}_N))=\sum_{i\in N}U_i(A_i(\mathbf{V}_N))$$

として定義される．$\mathrm{EFF}(\mathbf{A}(\mathbf{V}_N))=\psi(C)=1$ であるとき，実行可能な割当ベクトル $\mathbf{A}(\mathbf{V}_N)$ の効率は最大である．アルゴリズムは，仮定 5.1 をみたす任意の $\mathbf{V}_N$ に対して，常に効率が最大である実行可能な割当を返すとき，最適性をもつとよばれる． □

さて，定義 5.3 の無羨望性は，各プレイヤー $i\in N$ がアルゴリズムへ自分の評価区間 V_i を申告するとしたとき，公平な割当を保証するものである．しかし，実際にはプレイヤーは利己的な思惑（自分の効用を大きくしようとする思惑）をもつため，そのような申告をしない可能性がある．ただし，戦略的操作不可能性をもてば，自分の評価区間 V_i 以外を申告する誘因をもたない（そのような申告をしても，自分の効用は増えない）．

それでは，戦略的操作不可能性の定義を与える．その準備として少し記法を導入する．プレイヤー集合 $N=\{1,2,\ldots n\}$ の評価区間集合 $\mathbf{V}_N=\{V_1,V_2,\ldots,V_n\}$ からプレイヤー $i\in N$ の評価区間 V_i を除いた評価区間集合を

$$\mathbf{V}_{N-i} \tag{5.1}$$

と表記する．そして，実際にプレイヤー $i\in N$ のアルゴリズムへ申告する評価区間を V_i' とする（これは，真の評価区間と異なってもよい）．このようにして得られるプレイヤー集合 $N=\{1,2,\ldots n\}$ のアルゴリズムへ申告する評価区間集合 $\{V_1,V_2,\ldots,V_{i-1},V_i',V_{i+1},\ldots,V_n\}$ を

$$\mathbf{V}_{i,N-i}=(V_i',\mathbf{V}_{N-i}) \tag{5.2}$$

と表記する．これを用いて戦略的操作不可能性は以下のように定義される．

定義 5.6 （戦略的操作不可能性）

アルゴリズムが戦略的操作不可能性をもつとは，各プレイヤー $i \in N$ および，仮定 5.1 をみたす任意の評価区間集合 $\mathbf{V}_N$ に対して，

$$U_i(A_i(\mathbf{V}_{i,N-i})) \leq U_i(A_i((\mathbf{V}_N))$$

が成立することをいう． □

戦略的操作不可能性について注意を与える．この定義は全てのプレイヤー $i \in N$ に対し，V_i を申告することが，支配戦略である，ということをのべている．実際，次のようになる．i 以外のプレイヤー j がアルゴリズムへ申告する評価区間を V_j' とかく．そしてプレイヤー i 以外の申告する評価区間の集合を，$\mathbf{V}_{N-i}' = \{V_j' = (\alpha_j, \beta_j] \mid j \in N - \{i\}\}$ とする．すると，定義では，仮定 5.1 をみたす任意の評価区間集合 $\mathbf{V}_N$ に対して成り立つものであるから，各プレイヤー $i \in N$ および，仮定 5.1 をみたす任意の $(V_i, \mathbf{V}_{N-i}')$ に対しても，

$$U_i(A_i((V_i', \mathbf{V}_{N-i}'))) \leq U_i(A_i((V_i, \mathbf{V}_{N-i}'))$$

であるためである．

次に，これら四つの性質をみたすことは，アルゴリズムが強安定であり，かつ最適であることを意味することを説明する．

まず，この問題において戦略とは，アルゴリズムへ申告する評価区間 V_i' であることを確認しておく．すると，戦略的操作不可能性が成り立つため，各プレイヤー $i \in N$ は $V_i' = V_i$ とすることが支配戦略である．従って，申告する評価区間集合を $\mathbf{V}_N$ とすることが支配戦略均衡である．これはナッシュ均衡でもあるため，弱安定（ナッシュ均衡が存在すること）であるといえる．

さらに，$\mathbf{V}_N$ がアルゴリズムへ入力されたとき，無羨望性が成り立てば，割当ベクトル $\mathbf{A}(\mathbf{V}_N)$ は公平であることが保証される．従って，この二つの性質が成り立つときは，申告区間集合を $\mathbf{V}_N$ は支配戦略均衡（すなわち，ナッシュ均衡でもある）であり，さらに割当は公平であるため，強安定（ナッシュ均衡であり，かつ割当が公平になる戦略の組が存在すること）であるといえる．これを以下に明記しておく．

定義 5.7 （強安定）

アルゴリズムが強安定であるとは，無羨望性・戦略的操作不可能性を同時にもつことをいう． □

次に，最適についてのべる．最適性がなりたてば，常に目的関数を最大にするため，最適であるといえる．目的関数の値が同じであれば，カット数は小さい方がよい（カット数が大きいとケーキの細切れをプレイヤーへ割り当てることになる）．

5.3 ケーキ分割問題に対するアルゴリズム

この節では，仮定 5.1 をみたす任意の $\mathbf{V}_N$ のもとでのケーキ分割問題に対して上記の四つの性質をみたす割当ベクトル $\mathbf{A}(\mathbf{V}_N)$ を返すアルゴリズムを取り上げる．なお，そのようなアルゴリ

ズムとして Alijani らの提案したアルゴリズムが知られている [1]．しかし，その証明は曖昧なところも多数見受けられるので，本章では，証明が明快になるように修正したアルゴリズムとその証明を与える．

以下に記しているアルゴリズム 1 EFISM$(N, \mathbf{V}_N)$ は，入力として与えられた仮定 5.1 をみたす任意の $\mathbf{V}_N$ に対して，上記の四つの性質をみたす割当ベクトル $\mathbf{A}(\mathbf{V}_N)$ を返すアルゴリズムである．その証明は後述する．

なお，正整数 $x < y$ に対して x から y までの正整数の集合を連続区間と呼び $[x..y]$ と表記してアルゴリズムで用いている．すなわち，

$$[x..y] = \{x, x+1, \ldots, t\} = \{i \in \mathbf{Z}_+ \mid x \leq i \leq y\}$$

である．また，連続区間 $[x..y]$ が $[x..y] \subseteq R$ であるということは，x から y までのすべての正整数が R に含まれていることを意味することに注意しよう．たとえば，$R = \{1, 2, 3, 4, 7, 8, 9\}$ のとき，連続区間 $[2..4] = \{2, 3, 4\}$ は R の部分集合であるが，連続区間 $[4, 7] = \{4, 5, 6, 7\}$ は R の部分集合ではない．この $R = \{1, 2, 3, 4, 7, 8, 9\}$ は二つの極大な連続区間 $[1..4]$ と $[7..9]$ からなる．すなわち，$R = [1..4] + [7..9]$ と直和で表現できる．一般に，正整数の任意の集合 R は極大な連続区間の集合の直和で書ける．

アルゴリズム 1 EFISM$(N, \mathbf{V}_N)$
$\mathbf{V}_N = \{V_i = (\alpha_i, \beta_i] \mid i \in N\}$ は仮定 5.1 をみたすとする；
$R \leftarrow N$;
For each $i \in R$ do $V'_i = (\alpha'_i, \beta'_i] \leftarrow V_i = (\alpha_i, \beta_i]$;
While $R \neq \emptyset$ do
$\quad [s..t] \leftarrow \underset{\{[x..y] \subseteq R \mid x \leq y\}}{\mathrm{argmin}} \left\{ \dfrac{\beta'_y - \alpha'_x}{y - x + 1} \right\}$;
$\quad \Phi \leftarrow \dfrac{\beta'_t - \alpha'_s}{t - s + 1}$;
$\quad$ For $i = s$ to t do $A_i \leftarrow (\alpha'_s + (i - s)\Phi, \alpha'_s + (i - s + 1)\Phi]$;
$\quad R \leftarrow R - [s..t]$;
$\quad$ For each $i \in R$ do $V'_i \leftarrow V'_i - (\alpha'_s, \beta'_t]$; $(\alpha'_i, \beta'_i] \leftarrow V'_i$;
return $\mathbf{A} = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$;

アルゴリズム 1 の補足説明をのべる．$x \leq y$ をみたす連続区間 $[x..y] \subseteq R$ に対して，

$$\frac{\beta'_y - \alpha'_x}{y - x + 1}$$

は

$$\{V'_i = (\alpha'_i, \beta'_i] \mid i \in [x..y]\} = \{V_x, V_{x+1}, \ldots, V_y\}$$

の $y - x + 1$ 個の評価区間の平均大きさである．これを連続区間 $[x..y]$ における評価区間

$$\{V'_i = (\alpha'_i, \beta'_i] \mid i \in [x..y]\} = \{V_x, V_{x+1}, \ldots, V_y\}$$

の密度という．While ループのステップ 4 では R のすべての連続区間のうちで評価区間の密度が最小となるものを求めてそれを $[s..t]$ としている．そしてステップ 5 でその連続区間の評価区間の密度を Φ とおいて，ステップ 6 で $s \leq i \leq t$ をみたす各 $i \in R$ に対して，その密度 Φ に等しい大きさのケーキを各 $i \in [s..t]$ に割り当てている．さらに，ステップ 7 でケーキを割り当てられた各 $i \in [s..t]$ を R から除去して R を更新し，ステップ 8 では，更新された R での各 i の評価区間からステップ 7 で切り取られて割り当てられたケーキの部分を切り取って，$i \in R$ の新しい評価区間としている．なお，切り取って割り当てた部分（区間）の集合と R に残っている極大な連続区間のすべての和集合は，常にケーキ全体 $C = (0, 1)$ に等しいことに注意しよう．While ループはこれらのプロセスを R が空になるまで繰り返している．

以降では，EFISM アルゴリズムの計算時間および，アルゴリズムが無羨望性・カット数の最小性・最適性・戦略的操作不可能性の四つの性質をみたすことを証明していく．

5.4 証明

ここでは，EFISM アルゴリズムの性質を証明する．まず，EFISM アルゴリズムはプレイヤー数を n としたときの計算時間が $O(n^3)$ であることを示す．次に無羨望性・カット数の最小性・最適性・戦略的操作不可能性の四つの性質をみたすことを証明していく．

5.4.1 EFISM アルゴリズムの計算時間

EFISM アルゴリズムの計算時間は，プレイヤー数を n としたとき，$O(n^3)$ であることを示す．まず，補題として命題を明記する．

補題 5.1 仮定 5.1 をみたす任意の $\mathbf{V}_N$ に対し，EFISM アルゴリズムの計算時間は $O(n^3)$ である．

証明： アルゴリズム 1（EFISM アルゴリズム）のステップ 1 および 2 は，プレイヤー集合 $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ の各要素に対し，高々定数回の操作しか行わない．従って，$O(n)$ でできる．

次に，While 文の中身について議論する．ステップ 5 から 8 はステップ 1 および 2 と同様の議論により，$O(n)$ で計算できる．ステップ 4 は，$R \subseteq N$ の要素 x と y の組に対して，探索を行う．従って，$O(n^2)$ である．

最後に，While ループの回数について考える．各 While ループにおいて $[s..t]$ は，空ではない．従ってステップ 7 により，プレイヤーの部分集合 R の要素数 $|R|$ は，各 While ループにおいて必ず 1 以上減少する．また，アルゴリズムの任意の時点で $|R| \geq 0$ である．従って，While ループは高々n 回しか実行されない．

While ループは高々n 回しか実行されず，1 回の While ループの実行に必要な計算時間は $O(n^2)$ であるため，全体では $O(n^3)$ である． □

5.4.2 証明のための記法

ここでは，四つの性質を証明するための記法を定義する．

上記のアルゴリズム 1 におけるステップ 3 の While 文の反復（ステップ 4 からステップ 8 まで）が行われる総回数を $L_{\max}$ とする．各 $L = 1, 2, \ldots, L_{\max}$ に対して，ステップ 3 の L 回目の While ループの開始時点における R, $V_i' = (\alpha_i', \beta_i']$ をそれぞれ R^L, $V_i^L = (\alpha_i^L, \beta_i^L]$ と表記する．各 $L = 1, 2, \ldots, L_{\max}$ に対して，ステップ 3 の L 回目の While ループのステップ 4 からステップ 6 で求められる (s, t), Φ, A_i をそれぞれ (s^L, t^L), Φ^L, A_i^L $(i = s^L, s^L + 1, \ldots, t^L)$ と表記する．すなわち，以下の記法を用いる．

R^L : L 回目の While ループの開始時点における集合 R

$V_i^L = (\alpha_i^L, \beta_i^L]$: L 回目の While ループの開始時点における $V_i' = (\alpha_i', \beta_i']$

$[s^L..t^L]$: L 回目の While ループのステップ 4 で得られた $[s..t]$.

Φ^L : L 回目の While ループのステップ 5 で得られた Φ.

L_i : プレイヤー $i \in N$ への割当 A_i が確定するのは L_i 回目の While ループ.

$A_i^{L_i}$: L_i 回目の While ループのステップ 6 でプレイヤー i へ確定する割当 A_i.

なお，$L > L_i$ 回目の While ループの反復で，$V_i' = (\alpha_i, \beta_i] = (\alpha_i^{L_i}, \beta_i^{L_i}] = V_i^{L_i}$ と $A_i^{L_i}$ は変更されないので，記法の乱用ではあるが，$V_i^L = V_i^{L_i}$ かつ $A_i^L = A_i^{L_i}$ と考える．

5.4.3 評価区間の性質

ここでは，アルゴリズムのステップ 3 の While ループの反復のどの開始時点でも，評価区間集合 $\mathbf{V}_R = \{V_i \mid i \in R\}$ が仮定 5.1 の順序性・非零性・被覆性をみたすことを示す．

そのためにまず，順序性を示す．さらに同時にアルゴリズム中の任意の時点において，評価区間は 1 つの半開区間であり，二つ以上に分かれたりはしないことを示す．すなわち，評価区間の単一性を示す．次に，非零性を証明し，最後に被覆性を示す．

命題 5.1 （評価区間の単一性と順序性）

仮定 5.1 をみたす任意の $\mathbf{V}_N$ が入力として与えられたとき，アルゴリズム 1 は，任意の $L = 1, 2, \ldots, L_{\max}$ において，すべての $i \in N$ で

$$|V_i^L| = 1 \tag{5.3}$$

であり，さらに $i < j$ であるすべての $i, j \in N$ に対して，

$$V_i^L \preceq V_j^L \tag{5.4}$$

が成立する．

証明： L に関する帰納法で示す．まず $L = 1$ のときを考える．アルゴリズムのステップ 1, 2 は入力された評価区間集合 $\mathbf{V}_N = (V_1, V_2, \ldots, V_n)$ に対して何もしない．従って，$R^1 = N$ であり，すべての $i \in N$ で $V_i^1 = V_i = (\alpha_i, \beta_i]$ である．さらに，$\mathbf{V}_N$ は仮定 5.1 をみたすことから，すべての

$i \in R^1 = N$ で $|V_i^L| = 1$ であり，式 (5.3) が $L = 1$ で成立し，$i < j$ なる任意の $i, j \in R^1 = N$ で $V_i^1 = V_i \preceq V_j = V_j^1$ であり，式 (5.4) が $L = 1$ で成立する．

すべての $L' \leq k$ で命題が成立したと仮定する．すなわち，すべての $i \in N$ で式 (5.3) の

$$|V_i^{L'}| = 1 \tag{5.5}$$

が成立し，$i < j$ である任意の $i, j \in N$ で式 (5.4) の

$$V_i^{L'} \preceq V_j^{L'} \tag{5.6}$$

が成立したとする．

このとき，$L = k + 1$ でも命題が成立することを示す．すなわち，すべての $i \in N$ で式 (5.3)（$|V_i^{k+1}| = 1$）が成立し，$i < j$ である任意の $i, j \in N$ で $V_i^{k+1} \preceq V_j^{k+1}$ であり，式 (5.4) が成立することを示す．

最初に，すべての $i \in R^{k+1}$ で式 (5.3) （$|V_i^{k+1}| = 1$）が成立することを示す．

そのために，アルゴリズムの k 回目の While ループにおけるステップ 7,8 を考える．このとき，ステップ 8 における R は，すでにステップ 7 において更新されているため，R^{k+1} に等しい．従って，プレイヤー $i \in R^{k+1}$ に対してはステップ 8 が実行され，プレイヤー $i \in R^k - R^{k+1} = \{i \in R^k \mid s^k \leq i \leq t^k\}$ に対しては何もしない．もちろん $i \in N - R^k$ に対しても何もしない．従って，

$$\begin{aligned} V_i^{k+1} &= V_i^k, & (i \in N - R^{k+1}) \quad (5.7) \\ V_i^{k+1} &= V_i^k - (\alpha_{s^k}^k, \beta_{t^k}^k], & (i \in R^{k+1}) \quad (5.8) \end{aligned}$$

が成立する．従って，以降の議論では，プレイヤー集合 N を $N - R^{k+1}$ と R^{k+1} の二つに分割して議論を進める．まずは，命題の前半部分，評価区間の単一性を証明する．

プレイヤー集合 $N - R^{k+1}$ の各 i の評価区間の単一性に対しては，式 (5.7) および帰納法の仮定（$|V_i^k| = 1$）から

$$|V_i^{k+1}| = |V_i^k| = 1 \tag{5.9}$$

であるので明らかに成立する．

次に，各プレイヤー $i \in R^{k+1}$ を考える．これを行う際，i を (i) $i < s^k$ と (ii) $i > s^k$ の二つに場合分けをして行う．

(i) $i \in R^{k+1}$ かつ $i < s^k$ のときをまず考える．帰納法の仮定より，

$$V_i^k = (\alpha_i^k, \beta_i^k] \preceq V_{s^k}^k = (\alpha_{s^k}^k, \beta_{s^k}^k] \tag{5.10}$$

が成り立つ．従って，アルゴリズム 1 のステップ 9 より

$$V_i^{k+1} = V_i^k - (\alpha_{s^k}^k, \beta_{t^k}^k] = (\alpha_i^k, \min\{\alpha_{s^k}^k, \beta_i^k\}\ ] \tag{5.11}$$

である．従って，式 (5.11) より

$$|V_i^{k+1}| = 1 \tag{5.12}$$

が成立する．

(ii) $i \in R^{k+1}$ かつ $i > s^k$ のときを考える．このとき，$i \in R^{k+1} = R^k - [s^k..t^k]$ であるので，$i > t^k$ である．帰納法の仮定から，

$$V_{s^k}^k = (\alpha_{s^k}^k, \beta_{s^k}^k] \preceq V_{t^k}^k = (\alpha_{t^k}^k, \beta_{t^k}^k] \preceq V_i^k = (\alpha_i^k, \beta_i^k] \tag{5.13}$$

が成立する．従って，アルゴリズム1のステップ9より，

$$V_i^{k+1} = V_i^k - (\alpha_{s^k}^k, \beta_{t^k}^k] = (\max\{\alpha_i^k, \beta_{t^k}^k\}\ , \beta_i^k] \tag{5.14}$$

である．従って，式 (5.14) より

$$|V_i^{k+1}| = 1 \tag{5.15}$$

が成立する．式 (5.12), (5.15) から，すべての $i \in R^{k+1}$ で

$$|V_i^{k+1}| = 1 \tag{5.16}$$

であることが得られた．

従って，式 (5.9)，(5.16) により，すべての $i \in N$ で

$$|V_i^{k+1}| = 1 \tag{5.17}$$

が成り立つので，命題の前半部分が示せた．

次に，命題の後半部分，順序性についてのべる．任意の異なる $i, j \in N$ に対して，$i < j$ ならば式 (5.4) が成立すること，すなわち，

$$V_i^{k+1} = (\alpha_i^{k+1}, \beta_i^{k+1}] \preceq V_j^{k+1} = (\alpha_j^{k+1}, \beta_j^{k+1}] \tag{5.18}$$

（すなわち（$\alpha_i^{k+1} < \alpha_j^{k+1}$）あるいは（$\alpha_i^{k+1} = \alpha_j^{k+1}$ かつ $\beta_i^{k+1} \leq \beta_j^{k+1}$））が成立することを証明する．なお，任意の $L' \leq k$ で $i < j$ ならば式 (5.6)，すなわち，

$$V_i^{L'} = (\alpha_i^{L'}, \beta_i^{L'}] \preceq V_j^{L'} = (\alpha_j^{L'}, \beta_j^{L'}]$$

が成立すると仮定していたことに注意しよう．先ほどと同様にプレイヤー集合 N を $N - R^{k+1}$ と R^{k+1} の二つに分割し，順序性を証明する．このとき，4パターンに場合分けをして証明をする必要がある．すなわち，$i < j$ である $i, j \in N$ に対して，

(i) $i, j \in N - R^{k+1}$,

(ii) $i \in N - R^{k+1}$ かつ $j \in R^{k+1}$,

(iii) $i \in R^{k+1}$ かつ $j \in N - R^{k+1}$,

(iv) $i, j \in R^{k+1}$

の四つのケースに分けて順序性，すなわち，式 (5.18) が成立することを議論する．

(i) $i, j \in N - R^{k+1}$ のとき．式 (5.7) より，すべての $i \in N - R^{k+1}$ で $V_i^{k+1} = V_i^k$ が成立するので，帰納法の仮定より

$$V_i^k = (\alpha_i^k, \beta_i^k] \preceq V_j^k = (\alpha_j^k, \beta_j^k] \tag{5.19}$$

から式 (5.18) が成立する．

(ii) $i \in N - R^{k+1}$ かつ $j \in R^{k+1}$ のとき．仮定より $i \notin R^{k+1}$ である．これは，アルゴリズム 1 のステップ 6 より，k 回目の While ループかそれ以前に i に対する割当が確定したことを意味する．従って，

$$L_i \leq k \tag{5.20}$$

が成立する．さらに，アルゴリズム 1 のステップ 6 より，

$$s^{L_i} \leq i \leq t^{L_i} \tag{5.21}$$

が成立する．従って，帰納法の仮定の式 (5.6) の

$$V_{s^{L_i}}^{L_i} \preceq V_i^{L_i} \preceq V_{t^{L_i}}^{L_i}$$

から

$$\alpha_{s^{L_i}}^{L_i} \leq \alpha_i^{L_i} \leq \beta_i^{L_i} \leq \beta_{t^{L_i}}^{L_i} \tag{5.22}$$

が成り立つ．そこで，L_i 回目の While ループにおけるアルゴリズム 1 のステップ 8 を考える．式 (5.20) より，$L_i + 1 \leq k + 1$ であること，および $j \in R^{k+1}$ であることから，$j \in R^{L_i+1} = R^{L_i} - [s^{L_i}..t^{L_i}]$ である．さらに，仮定より $i < j$ であるから，式 (5.21) より $s^{L_i} \leq i \leq t^{L_i} < j$ である．従って，式 (5.14) より，

$$V_j^{L_i+1} = V_j^{L_i} - (\alpha_{s^{L_i}}^{L_i}, \beta_{t^{L_i}}^{L_i}] = (\max\{\alpha_j^{L_i}, \beta_{t^{L_i}}^{L_i}\}\ , \beta_j^{L_i}] \tag{5.23}$$

が成立する．従って，式 (5.22), (5.23) より，

$$\alpha_i^{L_i} \leq \beta_i^{L_i} \leq \beta_{t^{L_i}}^{L_i} \leq \max\{\alpha_j^{L_i}, \beta_{t^{L_i}}^{L_i}\}\ = \alpha_j^{L_i+1} \leq \beta_j^{L_i+1} \tag{5.24}$$

が成立する．式 (5.20) より $L_i + 1 \leq k + 1$ であることに注意すれば，$i \notin R^{L_i+1}$ であるから，これに対してアルゴリズム 1 のステップ 8 は適用されない．さらに，t^{L_i} に対しても同様に適用されない．従って，$V_i^{k+1} = V_i^{L_i}$, $\beta_{t^{L_i}}^{k+1} = \beta_{t^{L_i}}^{L_i}$ が成り立つ．さらにアルゴリズム 1 のステップ 8 より，一般に α が更新されるとき，小さくなることはない．従って，$\alpha_j^{L_i+1} \leq \alpha_j^{k+1}$ であるから，式 (5.24) より，

$$\alpha_i^{L_i} = \alpha_i^{k+1} \leq \beta_i^{k+1} \leq \beta_{t^{L_i}}^{k+1} = \beta_{t^{L_i}}^{L_i} \leq \max\{\alpha_j^{L_i}, \beta_{t^{L_i}}^{L_i}\}\ = \alpha_j^{L_i+1} \leq \alpha_j^{k+1} \leq \beta_j^{k+1}$$

が成り立つ．従って，

$$(\alpha_i^{k+1} \leq \alpha_j^{k+1}) \text{ かつ } (\beta_i^{k+1} \leq \beta_j^{k+1}) \tag{5.25}$$

が成立する．すなわち，式 (5.18) が成立する．

(iii) $i \in R^{k+1}$ かつ $j \in N - R^{k+1}$ のとき．$j \notin R^{k+1}$ であるので，式 (5.20) が適用でき，$L_j + 1 \leq k + 1$ が成り立つ．さらに，式 (5.21) より，

$$s^{L_j} \leq j \leq t^{L_j} \tag{5.26}$$

である．また，$i \in R^{k+1}$ であることから，アルゴリズム 1 のステップ 6 より $i \in R^{L_j+1}$ である．仮定より $i < j$ であることおよび，$R^{L_j+1} \cap [s^{L_j}..t^{L_j}] = \emptyset$ であるので，式 (5.26) より，$i < s^{L_j} \leq j \leq t^{L_j}$ である．従って，式 (5.12) より

$$V_i^{L_j+1} = V_i^{L_j} - (\alpha_{s^{L_j}}^{L_j}, \beta_{t^{L_j}}^{L_j}] = (\alpha_i^{L_j}, \min\{\beta_i^{L_j}, \alpha_{s^{L_j}}^{L_j}\}\ ] \tag{5.27}$$

が成立する．さらに式 (5.10) より，$\alpha_{s^{L_j}}^{L_j} \leq \alpha_j^{L_j} \leq \beta_j^{L_j} \leq \beta_{t^{L_j}}^{L_j}$ が成立するため，式 (5.27) を用いれば，

$$\alpha_i^{L_j+1} \leq \beta_i^{L_j+1} = \min\{\beta_i^{L_j}, \alpha_{s^{L_j}}^{L_j}\}\ \leq \alpha_{s^{L_j}}^{L_j} \leq \alpha_j^{L_j} \leq \beta_j^{L_j}$$

が成立する．式 (5.20) より $L_j + 1 \leq k + 1$ であることに注意すれば，$j \notin R^{L_j+1}$ であるから，これに対してアルゴリズム 1 のステップ 8 は適用されない．さらに，s^{L_j} に対しても同様に適用されない．従って，$V_j^{k+1} = V_j^{L_j}$, $\alpha_{s^{L_j}}^{k+1} = \alpha_{s^{L_j}}^{L_j}$ が成り立つ．さらにアルゴリズム 1 のステップ 8 より，一般に β が更新されるとき，大きくなることはない．従って，$\beta_i^{L_j+1} \geq \beta_i^{k+1}$ であるから，

$$\alpha_i^{k+1} \leq \beta_i^{k+1} \leq \beta_i^{L_j+1} = \min\{\beta_i^{L_j}, \alpha_{s^{L_j}}^{L_j}\}\ \leq \alpha_{s^{L_j}}^{L_j} = \alpha_{s^{L_j}}^{k+1} \leq \alpha_j^{k+1} \leq \beta_j^{k+1}$$

が成り立つ．従って，

$$(\alpha_i^{k+1} \leq \alpha_j^{k+1}) \text{ かつ } (\beta_i^{k+1} \leq \beta_j^{k+1}) \tag{5.28}$$

が成立する．すなわち，式 (5.18) が成立する．

(iv) $i, j \in R^{k+1}$ のとき．$R^{k+1} \cap [s^k..t^k] = \emptyset$ であるので，$i < j$ であることに注意すれば，i, j, s^k, t^k の大小関係は，

$$\text{(a) } i < j < s^k \leq t^k,$$

$$\text{(b) } i < s^k \leq t^k < j,$$

$$\text{(c) } s^k \leq t^k < i < j$$

の三つに分けられる．この 3 パターンに場合分けを行って証明をしていく．

(a) $i < j < s^k \leq t^k$ のとき．仮定より $i, j \in R^{k+1}$ かつ $i, j < s^k$ であるから，式 (5.12) より

$$V_i^{k+1} = (\alpha_i^k, \min\{\alpha_{s^k}^k, \beta_i^k\}], \quad V_j^{k+1} = (\alpha_j^k, \min\{\alpha_{s^k}^k, \beta_j^k\}]$$

が成立する．従って，帰納法の仮定より，$\alpha_i^k \leq \alpha_j^k$ かつ $\beta_i^k \leq \beta_j^k$ であることに注意すれば

$$\alpha_i^{k+1} = \alpha_i^k \leq \alpha_j^k = \alpha_j^{k+1}$$

$$\beta_i^{k+1} = \min\{\alpha_{s^k}^k, \beta_i^k\}\ \leq \min\{\alpha_{s^k}^k, \beta_j^k\}\ = \beta_j^{k+1}$$

である．従って，

$$(\alpha_i^{k+1} \leq \alpha_j^{k+1}) \text{ かつ } (\beta_i^{k+1} \leq \beta_j^{k+1}) \tag{5.29}$$

が成り立つ．

(b) $i < s^k \leq t^k < j$ のとき．仮定より，$i \in R^{k+1}$ かつ $i < s^k$ であるから，式 (5.12) より

$$V_i^{k+1} = (\alpha_i^k, \min\{\alpha_{s^k}^k, \beta_i^k\}\ ]$$

が成立する．さらに仮定より，$j \in R^{k+1}$ かつ $t^k < j$ であるから，式 (5.15) より

$$V_j^{k+1} = (\max\{\alpha_j^k, \beta_{t^k}^k\}\ , \beta_j^k]$$

である．従って，帰納法の仮定より，$\alpha_i^k \leq \alpha_j^k$ かつ $\beta_i^k \leq \beta_j^k$ であることに注意すれば

$$\alpha_i^{k+1} = \alpha_i^k \leq \max\{\alpha_j^k, \beta_{t^k}^k\}\ = \alpha_j^{k+1}$$

$$\beta_i^{k+1} = \min\{\alpha_{s^k}^k, \beta_i^k\}\ \leq \beta_j^k = \beta_j^{k+1}$$

である．従って，

$$(\alpha_i^{k+1} \leq \alpha_j^{k+1}) \text{ かつ } (\beta_i^{k+1} \leq \beta_j^{k+1}) \tag{5.30}$$

が成り立つ．

(c) $s^k \leq t^k < i < j$ のとき．仮定より，$i, j \in R^{k+1}$ かつ $s^k \leq t^k < i, j$ であるから，式 (5.15) より

$$V_i^{k+1} = (\max\{\alpha_i^k, \beta_{t^k}^k\}\ , \beta_i^k], \quad V_j^{k+1} = (\max\{\alpha_j^k, \beta_{t^k}^k\}\ , \beta_j^k]$$

が成立する．従って帰納法の仮定より，$\alpha_i^k \leq \alpha_j^k$ かつ $\beta_i^k \leq \beta_j^k$ であることに注意すれば

$$\alpha_i^{k+1} = \max\{\alpha_i^k, \beta_{t^k}^k\}\ \leq \max\{\alpha_j^k, \beta_{t^k}^k\}\ = \alpha_j^{k+1}$$

$$\beta_i^{k+1} = \beta_i^k \leq \beta_j^k = \beta_j^{k+1}$$

であるから，

$$(\alpha_i^{k+1} \leq \alpha_j^{k+1}) \text{ かつ } (\beta_i^{k+1} \leq \beta_j^{k+1}) \tag{5.31}$$

が成立する．

式 (5.29), (5.30), (5.31) より，

$$(\alpha_i^{k+1} \leq \alpha_j^{k+1}) \text{ かつ } (\beta_i^{k+1} \leq \beta_j^{k+1}) \tag{5.32}$$

が成り立つ．すなわち，式 (5.18) が成立する．

式 (5.19), (5.25), (5.28), (5.32) より，すべての $i < j$ （$i, j \in N$）で

$$(\alpha_i^{k+1} \leq \alpha_j^{k+1}) \text{ かつ } (\beta_i^{k+1} \leq \beta_j^{k+1})$$

であるから，順序性が成立する． □

命題 5.1 より，評価区間はアルゴリズムの任意の時点で単一の半開区間であることがわかったので，以降では任意のプレイヤー $i \in N$ および任意の L に対し，$V_i^L = (\alpha_i^L, \beta_i^L]$ と書く．

命題 5.2 （非零性）仮定 5.1 をみたす任意の評価区間集合 $\mathbf{V}_N$ に対し，アルゴリズム 1 は，すべての $L = 1, 2, \ldots, L_{\max}$ とすべての $i \in N$ で

$$\psi(V_i^L = (\alpha_i^L, \beta_i^L]) = \beta_i^L - \alpha_i^L > 0$$

をみたす．

証明： 帰納法で証明する．アルゴリズム 1 のステップ 1,2 は評価区間を変更しない．従って，すべての $i \in N$ で $V_i^1 = V_i$ が成立する．さらに $\mathbf{V}_N = (V_1, V_2, \ldots, V_n)$ は非零性をみたすため，すべての $i \in N$ で

$$\psi(V_i^1) > 0$$

が成立する．帰納法の仮定として，$L = k \geq 1$ のとき命題をみたすと仮定する．すなわち，すべての $i \in N$ で $\psi(V_i^k) > 0$ であるとする．このとき，$L = k + 1$ においても命題をみたすことを示す．

そのために，k 回目の While ループにおける，アルゴリズム 1 のステップ 8 を考える．このとき，ステップ 8 における R とは，すでにステップ 7 において更新されているため，R^{k+1} に等しい．従って，プレイヤー $i \in R^{k+1}$ に対してはステップ 8 が実行され，プレイヤー $i \in N - R^{k+1}$ に対しては何もしない．従って，式 (5.7) のすべての $i \in N - R^{k+1}$ に対して

$$V_i^{k+1} = V_i^k$$

と式 (5.8) のすべての $i \in R^{k+1}$ に対して

$$V_i^{k+1} = V_i^k - (\alpha_{s^k}^k, \beta_{t^k}^k]$$

が成立する．帰納法の仮定より，すべての $i \in N$ に対して $\psi(V_i^k) > 0$ であることに注意すれば，式 (5.7) より，すべての $i \in N - R^{k+1}$ に対して

$$\psi(V_i^{k+1}) = \psi(V_i^k) > 0 \tag{5.33}$$

となる．

ここで背理法を用いる．すなわち，$\psi(V_{i^*}^{k+1}) = 0$ となるような $i^* \in N$ が存在した仮定する．式 (5.33) より，$i^* \in R^{k+1}$ である．

矛盾を導くために，$R^{k+1} = R^k - [s^k..t^k]$ に注意して，$i^* \in R^{k+1}$ を

(i) $i^* \in \{i' \in R^{k+1} \mid i' < s^k\}$ と

(ii) $i^* \in \{i' \in R^{k+1} \mid i' > t^k\}$

の二つのケースに分けて議論を進める．

(i) $i^* \in \{i' \in R^{k+1} \mid i' < s^k\}$ のとき．命題 5.1 より，アルゴリズムの任意の時点で順序性が成立するから，$i^* < s^k$ であることに注意すれば，式 (5.10) の

$$(\alpha_{i^*}^k \leq \alpha_{s^k}^k) \text{ かつ } (\beta_{i^*}^k \leq \beta_{s^k}^k)$$

が成り立つ．従って，アルゴリズム 1 のステップ 8 より，式 (5.11)，すなわち，

$$V_{i^*}^{k+1} = V_{i^*}^k - (\alpha_{s^k}^k, \beta_{t^k}^k] = (\alpha_{i^*}^k, \min\{\alpha_{s^k}^k, \beta_{i^*}^k\}\ ]$$

が成立する．従って，背理法の仮定および式 (5.11) から，

$$\psi(V_{i^*}^{k+1}) = \psi((\alpha_{i^*}^k, \min\{\alpha_{s^k}^k, \beta_{i^*}^k\}\ ]) = 0 \tag{5.34}$$

が成立する．帰納法の仮定から，$\psi(V_{i^*}^k) = \beta_{i^*}^k - \alpha_{i^*}^k > 0$ であるので，式 (5.34) が成立するためには，

$$\alpha_{s^k}^k = \alpha_{i^*}^k$$

が成り立つ必要がある．また，仮定より $i^* \in R^{k+1}$ であるため，アルゴリズム 1 のステップ 6 より $i^* \in R^k$ であることおよび $i^* < s^k$ であることに注意すれば，

$$|[s^k..t^k]| = t^k - s^k + 1 < |[i^*..t^k]| = t^k - i^* + 1$$

が成立する（$[i^*..t^k]$ が R^k の連続区間になっていることもそれほど困難なく示せる）．従って，上記二つの式から

$$\Phi^k = \frac{\beta^k_{t^k} - \alpha^k_{s^k}}{t^k - s^k + 1} > \frac{\beta^k_{t^k} - \alpha^k_{s^k}}{t^k - i^* + 1} = \frac{\beta^k_{t^k} - \alpha^k_{i^*}}{t^k - i^* + 1} \tag{5.35}$$

が成立する．これは Φ^k が密度最小であることに矛盾する．

(ii) $i^* \in \{i' \in R^{k+1} \mid i' > t^k\}$ のとき．命題 5.1 より，アルゴリズムの任意の時点で順序性が成立するから，$i^* > t^k$ であることに注意すれば，式 (5.13)，すなわち，

$$(\alpha^k_{i^*} \geq \alpha^k_{t^k}) \text{ かつ } (\beta^k_{i^*} \geq \beta^k_{t^k})$$

が成り立つ．従って，アルゴリズム 1 のステップ 8 より，式 (5.14)，すなわち，

$$V^{k+1}_{i^*} = V^k_{i^*} - (\alpha^k_{s^k}, \beta^k_{t^k}] = (\max\{\alpha^k_{i^*}, \beta^k_{t^k}\}\ , \beta^k_{i^*}]$$

が成立する．従って，背理法の仮定および式 (5.14) から，

$$\psi(V^{k+1}_{i^*}) = \psi((\max\{\alpha^k_{i^*}, \beta^k_{t^k}\}\ \beta^k_{i^*}]) = 0 \tag{5.36}$$

が成立する．帰納法の仮定から，$\psi(V^k_{i^*}) = \beta^k_{i^*} - \alpha^k_{i^*} > 0$ であるので，式 (5.36) が成立するためには，

$$\beta^k_{t^k} = \beta^k_{i^*}$$

が成り立つ必要がある．また，仮定より $i^* \in R^{k+1}$ であるため，アルゴリズム 1 のステップ 6 より $i^* \in R^k$ である．さらに，$R^{k+1} \cap [s^k..t^k] = \emptyset$ であることおよび $i^* > t^k$ であることから，

$$|[s^k..t^k]| = t^k - s^k + 1 < |[s^k..i^*]| = i^* - s^k + 1$$

が成立する（$[s^k..i^*]$ が R^K の連続区間になっていることもそれほど困難なく示せる）．従って，上記二つの式から，

$$\Phi^k = \frac{\beta^k_{t^k} - \alpha^k_{s^k}}{t^k - s^k + 1} > \frac{\beta^k_{t^k} - \alpha^k_{s^k}}{i^* - s^k + 1} = \frac{\beta^k_{i^*} - \alpha^k_{s^k}}{i^* - s^k + 1} \tag{5.37}$$

が成立する．これは Φ^k が密度最小であることに矛盾する．

式 (5.36), (5.37) より，R^{k+1} に対しても背理法の仮定が成立すると，矛盾が生じることを示せた．従って，すべての $i \in N$ で $\psi(V^{k+1}_i) > 0$ が成立する．従って，帰納法により命題が真であることが証明できた． □

命題 5.3 （被覆性）

順序性・被覆性をみたす任意の $\mathbf{V}_N$ に対し，アルゴリズム 1 は，すべての $L = 1, 2, \ldots, L_{\max}$ に対して

$$\bigcup_{i \in N} V^L_i = (0, 1]$$

をみたす．

証明： L についての帰納法で示す．アルゴリズム 1 のステップ 1,2 は評価区間を変更しない．従って，$L=1$ のときはすべての $i \in N$ で $V_i^1 = V_i$ が成立する．さらに $\mathbf{V}_N = (V_1, V_2, \ldots, V_n)$ は被覆性をみたすので，

$$\bigcup_{i \in N} V_i^1 = (0, 1]$$

である．

$L = k \geq 1$ のとき，命題が成立したと仮定する．すなわち

$$\bigcup_{i \in N} V_i^k = (0, 1]$$

が成立したと仮定する．このとき，$L = k+1$ においても命題をみたすことを示す．そのために，アルゴリズム 1 の k 回目の While ループにおけるステップ 8 を考える．このとき，ステップ 8 における R とは，すでにステップ 7 において更新されているため，R^{k+1} に等しい．従って，プレイヤー $i \in R^{k+1}$ に対してはステップ 8 が実行され，プレイヤー $i \in N - R^{k+1}$ に対しては何もしない．従って，式 (5.7) の

$$V_i^{k+1} = V_i^k, \qquad\qquad (i \in N - R^{k+1})$$

と式 (5.8) の

$$V_i^{k+1} = V_i^k - (\alpha_{s^k}^k, \beta_{t^k}^k], \quad (i \in R^{k+1})$$

が成立する．

プレイヤー集合 $N - R^{k+1}$ に対する評価区間の和集合をとることを考える．これを論じるため，$N - R^{k+1}$ を，(i) $[s^k..t^k]$ と，(ii) $N - R^{k+1} - [s^k..t^k] = N - R^k$ に分割する．

(i) $[s^k..t^k]$ のとき．

$$\bigcup_{i \in [s^k..t^k]} V_i^{k+1} = (\alpha_{s^k}^k, \beta_{t^k}^k] \tag{5.38}$$

が成立することを証明する．命題 5.1 から，アルゴリズムの任意の時点で順序性が成立する．従って，$\alpha_{s^k}^k \leq \alpha_{s^k+1}^k \leq \cdots \leq \alpha_{t^k-1}^k \leq \alpha_{t^k}^k \leq \beta_{t^k}^k$ かつ $\alpha_{s^k}^k \leq \beta_{s^k}^k \leq \beta_{s^k+1}^k \leq \cdots \leq \beta_{t^k-1}^k \leq \beta_{t^k}^k$ であることに注意すれば，任意の $i \in [s^k..t^k]$ で $V_i^k = (\alpha_i^k, \beta_i^k] \subseteq (\alpha_{s^k}^k, \beta_{t^k}^k]$ であるので，

$$\bigcup_{i \in [s^k..t^k]} V_i^k \subseteq (\alpha_{s^k}^k, \beta_{t^k}^k] \tag{5.39}$$

が成立する．さらに，命題 5.1 から，アルゴリズムの任意の時点で順序性が成立する．従って，

$$\alpha_1^k \leq \cdots \leq \alpha_{s^k-1}^k \leq \beta_{s^k-1}^k \leq \beta_{s^k}^k \quad \text{かつ} \quad \alpha_{t^k}^k \leq \alpha_{t^k+1}^k \leq \beta_{t^k+1}^k \leq \cdots \leq \beta_n = 1$$

が成立することに注意すれば，

$$\left(\bigcup_{i \in [1..s^k-1]} V_i^k \quad \cup \quad \bigcup_{i \in [t^k+1..n]} V_i^k \right) \cap (\beta_{s^k}^k, \alpha_{t^k}^k] = \emptyset$$

が成り立つ．実際，$(\beta_{s^k}^k, \alpha_{t^k}^k] = \emptyset$（すなわち，$\beta_{s^k}^k \geq \alpha_{t^k}^k$）ならば明らかであるし，また $(\beta_{s^k}^k, \alpha_{t^k}^k] \neq \emptyset$（すなわち，$\beta_{s^k}^k < \alpha_{t^k}^k$）ならば，任意の $i \in [1..s^k-1]$ で $V_i^k \cap (\beta_{s^k}^k, \alpha_{t^k}^k] = (\alpha_i^k, \beta_i^k] \cap (\beta_{s^k}^k, \alpha_{t^k}^k] = \emptyset$ であり，任意の $i \in [t^k+1..n]$ で $V_i^k \cap (\beta_{s^k}^k, \alpha_{t^k}^k] = (\alpha_i^k, \beta_i^k] \cap (\beta_{s^k}^k, \alpha_{t^k}^k] = \emptyset$ であるからである．

一方，帰納法の仮定より，

$$\bigcup_{i\in N} V_i^k = \bigcup_{i\in[1..s^k-1]} V_i^k \quad \cup \quad \bigcup_{i\in[t^k+1..n]} V_i^k \quad \cup \quad \bigcup_{i\in[s^k..t^k]} V_i^k = (0,1]$$

であるので，

$$\left(\bigcup_{i\in N} V_i^k\right) \cap (\beta_{s^k}^k, \alpha_{t^k}^k] = \left(\bigcup_{i\in[s^k..t^k]} V_i^k\right) \cap (\beta_{s^k}^k, \alpha_{t^k}^k] = (\beta_{s^k}^k, \alpha_{t^k}^k]$$

である．すなわち，

$$\bigcup_{i\in[s^k..t^k]} V_i^k \supseteq (\beta_{s^k}^k, \alpha_{t^k}^k]$$

である．さらに，命題 5.1 より $V_{s^k}^k = (\alpha_{s^k}^k, \beta_{s^k}^k]$ と $V_{t^k}^k = (\alpha_{t^k}^k, \beta_{t^k}^k]$ は単一の半開区間であるから，

$$\bigcup_{i\in[s^k..t^k]} V_i^k \supseteq (\beta_{s^k}^k, \alpha_{t^k}^k] \cup (\alpha_{s^k}^k, \beta_{s^k}^k] \cup (\alpha_{t^k}^k, \beta_{t^k}^k] = (\alpha_{s^k}^k, \beta_{t^k}^k] \tag{5.40}$$

が成立する．従って，式 (5.39)，式 (5.40) より，式 (5.38) がいえる．さらに，式 (5.9) よりこれらの評価区間は更新されないため，

$$\bigcup_{i\in[s^k..t^k]} V_i^{k+1} = \bigcup_{i\in[s^k..t^k]} V_i^k = (\alpha_{s^k}^k, \beta_{t^k}^k] \tag{5.41}$$

が成り立つ．

(ii) $N - R^{k+1} - [s^k..t^k] = N - R^k$ のとき．式 (5.9) より，

$$\bigcup_{i\in N-R^{k+1}-[s^k..t^k]} V_i^{k+1} = \bigcup_{i\in N-R^{k+1}-[s^k..t^k]} V_i^k = \bigcup_{i\in N-R^k} V_i^k \tag{5.42}$$

である．

プレイヤー集合 R^{k+1} に対しては，式 (5.10) から，

$$\bigcup_{i\in R^{k+1}} V_i^{k+1} = \bigcup_{i\in R^{k+1}} V_i^k - (\alpha_{s^k}^k, \beta_{t^k}^k] \tag{5.43}$$

であるといえる．

最後に，式 (5.41) から式 (5.43) までの和集合をとり，$L = k+1$ のときも被覆性が成り立つことを証明する．$\bigcup_{i\in[s^k..t^k]} V_i^k = (\alpha_{s^k}^k, \beta_{t^k}^k]$ であることに注意すれば，

$$\begin{aligned}
\bigcup_{i\in N} V_i^{k+1} &= (\alpha_{s^k}^k, \beta_{t^k}^k] \cup (\bigcup_{i\in N-R^{k+1}-[s^k..t^k]} V_i^k) \cup ((\bigcup_{i\in R^{k+1}} V_i^k) - (\alpha_{s^k}^k, \beta_{t^k}^k]) \\
&= (\bigcup_{i\in[s^k..t^k]} V_i^k) \cup (\bigcup_{i\in N-R^{k+1}-[s^k..t^k]} V_i^k) \cup (\bigcup_{i\in R^{k+1}} V_i^k) \\
&= \bigcup_{i\in N} V_i^k = (0,1]
\end{aligned}$$

である．従って，

$$\bigcup_{i\in N} V_i^{k+1} = (0,1]$$

が成立し，帰納法により命題は正しいことが証明できた．$\square$

5.4.4 割当の性質

本項では，割当の性質を挙げていく．以下の命題は，アルゴリズム 1 のステップ 4 での $[s..t]$ の定めかたより明らかである．

命題 5.4 （プレイヤーの包含性）仮定 5.1 をみたす任意の $\mathbf{V}_N$ に対し，アルゴリズム 1 は，すべての $L = 1, 2, \ldots, L_{\max}$ で

$$[s^L..t^L] \subseteq R^L$$

をみたす． □

この命題により，一人のプレイヤーに対して割当はちょうど 1 回しか行われないことを意味する．この事実を用いて，命題 5.5 では割当 A_i は 1 つの半開区間であることを示す．

次に，補題 5.2 では割当は常に評価区間に含まれることを示す．最後に，命題 5.6 では割当ベクトル $\mathbf{A} = (A_1, A_2, \ldots A_n)$ は常に実行可能であることを証明し，さらに補題 5.3 で，割当ベクトルは常にケーキ全体を被覆することを示す．これは割当ベクトルが常に完全であることを意味する．

命題 5.5 （割当の単一性）仮定 5.1 をみたす任意の $\mathbf{V}_N$ に対し，アルゴリズム 1 は，すべての $i \in N$ とすべての $L \in \{L_i, L_i + 1, \ldots, L_{\max}\}$ において

$$|A_i^L| = 1$$

をみたす．

証明： L に関する帰納法で証明する．まず，帰納法の基底として，$L = L_i$ のときを考える．このため，L_i 回目の While ループを考える．L_i 回目の While ループでプレイヤー $i \in N$ へ初めて割当が確定されたことに注意しよう．アルゴリズム 1 のステップ 6 により，割当が行われたということは，

$$i \in [s^{L_i}..t^{L_i}] \tag{5.44}$$

であることを意味する．

このとき，アルゴリズム 1 のステップ 6 より割当が行われ，

$$|A_i^{L_i}| = 1$$

が成り立つ．以上の議論から，$L = L_i$ のときは命題が成立する．

次に $L = k \geq L_i$ のとき命題が成立したと仮定して，$L = k + 1$ のときも命題が成立することを証明する．L_i 回目の While ループにおけるアルゴリズム 1 のステップ 6 より，R を更新し，$R^{L_i+1} = R^{L_i} - [s^{L_i}..t^{L_i}]$ となる．このとき，式 (5.44) から $i \notin R^{L_i+1}$ が成立する．さらに，アルゴリズム 1 のステップ 6 によってプレイヤー集合 R は大きくなることがない．すなわち，すべての $k \geq L_i$ で $R^{k+1} \subseteq R^k$ である．従って，

$$i \notin R^{k+1}$$

が成立する．さらに，命題 5.4 より $[s^{k+1}..t^{k+1}]\subseteq R^{k+1}$ であるから，

$$i \notin [s^{k+1}..t^{k+1}]$$

が成り立つ．一方，アルゴリズム 1 のステップ 6 は $i \notin [s^{k+1}..t^{k+1}]$ となるすべての i に対して何もしないため，すべての $k \geq L_i$

$$A_i^{k+1} = A_i^k \tag{5.45}$$

である．従って，帰納法の仮定から

$$|A_i^{k+1}| = |A_i^k| = 1$$

である． □

命題 5.5 よりアルゴリズムの任意の時点で，割当は単一の半開区間である．従って，以降の議論では，すべての $L \geq L_i$ で

$$A_i^L = (a_i^L, b_i^L]$$

と表す．評価区間および割当は，割当確定以降に更新されることはない．このことは式 (5.7) と式 (5.45) より確認できる．以下に系として明記しておく

系 5.1 （評価区間・割当の確定）仮定 5.1 をみたす任意の $\mathbf{V}_N$ に対し，アルゴリズム 1 は，すべての $i \in N$ に対して，すべての $L \geq L_i$ で

$$V_i^L = V_i^{L_i}, \quad A_i^L = A_i^{L_i}$$

をみたす． □

また，命題 5.4 から $\{[s^1..t^1], [s^2..t^2], \ldots, [s^{L_{\max}}..t^{L_{\max}}]\}$ は N の分割であることが導ける．この事実を以下に記載しておく．

系 5.2 （プレイヤーの分割）仮定 5.1 をみたす任意の $\mathbf{V}_N$ に対し，

$$\{[s^1..t^1], [s^2..t^2], \ldots, [s^{L_{\max}}..t^{L_{\max}}]\}$$

は N の分割である． □

補題 5.2 では，割当は評価区間に必ず含まれることを示す．系 5.1 より，割当 $A_i^{L_i}$ および評価区間 $V_i^{L_i}$ がすべての $L > L_i$ で不変であることに注目すれば，$A_i^{L_i} \subseteq V_i^{L_i}$ であることを示せば十分である（$A_i^{L_i}$ としているのは，L_i 回目の While ループにおいて割当が確定するためである）．従って，$A_i^{L_i}, V_i^{L_i}$ がともに単一の半開区間であることに注意すれば，以下のような命題になる．

補題 5.2 （包含性）仮定 5.1 をみたす任意の $\mathbf{V}_N$ に対して，アルゴリズム 1 は，すべての $i \in N$ に対して

$$A_i^{L_i} = (a_i^{L_i}, b_i^{L_i}] \subseteq V_i^{L_i} = (\alpha_i^{L_i}, \beta_i^{L_i}] \quad \text{（すなわち，} \alpha_i^{L_i} \leq a_i^{L_i} < b_i^{L_i} \leq \beta_i^{L_i}\text{）}$$

をみたす．

証明： 背理法でこれを証明する．すなわち，$A_i^{L_i} \not\subseteq V_i^{L_i}$ をみたすような $i \in N$ と L_i が存在したと仮定する．そして矛盾を導く．$A_i^{L_i} \not\subseteq V_i^{L_i}$ であることから，(i) $(a_i^{L_i} < \alpha_i^{L_i})$ あるいは (ii) $(b_i^{L_i} > \beta_i^{L_i})$ のいずれかが成立する．

(i) $(a_i^{L_i} < \alpha_i^{L_i})$ のとき．アルゴリズム 1 のステップ 6 より，

$$b_{t^{L_i}}^{L_i} - a_i^{L_i} = (\alpha_{s^{L_i}}^{L_i} + (t^{L_i} - s^{L_i} + 1)\Phi^{L_i}) - (\alpha_{s^{L_i}}^{L_i} + (i - s^{L_i})\Phi^{L_i}) = (t^{L_i} - i + 1)\Phi^{L_i}$$

である．さらに，命題 5.4 より

$$\Phi^{L_i} = \frac{\beta_{t^{L_i}}^{L_i} - \alpha_{s^{L_i}}^{L_i}}{t^{L_i} - s^{L_i} + 1}$$

であるから，$b_{t^{L_i}}^{L_i} = \beta_{t^{L_i}}^{L_i}$ である．従って，仮定より

$$b_{t^{L_i}}^{L_i} - a_i^{L_i} = (t^{L_i} - i + 1)\Phi^{L_i} > \beta_{t^{L_i}}^{L_i} - \alpha_i^{L_i}$$

が成立する．両辺を $(t^{L_i} - i + 1)$ で割れば，

$$\Phi^{L_i} > \frac{\beta_{t^{L_i}}^{L_i} - \alpha_i^{L_i}}{(t^{L_i} - i + 1)} \tag{5.46}$$

が成り立つ．式 (5.46) は，右辺が連続区間 $[i, t^{L_i}]$ おける密度を示しているので，Φ^{L_i} が密度最小であることに矛盾する．

(ii) $(b_i^{L_i} > \beta_i^{L_i})$ のとき．アルゴリズム 1 のステップ 6 より，

$$b_i^{L_i} - a_{s^{L_i}}^{L_i} = (\alpha_{s^{L_i}}^{L_i} + (i - s^{L_i} + 1)\Phi^{L_i}) - (\alpha_{s^{L_i}}^{L_i} + (s^{L_i} - s^{L_i})\Phi^{L_i}) = (i - s^{L_i} + 1)\Phi^{L_i}$$

である．さらに，$a_{s^{L_i}}^{L_i} = \alpha_{s^{L_i}}^{L_i}$ であるから，仮定より

$$b_i^{L_i} - a_{s^{L_i}}^{L_i} = (i - s^{L_i} + 1)\Phi^{L_i} > \beta_i^{L_i} - \alpha_{s^{L_i}}^{L_i}$$

が成立する．両辺を $(i - s^{L_i} + 1)$ で割れば，

$$\Phi^{L_i} > \frac{\beta_i^{L_i} - \alpha_{s^{L_i}}^{L_i}}{(i - s^{L_i} + 1)} \tag{5.47}$$

が成り立つ．(5.47) 式は，右辺が連続区間 $[s^{L_i}..i]$ おける密度を示しているので，Φ^{L_i} が密度最小であることに矛盾する．

式 (5.46), (5.47) より，背理法の仮定が成立すると，矛盾が生じることが導けた．従って，命題が正しいことが示せた． □

命題 5.6 （割当の実行可能性）仮定 5.1 をみたす任意の $\mathbf{V}_N$ に対し，アルゴリズム 1 は実行可能な割当ベクトル $\mathbf{A} = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$ を返す．

証明： まず始めに非零性，すなわち，すべての $i \in N$ で $A_i \neq \emptyset$，を示す．系 5.1 により，すべての $i \in N$ とすべての $L \geq L_i + 1$ で $A_i^L = A_i^{L_i}$ であるから，すべての $i \in N$ で

$$\psi(A_i^{L_i}) > 0$$

であることを示せばよい．

そのために L_i 回目の While ループを考える．$\mathbf{V}_N$ が非零性をもつため命題 5.2 より，すべての $i \in N$ で

$$\psi(V_i^{L_i}) > 0$$

が成立する．従って，アルゴリズム 1 のステップ 4,5 より，

$$\Phi^{L_i} = \underset{\{[x..y]\subseteq R^{L_i})|x\leq y\}}{\operatorname{argmin}} \left\{ \frac{\beta'_y - \alpha'_x}{y-x+1} \right\} > 0$$

が成り立つ．従って，アルゴリズム 1 のステップ 6 より，

$$\psi(A_i^{L_i}) = \Phi^{L_i} > 0 \tag{5.48}$$

となる．これによって，割当の非零性が示せたことになる．

次に，割当が互いに素であることを示す．系 5.1 に注意すれば，任意の異なる $i, j \in N$ に対して

$$A_i^{L_i} \cap A_j^{L_j} = \emptyset$$

であることを示せば十分である．(i) $L_i = L_j$ のときと，(ii) $L_i \neq L_j$ の二つに場合分けをしてこれを示す．

(i) $L_i = L_j$ のとき．このときには，アルゴリズム 1 のステップ 6 より，$A_i^{L_i} \cap A_j^{L_j} = \emptyset$ が自明に成り立つ．

(ii) $L_i \neq L_j$ のとき．対称性より，$L_i < L_j$ と仮定できる．$A_i^{L_i} \cap A_j^{L_j} = \emptyset$ を示すためには，

$$V_i^{L_i} \cap V_j^{L_i+1} = \emptyset \tag{5.49}$$

であることを示せばよい．なぜならば，補題 5.2 より $A_i^{L_i} \cap A_j^{L_j} \subseteq V_i^{L_i} \cap V_j^{L_j}$ であり，さらに，$L_i < L_j$ であることに注意すれば，アルゴリズム 1 のステップ 8 より $V_j^{L_j} \subseteq V_j^{L_i+1}$ であるので，

$$A_i^{L_i} \cap A_j^{L_j} \subseteq V_i^{L_i} \cap V_j^{L_j} \subseteq V_i^{L_i} \cap V_j^{L_i+1}$$

であり，式 (5.49) が成り立てば，$A_i^{L_i} \cap A_j^{L_j} = \emptyset$ が成り立つからである．

i の割当 $A_i = A_i^{L_i}$ は L_i 回目の While ループのステップ 6 で確定するので，$s^{L_i} \leq i \leq t^{L_i}$ である．さらに，$\mathbf{V}_N$ が順序性をもつため，命題 5.1 より任意の L で順序性が成り立つ．従って，

$$\alpha_{s^{L_i}}^{L_i} \leq \alpha_i^{L_i} \leq \beta_i^{L_i} \leq \beta_{t^{L_i}}^{L_i} \tag{5.50}$$

が成立する．このとき，j を (a) $j < s^{L_i}$ のときと (b) $j \geq s^{L_i}$ のときに場合分けして議論をする．

(a) $j < s^{L_i}$ のとき．$L_i < L_j$ から $j \in R^{L_i+1}$ であることに注意すれば，アルゴリズム 1 のステップ 8 より，

$$V_j^{L_i+1} = (\alpha_j^{L_i+1}, \beta_j^{L_i+1}] = V_j^{L_i} - (\alpha_{s^{L_i}}^{L_i}, \beta_{t^{L_i}}^{L_i}] = (\alpha_j^{L_i}, \min\{\alpha_{s^{L_i}}^{L_i}, \beta_j^{L_i}\}] \tag{5.51}$$

である．従って，式 (5.50) により

$$\alpha_j^{L_i+1} \leq \beta_j^{L_i+1} \leq \alpha_{s^{L_i}}^{L_i} \leq \alpha_i^{L_i} \leq \beta_i^{L_i} \leq \beta_{t^{L_i}}^{L_i}$$

となる．従って，$V_j^{L_i+1} = (\alpha_j^{L_i+1}, \beta_j^{L_i+1}]$ かつ $V_i^{L_i} = (\alpha_i^{L_i}, \beta_i^{L_i}]$ から

$$V_i^{L_i} \cap V_j^{L_i+1} = \emptyset \tag{5.52}$$

である．

(b) $j \geq s^{L_i}$ のとき．$L_i < L_j$ であるので $j \notin [s^{L_i}..t^{L_i}]$ から $j > t^{L_i}$ となる．$j \in R^{L_i+1}$ であることに注意すれば，アルゴリズム 1 のステップ 8 より，

$$V_j^{L_i+1} = (\alpha_j^{L_i+1}, \beta_j^{L_i+1}] = V_j^{L_i} - (\alpha_{s^{L_i}}^{L_i}, \beta_{t^{L_i}}^{L_i}] = (\max\{\alpha_j^{L_i}, \beta_{t^{L_i}}^{L_i}\}\ , \beta_j^{L_i}] \tag{5.53}$$

である．従って，式 (5.50) により

$$\alpha_{s^{L_i}}^{L_i} \leq \alpha_i^{L_i} \leq \beta_i^{L_i} \leq \beta_{t^{L_i}}^{L_i} \leq \alpha_j^{L_i+1}$$

となる．従って，$V_i^{L_i} = (\alpha_i^{L_i}, \beta_i^{L_i}]$ かつ $V_j^{L_i+1} = (\alpha_j^{L_i+1}, \beta_j^{L_i+1}]$ から

$$V_i^{L_i} \cap V_j^{L_i+1} = \emptyset \tag{5.54}$$

である．

従って，式 (5.52), (5.54) より，$L_i < L_j$ のとき

$$V_i^{L_i} \cap V_j^{L_i+1} = \emptyset$$

が成立する． □

補題 5.3 （割当の完全性）仮定 5.1 をみたす任意の $\mathbf{V}_N$ に対し，アルゴリズム 1 は完全な割当ベクトル $\mathbf{A} = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$ を返す．

証明： まず，$L = k$ のときを考える．このとき，命題 5.3 の式 (5.41) の導出と同様の議論により

$$\bigcup_{i \in [s^k..t^k]} V_i^k = (\alpha_{s^k}^k, \beta_{t^k}^k] \tag{5.55}$$

が成立することを示す．

命題 5.1 から，アルゴリズムの任意の時点で順序性が成立する．従って，$\alpha_{s^k}^k \leq \alpha_{s^k+1}^k \leq \cdots \leq \alpha_{t^k-1}^k \leq \alpha_{t^k}^k \leq \beta_{t^k}^k$ かつ $\alpha_{s^k}^k \leq \beta_{s^k}^k \leq \beta_{s^k+1}^k \leq \cdots \leq \beta_{t^k-1}^k \leq \beta_{t^k}^k$ であることに注意すれば，任意の $i \in [s^k..t^k]$ で $V_i^k = (\alpha_i^k, \beta_i^k] \subseteq (\alpha_{s^k}^k, \beta_{t^k}^k]$ であるので，

$$\bigcup_{i \in [s^k..t^k]} V_i^k \subseteq (\alpha_{s^k}^k, \beta_{t^k}^k] \tag{5.56}$$

が成立する．同様に，アルゴリズムの任意の時点で順序性が成立することから，

$$\alpha_1^k \leq \cdots \leq \alpha_{s^k-1}^k \leq \beta_{s^k-1}^k \leq \beta_{s^k}^k \quad \text{かつ} \quad \alpha_{t^k}^k \leq \alpha_{t^k+1}^k \leq \beta_{t^k+1}^k \leq \cdots \leq \beta_n = 1$$

が成立することに注意すれば，

$$\left(\bigcup_{i \in [1..s^k-1]} V_i^k \quad \cup \quad \bigcup_{i \in [t^k+1..n]} V_i^k \right) \cap (\beta_{s^k}^k, \alpha_{t^k}^k] = \emptyset$$

が成り立つ．実際，$(\beta^k_{s^k}, \alpha^k_{t^k}] = \emptyset$（すなわち，$\beta^k_{s^k} \geq \alpha^k_{t^k}$）ならば明らかであるし，また $(\beta^k_{s^k}, \alpha^k_{t^k}] \neq \emptyset$（すなわち，$\beta^k_{s^k} < \alpha^k_{t^k}$）ならば，任意の $i \in [1..s^k-1]$ で $V^k_i \cap (\beta^k_{s^k}, \alpha^k_{t^k}] = (\alpha^k_i, \beta^k_i] \cap (\beta^k_{s^k}, \alpha^k_{t^k}] = \emptyset$ であり，任意の $i \in [t^k+1..n]$ で $V^k_i \cap (\beta^k_{s^k}, \alpha^k_{t^k}] = (\alpha^k_i, \beta^k_i] \cap (\beta^k_{s^k}, \alpha^k_{t^k}] = \emptyset$ であるからである．

一方，帰納法の仮定より，

$$\bigcup_{i \in N} V^k_i = \bigcup_{i \in [1..s^k-1]} V^k_i \quad \cup \quad \bigcup_{i \in [t^k+1..n]} V^k_i \quad \cup \quad \bigcup_{i \in [s^k..t^k]} V^k_i = (0, 1]$$

であるので，

$$\left(\bigcup_{i \in N} V^k_i\right) \cap (\beta^k_{s^k}, \alpha^k_{t^k}] = \left(\bigcup_{i \in [s^k..t^k]} V^k_i\right) \cap (\beta^k_{s^k}, \alpha^k_{t^k}] = (\beta^k_{s^k}, \alpha^k_{t^k}]$$

である．すなわち，

$$\bigcup_{i \in [s^k..t^k]} V^k_i \supseteq (\beta^k_{s^k}, \alpha^k_{t^k}]$$

である．さらに，命題 5.1 より $V^k_{s^k} = (\alpha^k_{s^k}, \beta^k_{s^k}]$ と $V^k_{t^k} = (\alpha^k_{t^k}, \beta^k_{t^k}]$ は単一の半開区間であるから，

$$\bigcup_{i \in [s^k..t^k]} V^k_i \supseteq (\beta^k_{s^k}, \alpha^k_{t^k}] \cup (\alpha^k_{s^k}, \beta^k_{s^k}] \cup (\alpha^k_{t^k}, \beta^k_{t^k}] = (\alpha^k_{s^k}, \beta^k_{t^k}] \tag{5.57}$$

が成立する．従って，式 (5.56)，式 (5.57) より，式 (5.55) がいえる．さらに，式 (5.9) よりこれらの評価区間は更新されないため，

$$\bigcup_{i \in [s^k..t^k]} V^{k+1}_i = \bigcup_{i \in [s^k..t^k]} V^k_i = (\alpha^k_{s^k}, \beta^k_{t^k}] \tag{5.58}$$

が成り立つ．

さらに，アルゴリズム 1 のステップ 4, 5, 6 より

$$\bigcup_{i \in [s^k..t^k]} A^k_i = (\alpha^k_{s^k}, \beta^k_{t^k}]$$

が成り立つため，式 (5.55) を適用すれば

$$\bigcup_{i \in [s^k..t^k]} V^k_i = \bigcup_{i \in [s^k..t^k]} A^k_i = (\alpha^k_{s^k}, \beta^k_{t^k}]$$

が成立する．系 5.1 より，すべての $i \in [s^k..t^k]$ のこれらの評価区間 V^k_i および割当 A^k_i は，これ以降アルゴリズムによって変更されることはないことに注意すれば，すべての $L \geq k$ で

$$\bigcup_{i \in [s^k..t^k]} V^L_i = \bigcup_{i \in [s^k..t^k]} A^L_i \tag{5.59}$$

が成り立つことがわかる．従って，$L_{\max}$ はアルゴリズムによって実行された While ループの総回数であることに注意すれば

$$\bigcup_{k=1}^{L_{\max}} \Big(\bigcup_{i \in [s^k..t^k]} V^{L_{\max}}_i \Big) = \bigcup_{k=1}^{L_{\max}} \Big(\bigcup_{i \in [s^k..t^k]} A^{L_{\max}}_i \Big)$$

が成立する．系 5.2 より $\{[s^1..t^1],[s^2..t^2],\ldots,[s^{L_{\max}}..t^{L_{\max}}]\}$ が N の分割であるため

$$\bigcup_{i\in N} V_i^{L_{\max}} = \bigcup_{i\in N} A_i^{L_{\max}}$$

が成立する．従って，命題 5.3 よりアルゴリズムの任意の時点で被覆性が成り立つため

$$\bigcup_{i\in N} V_i^{L_{\max}} = \bigcup_{i\in N} A_i^{L_{\max}} = (0,1]$$

が成り立つ．従って，命題 5.6 より割当ベクトル $\mathbf{A}=(A_1,A_2,\ldots,A_n)$ は実行可能であるから，$\mathbf{A}$ は完全であるといえる． □

命題 5.3 と補題 5.3 の証明は，実際には，以下の命題も証明していたことになる．

命題 5.7 アルゴリズムの L 回目の While ループを考える．$\mathcal{A}^L$ を L 回目の反復で得られた $[s^L..t^L]$ も含めた $[s^1..t^1],[s^2..t^2],\ldots,[s^L,t^L]$ からなる集合とする．すなわち，

$$\mathcal{A}^L = \{[s^1..t^1],[s^2..t^2],\ldots,[s^L,t^L]\} \tag{5.60}$$

である．L 回目の While ループの開始時点の R^L の極大な連続区間の集合を $\mathcal{R}^L$ とし，L 回目の While ループの終了時点の $R^{L+1}=R^L-[s^L..t^L]$ の極大な連続区間の集合を $\mathcal{R}^{L+1}$ とする．すなわち，

$$\mathcal{R}^L = \{I \subseteq R^L \mid I \text{ は } R^L \text{ の極大な連続区間 }\} \tag{5.61}$$

である．このとき，すべての $L=1,2,\ldots,L_{\max}$ で

$$\bigcup_{I\in\mathcal{R}^{L+1}} I \ \cup \bigcup_{J\in\mathcal{A}^L} J = N \tag{5.62}$$

が成立する．さらに，異なる $I,J\in\mathcal{R}^{L+1}\cup\mathcal{A}^L$ および任意の $i\in I$ かつ任意の $j\in J$ に対して，

$$I\cap J=\emptyset,\quad V_i^{L+1}\cap V_j^{L+1}=\emptyset \tag{5.63}$$

である．

証明: $L=1,2,\ldots,L_{\max}$ に関する帰納法で証明の概略を与える．$L=1$ のときには $R^1=N$ から連続区間 $[s^1..t^1]$ が除去されて，$R^2=R^1-[s^1..t^1]$ が得られる．R^2 は $R^2=\emptyset$ でない限り，$[1..s^1-1]$ と $[t^1+1..n]$ の二つの極大な連続区間からなる（一方が空になることもある）．すなわち，

$$\mathcal{A}^1=\{[s^1..t^1]\},\quad \mathcal{R}^2=\{[1..s^1-1],[t^1+1..n]\}$$

である．従って，式 (5.62) が成立する．さらに，ステップ 8 により，任意の $i\in R^2$ の V_i^2 は

$$V_i^2 = V_i^1 - (\alpha^1_{s^1},\beta^1_{t^1}]$$

であり，任意の $i\in[s^1..t^1]$ では

$$V_i^2 = V_i^1 \subseteq (\alpha^1_{s^1},\beta^1_{t^1}]$$

である．従って，$I = [s^1..t^1]$ と $J \in \{[1..s^1 - 1], [t^1 + 1..n]\}$ と任意の $i \in I$ かつ任意の $j \in J$ に対して，

$$I \cap J = \emptyset, \quad V_i^2 \cap V_j^2 = \emptyset$$

である．さらに，$I = [1..s^1 - 1]$ と $J = [t^1 + 1..n]$ と任意の $i \in I$ かつ任意の $j \in J$ に対しても，

$$V_i^1 = (\alpha_i^1, \beta_i^1] \preceq V_{s^1} = (\alpha_{s^1}^1, \beta_{s^1}^1] \preceq V_{t^1} = (\alpha_{t^1}^1, \beta_{t^1}^1] \preceq V_j^1 = (\alpha_j^1, \beta_j^1]$$

であるので，

$$V_i^2 = V_i^1 - (\alpha_{s^1}^1, \beta_{t^1}^1], \quad V_j^2 = V_j^1 - (\alpha_{s^1}^1, \beta_{t^1}^1]$$

から

$$I \cap J = \emptyset, \quad V_i^2 \cap V_j^2 = \emptyset$$

である．従って，式 (5.63) が成立する．

従って，$L = 1$ のときには，式 (5.62) と式 (5.63) が成立することが得られた．

以下では，$L = k-1$ 回目まで While ループで式 (5.62) と式 (5.63) が成立したと仮定して，$L = k$ 回目の While ループを議論する．

$L = k$ 回目の While ループでは，R^k から $\mathbf{V}_{R^k}$ の密度最小を達成する連続区間 $[s^k..t^k]$ が除去されて，$R^{k+1} = R^k - [s^k..t^k]$ が得られる．$[s^k..t^k]$ を含む R^k の極大な連続区間を $I^k = [i^k..j^k]$ とする．すると，$I^k - [s^k..t^k]$ は $[i^k..s^k - 1]$ と $[t^k + 1..j^k]$ の二つの極大な連続区間からなる（一方が空になることもある）．$R^{k+1} = \emptyset$ でない限り，$\mathcal{A}^k$ と $\mathcal{R}^{k+1}$ は，

$$\mathcal{A}^k = \mathcal{A}^{k-1} \cup \{[s^k..t^k]\}, \quad \mathcal{R}^{k+1} = (\mathcal{R}^k - \{I^k\}) \cup \{[i^k..s^k - 1], [t^k + 1..j^k]\}$$

である．従って，$L = k$ でも式 (5.62) が成立する．

さらに，ステップ 8 により，任意の $i \in I^k - [s^k..t^k]$ の V_i^{k+1} は

$$V_i^{k+1} = V_i^k - (\alpha_{s^k}^k, \beta_{t^k}^k]$$

であり，任意の $i \in [s^k..t^k]$ では

$$V_i^{k+1} = V_i^k$$

である．従って，異なる $I, J \in \{[i^k..s^k - 1], [s^k..t^k], [t^k + 1..j^k]\}$ と任意の $i \in I$ かつ任意の $j \in J$ に対して，

$$I \cap J = \emptyset, \quad V_i^{k+1} \cap V_j^{k+1} = \emptyset$$

が成立する．同様に，任意の $J^k \in \mathcal{A}^{k-1} \cup (\mathcal{R}^k - \{I^k\})$ の任意の $j \in J^k$ に対して，帰納法の仮定より，任意の $i \in I^k$ で $V_i^k \cap V_j^k = (\alpha_i^k, \beta_i^k] \cap V_j^k = \emptyset$ である．従って，$V_j^k \cap (\alpha_{s^k}^k, \beta_{t^k}^k] = \emptyset$ であるため，$V_j^{k+1} = V_j^k$ が成り立つから，

$$V_j^{k+1} \cap V_i^{k+1} = \emptyset$$

である．異なる $I, J \in \mathcal{A}^{k-1} \cup (\mathcal{R}^k - \{I^k\})$ と任意の $i \in I$ かつ任意の $j \in J$ に対しても，上と同じ理由で，$V_i^{k+1} = V_i^k$ かつ $V_j^{k+1} = V_j^k$ であるので，帰納法の仮定の $V_j^k \cap V_i^k = \emptyset$ より，

$$V_j^{k+1} \cap V_i^{k+1} = \emptyset$$

である．従って，$L=k$ 回目の While ループでも，式 (5.63) が成立する．

以上の議論により，すべての $L=1,2,\ldots,L_{\max}$ で式 (5.62) と式 (5.63) が成立することが帰納法で得られた．　□

命題 5.2 より，アルゴリズム 1 の実行中の任意の時点で評価区間 $\mathbf{V}_N$ は非零性をもつ．従って，アルゴリズム 1 のステップ 5 より，$\Phi^L>0$ が成り立つ．さらにアルゴリズムは毎回の While ループにて，密度最小となるプレイヤー集合 $[s..t]$ を選んでいる．そのため，$\Phi^L \leq \Phi^{L+1}$ が成り立つ．これらのことをまとめると，以下のようになる．正確性を期して，証明も与える．

系 5.3 （密度の順序性）仮定 5.1 をみたす任意の $\mathbf{V}_N$ に対し，アルゴリズム 1 は，すべての $L\in\{1,2,\ldots,L_{\max}-1\}$ で

$$0<\Phi^1\leq\Phi^L\leq\Phi^{L+1} \tag{5.64}$$

をみたす．

証明： $L_{\max}=1$ のときは明らかであるので，$L_{\max}\geq 2$ とする．$L=1$ のときを考える．まず，$\Phi^1\leq\Phi^2$ を示す．Φ^1 は連続区間 $[s^1..t^1]\subseteq R^1$ で決定され，Φ^2 は連続区間 $[s^2..t^2]\subseteq R^2$ で決定されたとする．従って，

$$\Phi^1=\frac{\beta^1_{t^1}-\alpha^1_{s^1}}{t^1-s^1+1},\quad \Phi^2=\frac{\beta^2_{t^2}-\alpha^2_{s^2}}{t^2-s^2+1}$$

である．このとき，$\Phi^1>\Phi^2$，すなわち，

$$\Phi^1=\frac{\beta^1_{t^1}-\alpha^1_{s^1}}{t^1-s^1+1}>\Phi^2=\frac{\beta^2_{t^2}-\alpha^2_{s^2}}{t^2-s^2+1} \tag{5.65}$$

であったと仮定する．背理法で証明するので，この仮定から矛盾を導く．

$\mathbf{V}_{R^1}$ において R^1 の連続区間のうちで密度最小である連続区間が $[s^1..t^1]$ であったので，

$$R^2=R^1-[s^1..t^1] \tag{5.66}$$

に注意すると，$\mathbf{V}_{R^1}$ において連続区間 $[s^2..t^2]\subseteq R^2$ における密度は Φ^1 以上である．従って，

$$\Phi^1=\frac{\beta^1_{t^1}-\alpha^1_{s^1}}{t^1-s^1+1}\leq\frac{\beta^1_{t^2}-\alpha^1_{s^2}}{t^2-s^2+1} \tag{5.67}$$

である．式 (5.65) と式 (5.67) から

$$\frac{\beta^1_{t^2}-\alpha^1_{s^2}}{t^2-s^2+1}\geq\frac{\beta^1_{t^1}-\alpha^1_{s^1}}{t^1-s^1+1}>\frac{\beta^2_{t^2}-\alpha^2_{s^2}}{t^2-s^2+1} \tag{5.68}$$

が得られる．従って，

$$\beta^1_{t^2}-\alpha^1_{s^2}>\beta^2_{t^2}-\alpha^2_{s^2} \tag{5.69}$$

である．また，$[s^2..t^2]\subseteq R^2=R^1-[s^1..t^1]$ かつ連続区間 $[s^1..t^1]\subseteq R^1$ より，(i) $s^2>t^1$，あるいは，(ii) $t^2<s^1$ である．さらに，アルゴリズムのステップ 8 より，

$$V^1_{s^2}=(\alpha^1_{s^2},\beta^1_{s^2}],\quad V^2_{s^2}=(\alpha^2_{s^2},\beta^2_{s^2}]=V^1_{s^2}-(\alpha^1_{s^1},\beta^1_{t^1}],$$

$$V^1_{t^2}=(\alpha^1_{t^2},\beta^1_{t^2}],\quad V^2_{t^2}=(\alpha^2_{t^2},\beta^2_{t^2}]=V^1_{t^2}-(\alpha^1_{s^1},\beta^1_{t^1}]$$

である．従って，(i) $s^2 > t^1$ のときには，$\mathbf{V}_{R^1}$ の順序性より，$\alpha^1_{t^1} \le \alpha^1_{s^2} \le \alpha^1_{t^2}$ かつ $\beta^1_{t^1} \le \beta^1_{s^2} \le \beta^1_{t^2}$ であるので，

$$\alpha^2_{s^2} = \max\{\alpha^1_{s^2}, \beta^1_{t^1}\} \text{ かつ } \beta^2_{s^2} = \beta^1_{s^2}, \quad \alpha^2_{t^2} = \max\{\alpha^1_{t^2}, \beta^1_{t^1}\} \text{ かつ } \beta^2_{t^2} = \beta^1_{t^2}$$

であり，(ii) $t^2 < s^1$ のときには，$\mathbf{V}_{R^1}$ の順序性より，$\alpha^1_{s^2} \le \alpha^1_{t^2} \le \alpha^1_{s^1}$ かつ $\beta^1_{s^2} \le \beta^1_{t^2} \le \beta^1_{s^1}$ であるので，

$$\alpha^2_{s^2} = \alpha^1_{s^2} \text{ かつ } \beta^2_{s^2} = \min\{\beta^1_{s^2}, \alpha^1_{s^1}\}, \quad \alpha^2_{t^2} = \alpha^1_{t^2} \text{ かつ } \beta^2_{t^2} = \min\{\beta^1_{t^2}, \alpha^1_{s^1}\}$$

である．従って，式 (5.69) より，(i) $s^2 > t^1$ のときには，

$$\alpha^2_{s^2} = \beta^1_{t^1} > \alpha^1_{s^2} \text{ かつ } \beta^2_{t^2} = \beta^1_{t^2} \tag{5.70}$$

であり，

$$(\alpha^1_{s^1}, \beta^1_{t^1}] \cap (\alpha^1_{s^2}, \beta^1_{t^2}] = (\alpha^1_{s^2}, \beta^1_{t^1}] \neq \emptyset$$

である．同様に，(ii) $t^2 < s^1$ のときには，

$$\alpha^2_{s^2} = \alpha^1_{s^2} \text{ かつ } \beta^2_{t^2} = \alpha^1_{s^1} < \beta^1_{t^2} \tag{5.71}$$

であり，

$$(\alpha^1_{s^1}, \beta^1_{t^1}] \cap (\alpha^1_{s^2}, \beta^1_{t^2}] = (\alpha^1_{s^1}, \beta^1_{t^2}] \neq \emptyset$$

である．

(i) $s^2 > t^1$ のときには，$[s^1..t^2]$ は R^1 の連続区間であり，

$$\frac{\beta^1_{t^2} - \alpha^1_{s^1}}{t^2 - s^1 + 1} < \frac{\beta^1_{t^1} - \alpha^1_{s^1}}{t^1 - s^1 + 1} = \Phi^1 \tag{5.72}$$

となり，R^1 の連続区間のうちで密度最小である連続区間が $[s^1..t^1]$ であったことに反する．

なお，式 (5.72) は以下のように示せる．

$$\begin{aligned} k_1 &= t^1 - s^1 + 1 = |[s^1..t^1]|, \\ k_2 &= t^2 - s^2 + 1 = |[s^2..t^2]|, \\ k_3 &= s^2 - t^1 - 1 \end{aligned}$$

とする．すると，$k_3 \ge 0$ であり，

$$k_{12} = t^2 - s^1 + 1 = |[s^1..t^2]| = k_1 + k_2 + k_3 \ge k_1 + k_2$$

である．さらに，

$$\begin{aligned} x_1 &= \beta^1_{t^1} - \alpha^1_{s^1}, \\ x^2_2 &= \beta^2_{t^2} - \alpha^2_{s^2} \end{aligned}$$

とする．すると，式 (5.70) より，$\alpha^2_{s^2} = \beta^1_{t^1} > \alpha^1_{s^2}$ かつ $\beta^2_{t^2} = \beta^1_{t^2}$ であるので，

$$x_{12} = \beta^1_{t^2} - \alpha^1_{s^1} = \beta^2_{t^2} - \alpha^2_{s^2} + \beta^1_{t^1} - \alpha^1_{s^1} = x_1 + x^2_2$$

である．さらに，式 (5.65) より

$$\Phi^1 = \frac{\beta^1_{t^1} - \alpha^1_{s^1}}{t^1 - s^1 + 1} = \frac{x_1}{k_1} > \Phi^2 = \frac{\beta^2_{t^2} - \alpha^2_{s^2}}{t^2 - s^2 + 1} = \frac{x^2_2}{k_2}$$

である．従って，

$$x_1 = k_1\Phi^1, \quad x^2_2 = k_2\Phi^2, \quad x_{12} = x_1 + x^2_2 = k_1\Phi^1 + k_2\Phi^2 < (k_1 + k_2)\Phi^1$$

であるので，

$$\frac{\beta^1_{t^2} - \alpha^1_{s^1}}{t^2 - s^1 + 1} = \frac{x_{12}}{k_{12}} = \frac{x_{12}}{k_1 + k_2 + k_3} \leq \frac{x_{12}}{k_1 + k_2} < \frac{(k_1 + k_2)\Phi^1}{k_1 + k_2} = \Phi^1$$

となり，式 (5.72) が得られる．

(ii) $t^2 < s^1$ のときには，$[s^2..t^1]$ は R^1 の連続区間であり，

$$\frac{\beta^1_{t^1} - \alpha^1_{s^2}}{t^1 - s^2 + 1} < \frac{\beta^1_{t^1} - \alpha^1_{s^1}}{t^1 - s^1 + 1} = \Phi^1$$

となる．この不等式は，(i) $s^2 > t^1$ のときの議論とほぼ同じ議論で得られる．従って，R^1 の連続区間のうちで密度最小である連続区間が $[s^1..t^1]$ であったことに反する．

従って，$L = 1$ のときには式 (5.64) が成立することが得られた．

$L = k - 1$ まで式 (5.64) が成立したと仮定する．すなわち，すべての $L \in \{1, 2, \ldots, k - 1\}$ で

$$0 < \Phi^1 \leq \Phi^L \leq \Phi^{L+1} \tag{5.73}$$

が成立したと仮定する．そして，$L = k$ のときを議論する．

そこで，$\Phi^k > \Phi^{k+1}$，すなわち，

$$\Phi^k = \frac{\beta^k_{t^k} - \alpha^k_{s^k}}{t^k - s^k + 1} > \Phi^{k+1} = \frac{\beta^{k+1}_{t^{k+1}} - \alpha^{k+1}_{s^{k+1}}}{t^{k+1} - s^{k+1} + 1} \tag{5.74}$$

であったと仮定する．背理法で証明するので，この仮定から矛盾を導く．議論は $L = 1$ のときとほぼ同様である．

$\mathbf{V}_{R^k}$ において R^k の連続区間のうちで密度最小である連続区間 $[s^k..t^k]$ が除去されて，

$$R^{k+1} = R^k - [s^k..t^k] \tag{5.75}$$

が得られる．$[s^k..t^k]$ を含む R^k の極大な連続区間を $I^k = [i^k..j^k]$ とする．すると，$I^k - [s^k..t^k]$ は $[i^k..s^k - 1]$ と $[t^k + 1..j^k]$ の二つの極大な連続区間からなる．なお，一方が空になることもあるし，$I^k = [s^k..t^k]$ のときには両方とも空になる．

命題 5.7 の記法を以下の議論でも使用する．すべての $L = 1, 2, \ldots, L_{\max}$ で $\mathcal{R}^L$ を R^L の極大な連続区間の集合とする．すなわち，

$$\mathcal{R}^L = \{I \subseteq R^L \mid \ I \text{ は } R^L \text{ の極大な連続区間 } \} \tag{5.76}$$

である．ここでは，$\mathcal{R}^k$ と $\mathcal{R}^{k+1}$ に注目する．$R^{k+1} = \emptyset$ でない限り，$\mathcal{R}^{k+1}$ は，

$$\mathcal{R}^{k+1} = (\mathcal{R}^k - \{I^k\}) \cup \{[i^k..s^k - 1], [t^k + 1..j^k]\}$$

である．命題 5.7 の式 (5.62) より，

$$\bigcup_{I \in \mathcal{R}^{k+1}} I \ \cup \ [s^k..t^k] = R^{k+1} \cup \ [s^k..t^k] = R^k = \bigcup_{J \in \mathcal{R}^k} J \tag{5.77}$$

が成立する．さらに，式 (5.63) より，異なる $I, J \in \mathcal{R}^k$ および任意の $i \in I$ かつ任意の $j \in J$ に対して，

$$I \cap J = \emptyset, \quad V_i^k \cap V_j^k = \emptyset \tag{5.78}$$

が成立する．

ステップ 8 により，任意の $i \in I^k - [s^k..t^k]$ の V_i^{k+1} は

$$V_i^{k+1} = V_i^k - (\alpha_{s^k}, \beta_{t^k}]$$

である．一方，任意の $J^k \in \mathcal{R}^k - \{I^k\}$ の任意の $j \in J^k$ と任意の $i \in I^k$ に対して，式 (5.78) より，

$$V_i^k \cap V_j^k = V_j^k \cap (\alpha_i, \beta_i] = \emptyset$$

であるので，$V_j^k \cap (\alpha_{s^k}, \beta_{t^k}] = \emptyset$ であり，

$$V_j^{k+1} = V_j^k \tag{5.79}$$

である．従って，任意の $J^k \in \mathcal{R}^k - \{I^k\}$ の連続区間 $[s..t]$ における $\mathbf{V}_{R^{k+1}}$ の密度は $\mathbf{V}_{R^k}$ の密度に等しくなり，

$$\frac{\beta_t^{k+1} - \alpha_s^{k+1}}{t - s + 1} = \frac{\beta_t^k - \alpha_s^k}{t - s + 1} \geq \Phi^k = \frac{\beta_{t^k}^k - \alpha_{s^k}^k}{t^k - s^k + 1}$$

をみたす．従って，$\Phi^k > \Phi^{k+1}$ と仮定しているので，$V_{R^{k+1}}$ の最小密度 Φ^{k+1} を達成する連続区間は $[i^k..s^k - 1]$ あるいは $[t^k + 1..j\^{}\,k]$ に含まれる．ここまでくると，残りの議論は $L = 1$ の議論と同様である．$I^k = [i^k..j^k]$ が $L = 1$ の N と R^1 に対応し，$[s^k..t^k]$ が $L = 1$ の $[s^1..t^1]$ に対応し，$[i^k..s^k - 1] \cup [t^k + 1..jk]$ が $L = 1$ の R^2 に対応する．

正確性を期して，上記の対応に基づいて，$L = 1$ の議論に対応する議論を以下にのべることにする．なお，以下の議論では，便宜上，R^k を I^k と，R^{k+1} を $[i^k..s^k - 1] \cup [t^k + 1..j^k]$ と限定して解釈する．

$\mathbf{V}_{R^k}$ において連続区間 $[s^{k+1}..t^{k+1}] \subseteq R^{k+1}$ における密度は Φ^k 以上である．従って，

$$\Phi^k = \frac{\beta_{t^k}^k - \alpha_{s^k}^k}{t^k - s^k + 1} \leq \frac{\beta_{t^{k+1}}^k - \alpha_{s^{k+1}}^k}{t^{k+1} - s^{k+1} + 1} \tag{5.80}$$

である．式 (5.65) と式 (5.80) から

$$\frac{\beta_{t^{k+1}}^k - \alpha_{s^{k+1}}^k}{t^{k+1} - s^{k+1} + 1} \geq \frac{\beta_{t^k}^k - \alpha_{s^k}^k}{t^k - s^k + 1} > \frac{\beta_{t^{k+1}}^{k+1} - \alpha_{s^{k+1}}^{k+1}}{t^{k+1} - s^{k+1} + 1} \tag{5.81}$$

が得られる．従って，

$$\beta_{t^{k+1}}^k - \alpha_{s^{k+1}}^k > \beta_{t^{k+1}}^{k+1} - \alpha_{s^{k+1}}^{k+1} \tag{5.82}$$

である．また，$[s^{k+1}..t^{k+1}] \subseteq R^{k+1} = R^k - [s^k..t^k]$ かつ連続区間 $[s^k..t^k] \subseteq R^k$ より，(i) $s^{k+1} > t^k$，あるいは，(ii) $t^{k+1} < s^k$ である．さらに，アルゴリズムのステップ 8 より，

$$V_{s^{k+1}}^k = (\alpha_{s^{k+1}}^k, \beta_{s^{k+1}}^k], \quad V_{s^{k+1}}^{k+1} = (\alpha_{s^{k+1}}^{k+1}, \beta_{s^{k+1}}^{k+1}] = V_{s^{k+1}}^k - (\alpha_{s^k}^k, \beta_{t^k}^k],$$

$$V^k_{t^{k+1}} = (\alpha^k_{t^{k+1}}, \beta^k_{t^{k+1}}], \quad V^{k+1}_{t^{k+1}} = (\alpha^{k+1}_{t^{k+1}}, \beta^{k+1}_{t^{k+1}}] = V^k_{t^{k+1}} - (\alpha^k_{s^k}, \beta^k_{t^k}]$$

である．従って，(i) $s^{k+1} > t^k$ のときには，$\mathbf{V}_{R^k}$ の順序性より，$\alpha^k_{t^k} \le \alpha^k_{s^{k+1}} \le \alpha^k_{t^{k+1}}$ かつ $\beta^k_{t^k} \le \beta^k_{s^{k+1}} \le \beta^k_{t^{k+1}}$ であるので，

$$\alpha^{k+1}_{s^{k+1}} = \max\{\alpha^k_{s^{k+1}}, \beta^k_{t^k}\} \text{ かつ } \beta^{k+1}_{s^{k+1}} = \beta^k_{s^{k+1}}, \quad \alpha^{k+1}_{t^{k+1}} = \max\{\alpha^k_{t^{k+1}}, \beta^k_{t^k}\} \text{ かつ } \beta^{k+1}_{t^{k+1}} = \beta^k_{t^{k+1}}$$

であり，(ii) $t^{k+1} < s^k$ のときには，$\mathbf{V}_{R^k}$ の順序性より，$\alpha^k_{s^{k+1}} \le \alpha^k_{t^{k+1}} \le \alpha^k_{s^k}$ かつ $\beta^k_{s^{k+1}} \le \beta^k_{t^{k+1}} \le \beta^k_{s^k}$ であるので，

$$\alpha^{k+1}_{s^{k+1}} = \alpha^k_{s^{k+1}} \text{ かつ } \beta^{k+1}_{s^{k+1}} = \min\{\beta^k_{s^{k+1}}, \alpha^k_{s^k}\}, \quad \alpha^{k+1}_{t^{k+1}} = \alpha^k_{t^{k+1}} \text{ かつ } \beta^{k+1}_{t^{k+1}} = \min\{\beta^k_{t^{k+1}}, \alpha^k_{s^k}\}$$

である．従って，式 (5.82) より，(i) $s^{k+1} > t^k$ のときには，

$$\alpha^{k+1}_{s^{k+1}} = \beta^k_{t^k} > \alpha^k_{s^{k+1}} \text{ かつ } \beta^{k+1}_{t^{k+1}} = \beta^k_{t^{k+1}} \tag{5.83}$$

であり，

$$(\alpha^k_{s^k}, \beta^k_{t^k}] \cap (\alpha^k_{s^{k+1}}, \beta^k_{t^{k+1}}] = (\alpha^k_{s^{k+1}}, \beta^k_{t^k}] \ne \emptyset$$

である．同様に，(ii) $t^{k+1} < s^k$ のときには，

$$\alpha^{k+1}_{s^{k+1}} = \alpha^k_{s^{k+1}} \text{ かつ } \beta^{k+1}_{t^{k+1}} = \alpha^k_{s^k} < \beta^k_{t^{k+1}} \tag{5.84}$$

であり，

$$(\alpha^k_{s^k}, \beta^k_{t^k}] \cap (\alpha^k_{s^{k+1}}, \beta^k_{t^{k+1}}] = (\alpha^k_{s^k}, \beta^k_{t^{k+1}}] \ne \emptyset$$

である．

(i) $s^{k+1} > t^k$ のときには，$[s^k..t^{k+1}]$ は R^k の連続区間であり，

$$\frac{\beta^k_{t^{k+1}} - \alpha^k_{s^k}}{t^{k+1} - s^k + 1} < \frac{\beta^k_{t^k} - \alpha^k_{s^k}}{t^k - s^k + 1} = \Phi^k \tag{5.85}$$

となり，R^k の連続区間のうちで密度最小である連続区間が $[s^k..t^k]$ であったことに反する．

なお，式 (5.85) の導出は $L = 1$ のときと同様であるので省略する．

(ii) $t^{k+1} < s^k$ のときには，$[s^{k+1}..t^k]$ は R^k の連続区間であり，

$$\frac{\beta^k_{t^k} - \alpha^k_{s^{k+1}}}{t^k - s^{k+1} + 1} < \frac{\beta^k_{t^k} - \alpha^k_{s^k}}{t^k - s^k + 1} = \Phi^k$$

となる．この不等式は，(i) $s^{k+1} > t^k$ のときの議論とほぼ同じ議論で得られる．従って，R^k の連続区間のうちで密度最小である連続区間が $[s^k..t^k]$ であったことに反する． □

5.4.5 無羨望性の証明

ここでは，無羨望性の証明を行う．この証明は二つに場合わけをして行う．まず補題 5.2 と系 5.3 より，プレイヤー i は $L_j \le L_i$ であるような A_j を羨まないことが保証される．従って，$L_j > L_i$ であるような A_j も羨まないことを示せばよい．これは命題 5.8 で示す．これら二つの命題を組み合わせれば，無羨望性がいえる．これが補題 5.4 にあたる．

命題 5.8 （密閉性）仮定 5.1 をみたす任意の $\mathbf{V}_N$ に対し，アルゴリズム 1 は，$L_i < L_j$ なるすべての $i, j \in N$ に対して

$$V_i^1 \cap V_j^{L_j} = \emptyset$$

をみたす.

証明： $L_i < L_j$ であるので，アルゴリズム 1 のステップ 8 より，$V_j^{L_j} \subseteq V_j^{L_i+1}$ が成立する．従って，命題を示すためには

$$V_i^1 \cap V_j^{L_i+1} = \emptyset \tag{5.86}$$

であることをいえばよい.

$L \leq L_i$ に関する帰納法で示す．そのためにまず，基底として，$L = L_i$ のときの

$$V_i^{L_i} \cap V_j^{L_i+1} = \emptyset$$

を示す．仮定より $s^{L_i} \leq i \leq t^{L_i}$ である．従って，命題 5.1 より任意の L で順序性が成り立つことから，$\alpha_{s^{L_i}}^{L_i} \leq \alpha_i^{L_i} \leq \beta_i^{L_i} \leq \beta_{t^{L_i}}^{L_i}$ である．従って，L_i 回目の While ループにおけるアルゴリズム 1 のステップ 8 を考えると，

$$V_j^{L_i+1} = V_j^{L_i} - (\alpha_{s^{L_i}}^{L_i}, \beta_{t^{L_i}}^{L_i}] \subseteq V_j^{L_i} - V_i^{L_i}$$

であることから，

$$V_i^{L_i} \cap V_j^{L_i+1} = \emptyset$$

である．これにより，$L = L_i$ のとき，命題が正しいことを示せた.

次に帰納法の仮定として，$2 \leq L = k \leq L_i$ に対し，

$$V_i^k \cap V_j^{L_i+1} = \emptyset$$

が成立したと仮定し，$L = k-1$ のときも成立することを示す.

$k-1 < L_i < L_j$ であることに注意すれば，$k-1$ 回目の While ループにおけるアルゴリズム 1 のステップ 8 が j に対して実行される．すなわち，

$$V_j^k = V_j^{k-1} - (\alpha_{s^{k-1}}^{k-1}, \beta_{t^{k-1}}^{k-1}]$$

である．従って，

$$V_j^k \cap (\alpha_{s^{k-1}}^{k-1}, \beta_{t^{k-1}}^{k-1}] = \emptyset$$

が成立する．さらに $k \leq L_i$ であることを考慮すれば，アルゴリズム 1 のステップ 8 より，$V_j^{L_i} \subseteq V_j^k$ であるから，

$$V_j^{L_i+1} \cap (\alpha_{s^{k-1}}^{k-1}, \beta_{t^{k-1}}^{k-1}] \subseteq V_j^{L_i} \cap (\alpha_{s^{k-1}}^{k-1}, \beta_{t^{k-1}}^{k-1}] \subseteq V_j^k \cap (\alpha_{s^{k-1}}^{k-1}, \beta_{t^{k-1}}^{k-1}] = \emptyset \tag{5.87}$$

が成立する．同様に，プレイヤー i に対しても

$$V_i^k = V_i^{k-1} - (\alpha_{s^{k-1}}^{k-1}, \beta_{t^{k-1}}^{k-1}]$$

が成立する．従って，

$$V_i^{k-1} \subseteq V_i^k \cup (\alpha_{s^{k-1}}^{k-1}, \beta_{t^{k-1}}^{k-1}] \tag{5.88}$$

であるので，式 (5.87), (5.88) および帰納法の仮定より

$$V_i^{k-1} \cap V_j^{L_i+1} \subseteq (V_i^k \cap V_j^{L_i+1}) \cup ((\alpha_{s^{k-1}}^{k-1}, \beta_{t^{k-1}}^{k-1}] \cap V_j^{L_i+1}) = V_i^k \cap V_j^{L_i+1} = \emptyset$$

が成り立つ． □

補題 5.4 （無羨望性）仮定 5.1 をみたす任意の $\mathbf{V}_N$ に対し，アルゴリズム 1 は無羨望性をみたす．

証明： 系 5.1 より，$U_i(A_i^{L_i}) = \psi(V_i^1 \cap A_i^{L_i})$ である．このとき，無羨望性を証明するために (i) $L_i \geq L_j$ のときと (ii) $L_i < L_j$ のときの二つに場合分けをして証明を進める．

(i) $L_i \geq L_j$ のとき．$V_i^{L_i} \subseteq V_i^1$ であることに注意すれば，補題 5.2 より $A_i^{L_i} \subseteq V_i^{L_i}$ であるので，

$$\psi(A_i^{L_i}) = \psi(V_i^{L_i} \cap A_i^{L_i}) = \psi(V_i^1 \cap A_i^{L_i}) = U_i(A_i^{L_i})$$

が成立する．さらに，系 5.3 より，

$$\psi(A_i^{L_i}) \geq \psi(A_j^{L_j})$$

であり，かつ $V_i^1 \cap A_j^{L_j} \subseteq A_j^{L_j}$ であるから

$$U_i(A_i^{L_i}) \geq \psi(A_i^{L_i}) \geq \psi(A_j^{L_j}) \geq \psi(V_i^1 \cap A_j^{L_j}) = U_i(A_j^{L_j}) \tag{5.89}$$

が成立する．この式は，$L_i \geq L_j$ であればプレイヤー i はプレイヤー j の割当を羨まないことを意味する．

(ii) $L_i < L_j$ のとき．命題 5.8 より，$V_i^1 \cap V_j^{L_j} = \emptyset$ であるので，

$$\psi(V_i^1 \cap V_j^{L_j}) = 0$$

が成立する．さらに，補題 5.2 より，$A_j^{L_j} \subseteq V_j^{L_j}$ であるから，

$$U_i(A_j^{L_j}) = \psi(V_i^1 \cap A_j^{L_j}) \leq \psi(V_i^1 \cap V_j^{L_j}) = 0 \leq U_i(A_i^{L_i}) \tag{5.90}$$

が成立する．この式は，$L_i < L_j$ あればプレイヤー i はプレイヤー j の割当を羨まないことを意味する．

従って，式 (5.89), (5.90) より，アルゴリズム 1 は無羨望性をもつ． □

5.4.6 カット数の最小性・最適性の証明

ここでは，カット数の最小性および最適性を証明する．これらの証明には割当ベクトルが完全である，ということが重要になる．これはすでに補題 5.3 にて証明している．そのため，無羨望性と比べてこれらの二つの 2 性質の証明は簡単に行うことができる．

補題 5.5 （カット数の最小性）仮定 5.1 をみたす任意の $\mathbf{V}_N$ に対し，アルゴリズム 1 はカット数の最小性をもつ．

証明： 補題 5.3 より，アルゴリズム 1 は，完全な割当を返す．また命題 5.5 より割当は単一の半開区間であるから

$$\sum_{i \in N} |A_i| = n$$

である．従って，

$$\mathrm{CUT} = \sum_{i \in N} |A_i| - 1 = n - 1$$

が成立する． □

補題 5.6 （最適性）仮定 5.1 をみたす任意の $\mathbf{V}_N$ に対し，アルゴリズム 1 は最適性をもつ．

証明： 補題 5.2 より，

$$\sum_{i \in N} U_i(A_i^{L_i}) = \sum_{i \in N} \psi(A_i^{L_i}) = \sum_{i \in N} \psi(A_i)$$

である．また，割当は完全であるから，

$$\sum_{i \in N} U_i(A_i^{L_i}) = \sum_{i \in N} \psi(A_i) = \psi((0,1]) = \psi(C)$$

である． □

5.4.7 戦略的操作不可能性の証明

本項では，アルゴリズム 1 の戦略的操作不可能性について議論する．式 (6.3) の

$$\mathbf{V}_{N-i} = (V_1, \ldots, V_{i-1}, V_{i+1}, \ldots, V_n)$$

と式 (6.4) の

$$\mathbf{V}_{i,N-i} = (V_i', \mathbf{V}_{N-j}) = (V_1, \ldots, V_{i-1}, V_i', V_{i+1}, \ldots, V_n)$$

を用いて定義 6.6 でものべたように，仮定 5.1 をみたす任意の評価区間集合 $\mathbf{V}_N$ において，どのプレイヤー $j \in N$ に対しても（ここでは式 (6.3) の i の代わりに j を用いている），j のみが評価 $V_j = (\alpha_j, \beta_j]$ をどのような $W_j = (\alpha_j', \beta_j']$ に変えたとしても得られる評価集合

$$\mathbf{W}_{j,N-j} = (W_j, \mathbf{V}_{N-j}) = (V_1, \ldots, V_{j-1}, W_j, V_{j+1}, \ldots, V_n) \tag{5.91}$$

が仮定 5.1 をみたす限り，変更後の割当ベクトル $\mathbf{A}(\mathbf{W}_{j,N-j})$ における自分の $A_j(\mathbf{W}_{j,N-j})$ の効用 $U_j(A_j(\mathbf{W}_{j,N-j}))$ が，もとの割当ベクトル $\mathbf{A}(\mathbf{V}_N)$ における自分の $A_j(\mathbf{V}_N)$ の効用 $U_j(A_j(\mathbf{V}_N))$ より真に大きくなることがないとき，戦略的操作不可能性をもつという．すなわち，どのプレイヤー $j \in N$ も，真の評価をアルゴリズムに申告する限り，効用が小さくなることがないとき，アルゴリズムは戦略的操作不可能性をもつ．

アルゴリズム 1 の戦略的操作不可能性を示すために，仮定 5.1 をみたす各 $i \in N$ の

$$V_i = (\alpha_i, \beta_i] \tag{5.92}$$

からなる $\mathbf{V}_N = (V_1, \ldots, V_{j-1}, V_j, V_{j+1}, \ldots, V_n)$ に対して，

$$W_i = \begin{cases} V_i & (i \in N - \{j\} \text{ のとき}), \\ (\alpha'_j, \beta'_j] & (i = j \text{ のとき}) \end{cases} \tag{5.93}$$

である式 (5.91) の $\mathbf{W}_{j,N-j}$ を簡略化して $\mathbf{W}_N$ と表記する．すなわち，

$$\mathbf{W}_N = (W_j, \mathbf{V}_{N-j}) = (W_1, \ldots, W_{j-1}, W_j, W_{j+1}, \ldots, W_n) \tag{5.94}$$

である．$\mathbf{V}_N$ と $\mathbf{W}_N$ は以下の仮定をみたすものとする．繰り返しになるが，$\mathbf{V}_N$ と $\mathbf{W}_N$ で異なるのは V_j と W_j のみであるので，$\mathbf{V}_{N-j} = \mathbf{W}_{N-j}$ である．

この $\mathbf{W}_N$ であるが，一般性を失うことなく，仮定 5.1 をみたすと仮定できる．まず，非零性は，$\psi(W_j) > 0$ であればよい．また，被覆性に関しては，誰も欲しがらない部分を除けばよい．順序性については，$\alpha_j < \alpha_i$ かつ $\beta_j > \beta_i$ となる $W_i = (\alpha_i, \beta_i]$ を考える．このような W_i の中で，最も小さい β の値を $\beta_i^{\min}$ とおく．このとき，β_j を $\min\{\beta_j, \beta_i^{\min}\}$ へ更新すれば $\mathbf{W}_N$ が順序性をみたすようにできる．以上の議論より，$\mathbf{W}_N$ は以下の仮定をみたすとする．

仮定 5.2 プレイヤー集合 $N = \{1, 2, \ldots n\}$ の式 (5.92) で定義される各 $i \in N$ の評価区間 $V_i = (\alpha_i, \beta_i]$ からなる評価区間集合 $\mathbf{V}_N$ と式 (5.93) で定義される各 $i \in N$ の評価区間 W_i からなる式 (5.94) の $\mathbf{W}_N$ は以下の性質をみたす．

1. （非零性）各 $i \in N - \{j\}$ の評価区間 $V_i = W_i = (\alpha_i, \beta_i] \in \mathbf{V}_{N-j} = \mathbf{W}_{N-j}$ の大きさ $\psi(V_i) = \psi(W_i)$ および評価区間 $V_j = (\alpha_j, \beta_j]$，$W_j = (\alpha'_j, \beta'_j]$ の大きさは正である．すなわち，すべての $i \in N - \{j\}$ で $\psi(V_i) = \psi(W_i) = \beta_i - \alpha_i > 0$ であり，$\psi(V_j) = \beta_j - \alpha_j > 0$，$\psi(W_j) = \beta'_j - \alpha'_j > 0$ である．

2. （被覆性）$\mathbf{V}_N$ と $\mathbf{W}_N$ のそれぞれにおいて，すべての評価区間の和集合はケーキ全体に一致する．すなわち，

$$\bigcup_{i \in N} V_i = \bigcup_{i \in N} (\alpha_i, \beta_i] = (0, 1], \quad \bigcup_{i \in N} W_i = \left(\bigcup_{i \in N - \{j\}} (\alpha_i, \beta_i] \right) \cup (\alpha'_j, \beta'_j] = (0, 1]$$

である．

3. （順序性）任意の異なる $i, i' \in N$ に対して，$\alpha_i < \alpha_{i'}$ ならば $\beta_i \leq \beta_{i'}$ である．

さらに，評価区間 $V_i = (\alpha_i, \beta_i]$ の集合 $\mathbf{V}_N = \{V_i = (\alpha_i, \beta_i] \mid i \in N\}$ は，各 $V_i = (\alpha_i, \beta_i]$ を 2 次元 (α, β)-平面上の点 (α_i, β_i) と見なして，辞書式順 $\preceq$ でソートされているとする．すなわち，$i < i'$ ならば $(\alpha_i, \beta_i] \preceq (\alpha_{i'}, \beta_{i'}]$ （すなわち（$\alpha_i < \alpha_{i'}$）あるいは（$\alpha_i = \alpha_{i'}$ かつ $\beta_i < \beta_{i'}$））である．さらに，

$$V_{j-1} = W_{j-1} = (\alpha_{j-1}, \beta_{j-1}] \preceq W_j = (\alpha'_j, \beta'_j] \preceq V_{j+1} = W_{j+1} = (\alpha_{j+1}, \beta_{j+1}]$$

である．すなわち，$\alpha_{j-1} \leq \alpha'_j \leq \alpha_{j+1}$ かつ $\beta_{j-1} \leq \beta'_j \leq \beta_{j+1}$ である（従って，$\mathbf{W}_N = \{W_i \mid i \in N\}$ も同じ辞書式順 $\preceq$ でソートされている）． □

仮定 5.2 をみたす $\mathbf{V}_N$ は仮定 5.1 をみたすことに注意しよう．同様に，$\mathbf{V}_N \leftarrow \mathbf{W}_N$ としたときの $\mathbf{V}_N$ も仮定 5.1 をみたす．上記の仮定 5.2 をみたす $\mathbf{V}_N$ と $\mathbf{W}_N$ に対して，入力を $\mathbf{V}_N$ としてアルゴリズム 1 を走らせたときと，入力を $\mathbf{W}_N$ としてアルゴリズム 1 を走らせたときの動作を比較する．比較をわかりやすくするために，入力を $\mathbf{W}_N$ としてアルゴリズム 1 を走らせたときのアルゴリズムを，アルゴリズム 2 として以下に与えておく，

アルゴリズム 2 EFISM$(N, \mathbf{W}_N)$	
0.	$\mathbf{W}_N = \{W_i \mid i \in N\}$ は仮定 5.2 をみたすとする；
1.	$R \leftarrow N$ ；　$W'_j \leftarrow W_j = (\alpha'_j, \beta'_j]$ ；
2.	For each $i \in R - \{j\}$ do　$W'_i = (\alpha'_i, \beta'_i] \leftarrow W_i = V_i = (\alpha_i, \beta_i]$ ；
3.	While $R \neq \emptyset$ do
4.	$[s..t] \leftarrow \displaystyle\operatorname*{argmin}_{\{[x..y] \subseteq R \mid x \leq y\}} \left\{ \frac{\beta'_y - \alpha'_x}{y - x + 1} \right\}$;
5.	$\Phi \leftarrow \dfrac{\beta'_t - \alpha'_s}{t - s + 1}$;
6.	For $i = s$ to t do　$A_i \leftarrow (\alpha'_s + (i - s)\Phi, \alpha'_s + (i - s + 1)\Phi]$;
7.	$R \leftarrow R - [s..t]$;
8.	For each $i \in R$ do　$W'_i \leftarrow W'_i - (\alpha'_s, \beta'_t]$;　$(\alpha'_i, \beta'_i] \leftarrow W'_i$;
9.	return $\mathbf{A} = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$;

このアルゴリズム 2 は，アルゴリズム 1 に対して，本質的には V'_i を W'_i に単に置き換えただけである．

後述の命題 5.9 において，プレイヤー $j \in N$ が自分の評価区間 V_j を W_j に偽ったとしても，アルゴリズム 2 の途中までは，(W'_i と V'_i を同一視すれば）アルゴリズム 1 と同等に動くことを示す．命題 5.10 においては，そのプレイヤー j を除いたときの等価性を示す．命題 5.11 と命題 5.12 では密度に関してのべ，命題 5.13 および補題 5.7 において，戦略的操作不可能性を証明する．

5.4 節のアルゴリズム 1 に対する 5.4.2 項で用いた証明のための記法を，ここでもアルゴリズム 2 に対する記法として用いる．ただし，混乱を避けるために，必要に応じて，アルゴリズム 1 におけるステップ 3 の While 文の反復回数 $L_{\max}$ を $L^V_{\max}$ とし，アルゴリズム 2 におけるステップ 3 の While 文の反復回数 $L_{\max}$ を $L^W_{\max}$ として区別する．他の記法についても同様である．たとえば，アルゴリズム 2 に対する記法として以下の記法を用いる．

R^L_W：ステップ 3 の L 回目の While ループの開始時点における集合 R

$W^L_i = (\alpha^L_i, \beta^L_i]$：ステップ 3 の While ループ L 回目開始時点における $W'_i = [\alpha'{}_i, \beta'{}_i]$

s^L_W, t^L_W： L 回目の While ループのステップ 4 で得られた s, t.

Φ^L_W：L 回目の While ループのステップ 5 で得られた Φ.

L^W_i：プレイヤー $i \in N$ への割当 A_i が確定するのは L^W_i 回目の While ループ.

A^W_i： ステップ 3 の L^W_i 回目の While ループのステップ 6 で A_i が確定する割当.

入力を $\mathbf{V}_N$ としてアルゴリズム 1 を走らせたときのアルゴリズム 1 に対する記法も以下に与えておく.

R_V^L：ステップ 3 の L 回目の While ループの開始時点における集合 R

$V_i^L = (\alpha_i^L, \beta_i^L]$：ステップ 3 の While ループ L 回目開始時点における $V_i' = [\alpha'{}_i, \beta'{}_i]$

s_V^L, t_V^L： L 回目の While ループのステップ 4 で得られた s, t.

Φ_V^L：L 回目の While ループのステップ 5 で得られた Φ.

L_i^V：プレイヤー $i \in N$ への割当 A_i が確定するのは L_i^V 回目の While ループ.

A_i^V： ステップ 3 の L_i^V 回目の While ループのステップ 6 で A_i が確定する割当.

命題 5.9 アルゴリズム 2 は，すべての $L \leq L_{\min} = \min\{L_j^W, L_j^V\}$ に対して，L 回目の While ループの開始時点で，

$$W_i^L \quad = \quad V_i^L \quad (i \in N - \{j\}), \tag{5.95}$$

$$R_W^L \quad = \quad R_V^L \tag{5.96}$$

をみたす．さらに，すべての $L \leq L_{\min} - 1 = \min\{L_j^W, L_j^V\} - 1$ に対して，L 回目の While ループ終了時点で，

$$[s_W^L..t_W^L] \quad = \quad [s_V^L..t_V^L] \tag{5.97}$$

をみたす.

証明: 命題が正しいことを L に関する帰納法で示す．まず $L = 1$ のときを考える．任意の $i \in N - \{j\}$ において $W_i = V_i$ に対してアルゴリズムは何も操作をしていないため，

$$W_i = W_i^1 = V_i^1 = V_i$$

が成り立つ．さらに，N に関しても，アルゴリズムは何の操作もしていないため，

$$R_W^1 = R_V^1 = N$$

が成立する．$L_{\min} = 1$ のときはこれで終了である.

以下では，$L_{\min} \geq 2$ であるときを議論する．まず，$L = 1 \leq L_{\min} - 1$ のときの式 (5.97) の

$$[s_W^1..t_W^1] = [s_V^1..t_V^1]$$

を示す．$L_{\min} = \min\{L_j^W, L_j^V\} \geq 2$ でありプレイヤー j への割当 A_j は 2 回目以降の While ループで割り当てられるので，1 回目の While ループのステップ 4 で得られた $[s..t]$ では，$j \notin [s_W^1..t_W^1]$ かつ $j \notin [s_V^1..t_V^1]$ である．なお，$j \notin [x..y]$ の $N = R_W^1 = R_V^1$ における連続区間 $[x..y]$ は，$N - \{j\} = R_W^1 - \{j\} = R_V^1 - \{j\}$ における連続区間でもある．従って，

$$[s_W^1..t_W^1] = \operatorname*{argmin}_{\{[x..y] \subseteq R_W^1 - \{j\} | x \leq y\}} \left\{ \frac{\beta_y' - \alpha_x'}{y - x + 1} \right\} = \operatorname*{argmin}_{\{[x..y] \subseteq R_W^1 | x \leq y\}} \left\{ \frac{\beta_y' - \alpha_x'}{y - x + 1} \right\},$$

$$[s_V^1..t_V^1] = \mathop{\mathrm{argmin}}_{\{[x..y]\subseteq R_V^1-\{j\}|x\le y\}} \left\{ \frac{\beta'_y-\alpha'_x}{y-x+1} \right\} = \mathop{\mathrm{argmin}}_{\{[x..y]\subseteq R_V^1|x\le y\}} \left\{ \frac{\beta'_y-\alpha'_x}{y-x+1} \right\}$$

となる．さらに，$R_W^1 = R_V^1$ であるので，

$$[s_W^1..t_W^1] = [s_V^1..t_V^1]$$

が得られる．

従って，$L_{\min} \ge 2$ かつ $L = 1$ のときには命題が成立することが得られた．

次に，$L = k < L_{\min} = \min\{L_j^W, L_j^V\}$ のとき命題が成立したと仮定する．すなわち

$$W_i^k = V_i^k, \quad (i \in N - \{j\}), \quad R_W^k = R_V^k, \quad [s_W^k..t_W^k] = [s_V^k..t_V^k]$$

が成り立つとする．このとき $L = k+1$ を考える．

帰納法の仮定より，$\mathbf{W}^k = (W_1^k, W_2^k, \ldots, W_n^k)$ と $\mathbf{V}^k = (V_1^k, V_2^k, \ldots, V_n^k)$ を比較して異なるのは，$W_j{}^k$ と V_j^k のみであることに注意する．帰納法の仮定から $R_W^k = R_V^k$ および $[s_V^k..t_V^k] = [s_W^k..t_W^k]$ が成り立つので，

$$R_V^{k+1} = R_V^k - [s_V^k..t_V^k] = R_W^k - [s_W^k..t_W^k] = R_W^{k+1}$$

が成立する．また W と V に関しても，帰納法の仮定より，すべての $i \in N - \{j\}$ で $W_i^k = V_i^k$ でありかつ $j \notin [s_W^k..t_W^k] = [s_V^k..t_V^k]$ であることから

$$(\alpha_{s_V^k}^k, \beta_{t_V^k}^k] = (\alpha_{s_W^k}^k, \beta_{t_W^k}^k]$$

が成立することに注意すれば，すべての $i \in N - \{j\}$ で

$$V_i^{k+1} = V_i^k - (\alpha_{s_V^k}^k, \beta_{t_V^k}^k] = W_i^k - (\alpha_{s_W^k}^k, \beta_{t_W^k}^k] = W_i^{k+1}$$

であることが得られる．

さらに，$k+1 < L_{\min} = \min\{L_i^W, L_i^V\}$ のときには，$L = 1$ のときの $[s_W^1..t_W^1] = [s_V^1..t_V^1]$ に対する上記の議論と同様に，プレイヤー j への割当 A_j は $k+2$ 回目以降の While ループで割り当てられるので，

$$j \notin [s_W^{k+1}..t_W^{k+1}] = \mathop{\mathrm{argmin}}_{\{[x..y]\subseteq R_W^{k+1}|x\le y\}} \left\{ \frac{\beta'_y-\alpha'_x}{y-x+1} \right\} = \mathop{\mathrm{argmin}}_{\{[x..y]\subseteq R_W^{k+1}-\{j\}|x\le y\}} \left\{ \frac{\beta'_y-\alpha'_x}{y-x+1} \right\}$$

かつ

$$j \notin [s_V^{k+1}..t_V^{k+1}] = \mathop{\mathrm{argmin}}_{\{[x..y]\subseteq R_V^{k+1}|x\le y\}} \left\{ \frac{\beta'_y-\alpha'_x}{y-x+1} \right\} = \mathop{\mathrm{argmin}}_{\{[x..y]\subseteq R_V^{k+1}-\{j\}|x\le y\}} \left\{ \frac{\beta'_y-\alpha'_x}{y-x+1} \right\}$$

が成立する．従って，上記の $R_W^{k+1} = R_V^{k+1}$ より

$$[s_W^{k+1}..t_W^{k+1}] = [s_V^{k+1}..t_V^{k+1}]$$

が得られる． □

命題 5.10 $\mathbf{W}_N$ から W_j がなかったものとして $\mathbf{W}_{N-j}=\mathbf{W}_N-\{W_j\}=\mathbf{V}_N-\{V_j\}=\mathbf{V}_{N-j}=(V_1,\ldots,V_{j-1},V_{j+1},\ldots,V_n)$ を入力としたときのアルゴリズム 2 は，すべての $L\le L_j^V$ に対して，L 回目の While ループの開始時点で，

$$\begin{aligned} W_i^L &= V_i^L, \quad (i\in N-\{j\}), \\ R_W^L &= R_V^L-\{j\} \end{aligned}$$

をみたす．さらに，すべての $L\le L_j^V-1$ に対して，L 回目の While ループの終了時点で，

$$[s_W^L..t_W^L]=[s_V^L..t_V^L]$$

をみたす．

（注意：V に関するものはアルゴリズム 1 の入力 $\mathbf{V}_N$ に対するものであり，W に関するものはアルゴリズム 2 の入力 $\mathbf{W}_{N-j}$ に対するものである．）

証明： L に関する帰納法で示す．まず $L=1$ のときを考える．$L=1$ 回目の While ループですべての $i\in N-\{j\}$ において，$W_i=V_i$ に対してアルゴリズムは何も操作をしていないため，

$$W_i^1=W_i=V_i=V_i^1$$

が成り立つ．さらに，$N-\{j\}$ に関しても，アルゴリズムは何の操作もしていないため，

$$R_W^1=N-\{j\}=R_V^1-\{j\}$$

が成立する．$L_j^V=1$ のときはこれで終了である．

以下では，$L_j^V\ge 2$ であるときを議論する．まず，$L=1$ のときの

$$[s_W^1..t_W^1]=[s_V^1..t_V^1]$$

を示す．$L_j^V\ge 2$ でありアルゴリズム 1 での入力 $\mathbf{V}_N$ におけるプレイヤー j への割当 A_j は 2 回目以降の While ループで割り当てられるので，1 回目の While ループのステップ 4 で得られた $[s..t]$ では，$j\notin[s_V^1..t_V^1]$ である．なお，$j\notin[x..y]$ の N における連続区間 $[x..y]$ は，$N-\{j\}=R_V^1-\{j\}$ における連続区間でもある．従って，

$$[s_V^1..t_V^1]=\operatorname*{argmin}_{\{[x..y]\subseteq R_V^1-\{j\}\mid x\le y\}}\left\{\frac{\beta'_y-\alpha'_x}{y-x+1}\right\}=\operatorname*{argmin}_{\{[x..y]\subseteq R_V^1\mid x\le y\}}\left\{\frac{\beta'_y-\alpha'_x}{y-x+1}\right\} \tag{5.98}$$

となる．ここで，$j\in[x..y]=\{x,\ldots,j-1,j,j+1,\ldots,y\}\subseteq N$ に対して，

$$[x..y]_{-j}=\{x,\ldots,j-1,j+1,\ldots,y\}$$

とする．すると，この $[x..y]$ は $N=R_V^1$ における連続区間であり，$[x..y]_{-j}$ は $N-\{j\}=R_W^1$ における連続区間である．このとき，$N=R_V^1$ における連続区間 $[x..y]$ の密度 $\left\{\frac{\beta'_y-\alpha'_x}{y-x+1}\right\}$ と $N-\{j\}=R_W^1$ における連続区間 $[x..y]_{-j}$ の密度 $\left\{\frac{\beta'_y-\alpha'_x}{y-x}\right\}$ とでは $N-\{j\}=R_W^1$ における連続区間 $[x..y]_{-j}$ の密度 $\left\{\frac{\beta'_y-\alpha'_x}{y-x}\right\}$ が $N=R_V^1$ における連続区間 $[x..y]$ の密度 $\left\{\frac{\beta'_y-\alpha'_x}{y-x+1}\right\}$ より大きい．さらに，$j\notin[x..y]$

の $N = R_V^1$ における連続区間 $[x..y]$ は，$N - \{j\} = R_W^1$ における連続区間 $[x..y]$ でもあるので，両者の密度は等しくなる．従って，

$$\min_{\{[x..y]\subseteq R_W^1 | x\leq y\}} \left\{ \frac{\beta'_y - \alpha'_x}{y - x + 1} \right\} \geq \min_{\{[x..y]\subseteq R_V^1 | x\leq y\}} \left\{ \frac{\beta'_y - \alpha'_x}{y - x + 1} \right\} \tag{5.99}$$

が成立する．さらに，式 (5.98) から

$$\min_{\{[x..y]\subseteq R_V^1 | x\leq y\}} \left\{ \frac{\beta'_y - \alpha'_x}{y - x + 1} \right\} = \min_{\{[x..y]\subseteq R_V^1 - \{j\} | x\leq y\}} \left\{ \frac{\beta'_y - \alpha'_x}{y - x + 1} \right\}$$

であり，この最小値を実現する連続区間 $[s_V^1..t_V^1]$ が $j \notin [s_V^1..t_V^1]$ であるので，

$$\min_{\{[x..y]\subseteq R_W^1 | x\leq y\}} \left\{ \frac{\beta'_y - \alpha'_x}{y - x + 1} \right\} \geq \min_{\{[x..y]\subseteq R_V^1 | x\leq y\}} \left\{ \frac{\beta'_y - \alpha'_x}{y - x + 1} \right\} = \left\{ \frac{\beta'_{t_V^1} - \alpha'_{s_V^1}}{t_V^1 - s_V^1 + 1} \right\} \tag{5.100}$$

が得られる．さらに，$[s_V^1..t_V^1]$ は $N - \{j\} = R_W^1$ における連続区間であるので，

$$\min_{\{[x..y]\subseteq R_W^1 | x\leq y\}} \left\{ \frac{\beta'_y - \alpha'_x}{y - x + 1} \right\} = \left\{ \frac{\beta'_{t_V^1} - \alpha'_{s_V^1}}{t_V^1 - s_V^1 + 1} \right\} \tag{5.101}$$

が得られる．従って，

$$[s_W^1..t_W^1] = \operatorname*{argmin}_{\{[x..y]\subseteq R_W^1 | x\leq y\}} \left\{ \frac{\beta'_y - \alpha'_x}{y - x + 1} \right\} = [s_V^1..t_V^1]$$

となり，

$$[s_W^1..t_W^1] = [s_V^1..t_V^1]$$

が得られる．従って，$L = 1$ では命題が成立することが得られた．

次に，帰納的ステップとして，$L = k < L_j^V$ のとき命題が成立したと仮定する．すなわち

$$\begin{aligned} W_i^k &= V_i^k, \qquad (i \in N - \{j\}), \\ R_W^k &= R_V^k - \{j\}, \end{aligned}$$

$$[s_V^k..t_V^k] = [s_W^k..t_W^k] \tag{5.102}$$

が成り立つとする．そして $L = k + 1$ のときを考える．

帰納法の仮定より，$\mathbf{V}^k = (V_1^k, V_2^k, \ldots, V_n^k)$ と $\mathbf{W}_{N-j}^k = (W_1^k, \ldots, W_{j-1}^k, W_{j+1}^k, \ldots, W_n^k) = (V_1^k, \ldots, V_{j-1}^k, V_{j+1}^k, \ldots, V_n^k) = \mathbf{V}_{N-j}^k$ を比較して異なるのは，V_j^k が存在するか否かだけである．従って，式 (5.102) および帰納法の仮定より

$$R_W^{k+1} = R_W^k - [s_W^k..t_W^k] = R_V^k - [s_V^k..t_V^k] = R_V^{k+1}$$

が成立する．また V と W に関しても，帰納法の仮定のすべての $i \in N - \{j\}$ で $W_i^k = V_i^k$ であることおよび式 (5.102) より，

$$(\alpha_{s_V^k}^k, \beta_{t_V^k}^k] = (\alpha_{s_W^k}^k, \beta_{t_W^k}^k]$$

が成立することに注意すれば，

$$W_i^{k+1} = W_i^k - (\alpha^k_{s^k_W}, \beta^k_{t^k_W}] = V_i^k - (\alpha^k_{s^k_V}, \beta^k_{t^k_V}] = V_i^{k+1}$$

が成立する．

さらに，$k+1 < L_j^V$ のときには，$L=1$ のときの $[s^1_W..t^1_W] = [s^1_V..t^1_V]$ に対する上記の議論と同様に，アルゴリズム 1 での入力 $\mathbf{V}_N$ におけるプレイヤー j への割当 A_j は $k+2$ 回目以降の While ループで割り当てられるので，$j \notin [s^{k+1}_V..t^{k+1}_V]$ である．従って，

$$[s^{k+1}_V..t^{k+1}_V] = \underset{\{[x..y] \subseteq R^{k+1}_V - \{j\} | x \leq y\}}{\operatorname{argmin}} \left\{ \frac{\beta'_y - \alpha'_x}{y - x + 1} \right\}$$

となる．さらに，

$$[s^{k+1}_W..t^{k+1}_W] = \underset{\{[x..y] \subseteq R^{k+1}_W | x \leq y\}}{\operatorname{argmin}} \left\{ \frac{\beta'_y - \alpha'_x}{y - x + 1} \right\} = \underset{\{[x..y] \subseteq R^{k+1}_W - \{j\} | x \leq y\}}{\operatorname{argmin}} \left\{ \frac{\beta'_y - \alpha'_x}{y - x + 1} \right\}$$

かつ $j \notin R^{k+1}_W = R^{k+1}_V - \{j\}$ であるので，

$$[s^{k+1}_W..t^{k+1}_W] = [s^{k+1}_V..t^{k+1}_V]$$

が得られる．

従って，$L = k+1$ でも命題が成立することが得られた． □

命題 5.11 $\mathbf{W}_N$ から W_j がなかったものとして $\mathbf{W}_{N-j} = \mathbf{W}_N - \{W_j\} = \mathbf{V}_N - \{V_j\} = \mathbf{V}_{N-j} = (V_1, \ldots, V_{j-1}, V_{j+1}, \ldots, V_n)$ を入力としたときのアルゴリズム 2 は，すべての $L < L_j^V$ に対して，L 回目の While ループの終了時点で，

$$\Phi^L_W = \Phi^L_V$$

をみたす．

（注意 : V に関するものはアルゴリズム 1 の入力 $\mathbf{V}_N$ に対するものであり，W に関するものはアルゴリズム 2 の入力 $\mathbf{W}_{N-j}$ に対するものである.）

証明： 仮定より，$L < L_j^V$ であることに注意する．すると，命題 5.10 より，

$$\begin{aligned} W_i^L &= V_i^L, \quad (i \in N - \{j\}), \\ R^L_W &= R^L_V - \{j\} \end{aligned}$$

が成立する．さらに，$L < L_j^V$ から L 回目の While ループの終了時点で，

$$j \notin [s^L_W..t^L_W] = [s^L_V..t^L_V]$$

をみたす．従って，

$$\Phi^L_W = \frac{\beta_{t^L_W} - \alpha_{s^L_W}}{t^L_W - s^L_W + 1} = \frac{\beta_{t^L_V} - \alpha_{s^L_V}}{t^L_V - s^L_V + 1} = \Phi^L_V$$

が成立する． □

命題 5.12 $\mathbf{W}_N$ から W_j がなかったものとして $\mathbf{W}_{N-j}=\mathbf{W}_N-\{W_j\}=\mathbf{V}_N-\{V_j\}=\mathbf{V}_{N-j}=(V_1,\ldots,V_{j-1},V_{j+1},\ldots,V_n)$ を入力としたときのアルゴリズム 2 は，すべての $L\geq L_j^V$ に対して，L 回目の While ループで定まる $\Phi=\Phi_W^L$ は

$$\Phi_W^L \geq \Phi_V^{L_j^V}$$

をみたす．

（注意 : V に関するものはアルゴリズム 1 の入力 $\mathbf{V}_N$ に対するものであり，W に関するものはアルゴリズム 2 の入力 $\mathbf{W}_{N-j}$ に対するものである．）

証明： まず $L=L_j^V$ のときを考える．命題 5.10 より，

$$\begin{aligned}
W_i^{L_j^V} &= V_i^{L_j^V}, \quad (i\in N-\{j\}),\\
R_W^{L_j^V} &= R_V^{L_j^V}-\{j\}
\end{aligned}$$

が成立する．ここで，命題 5.10 の議論と同様に，$j\in[x..y]=\{x,\ldots,j-1,j,j+1,\ldots,y\}\subseteq R_V^{L_j^V}\subseteq N$ に対して，

$$[x..y]_{-j}=\{x,\ldots,j-1,j+1,\ldots,y\}$$

とする．すると，この $[x..y]$ は $R_V^{L_j^V}$ における連続区間であり，$[x..y]_{-j}$ は $R_W^{L_j^V}$ における連続区間である．このとき，$j\neq x,y$（すなわち，$x<j<y$）ならば，$R_V^{L_j^V}$ における連続区間 $[x..y]$ の密度 $\left\{\frac{\beta'_y-\alpha'_x}{y-x+1}\right\}$ と $R_W^{L_j^V}$ における連続区間 $[x..y]_{-j}$ の密度 $\left\{\frac{\beta'_y-\alpha'_x}{y-x}\right\}$ とでは $R_W^{L_j^V}$ における連続区間 $[x..y]_{-j}$ の密度 $\left\{\frac{\beta'_y-\alpha'_x}{y-x}\right\}$ が $R_V^{L_j^V}$ における連続区間 $[x..y]$ の密度 $\left\{\frac{\beta'_y-\alpha'_x}{y-x+1}\right\}$ より大きい．さらに，$j=x$ ならば，$R_W^{L_j^V}$ における連続区間 $[x..y]_{-j}=[x+1..y]$ の密度 $\left\{\frac{\beta'_y-\alpha'_{x+1}}{y-x}\right\}$ は $R_V^{L_j^V}$ における連続区間 $[x+1..y]$ の密度に等しい．同様に，$j=y$ ならば，$R_W^{L_j^V}$ における連続区間 $[x..y]_{-j}=[x..y-1]$ の密度 $\left\{\frac{\beta'_{y-1}-\alpha'_x}{y-x}\right\}$ は $R_V^{L_j^V}$ における連続区間 $[x..y-1]$ の密度に等しい．$j\notin[x..y]$ の $R_V^{L_j^V}$ における連続区間 $[x..y]$ は，$R_W^{L_j^V}$ における連続区間 $[x..y]$ でもあるので，両者の密度は等しくなる．従って，

$$\Phi_W^{L_j^V}=\min_{\{[x..y]\subseteq R_W^{L_j^V}\ |x\leq y\}}\left\{\frac{\beta'_y-\alpha'_x}{y-x+1}\right\}\geq\min_{\{[x..y]\subseteq R_V^{L_j^V}\ |x\leq y\}}\left\{\frac{\beta'_y-\alpha'_x}{y-x+1}\right\}=\Phi_V^{L_j^V} \tag{5.103}$$

が成立する．

さらに，$\mathbf{V}_N$, $\mathbf{V}_{N-\{j\}}=\mathbf{W}_{N-\{j\}}$, $\mathbf{W}_N$ は仮定 5.1 をみたすため系 5.3 より，すべての $L\geq L_j^V$ に対して，

$$\Phi_W^L\geq\Phi_W^{L_j^V}\geq\Phi_V^{L_j^V}$$

が成り立つ． □

命題 5.13 アルゴリズム 2 は，$\psi(A_j^W)>\psi(A_j^V)$ ならば，

$$L_j^W\geq L_j^V \tag{5.104}$$

であり，かつすべての $i\in[s_V^{L_j^V}..t_V^{L_j^V}]$ で

$$\psi(A_i^W)\geq\psi(A_i^V) \tag{5.105}$$

である．

（注意：V に関するものはアルゴリズム 1 の入力 $\mathbf{V}_N$ に対するものであり，W に関するものはアルゴリズム 2 の入力 $\mathbf{W}_N$ に対するものである．）

証明： 命題 5.11 と命題 5.12 を利用するので，アルゴリズム 2 の入力 $\mathbf{W}_N$ に対するものと区別するために，アルゴリズム 2 の入力 $\mathbf{W}_{N-j}$ に対するものを W' とする．

たとえば，L_i^W はアルゴリズム 2 の入力 $\mathbf{W}_N$ に対して A_i の確定するのが L_i^W 回目の While ループであることを表し，$L_i^{W'}$ はアルゴリズム 2 の入力 $\mathbf{W}_{N-j}$ に対して A_i の確定するのが $L_i^{W'}$ 回目の While ループであることを表す．Φ_W^L はアルゴリズム 2 の入力 $\mathbf{W}_N$ に対して L 回目の While ループで定まる Φ を表し，$\Phi_{W'}^L$ はアルゴリズム 2 の入力 $\mathbf{W}_{N-j}$ に対して L 回目の While ループで定まる Φ を表す．他も同様である．

まず，$L_j^W \geq L_j^V$ であることを証明する．背理法で示す．すなわち，

$$L_j^W < L_j^V$$

であると仮定し，矛盾を導く．背理法の仮定の $L_j^W < L_j^V$ より，$L = L_j^W < L_j^V$ とする．すると，命題 5.11 から

$$\Phi_{W'}^{L_j^W} = \Phi_{W'}^L = \Phi_V^L = \Phi_V^{L_j^W}$$

が成立する．また，命題 5.12 の $\mathbf{V}_N$ を $\mathbf{W}_N$ とすることにより，

$$\Phi_W^{L_j^W} = \Phi_W^L \leq \Phi_{W'}^L = \Phi_{W'}^{L_j^W}$$

が得られる．従って，

$$\Phi_W^{L_j^W} \leq \Phi_V^{L_j^W}$$

が成り立つ．さらに $\mathbf{V}_N$ は仮定 5.1 をみたすため，系 5.3 を適用でき，

$$\Phi_V^{L_j^W} \leq \Phi_V^{L_j^V}$$

である．上記 2 式より，

$$\Phi_W^{L_j^W} \leq \Phi_V^{L_j^V}$$

が成り立つ．従って，アルゴリズム 2 のステップ 6 より

$$\psi(A_j^W) = \Phi_W^{L_j^W} \leq \Phi_V^{L_j^V} = \psi(A_j^V)$$

である．これは仮定に矛盾する．従って，式 (5.104) の

$$L_j^W \geq L_j^V$$

が成立する．

次に，すべての $i \in [s_V^{L_j^V} .. t_V^{L_j^V}]$ で

$$L_j^V \leq L_i^W \tag{5.106}$$

が成り立つことを証明する．式 (5.104) より，$L_j^W \geq L_j^V$ であるから，命題 5.9 を用いれば，

$$R_W^{L_j^V} = R_V^{L_j^V}$$

が成り立つ．従って命題 5.4 より $[s_V^{L_j^V}..t_V^{L_j^V}]\subseteq R_V^{L_j^V}$ であるから，

$$[s_V^{L_j^V}..t_V^{L_j^V}]\subseteq R_W^{L_j^V}$$

が成立する．従って，$[s_V^{L_j^V}..t_V^{L_j^V}]$ に含まれるプレイヤーは，L_j^V 回目あるいはそれ以降の While ループにおいて割当が確定する．これは式 (5.106) を意味する．

式 (5.104), (5.106) を用いて命題を証明する．(i) $L_j^W = L_j^V$ のときと (ii) $L_j^W > L_j^V$ のときの二つに場合分けして示す．

(i) $L_j^W = L_j^V$ のとき．式 (5.106) よりすべての $i \in [s_V^{L_j^V}..t_V^{L_j^V}]$ に対して $L_j^W = L_j^V \leq L_i^W$ である．さらに仮定より，$\psi(A_j^W) > \psi(A_j^V) > 0$ である．また，$\mathbf{W}_N$ は仮定 5.1 をみたす．従って，系 5.3 を用いれば，

$$\Phi_W^{L_i^W} \geq \Phi_W^{L_j^W}$$

である．さらに仮定より，すべての $i \in [s_V^{L_j^V}..t_V^{L_j^V}]$ に対して

$$\Phi_W^{L_i^W} \geq \Phi_W^{L_j^W} = \psi(A_j^W) > \Phi_V^{L_j^V} = \psi(A_j^V)$$

が成り立つ．従って，$\psi(A_i^W) = \Phi_W^{L_i^W}$ であること，および $i \in [s_V^{L_j^V}..t_V^{L_j^V}]$ から $\psi(A_i^V) = \Phi_V^{L_j^V}$ であることに注意すれば，$L_j^W = L_j^V$ のとき，すべての $i \in [s_V^{L_j^V}..t_V^{L_j^V}]$ で

$$\psi(A_i^W) > \psi(A_i^V) \tag{5.107}$$

である．

(ii) $L_j^W > L_j^V$ のとき．命題 5.11 より，すべての $L < L_j^W$ に対して $\Phi_W^L = \Phi_{W'}^L$ であるので，$L = L_j^V$ とおけば

$$\Phi_W^{L_j^V} = \Phi_{W'}^{L_j^V}$$

が得られる．また，命題 5.12 より，すべての $L \geq L_j^V$ に対して $\Phi_{W'}^L \geq \Phi_V^{L_j^V}$ であるので，$L = L_j^V$ とおけば

$$\Phi_{W'}^{L_j^V} \geq \Phi_V^{L_j^V}$$

が得られる．従って，

$$\Phi_W^{L_j^V} \geq \Phi_V^{L_j^V}$$

が成り立つ．さらに式 (5.106) よりすべての $i \in [s_V^{L_j^V}..t_V^{L_j^V}]$ に対して $L_i^W \geq L_j^V$ であるから，系 5.3 を適用すれば，

$$\Phi_W^{L_i^W} \geq \Phi_W^{L_j^V} \geq \Phi_V^{L_j^V}$$

である．従って，アルゴリズムのステップ 6 より，$L_j^W > L_j^V$ のとき，すべての $i \in [s_V^{L_j^V}..t_V^{L_j^V}]$ で

$$\psi(A_i^W) = \Phi_W^{L_i^W} \geq \psi(A_j^V) = \Phi_V^{L_j^V} = \psi(A_i^V) \tag{5.108}$$

が成立する．

従って，式 (5.107), (5.108) より，命題が成立する． □

補題 5.7 （戦略的操作不可能性）仮定 5.1 をみたす任意の $\mathbf{V}_N$ に対し，アルゴリズム EFISM は戦略的操作不可能性をもつ．

証明： $\psi(A_j^W)$ に関して二つに場合わけをして証明をする．

(i) $\psi(A_j^W) \leq \psi(A_j^V)$ であるとき．補題 5.2 より，

$$A_j^V \subseteq V_j, \quad \psi(A_j^V) = U_j(A_j^V)$$

である．従って，仮定から

$$U_j(A_j^W) = \psi(V_j \cap A_j^W) \leq \psi(A_j^W) \leq \psi(A_j^V) = U_j(A_j^V)$$

が成立する．

(ii) $\psi(A_j^W) > \psi(A_j^V)$ のとき．

$$L = L_j^V$$

とおく．すると，$s_V^{L_j^V}$ と $t_V^{L_j^V}$ は，それぞれ s_V^L と t_V^L と書ける．$\mathbf{V}_N$ は仮定 5.1 をみたすため，

$$V_j^L \subseteq (\alpha^L_{s_V^L}, \beta^L_{t_V^L}] \tag{5.109}$$

が成り立つ．$\psi(A_j^W) > \psi(A_j^V)$ であるから，命題 5.13 の式 (5.104)，すなわち，

$$L_j^W \geq L_j^V = L$$

が成立する．さらに，命題 5.9 より，

$$\begin{aligned} W_i^L &= V_i^L, \quad (i \in N - \{j\}) \\ R_W^L &= R_V^L \end{aligned}$$

が成立するので，

$$[s_V^L, t_V^L] \subseteq R_V^L = R_W^L$$

である．従って，j と異なるすべての $i \in [s_V^L..t_V^L]$ で $L_i^W \geq L$ であることおよび $\mathbf{W}_N$ が仮定 5.1 をみたすから補題 5.2 より，

$$A_i^W \subseteq W_i^{L_i^W} \subseteq W_i^L = V_i^L \subseteq (\alpha^L_{s_V^L}, \beta^L_{t_V^L}] \tag{5.110}$$

が成立する．また，仮定より

$$\psi(A_j^W) > \psi(A_j^V) > 0$$

であることから，割当ベクトル $\mathbf{A}(\mathbf{W}_N)$ は実行可能である．従って，$\mathbf{W}_N$ が仮定 5.1 をみたすことおよび式 (5.109), (5.110) から

$$V_j^L \cap A_j^W \subseteq (\alpha^L_{s_V^L}, \beta^L_{t_V^L}] - \bigcup_{i \in [s_V^L..t_V^L]-\{j\}} A_i^W$$

が成り立つ．これから大きさを考えれば

$$\psi(V_j^L \cap A_j^W) \leq \psi((\alpha_{s_V^L}^L, \beta_{t_V^L}^L]) - \sum_{i \in [s_V^L..t_V^L]-\{j\}} \psi(A_i^W) \tag{5.111}$$

が得られる．命題 5.13 より

$$\psi(A_i^W) \geq \psi(A_i^V) = \Phi_V^L$$

であること，および

$$\psi((\alpha_{s_V^L}^L, \beta_{t_V^L}^L]) = (t_V^L - s_V^L + 1)\Phi_V^L$$

であることに注意すれば，

$$\psi((\alpha_{s_V^L}^L, \beta_{t_V^L}^L]) - \sum_{i \in [s_V^L..t_V^L]-\{j\}} \psi(A_i^W) \leq \Phi_V^L \tag{5.112}$$

が成り立つ．従って，式 (5.111) および補題 5.2 から，

$$U_j(A_j^W) = \psi(V_j^L \cap A_j^W) \leq \Phi_V^L = \psi(A_j^V) = U_j(A_j^V)$$

が成り立つ． □

補題 5.1，5.4，5.5，5.6，5.7 より，アルゴリズムは，$O(n^3)$ で四つの性質をみたすことを示せた．以下に定理としてこの事実を示す．

定理 5.1 仮定 5.1 をみたす任意の $\mathbf{V}_N$ に対し，EFISM アルゴリズムは，無羨望性・カット数の最小性・最適性・戦略的操作不可能性をみたし，計算時間は $O(n^3)$ である． □

5.5 本章のむすび

5 章では，Alijani ら [1] が提案した EFISM アルゴリズムを証明が明快になるように修正し，改めて証明を与えた．具体的には，EFISM アルゴリズムが無羨望性・カット数の最小性・最適性・戦略的操作不可能性をみたし，計算時間は $O(n^3)$ であることを示した．このことは定義より，強安定であることを意味する（戦略的操作不可能性・無羨望性が同時に成り立つとき，強安定と定義されている）．さらに，最適性から，アルゴリズムは常に目的関数の値が最大であるような割当を返す．また，目的関数の値が同じであれば，カット数は最小であることが望まれる．従って，四つの性質をもつことは，アルゴリズムが強安定であり、かつ最適であることを意味する．

以上の議論より，本章ではケーキ分割問題に対し，安定的で最適な財の配分を行うアルゴリズムを提案した，といえる．

第6章　パイ分割問題

6.1　パイ分割問題の基本的概念

本節では，パイ分割問題の定義と基本的用語を与える．前章のケーキ分割問題のときと同様に，パイ $P=(0,1]$ を n 人のプレイヤー集合 $N=\{1,2,\ldots n\}$ の間で分割する問題では，各 $i\in N$ に対して

$$0\leq\alpha_i<1 \text{ かつ } \alpha_i<\beta_i\leq 1+\alpha_i<2 \tag{6.1}$$

をみたすプレイヤー i の評価区間 $V_i=(\alpha_i,\beta_i]$ が与えられる．従って，評価区間 V_i の大きさ $\psi(V_i)=\beta_i-\alpha_i$ は

$$0<\psi(V_i)\leq 1$$

をみたす．なお，評価区間 $V_i=(\alpha_i,\beta_i]$ は，$\beta_i\leq 1$ のときはパイ $P=(0,1]$ 上の区間 $P(V_i)=(\alpha_i,\beta_i]$ と考え，$\beta_i>1$ のときはパイ $P=(0,1]$ 上の区間 $P(V_i)=(\alpha_i,1]\cup(0,\beta_i-1]$ と考える．すなわち，$0\leq x<1$ かつ $x<y\leq 2$ なる任意の区間 $(x,y]$ に対して

$$P((x,y])=\begin{cases}(x,y] & (y\leq 1 \text{ のとき}),\\ (x,1]\cup(0,y-1] & (y>1 \text{ のとき})\end{cases} \tag{6.2}$$

である．また，パイ上の区間 $P((x,y])$ の大きさは，$\psi(P((x,y]))=y-x$ であることを注意しておく．

任意のプレイヤーの部分集合 $R\subseteq N$ に対して R のすべてのプレイヤーの評価区間の集合を $\mathbf{V}_R$ と表記する．すなわち，

$$\mathbf{V}_R=\{V_i\mid i\in R\}$$

である．

本章では，プレイヤー集合 $N=\{1,2,\ldots n\}$ の評価区間集合 $\mathbf{V}_N$ は以下の仮定をみたすものとする．

仮定 6.1 プレイヤー集合 $N=\{1,2,\ldots n\}$ の評価区間集合 $\mathbf{V}_N=\{V_i=(\alpha_i,\beta_i]\mid i\in N\}$ は以下の性質をみたす．

1. （非零性）各評価区間 $V_i=(\alpha_i,\beta_i]\in\mathbf{V}_N$ の大きさ $\psi(V_i)$ は $0<\psi(V_i)\leq 1$ である．

2. （被覆性）すべての評価区間 $V_i\in\mathbf{V}_N$ の和集合はパイ全体に一致する．すなわち，$\displaystyle\bigcup_{i\in N}P(V_i)=\bigcup_{i\in N}P((\alpha_i,\beta_i])=P=(0,1]$ である．

3. （順序性）任意の異なる $i, j \in N$ に対して，$\alpha_i < \alpha_j$ ならば $\beta_i \le \beta_j \le 1 + \beta_i$ である．

　さらに，評価区間 $V_i = (\alpha_i, \beta_i]$ の集合 $\mathbf{V}_N = \{V_i = (\alpha_i, \beta_i] \mid i \in N\}$ は，各 $V_i = (\alpha_i, \beta_i]$ を 2 次元 (α, β)-平面上の点 (α_i, β_i) と見なして，辞書式順 $\preceq$ でソートされているとする．すなわち，$i < j$ ならば $(\alpha_i, \beta_i] \preceq (\alpha_j, \beta_j]$（すなわち（$\alpha_i < \alpha_j$）あるいは（$\alpha_i = \alpha_j$ かつ $\beta_i \le \beta_j$））である． □

パイ $P = (0, 1]$ を n 人のプレイヤー集合 $N = \{1, 2, \ldots n\}$ の間で分割する本章の問題では，上記の仮定 6.1 をみたす各プレイヤー $i \in N$ の評価区間 $V_i = (\alpha_i, \beta_i]$ の集合 $\mathbf{V}_N$ があり，各プレイヤー $i \in N$ が評価区間をアルゴリズムへ申告する．そしてアルゴリズムは各プレイヤー i への割当 $A_i(\mathbf{V}_N)$ を決定する．

各プレイヤー $i \in N$ へ割り当てられた $A_i(\mathbf{V}_N)$ はパイの互いに共通部分を持たないいくつかの部分からなるので，

$$A_i(\mathbf{V}_N) = \{P((a_i^1, b_i^1]), P((a_i^2, b_i^2]), \ldots, P((a_i^{k_i}, b_i^{k_i}])\}$$

と表記できる．従って，すべての $1 \le j \le k_i$ で $\psi((a_i^j, b_i^j]) = b_i^j - a_i^j > 0$ であり，かつすべての $1 \le j < k \le k_i$ に対して

$$P((a_i^j, b_i^j]) \cap P((a_i^k, b_i^k]) = \emptyset$$

である．すべてのプレイヤー $i \in N$ への割当 $A_i(\mathbf{V}_N)$ からなる

$$\mathbf{A}(\mathbf{V}_N) = (A_1(\mathbf{V}_N), A_2(\mathbf{V}_N), \ldots, A_n(\mathbf{V}_N))$$

を**割当ベクトル**という．

パイ分割問題であるので割当ベクトル $\mathbf{A}(\mathbf{V}_N) = (A_1(\mathbf{V}_N), A_2(\mathbf{V}_N), \ldots, A_n(\mathbf{V}_N))$ は以下の性質をみたすことが必要である．

性質 6.1 割当ベクトル $\mathbf{A}(\mathbf{V}_N) = (A_1(\mathbf{V}_N), A_2(\mathbf{V}_N), \ldots, A_n(\mathbf{V}_N))$ は以下の性質をみたす．

1. （非空）どのプレイヤー $i \in N$ もパイの部分が割り当てられる．すなわち，

$$A_i(\mathbf{V}_N) \ne \emptyset$$

である．

2. （互いに素）任意の異なる $i, j \in N$ および任意の $P((a_i, b_i]) \in A_i(\mathbf{V}_N)$, $P((a_j, b_j]) \in A_j(\mathbf{V}_N)$ に対して，

$$P((a_i, b_i]) \cap P((a_j, b_j]) = \emptyset$$

である．

3. （完全性） パイは割当ベクトル $\mathbf{A}(\mathbf{V}_N) = (A_1(\mathbf{V}_N), A_2(\mathbf{V}_N), \ldots, A_n(\mathbf{V}_N))$ で被覆される．すなわち，

$$\bigcup_{i \in N} \bigcup_{P((a_i, b_i]) \in A_i(\mathbf{V}_N)} P((a_i, b_i]) = (0, 1]$$

が成立する． □

定義 6.1 割当ベクトル $\mathbf{A}(\mathbf{V}_N)$ は，性質 6.1 の（非空）と（互いに素）の性質をみたすとき，実行可能とよばれる．さらに，性質 6.1 の（完全性）もみたすときは，実行可能な完全割当ベクトルとよばれる． □

定義 6.2 （効用）

各プレイヤー $i \in N$ へパイ上の半開区間の集合 $X = \{P((a_1, b_1]), P((a_2, b_2]), \ldots, P((a_x, b_x])\}$ が割り当てられたときの効用 $U_i(X)$ は，評価区間 V_i のパイ上の区間 $P(V_i)$ と X の共通部分の大きさとして定義される．すなわち，

$$U_i(X) = \sum_{P((a_i,b_i])\in X} \psi(P(V_i) \cap P((a_i, b_i]))$$

である．従って，各プレイヤー $i \in N$ の自分への割当 $A_i(\mathbf{V}_N)$ に対する効用は，

$$U_i(A_i(\mathbf{V}_N)) = \sum_{P((a_i,b_i])\in A_i(\mathbf{V}_N)} \psi(P(V_i) \cap P((a_i, b_i])$$

と定義される． □

アルゴリズムで得られる割当ベクトル $\mathbf{A}(\mathbf{V}_N)$ において望まれる性質を四つのべる．これらの性質は，後述するアルゴリズム P-EFISM で得られる割当ベクトル $\mathbf{A}(\mathbf{V}_N)$ において成立する．また，5 章でのべたように，これらの性質が成立することは，アルゴリズムが強安定であり，かつ最適でカット数最小であることと等価である．

定義 6.3 （無羨望性）

実行可能な割当ベクトル $\mathbf{A}(\mathbf{V}_N)$ は，どのプレイヤー $i \in N$ に対しても，自分に割り当てられた $A_i(\mathbf{V}_N)$ の効用 $U_i(A_i(\mathbf{V}_N))$ が他のプレイヤーに割り当てられた $A_j(\mathbf{V}_N)$ に対する自分の効用 $U_i(A_j(\mathbf{V}_N))$ よりも小さくならないとき，無羨望性をもつという．すなわち，任意の $i, j \in N$ で

$$\begin{aligned} U_i(A_j(\mathbf{V}_N)) &= \sum_{P((a_j,b_j])\in A_j(\mathbf{V}_N)} \psi(P(V_i) \cap P((a_j, b_j]) \\ &\leq \sum_{P((a_i,b_i])\in A_i(\mathbf{V}_N)} \psi(P(V_i) \cap P((a_i, b_i]) = U_i(A_i(\mathbf{V}_N)) \end{aligned}$$

が成立するとき実行可能な割当ベクトル $\mathbf{A}(\mathbf{V}_N)$ は無羨望性をもつ．無羨望性をもつ割当ベクトル $\mathbf{A}(\mathbf{V}_N)$ は公平であるともよばれる．

アルゴリズムは，無羨望性をみたす実行可能な割当を常に返すとき無羨望性をもつとよばれる． □

割当が完全でない場合は，無羨望性をみたす自明な割当ベクトル $\mathbf{A}(\mathbf{V}_N)$ が存在する．これは，すべてのプレイヤー $i \in N$ に対して

$$A_i(\mathbf{V}_N) = \emptyset$$

とすればよい．しかし，このような割当は全員の効用が 0 であり，パイを無駄にしていることになる．従って，興味があるのは割当ベクトル $\mathbf{A}(\mathbf{V}_N)$ が実行可能で完全であり，かつ無羨望性をみたすものである．

割当ベクトル $\mathbf{A}(\mathbf{V}_N)$ を得るためにパイ $P = (0,1]$ を切る回数をカット数という．割当ベクトル $\mathbf{A}(\mathbf{V}_N)$ ではパイ P を $\sum_{i\in N}|A_i(\mathbf{V}_N)|$ 個の区間に分割するので $\sum_{i\in N}|A_i(\mathbf{V}_N)|$ 回切ることになる．さらに，$\mathbf{A}(\mathbf{V}_N)$ が実行可能であるときには，すべての $i \in N$ で $|A_i(\mathbf{V}_N)| \geq 1$ であるので，カット数は n 以上である．従ってに，カット数の最小性は以下のように定義できる．

定義 6.4 （カット数の最小性）

実行可能で完全な割当ベクトル $\mathbf{A}(\mathbf{V}_N)$ のカット数は，

$$\mathrm{CUT}(\mathbf{A}(\mathbf{V}_N)) = \sum_{i\in N}|A_i(\mathbf{V}_N)|$$

と定義される．実行可能で完全な割当ベクトル $\mathbf{A}(\mathbf{V}_N)$ のカット数が $\mathrm{CUT}(\mathbf{A}(\mathbf{V}_N)) = n$ であるとき，カット数は最小性をみたすとよばれる．アルゴリズムは，仮定 6.1 をみたす任意の $\mathbf{V}_N$ に対して，常にカット数が最小である実行可能で完全な割当を返すとき，カット数の最小性をもつとよばれる． □

定義 6.5 （効率）

実行可能な割当ベクトル $\mathbf{A}(\mathbf{V}_N)$ の効率は，

$$\mathrm{EFF}(\mathbf{A}(\mathbf{V}_N)) = \sum_{i\in N} U_i(A_i(\mathbf{V}_N))$$

として定義される．$\mathrm{EFF}(\mathbf{A}(\mathbf{V}_N)) = \psi(P) = 1$ であるとき，実行可能な割当ベクトル $\mathbf{A}(\mathbf{V}_N)$ の効率は最大である．アルゴリズムは，仮定 6.1 をみたす任意の $\mathbf{V}_N$ に対して，常に効率が最大である実行可能な割当を返すとき，最適性をもつとよばれる． □

さて，繰り返しになるが，定義 6.3 の無羨望性は，各プレイヤー $i \in N$ がアルゴリズムへ自分の評価区間 V_i を申告するとしたとき，公平な割当を保証するものである．しかし，実際にはプレイヤーは利己的な思惑（自分の効用を大きくしようとする思惑）をもつため，そのような申告をしない可能性がある．ただし，戦略的操作不可能性をもてば，自分の評価区間 V_i 以外を申告する誘因をもたない（そのような申告をしても，自分の効用は増えない）．

また，戦略的操作不可能性の定義を与える前に，ケーキ分割問題でものべたように，少し記法を導入する．プレイヤー集合 $N = \{1, 2, \ldots n\}$ の評価区間集合 $\mathbf{V}_N = \{V_1, V_2, \ldots, V_n\}$ からプレイヤー $i \in N$ の評価区間 V_i を除いた評価区間集合を

$$\mathbf{V}_{N-i} \tag{6.3}$$

と表記する．そして，実際にプレイヤー $i \in N$ のアルゴリズムへ申告する評価区間を V_i' とする（これは，真の評価区間と異なってもよい）．このようにして得られるプレイヤー集合 $N = \{1, 2, \ldots n\}$ のアルゴリズムへ申告する評価区間集合 $\{V_1, V_2, \ldots, V_{i-1}, V_i', V_{i+1}, \ldots, V_n\}$ を

$$\mathbf{V}_{i,N-i} = (V_i', \mathbf{V}_{N-i}) \tag{6.4}$$

と表記する．これを用いて戦略的操作不可能性は以下のように定義される．

定義 6.6 （戦略的操作不可能性）

アルゴリズムが戦略的操作不可能性をもつとは，各プレイヤー $i \in N$ および，仮定 5.1 をみたす任意の評価区間集合 $\mathbf{V}_N$ に対して，

$$U_i(A_i(\mathbf{V}_{i,N-i})) \leq U_i(A_i((\mathbf{V}_N))$$

が成立することをいう． □

戦略的操作不可能性について注意を与える．この定義は全てのプレイヤー $i \in N$ に対し，V_i を申告することが，支配戦略である，ということをのべている．実際，次のようになる．i 以外のプレイヤー j がアルゴリズムへ申告する評価区間を V_j' とかく．そしてプレイヤー i 以外の申告する評価区間の集合を，$\mathbf{V}'_{N-i} = \{V_j' = (\alpha_j, \beta_j] \mid j \in N - \{i\}\}$ とする．すると，定義では，仮定 5.1 をみたす任意の評価区間集合 $\mathbf{V}_N$ に対して成り立つものであるから，各プレイヤー $i \in N$ および，仮定 5.1 をみたす任意の $(V_i, \mathbf{V}'_{N-i})$ に対しても，

$$U_i(A_i((V_i', \mathbf{V}'_{N-i}))) \leq U_i(A_i((V_i, \mathbf{V}'_{N-i}))$$

であるためである．

次に，これら四つの性質をみたすことは，アルゴリズムが強安定であり，かつ最適であることを意味することを説明する．

まず，この問題において戦略とは，アルゴリズムへ申告する評価区間 V_i' であることを確認しておく．すると，戦略的操作不可能性が成り立つため，各プレイヤー $i \in N$ は $V_i' = V_i$ とすることが支配戦略である．従って，申告する評価区間集合を $\mathbf{V}_N$ とすることが支配戦略均衡である．これはナッシュ均衡でもあるため，弱安定（ナッシュ均衡が存在すること）であるといえる．

さらに，$\mathbf{V}_N$ がアルゴリズムへ入力されたとき，無羨望性が成り立てば，割当ベクトル $\mathbf{A}(\mathbf{V}_N)$ は公平であることが保証される．従って，この二つの性質が成り立つときは，申告区間集合を $\mathbf{V}_N$ は支配戦略均衡（すなわち，ナッシュ均衡でもある）であり，さらに割当は公平であるため，強安定（ナッシュ均衡であり，かつ割当が公平になる戦略の組が存在すること）であるといえる．これを以下に明記しておく．

定義 6.7 （強安定）

アルゴリズムが強安定であるとは，無羨望性・戦略的操作不可能性を同時にもつことをいう． □

次に，最適についてのべる．最適性がなりたてば，常に目的関数を最大にするため，最適であるといえる．目的関数の値が同じであれば，カット数は小さい方がよい（カット数が大きいとケーキの細切れをプレイヤーへ割り当てることになる）．

6.2 パイ分割問題に対するアルゴリズム

仮定 6.1 をみたす任意の $\mathbf{V}_N$ のもとでのパイ分割問題に対して上記の四つの性質をみたす割当ベクトル $\mathbf{A}(\mathbf{V}_N)$ を返すアルゴリズムを取り上げる．

以下に記しているアルゴリズム 3 の P-EFISM$(N, \mathbf{V}_N)$ は，入力として与えられた仮定 6.1 をみたす任意の $\mathbf{V}_N$ に対して，上記の四つの性質をみたす割当ベクトル $\mathbf{A}(\mathbf{V}_N)$ を返すアルゴリズムである．その証明は後述する．

なお，ケーキ分割問題でのべた連続区間を，パイ分割問題では少し一般化して定義する．$N = \{1, 2, \ldots, n\}$ の整数 x, y に対して $x \leq y$ ならば x から y までの正整数の集合が連続区間 $[x..y]$ であり，$x > y$ ならば x から n までの正整数の集合である連続区間 $[x..n]$ と 1 から y までの正整数の集合である連続区間 $[1..y]$ からなる正整数の集合を連続区間 $[x..y]$ と表記する．すなわち，連続区間 $[x..y]$ は，$x \leq y$ ならば

$$[x..y] = \{x, x+1, \ldots, y\} = \{i \in N \mid x \leq i \leq y\}$$

であり，$x > y$ ならば

$$[x..y] = \{x, x+1, \ldots, n, 1, \ldots, y\} = \{i \in N \mid x \leq i \leq n\} \cup \{i \in N \mid 1 \leq i \leq y\}$$

である．さらに，連続区間 $[x, y]$ の要素数を $|[x..y]|$ と表記する．すなわち，

$$|[x..y]| = \begin{cases} y - x + 1 & (x \leq y \text{ のとき}), \\ y + n - x + 1 & (x > y \text{ のとき}) \end{cases} \tag{6.5}$$

である．同様に，任意のプレイヤー $i \in N = \{1, 2, \ldots n\}$ および任意の $s \in \{0, 1, \ldots n-1\}$ に対して

$$N(i+s) = \begin{cases} i + s & (i + s \leq n \text{ のとき}), \\ i + s - n & (i + s > n \text{ のとき}) \end{cases} \tag{6.6}$$

と定義する．従って，式 (6.6) の $N(i+s)$ を用いれば，連続区間 $[x..y]$ は

$$[x..y] = \{N(x), N(x+1), \ldots, N(x + |[x..y]| - 1)\} \tag{6.7}$$

と書ける．また，連続区間 $[x..y]$ が $[x..y] \subseteq R$ であるということは，N の連続区間 $[x..y]$ に含まれるすべての正整数が R に含まれていることを意味することに注意しよう．たとえば，$N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ のとき，

$$R = \{1, 2, 4, 5, 8, 9, 10\}$$

のとき，連続区間 $[8..2] = \{8, 9, 10, 1, 2\}$ は R の部分集合であるが，連続区間 $[4, 7] = \{4, 5, 6, 7\}$ は R の部分集合ではない．この $R = \{1, 2, 4, 5, 8, 9, 10\}$ は二つの極大な連続区間 $[8..2]$ と $[4..5]$ からなる．すなわち，$R = [4..5] + [8..2]$ と直和で表現できる．一般に，正整数の任意の集合 R は極大な連続区間の集合の直和で書ける．

さらに，アルゴリズムの説明や証明の記述の容易性を考慮して，各プレイヤー $i \in N$ のコピーのプレイヤー $n+i$ を仮想的に導入する．そして $N_C = \{n+i \mid i \in N\}$ とする．プレイヤー $n+i \in N_C$ の評価区間 V_{n+i} を

$$\alpha_{n+i} = 1 + \alpha_i,\ \beta_{n+i} = 1 + \beta_i \tag{6.8}$$

を用いて

$$V_{n+i} = (\alpha_{n+i}, \beta_{n+i}] \tag{6.9}$$

と定義する．そしてコピーの各評価区間 $V_{n+i} = (\alpha_{n+i}, \beta_{n+i}] = (1+\alpha_i, 1+\beta_i]$ は，$\beta_{n+i} \le 2$ のときはパイ $P = (0,1]$ 上の区間 $P(V_i) = (\alpha_i, \beta_i]$ と考え，$\beta_{n+i} > 2$ のときはパイ $P = (0,1]$ 上の区間 $P(V_i) = (\alpha_i, 1] \cup (0, \beta_i - 1]$ と考える．すなわち，式 (6.2) で定義した P の定義を拡張してコピーの $1 \le x < 2$ かつ $x < y \le x+1 < 3$ なる任意の区間 $(x,y]$ に対しても P を

$$P((x,y]) = \begin{cases} (x-1, y-1] & (y \le 2\text{ のとき}), \\ (x-1,1] \cup (0, y-2] & (y > 2\text{ のとき}) \end{cases} \tag{6.10}$$

と定義する．従って，各 V_i $(i \in N)$ とコピーの V_{n+i} は，対応するパイ上の区間は同一で $P(V_i) = P(V_{n+i})$ である．

以下のアルゴリズムは，本論文で提案するアルゴリズムである．

アルゴリズム 3 P-EFISM$(N, \mathbf{V}_N)$	
0.	$\mathbf{V}_N = \{V_i = (\alpha_i, \beta_i] \mid i \in N\}$ は仮定 6.1 をみたすとする；
	N のコピーを $N_C = \{n+1, n+2, \ldots, 2n\}$ とし，各 $i \in N$ に対して
	$V_i = (\alpha_i, \beta_i]$ のコピーを $V_{n+i} = (\alpha_{n+i}, \beta_{n+i}] = (1+\alpha_i, 1+\beta_i]$ とする；
1.	$[s..t] \leftarrow \underset{\{[x..y] \subseteq N\}}{\operatorname{argmin}} \left\{ \dfrac{\min\{\beta_{x+\lvert[x..y]\rvert-1} - \alpha_x, 1\}}{\lvert[x..y]\rvert} \right\}$;　$\varPhi \leftarrow \dfrac{\beta_{s+\lvert[s..t]\rvert-1} - \alpha_s}{\lvert[s..t]\rvert}$;
2.	For $i = 0$ to $\lvert[s..t]\rvert - 1$ do $A_{N(s+i)} \leftarrow P((\alpha_s + i\varPhi, \alpha_s + (i+1)\varPhi])$;
3.	if $(t < s)$ then
4.	$R \leftarrow N - [s..t]$; // コメント：$R = \{t+1, t+2, \ldots, s-1\}$ である
5.	For each $i \in R$ do $V_i' \leftarrow V_i \cap (\beta_t, \alpha_s]$;　$(\alpha_i', \beta_i'] \leftarrow V_i'$;
6.	else // コメント：$s \le t = s + \lvert[s..t]\rvert - 1 \le n$ のときで $[s..t] = \{s, s+1, \ldots, t\}$
7.	$R \leftarrow \{t+1, t+2, \ldots, n, n+1, \ldots, n+s-1\}$;
8.	For each $i \in R$ do $V_i' \leftarrow V_i \cap (\beta_t, \alpha_{n+s}]$;　$(\alpha_i', \beta_i'] \leftarrow V_i'$;
9.	While $R \neq \emptyset$ do
10.	$[s..t] \leftarrow \underset{\{[x..y] \subseteq R \mid x \le y\}}{\operatorname{argmin}} \left\{ \dfrac{\beta_y' - \alpha_x'}{\lvert[x..y]\rvert} \right\}$;　$\varPhi \leftarrow \dfrac{\beta_t' - \alpha_s'}{\lvert[s..t]\rvert}$;
11.	For $i = 0$ to $\lvert[s..t]\rvert - 1$ do $A_{N(s+i)} \leftarrow P((\alpha_s' + i\varPhi, \alpha_s' + (i+1)\varPhi])$;
12.	$R \leftarrow R - [s..t]$;
13.	For each $i \in R$ do $V_i' \leftarrow V_i' - (\alpha_s', \beta_t']$;　$(\alpha_i', \beta_i'] \leftarrow V_i'$;
14.	return $\mathbf{A} = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$;

アルゴリズム 3 の補足説明をのべる．連続区間 $[x..y] \subseteq N$ に対して，

$$\frac{\min\{\beta_{x+\lvert[x..y]\rvert-1} - \alpha_x, 1\}}{\lvert[x..y]\rvert}$$

は $\{V_i = (\alpha_i, \beta_i] \mid i \in [x..y]\} = \{V_{N(x)}, V_{N(x+1)}, \ldots, V_{N(x+\lvert[x..y]\rvert-1)}\}$ の $\lvert[x..y]\rvert$ 個の評価区間の平均大きさである．これを N の連続区間 $[x..y]$ における評価区間

$$\{V_i = (\alpha_i, \beta_i] \mid i \in [x..y]\} = \{V_{N(x)}, V_{N(x+1)}, \ldots, V_{N(x+\lvert[x..y]\rvert-1)}\}$$

の密度という．なお，$\beta_{x+|[x..y]|-1} - \alpha_x > 1$，すなわち，パイのある部分が $|[x..y]|$ 個の評価区間 $\{V_i = (\alpha_i, \beta_i] \mid i \in [x..y]\}$ で二重に被覆されることもあるので，そのようなときには $|[x..y]|$ 個の評価区間 $\{V_i = (\alpha_i, \beta_i] \mid i \in [x..y]\}$ の和集合で被覆されるのはパイ全体 $(0,1]$ であるとして，密度を定義している．

たとえば，$N = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ のとき，連続区間 $[x..y] = [8..2] = \{8,9,10,1,2\}$ における評価区間

$$\{V_i = (\alpha_i, \beta_i] \mid i \in [8..2]\} = \{V_8, V_9, V_{10}, V_1, V_2\}$$

の密度は，$|[x..y]| = |[8..2]| = 5$ であるので，

$$\frac{\min\{\beta_{x+|[x..y]|-1} - \alpha_x, 1\}}{|[x..y]|} = \frac{\min\{\beta_{8+5-1} - \alpha_8, 1\}}{5} = \frac{\min\{1 + \beta_2 - \alpha_8, 1\}}{5}$$

となる．すなわち，連続区間 $[x..y] = [8..2] = \{8,9,10,1,2\}$ における評価区間の密度を，$V_1 = (\alpha_1, \beta_1]$ と $V_2 = (\alpha_2, \beta_2]$ のコピーの $V_{11} = (\alpha_{11}, \beta_{11}] = (1+\alpha_1, 1+\beta_1]$ と $V_{12} = (\alpha_{12}, \beta_{12}] = (1+\alpha_2, 1+\beta_2]$ を用いて，計算していることに注意しよう．

ステップ 1 では，N のすべての連続区間のうちで評価区間の密度が最小となるものを求めて，それを $[s..t]$ としている．そしてその連続区間 $[s..t]$ の評価区間の密度を Φ とおいて，ステップ 2 で $i \in [s..t]$ をみたす各 $i \in N$ に対して，その密度 Φ に等しい大きさのパイを各 $i \in [s..t]$ に割り当てている．$[s..t] = N$ のときにはこれでアルゴリズムは終了する．

$[s..t] \neq N$ のときには，残っているパイの部分は $(0,1] - P((\alpha_s, \beta_{s+|[s..t]|-1}])$ となる．さらに，ステップ 3〜8 ではまずパイを割り当てられた各 $i \in [s..t]$ を N から除去する．従って，$t < s$ のときには，$R = N - [s..t] = \{t+1, t+2, \ldots, s-1\}$ である．一方，$s \le t \le n$ ならば，残っている $[t+1..n]$ の各 i のすべてと，残っている $[1..s-1]$ の各 i の代わりにコピーの $n+i$ をすべて入れて R としている．従って，このときには $R = \{t+1, t+2, \ldots, n, n+1, \ldots, n+s-1\}$ となっている．そして，ステップ 8 で，各 $i \in R$ の評価区間からステップ 2 で切り取られて割り当てられたパイの部分に対応する評価区間を切り取って，$i \in R$ の新しい評価区間としている．

注意 6.1 ステップ 9〜13 の While ループのステップは，残っているパイの部分 $C' = (0,1] - P((\alpha_s, \beta_{s+|[s..t]|-1}])$ をケーキ C' と見なして，本質的に，アルゴリズム 1 の EFISM と同じことを行っている．すなわち，$t < s$ ならば $C' = (\beta_t, \alpha_s]$ であり，$s \le t$ のときには $C' = (\beta_t, 1+\alpha_s]$ である．この C' をスケール変換して $C = (0,1]$ と見なし，R を N に対応させ，各 $i \in R$ の V_i' も $C = (0,1]$ に対応するようにスケール変換して，アルゴリズム 1 の EFISM と同じことを行い，最後に得られた割当を最初に行ったスケール変換の逆の操作を行うことに，ステップ 9〜13 の While ループのステップは完全に一致する． □

以降では，アルゴリズム 3 の P-EFISM が無羨望性・カット数の最小性・最適性・戦略的操作不可能性の四つの性質をみたすことを確認していく．そのために必要な記法を以下に定義する．

6.3 証明のための記法

上記のアルゴリズム 3 におけるステップ 9 の While 文の反復（ステップ 10 からステップ 13 まで）が行われる総回数を $L_{\max}$ とする．各 $L = 1, 2, \ldots, L_{\max}$ に対して，ステップ 9 の L 回目の

While ループの開始時点における R, $V_i' = (\alpha_i', \beta_i']$ をそれぞれ R^L, $V_i^L = (\alpha_i^L, \beta_i^L]$ と表記する．各 $L = 1, 2, \ldots, L_{\max}$ に対して，ステップ 9 の L 回目の While ループのステップ 10 からステップ 13 で求められる $[s..t]$, Φ, A_i をそれぞれ $[s^L..t^L]$, Φ^L, A_i^L $(i = s^L, s^L+1, \ldots, t^L)$ と表記する．さらに，記法の都合により，ステップ 9 の While ループに入る前のステップ 1 から 8 までの部分を，仮想的にステップ 9 の 0 回目の While ループと見なす．すなわち，以下の記法を用いる．

$N_C = \{n+1, n+2, \ldots, 2n\}$：$N = \{1, 2, \ldots, n\}$ のコピー．

$V_{n+i} = (\alpha_{n+i}, \beta_{n+i}] = (1+\alpha_i, 1+\beta_i]$：$V_i = (\alpha_i, \beta_i)$ のコピー．

V_i^0：$V_i^0 = V_i$.

R^0：$R^0 = N$.

$[s^0..t^0]$，Φ^0：ステップ 1 で得られた $[s..t]$ と Φ.

A_i^0： ステップ 2 でプレイヤー $i \in [s^0..t^0]$ に確定する割当 A_i．この i の L_i は $L_i = 0$.

R^1，$V_i^1 = ({\alpha_i}^1, {\beta_i}^1]$：ステップ 3〜8 で定まる R と $V_i' = ({\alpha_i}', {\beta_i}']$.

R^L：ステップ 9 の L 回目の While ループの開始時点における集合 R

$V_i^L = (\alpha_i^L, \beta_i^L]$：ステップ 9 の L 回目の While ループの開始時点における $V_i' = (\alpha_i, \beta_i]$

$[s^L..t^L]$：L 回目の While ループのステップ 10 で得られた $[s..t]$.

Φ^L：L 回目の While ループのステップ 10 で得られた Φ.

L_i：プレイヤー $i \in N$ への割当 A_i が確定するのは L_i 回目の While ループ.

$A_i^{L_i}$： ステップ 9 の L_i 回目の While ループのステップ 11 で A_i が確定する割当.

なお，上記のアルゴリズム 3 から自明であるように，各 $j \in R_{L_i} - R_{L_{i+1}}$ に対して $L > L_i$ 回目の While ループの反復で，$V_j' = (\alpha_j', \beta_j'] = (\alpha_j^{L_i}, \beta_j^{L_i}] = V_j^{L_i}$ と $A_{N(j)}^{L_i}$（$N(j)$ の定義は式 (6.6)）は変更されないので，記法の乱用ではあるが，各 $j \in R_{L_i} - R_{L_{i+1}}$ に対してこれらを $V_j^L = V_j^{L_i}$ かつ $A_{N(j)}^L = A_{N(j)}^{L_i}$ と考える．

6.4 証明

まず，P-EFISM アルゴリズムの計算時間を確認する．以下のようになる．

6.4.1 P-EFISM アルゴリズムの計算時間

P-EFISM アルゴリズムの計算時間は，プレイヤー数を n としたとき，$O(n^3)$ であることを示す．まず，補題として命題を明記する．

補題 6.1 仮定 6.1 をみたす任意の $\mathbf{V}_N$ に対し，P-EFISM アルゴリズムの計算時間は $O(n^3)$ である．

証明： アルゴリズム 3（P-EFISM アルゴリズム）のステップ 1 は N の要素 x と y の組に対して，探索を行う．従って，$O(n^2)$ である．

アルゴリズム 3 のステップ 2 および 3 から 8 は，プレイヤー集合 $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ の各要素に対し，高々定数回の操作しか行わない．従って，$O(n)$ でできる．

次に，While 文の中身について議論する．ステップ 11 から 13 はステップ 2 および 3 から 8 と同様の議論により，$O(n)$ で計算できる．ステップ 10 は，$R \subseteq N$ の要素 x と y の組に対して，探索を行う．従って，$O(n^2)$ である．

最後に，While ループの回数について考える．各 While ループにおいて $[s..t]$ は，空ではない．従ってステップ 13 により，プレイヤーの部分集合 R の要素数 $|R|$ は，各 While ループにおいて必ず 1 以上減少する．また，アルゴリズムの任意の時点で $|R| \geq 0$ である．従って，While ループは高々n 回しか実行されない．

While ループは高々n 回しか実行されず，1 回の While ループの実行に必要な計算時間は $O(n^2)$ であるため，全体では $O(n^3)$ である． □

次に，無羨望性・カット数の最小性・最適性を確認する．命題 6.1 では，R^1 のすべての i の評価区間が単一区間の $V_i^1 = (\alpha_i^1, \beta_i^1]$ であることを証明する．これが成り立つと，アルゴリズム EFISM ステップ 9 で最初に取り上げる評価区間がすべて単一の評価区間であるため，$L \geq 1$ に対しては第 5 章のケーキ分割問題における証明を利用できることになる．

命題 6.1 仮定 6.1 をみたす $\mathbf{V}_N = \{V_i = (\alpha_i, \beta_i] \mid i \in N\}$ に対して，ステップ 9 の最初の While ループの開始時点で，すべての $i \in R^1$ で V_i^1 は単一の区間で

$$V_i^1 = (\alpha_i^1, \beta_i^1]$$

で書ける．さらに，ステップ 2 で $[s^0..t^0]$ のプレイヤーに割り当てられたパイの部分を除いて残ったパイの区間 $P' = P - P((\alpha_{s^0}, \beta_{s^0+|[s^0..t^0]|-1}])$ をケーキ C' と見なすと R^1 と $\mathbf{V}_{R^1}$ は仮定 5.1 をみたす． □

証明を与える前に，正確性を期して，残ったパイの区間 P' をケーキ C' と見なしたときの R^1 と $\mathbf{V}_{R^1}$ に対する仮定 5.1 を与えておく．

仮定 6.2 プレイヤー集合 R^1 の評価区間集合 $\mathbf{V}_{R^1} = \{V_i^1 = (\alpha_i^1, \beta_i^1] \mid i \in R^1\}$ は以下の性質をみたす．

1. （非零性）各評価区間 $V_i^1 = (\alpha_i^1, \beta_i^1] \in \mathbf{V}_{R^1}$ の大きさ $\psi(V_i^1)$ は正である．すなわち，$\psi(V_i^1) = \beta_i^1 - \alpha_i^1 > 0$ である．

2. （被覆性）すべての評価区間の和集合はケーキ全体に一致する．すなわち，$\displaystyle\bigcup_{i \in R^1} P(V_i^1) = \bigcup_{i \in R^1} P((\alpha_i^1, \beta_i^1]) = C' = P' = P - P((\alpha_{s^0}, \beta_{s^0+|[s^0..t^0]|-1}])$ である．

3. （順序性）任意の異なる $i, j \in R^1$ に対して，$\alpha_i^1 < \alpha_j^1$ ならば $\beta_i^1 \leq \beta_j^1$ である．

さらに，評価区間 $V_i^1 = (\alpha_i^1, \beta_i^1]$ の集合 $\mathbf{V}_{R^1} = \{V_i^1 = (\alpha_i^1, \beta_i^1] \mid i \in R^1\}$ は，各 $V_i = (\alpha_i, \beta_i]$

を 2 次元 (α, β)-平面上の点 (α_i^1, β_i^1) と見なして，辞書式順 $\preceq$ でソートされているとする．すなわち，$i < j$ ならば $(\alpha_i^1, \beta_i^1] \preceq (\alpha_j^1, \beta_j^1]$ （すなわち（$\alpha_i^1 < \alpha_j^1$）あるいは（$\alpha_i^1 = \alpha_j^1$ かつ $\beta_i^1 \le \beta_j^1$））である． □

命題 6.1 の証明： 各 $i \in N = \{1, 2, \ldots, n\}$ の $V_i = (\alpha_i, \beta_i]$ に対して，コピー $n+i$ の $V_{n+i} = (\alpha_{n+i}, \beta_{n+i}] = (1+\alpha_i, 1+\beta_i]$ を考えている．さらに，N のコピー $N_C = \{n+1, n+2, \ldots, 2n\}$ を考えている．すると，$N + N_C = \{1, 2, \ldots, n, n+1, n+2, \ldots, 2n\}$ での $\mathbf{V}_{N+N_C} = \{V_i \mid i \in N + N_C\}$ は，式 (6.2) と式 (6.10) の定義の P のもとで，仮定 6.1 をみたす．

さらに，ステップ 1 における $[s^0..t^0]$ に対して，

$$[s^0..s^0 + |[s^0..t^0]| - 1] = \{s_0, s_0 + 1, \ldots, s^0 + |[s^0..t^0]| - 1\}$$

を考えて，

$$\begin{aligned} R' &= N + N_C - ([1..s^0 - 1] + [s^0..s^0 + |[s^0..t^0]| - 1] + [n + s_0..2n]) \\ &= \{s^0 + |[s^0..t^0]|, s^0 + |[s^0..t^0]| + 1, \ldots, n + s_0 - 1\} \end{aligned}$$

とすれば，R' は $N + N_C$ の連続区間である．

さらに，$t^0 < s^0$ のときには，$[s^0..s^0 + |[s^0..t^0]| - 1] = \{s_0, s_0 + 1, \ldots, s^0 + |[s^0..t^0]| - 1\}$ （すなわち，$s^0 + |[s^0..t^0]| - 1 = n + t^0$）であるので，

$$R' = [n + 1 + t^0..n + s^0 - 1] = \{n + 1 + t^0, n + 2 + t^0, \ldots, n + s^0 - 1\}$$

である．このとき，$\mathbf{V}_{N+N_C}$ が仮定 6.1 を満たし順序性をみたすので，各 $i \in R'$ に対して $V_i' = V_i \cap (\beta_{n+t^0}, \alpha_{n+s^0}]$ は二つの単一の区間の共通部分となり単一の区間である．すなわち，$V_i' = V_i \cap (\beta_{n+t^0}, \alpha_{n+s^0}] = (\alpha_i', \beta_i']$ と書け，

$$V_{i-n}' = (\alpha_i' - 1, \beta_i' - 1]$$

で

$$R^1 = \{i - n \mid i \in R'\}$$

である．この R^1 がステップ 4 で得られる R であり，$\{V_i' \mid i \in R_1\}$ がステップ 5 で得られる V_i' の集合に一致する．さらに，各 $i \in R^1$ の V_i' は $V_i' = V_i \cap (\beta_{t^0}, \alpha_{s^0}] = (\alpha_i, \beta_i] \cap (\beta_{t^0}, \alpha_{s^0}]$ から二つの単一の区間の共通部分となり単一の区間である．

一方，$s_0 \le t^0$ のときには，$s^0 + |[s^0..t^0]| - 1 = t^0$ であるので，R' は

$$R' = [t^0 + 1..n + s^0 - 1] = \{1 + t^0, 2 + t^0, \ldots, n + s^0 - 1\}$$

であり，ステップ 7 で得られる R（すなわち，R^1）に一致し，$\{V_i' \mid i \in R_1\}$ はステップ 8 で得られる V_i' の集合に一致する．さらに，$\mathbf{V}_{N+N_C}$ が順序性をみたすので，各 $i \in R^1$ の V_i' は $V_i' = V_i \cap (\beta_{t^0}, \alpha_{n+s^0}] = (\alpha_i, \beta_i] \cap (\beta_{t^0}, \alpha_{n+s^0}]$ から二つの単一の区間の共通部分となり単一の区間である．

このように，ステップ 3〜8 で定まる R と各 $i \in R$ の $V'_i = (\alpha', \beta']$ は，それぞれ R^1 と単一の区間の $V_i^1 = (\alpha^1, \beta^1]$ になる．R^1 は $N + N_C = \{1, 2, \ldots, n, n+1, n+2, \ldots, 2n\}$ の連続区間であるので，

$$\mathbf{V}_{R^1} = \{V_i^1 = (\alpha_i^1, \beta_i^1] \mid i \in R^1\}$$

は，$\mathbf{V}_{N+N_C}$ が仮定 6.1 を満たし順序性をみたすので，仮定 5.1 の順序性をみたす．

さらに，ステップ 1 で最小密度の連続区間 $[s^0..t^0]$ を求めているので，$\mathbf{V}_{R^1} = \{V_i^1 = (\alpha_i^1, \beta_i^1] \mid i \in R^1\}$ は非零性もみたすことが得られる．また，$N - [s^0..t^0] = \{N(i) \mid i \in R^1\}$ と書けるので，

$$\bigcup_{i \in R^1} P(V_i^1) = \bigcup_{i \in R^1} P((\alpha_i^1, \beta_i^1]) = C' = (0, 1] - P((\alpha_{s^0}, \beta_{s^0+|[s^0..t-0]|-1}])$$

が成立し，被覆性も得られる． □

従って，ケーキカット問題で議論した N と V_N に関する命題，系，補題が，R^1 と $\mathbf{V}_{R^1}$ に関する命題，系，補題として，すべての $L \geq 1$ においてステップ 9 の L 回目の While ループに対して成立する．すなわち，命題 5.1（評価区間の単一性と順序性），命題 5.2（非零性），命題 5.3（被覆性），命題 5.4（プレイヤーの包含性），命題 5.5（割当の単一性），系 5.1（評価区間・割当の確定），系 5.2（プレイヤーの分割），補題 5.2（包含性），命題 5.6（割当の実行可能性），補題 5.3（割当の完全性），系 5.3（密度の順序性），命題 5.8（密閉性），補題 5.4（無羨望性），補題 5.5（カット数の最小性），補題 5.6（最適性）はすべての $L \geq 1$ で成立する．

さらに，すべての $i \in N$ で $V_i^0 = V_i$ であるので，以下のパイカット版の命題，系，補題が得られる．証明はほぼ明らかであるので省略する．

なお，パイカット版の命題，系，補題の記述の容易性から，アルゴリズム 3 のステップ 1〜8 で得られる $[s, t]$，Φ，A_i $(i \in [s, t])$，R，V'_i $(i \in R)$（すなわち，$[s^0, t^0]$，Φ^0，A_i $(i \in [s^0, t^0])$，R^1，V_i^1 $(i \in R^1)$）に対して，以下の仮定をする．まず，

$$k = |[s..t]| \tag{6.11}$$

とおく．そして各 $i \in N + N_C$ に $-t$ を加えて $i - t$ とするシフトを行う．従って，$t < s$ ならば $k = n + t - s + 1$ であり，このシフトにより，$R = \{t+1, t+2, \ldots, s-1\}$ は

$$R_{-t} = \{1, 2, \ldots, s-t-1\} = [1..n-k-1] \tag{6.12}$$

となる．さらに，$[s..t]$ は $[s..t]_{-t} = \{s-t, s-t+1, \ldots, n-t\} \cup \{1-t, 2-t, \ldots, 0\}$ になる．ここで非正の $1-t, 2-t, \ldots, 0$ に n を加えると，$\{1-t, 2-t, \ldots, 0\}$ は $\{1+n-t, 2+n-t, \ldots, n\}$ となり，$\{s-t, s-t+1, \ldots, n-t\} \cup \{1-t, 2-t, \ldots, 0\}$ は $\{s-t, s-t+1, \ldots, n-t, 1+n-t, 2+n-t, \ldots, n\}$ となる．従って，$t < s$ ならば $k = n + t - s + 1$ であるので，

$$[s..t]_{-t} = [s-t..n] = [n-k+1..n] \tag{6.13}$$

と考える．

同様に，$s \leq t$ ならば $k = t - s + 1$ であり，このシフトにより，$R = \{t+1, t+2, \ldots, n+s-1\}$ は

$$R_{-t} = \{1, 2, \ldots, n+s-t-1\} = [1..n-k] \tag{6.14}$$

となる．このシフトにより，$[s..t]$ は $[s..t]_{-t} = \{s-t, s-t+1, \ldots, 0\}$ になる．ここで非正の $s-t, s-t+1, \ldots, 0$ に n を加えると，$\{s-t, s-t+1, \ldots, 0\}$ は $\{s+n-t, s+n-t+1, \ldots, n\} = [s+n-t..n]$ となる．従って，$s \leq t$ ならば $k = t-s+1$ であるので，

$$[s..t]_{-t} = [s+n-t..n] = [n-k+1..n] \tag{6.15}$$

と考える．

上記の議論から，いずれも $[s..t]_{-t} = [s+n-t..n] = [n-k+1..n]$ かつ $R_{-t} = [1..n-k]$ と書けるので，これ以降，これらをそれぞれアルゴリズム 3 のステップ 1〜8 で得られる $[s..t]$ と R とする．すなわち，このシフトに基づいて，以下の仮定をこれ以降用いる．

仮定 6.3 アルゴリズム 3 のステップ 1〜8 で得られる $[s..t]$ と R（すなわち，$[s^0..t^0]$ と R^1）はラベルの適切なシフトにより，以下の性質をみたすものとする．すなわち，$k = |[s^0..t^0]|$ とすると，

$$s^0 = n-k+1, \quad t^0 = n, \quad [s^0..t^0] = [n-k+1..n], \quad R^1 = [1..n-k] \tag{6.16}$$

である．従って，$N = [1..n]$ は $R^1 = [1..n-k]$ と $[s^0..t^0]$ の直和に分割できる． □

もちろん，仮定 6.3 をみたすものとしても，各 $i \in N$ の $V_i = (\alpha_i, \beta_i]$ からなる $\mathbf{V}_N$ は仮定 6.1 をみたすので，

$$0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \ldots \leq \alpha_{n-k} \leq \alpha_{n-k+1} \leq \beta_{n-k}, \quad \alpha_1 \leq \beta_n - 1 \leq \beta_1$$

である．そこで，アルゴリズムのステップ 2 ですべての $i \in [s^0..t^0]$ に割り当てられるパイの区間 $P((\alpha_{n-k+1}), \beta_n])$ を除いて残ったパイの区間 $P' = P - P((\alpha_{n-k+1}, \beta_n]) = (\beta_n - 1, \alpha_{n-k+1}])$ に対してパイを $\beta_n - 1 \geq 0$ だけ回転する．すると，残ったパイの区間 P' は $P' = (0, 1-\beta_n+\alpha_{n-k+1}])$ となる．同様に，すべての $i \in [s^0..t^0]$ に割り当てられるパイの区間は $(1-\beta_n+\alpha_{n-k+1}), 1]$ となる．

この回転を各 $i \in N$ の $V_i = (\alpha_i, \beta_i]$ からなる $\mathbf{V}_N$ にも適用する．すなわち，各 $i \in N$ の $V_i = (\alpha_i, \beta_i]$ は

$$V_i = (\alpha_i + 1 - \beta_n, \beta_i + 1 - \beta_n] \tag{6.17}$$

であるとする．なお，$-1 \leq x < 0$ に対してパイ上の点は $P(x) = 1 + x \geq 0$ と見なす．従って，アルゴリズムのステップ 8 で得られる各 $i \in R^1$ に対する評価区間は，

$$V_i^1 = (\alpha_i^1, \beta_i^1] = (\max\{\alpha_i + 1 - \beta_n, 0\}, \min\{\alpha_{n-k+1} + 1 - \beta_n, \beta_i + 1 - \beta_n\}] \tag{6.18}$$

となる．$\alpha_1 \leq \beta_n - 1$ であるので，

$$V_1^1 = (0, \min\{\alpha_{n-k+1} + 1 - \beta_n, \beta_1 + 1 - \beta_n\}] \tag{6.19}$$

である．

仮定 6.4 アルゴリズム 3 に入力として与えられた各 $i \in N$ の V_i は，仮定 6.3 が成立したものとして，ステップ 2 では式 (6.17) の形式の V_i に変換されているものとする．従って，各 $i \in R^1$ に対する評価区間 $V_i^1 = (\alpha_i^1, \beta_i^1]$ も式 (6.18) と式 (6.19) の形式の V_i^1 に変換されているものとする． □

仮定 6.3 と仮定 6.4 に基づいてパイカット版の命題，系，補題を与える．前にものべたように，証明はほぼ明らかであるので省略する．さらに，ステップ 9 の While ループに入る前のステップ 1 から 8 までの部分を，仮想的にステップ 9 の 0 回目の While ループと見なしていることも再度注意しておく．

命題 6.2 （評価区間の単一性と順序性）
仮定 6.1 をみたす任意の $\mathbf{V}_N$ が入力として与えられたとき，アルゴリズム 3 は，任意の $L = 0, 1, 2, \ldots, L_{\max}$ において，すべての $i \in N$ で

$$|V_i^L| = 1 \tag{6.20}$$

であり，さらに $i < j$ なるすべての $i, j \in N$ に対して，

$$V_i^L \preceq V_j^L \tag{6.21}$$

が成立する． □

命題 6.3 （非零性）仮定 6.1 をみたす任意の評価区間集合 $\mathbf{V}_N$ に対し，アルゴリズム 3 は，すべての $L = 0, 1, 2, \ldots, L_{\max}$ とすべての $i \in N$ で

$$\psi(V_i^L = (\alpha_i^L, \beta_i^L]) = \beta_i^L - \alpha_i^L > 0$$

をみたす． □

命題 6.4 （被覆性）
仮定 6.1 をみたす任意の評価区間集合 $\mathbf{V}_N$ に対し，アルゴリズム 3 は，すべての $L = 0, 1, 2, \ldots, L_{\max}$ に対して

$$\bigcup_{i \in N} V_i^L = (0, 1]$$

をみたす． □

命題 6.5 （プレイヤーの包含性）仮定 6.1 をみたす任意の $\mathbf{V}_N$ に対し，アルゴリズム 3 は，すべての $L = 0, 1, 2, \ldots, L_{\max}$ で

$$[s^L..t^L] \subseteq R^L$$

をみたす． □

命題 6.6 （割当の単一性）仮定 6.1 をみたす任意の $\mathbf{V}_N$ に対し，アルゴリズム 3 は，すべての $i \in N$ とすべての $L \in \{L_i, L_i + 1, \ldots, L_{\max}\}$ において

$$|A_i^L| = 1$$

をみたす．

系 6.1 （評価区間・割当の確定）仮定 6.1 をみたす任意の $\mathbf{V}_N$ に対し，アルゴリズム 3 は，すべての $i \in N$ に対して，すべての $L \geq L_i$ で

$$V_i^L = V_i^{L_i}, \quad A_i^L = A_i^{L_i}$$

をみたす. □

系 6.2 （プレイヤーの分割）仮定 6.1 をみたす任意の $\mathbf{V}_N$ に対し，

$$\{[s^0..t^0], [s^1..t^1], \ldots, [s^{L_{\max}}..t^{L_{\max}}]\}$$

は N の分割である. □

補題 6.2 （包含性）仮定 6.1 をみたす任意の $\mathbf{V}_N$ に対して，アルゴリズム 3 は，すべての $i \in N$ に対して

$$A_i^{L_i} = P((a_i^{L_i}, b_i^{L_i}]) \subseteq P(V_i^{L_i}) = P((\alpha_i^{L_i}, \beta_i^{L_i}])$$

をみたす. □

命題 6.7 （割当の実行可能性）仮定 6.1 をみたす任意の $\mathbf{V}_N$ に対し，アルゴリズム 3 は実行可能な割当ベクトル $\mathbf{A} = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$ を返す. □

補題 6.3 （割当の完全性）仮定 6.1 をみたす任意の $\mathbf{V}_N$ に対し，アルゴリズム 3 は完全な割当 $\mathbf{A} = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$ を返す. □

系 6.3 （密度の順序性）仮定 6.1 をみたす任意の $\mathbf{V}_N$ に対し，アルゴリズム 3 は，すべての $L \in \{0, 1, 2, \ldots, L_{\max} - 1\}$ で

$$0 < \Phi^0 \leq \Phi^L \leq \Phi^{L+1}$$

をみたす. □

命題 6.8 （密閉性）仮定 6.1 をみたす任意の $\mathbf{V}_N$ に対し，アルゴリズム 3 は，$0 \leq L_i < L_j$ なるすべての $i, j \in N$ に対して

$$V_i^0 \cap V_j^{L_j} = \emptyset$$

をみたす. □

補題 6.4 （無羨望性）仮定 6.1 をみたす任意の $\mathbf{V}_N$ に対し，アルゴリズム 3 は無羨望性をみたす. □

補題 6.5 （カット数の最小性）仮定 6.1 をみたす任意の $\mathbf{V}_N$ に対し，アルゴリズム 3 はカット数の最小性をもつ. □

補題 6.6 （最適性）仮定 6.1 をみたす任意の $\mathbf{V}_N$ に対し，アルゴリズム 3 は最適性をもつ. □

6.4.2 戦略的操作不可能性の証明

次に，アルゴリズム 3 の戦略的操作不可能性を議論する．アルゴリズム 3 の戦略的操作不可能性を示すために，仮定 6.1 をみたす各 $i \in N$ の

$$V_i = (\alpha_i, \beta_i] \tag{6.22}$$

からなる $\mathbf{V}_N = (V_1, \dots, V_{j-1}, V_j, V_{j+1}, \dots, V_n)$ に対して，

$$W_i = \begin{cases} V_i & (i \in N - \{j\} \text{ のとき}), \\ (\alpha'_j, \beta'_j] & (i = j \text{ のとき}) \end{cases} \tag{6.23}$$

として $\mathbf{W}_N$ を定義する．すなわち，

$$\mathbf{W}_N = (W_1, \dots, W_{j-1}, W_j, W_{j+1}, \dots, W_n) \tag{6.24}$$

である．さらに，

$$\mathbf{V}_{N-j} = (V_1, \dots, V_{j-1}, V_{j+1}, \dots, V_n) = (W_1, \dots, W_{j-1}, W_{j+1}, \dots, W_n) = \mathbf{W}_{N-j} \tag{6.25}$$

の記法を用いる．従って，

$$\mathbf{W}_N = (W_j, \mathbf{W}_{N-j}) = (W_j, \mathbf{V}_{N-j}), \quad \mathbf{V}_N = (V_j, \mathbf{V}_{N-j}) = (V_j, \mathbf{W}_{N-j})$$

である．さらに，アルゴリズムの説明や証明の記述の容易性を考慮して，各プレイヤー $i \in N$ のコピーのプレイヤー $n+i$ を仮想的に導入する．プレイヤー $n+i$ の評価区間 V_{n+i} を

$$\alpha_{n+i} = 1 + \alpha_i,\ \beta_{n+i} = 1 + \beta_i \tag{6.26}$$

を用いて

$$V_{n+i} = (\alpha_{n+i}, \beta_{n+i}] \tag{6.27}$$

と定義する．同様に，プレイヤー $n+i$ の評価区間 W_{n+i} を

$$W_{n+i} = \begin{cases} V_{n+i} & (i \in N - \{j\} \text{ のとき}), \\ (1 + \alpha'_j, 1 + \beta'_j] & (i = j \text{ のとき}) \end{cases} \tag{6.28}$$

と定義する．そして，$N_C = \{n+1, n+2, \dots, 2n\}$ とおく．すると，$N + N_C = \{1, 2, \dots, n, n+1, n+2, \dots, 2n\}$ での $\mathbf{V}_{N+N_C} = \{V_i \mid i \in N + N_C\}$ が仮定 6.1 をみたすことはすぐに得られる．また，$\mathbf{W}_{N+N_C} = \{W_i \mid i \in N + N_C\}$ であるが，一般性を失うことなく，仮定 6.1 をみたすと仮定できる．まず，非零性は，$\psi(W_j) > 0$ であればよい．また，被覆性に関しては，誰も欲しがらない部分を除けばよい．順序性については，$\alpha_j < \alpha_i$ かつ $\beta_j > \beta_i$ となる $W_i = (\alpha_i, \beta_i]$ を考える．このような W_i の中で，最も小さい β の値を $\beta_i^{\min}$ とおく．このとき，β_j を $\min\{\beta_j, \beta_i^{\min}\}$ へ更新すれば $\mathbf{W}_N$ が順序性をみたすようにできる（コピーについても同様）．以上の議論より，$\mathbf{W}_N$ は以下の仮定をみたすとする．以上の議論より，$\mathbf{V}_{N+N_C}, \mathbf{W}_{N+N_C}$ は以下の仮定をみたすとする．

仮定 6.5 プレイヤー集合 $N=\{1,2,\ldots n\}$ の式 (6.22) で定義される各 $i\in N$ の評価区間 $V_i=(\alpha_i,\beta_i]$ とそのコピー $V_{n+i}=(\alpha_{n+i},\beta_{n+i}]=(1+\alpha_i,1+\beta_i]$ からなる評価区間集合 $\mathbf{V}_{N+N_C}$ と式 (6.23) で定義される各 $i\in N$ の評価区間 W_i と式 (6.28) で定義されるそのコピー W_{n+i} からなる評価区間集合 $\mathbf{W}_{N+N_C}$ は以下の性質をみたす．

1. （非零性）各 $i\in N-\{j\}$ の評価区間 $V_i=W_i=(\alpha_i,\beta_i]\in\mathbf{V}_{N-j}=\mathbf{W}_{N-j}$ の大きさ $\psi(V_i)=\psi(W_i)$ および評価区間 $V_j=(\alpha_j,\beta_j]$，$W_j=(\alpha'_j,\beta'_j]$ の大きさは正である．すなわち，すべての $i\in N-\{j\}$ で $\psi(V_i)=\psi(W_i)=\beta_i-\alpha_i>0$ であり，$\psi(V_j)=\beta_j-\alpha_j>0$，$\psi(W_j)=\beta'_j-\alpha'_j>0$ である．

2. （被覆性）$\mathbf{V}_N$ と $\mathbf{W}_N$ のそれぞれにおいて，すべての評価区間の和集合はパイ全体に一致する．すなわち，
$$\bigcup_{i\in N}P(V_i)=\bigcup_{i\in N}P((\alpha_i,\beta_i]=(0,1]),$$
$$\bigcup_{i\in N}P(W_i)=\left(\bigcup_{i\in N-\{j\}}P((\alpha_i,\beta_i])\right)\cup P((\alpha'_j,\beta'_j])=(0,1]$$
である．

3. （順序性）任意の異なる $i,i'\in N$ に対して，$\alpha_i<\alpha_{i'}$ ならば $\beta_i\leq\beta_{i'}\leq 1+\beta_i$ である．
　さらに，評価区間 $V_i=(\alpha_i,\beta_i]$ の集合 $\mathbf{V}_N=\{V_i=(\alpha_i,\beta_i]\mid i\in N\}$ は，各 $V_i=(\alpha_i,\beta_i]$ を 2 次元 (α,β)-平面上の点 (α_i,β_i) と見なして，辞書式順 $\preceq$ でソートされているとする．すなわち，$i<i'$ ならば $(\alpha_i,\beta_i]\preceq(\alpha_{i'},\beta_{i'}]$ （すなわち（$\alpha_i<\alpha_{i'}$）あるいは（$\alpha_i=\alpha_{i'}$ かつ $\beta_i<\beta_{i'}$））である．さらに，
$$V_{j-1}=W_{j-1}=(\alpha_{j-1},\beta_{j-1}]\preceq W_j=(\alpha'_j,\beta'_j]\preceq V_{j+1}=W_{j+1}=(\alpha_{j+1},\beta_{j+1}]$$
である．すなわち，$\alpha_{j-1}\leq\alpha'_j\leq\alpha_{j+1}$ かつ $\beta_{j-1}\leq\beta'_j\leq\beta_{j+1}$ である（従って，$\mathbf{W}_N=\{W_i\mid i\in N\}$ も同じ辞書式順 $\preceq$ でソートされている）． □

仮定 6.5 をみたす $\mathbf{V}_N$ は仮定 6.1 をみたすことに注意しよう．同様に，$\mathbf{V}_N\leftarrow\mathbf{W}_N$ としたときの $\mathbf{V}_N$ も仮定 6.1 をみたす．上記の仮定 6.5 をみたす $\mathbf{V}_{N+N_C}$ と $\mathbf{W}_{N+N_C}$ に対して，入力を $\mathbf{V}_N$ としてアルゴリズム 3 を走らせたときと，入力を $\mathbf{W}_N$ としてアルゴリズム 3 を走らせたときの動作を比較する．比較をわかりやすくするために，入力を $\mathbf{V}_N$ としてアルゴリズム 3 を走らせたときのものに V を（上付きあるいは下付の）添え字として付随し，入力を $\mathbf{W}_N$ としてアルゴリズム 3 を走らせたときのものに W を（上付きあるいは下付の）添え字として付随しておく．

さらに，記述の容易性から，$\mathbf{V}_N$ に対してアルゴリズム 3 のステップ 1〜8 で得られる $[s..t]$ と R（すなわち，$[s^0..t^0]$ と R^1）は仮定 6.3 をみたすものとする．すなわち，
$$k=|[s^0..t^0]|,\quad s^0=n-k+1,\quad t^0=n,\quad [s^0..t^0]=[n-k+1..n],\quad R^1=[1..n-k] \tag{6.29}$$
が成立するとする．さらに，仮定 6.4 も成立するものとする．すなわち，すべての $i\in N$ で
$$V_i=(\alpha_i+1-\beta_n,\beta_i+1-\beta_n], \tag{6.30}$$

$$V_i^1 = (\alpha_i^1, \beta_i^1] = (\max\{\alpha_i + 1 - \beta_n, 0\}, \min\{\alpha_{n-k+1} + 1 - \beta_n, \beta_i + 1 - \beta_n\}] \tag{6.31}$$

であり，かつ

$$V_1^1 = (0, \min\{\alpha_{n-k+1} + 1 - \beta_n, \beta_1 + 1 - \beta_n\}] \tag{6.32}$$

が成立するとする．

任意のプレイヤー $j \in N$ に対して，仮定 6.5 をみたすとともに上記の仮定（仮定 6.3 と仮定 6.4）をみたす $\mathbf{V}_N$ を入力としてアルゴリズム 3 を走らせたときに j に割り当てられるパイの部分 A_j^V と，仮定 6.5 をみたす任意の $\mathbf{W}_N$ を入力としてアルゴリズム 3 を走らせたときに j に割り当てられるパイの部分 A_j^W との，j の効用を比較する．すなわち，

$$U_j(A_j^W) \leq U_j(A_j^V) \tag{6.33}$$

を示したい．これが言えれば，アルゴリズム 3 の戦略的操作不可能性を証明できたことになるからである．

そこで，(i) $\psi(A_j^W) \leq \psi(A_j^V)$ であるときと，(ii) $\psi(A_j^W) > \psi(A_j^V)$ であるときとに分けて議論する．

(i) $\psi(A_j^W) \leq \psi(A_j^V)$ であるとき．補題 6.2 より，

$$A_j^V \subseteq P(V_j), \quad \psi(A_j^V) = U_j(A_j^V)$$

である．従って，

$$U_j(A_j^W) = \psi(P(V_j) \cap A_j^W) \leq \psi(A_j^W) \leq \psi(A_j^V) = U_j(A_j^V)$$

となり，式 (6.33) が成立する．

(ii) $\psi(A_j^W) > \psi(A_j^V)$ であるとき．これ以降は，このケースのみを議論する．まず，アルゴリズム 3 のステップ 1 から 8 までに注目する．$\mathbf{V}_N$ に対しては仮定 6.3 をみたすものとしているので，式 (6.29) の

$$k_V = |[s_V^0..t_V^0]|, \quad s_V^0 = n - k_V + 1, \quad t_V^0 = n, \quad [s_V^0..t_V^0] = [n - k_V + 1..n], \quad R^1 = [1..n - k_V]$$

が成立する．さらに，仮定 6.4 も成立するものとしているので，式 (6.31) と式 (6.30) の

$$V_i^1 = (\alpha_i^1, \beta_i^1] = (\max\{\alpha_i + 1 - \beta_n, 0\}, \min\{\alpha_{n-k+1} + 1 - \beta_n, \beta_i + 1 - \beta_n\}],$$

$$V_i = (\alpha_i + 1 - \beta_n, \beta_i + 1 - \beta_n]$$

が成立する．同様に，$\mathbf{W}_N$ に対してアルゴリズム 3 のステップ 1 から 8 で得られる $[s_W^0..t_W^0]$ と R_W^1 を考える．

ここで，

$$[s_W^0..t_W^0] = [s_V^0..t_V^0] = [s^0..t^0]$$

のケースをまず考える．従って，$s^0 = s_V^0 = s_W^0$ かつ $t^0 = t_V^0 = t_W^0$ である．$j \notin [s^0..t^0] = [s_W^0..t_W^0] = [s_V^0..t_V^0]$ ならば，$R_W^1 = R_V^1 = R^1$ となり，$\mathbf{W}_{R^1}$ と $\mathbf{V}_{R^1}$ のそれぞれに対して命題 6.1

が適用できる．すなわち，ステップ 2 で $[s^0..t^0]$ のプレイヤーに割り当てられたパイの部分を除いて残ったパイの区間 $P' = P - P((\alpha_{s^0}, \beta_{s^0+|[s^0..t^0]|-1}])$ をケーキ C' と見なすと R^1 と $\mathbf{V}_{R^1}$，$\mathbf{W}_{R^1}$ は仮定 5.1 をみたす．従って，前章のケーキ分割問題における議論がそのまま適用できる．すなわち，補題 5.7 が適用できる．従って，式 (6.33) が得られる．

同様に，$s^0 < j < t^0$ ならば，$[s^0..t^0]$ において $\mathbf{W}_N$ における密度 Φ^0_W と $\mathbf{V}_N$ における密度 Φ^0_V は一致する．従って，$\psi(A^W_j) = \Phi^0_W$ かつ $\psi(A^V_j) = \Phi^0_V$ となるので，$\psi(A^W_j) > \psi(A^V_j)$ に反する．すなわち，$s^0 < j < t^0$ となることはない．

従って，$j = s^0$ あるいは $j = t^0$ である．$j = s^0 = t^0$ のときには，$A^W_j = P(W_j)$ かつ $A^V_j = P(V_j)$ から，$U_j(A^V_j) = \psi(V_j) \geq U_j(A^W_j)$ となり，式 (6.33) が成立する．ゆえに，$s^0 \neq t^0$ と仮定できる．対称性から，$j = s^0$ のときだけを議論する．$j = t^0$ のケースは，$j = s^0$ のときのケースを，パイの $(0, 1]$ を時計回りか反時計回りで考えるかの違いだけであるからである．$\psi(A^W_j) = \Phi^0_W > \Phi^0_V = \psi(A^V_j)$ であるので，$V_j = (\alpha^V_j, \beta^V_j]$ と $W_j = (\alpha^W_j, \beta^W_j]$ は $\alpha^V_j > \alpha^W_j$ をみたす．

さらに，任意の $i \in [s^0..t^0]$ に対しても $\psi(A^V_i) = \Phi^0_V$ かつ $\psi(A^W_i) = \Phi^0_W$ であるので，

$$\psi(A^W_i) = \Phi^0_W > \Phi^0_V = \psi(A^V_i) \tag{6.34}$$

である．また，補題 6.2 の（包含性）より，$i \neq j$ に対して

$$A^W_i \subseteq P(W_i) = P(V_i) \tag{6.35}$$

であり，

$$A^W_j \subseteq P(W_j)$$

である．従って，式 (6.29) の

$$k = |[s^0..t^0]|, \quad [s^0..t^0] = [n-k+1..n]$$

を用いると，$\mathbf{V}_N$ の $\{V_{s^0}, V_{s^0+1}, \ldots, V_{t^0}\}$ の区間の和集合の区間

$$I = (\alpha_{s^0}, \beta_{t^0}] = (\alpha_{n-k+1}, \beta_n]$$

に $A^W_{s^0+1} = A^W_{n-k+2}, A^W_{n-k+2}, \ldots, A^W_n$ を式 (6.35) をみたすように置ける．従って，この区間 I に置ける $A^W_j = A^W_{s^0}$ の部分の大きさ $U_j(A^W_j)$ は，$\mathbf{W}_N$ の順序性を考慮すると，高々

$$\psi(I) - \sum_{\{i \in [s^0..t^0] | i \neq j\}} \psi(A^W_i)$$

である．一方，区間 I に A_{s^0} も含めて $A^V_{s^0+1} = A^V_{n-k+2}, A^V_{n-k+2}, \ldots, A^V_n$ を，すべての $i \in [s^0..t^0]$ で $A^V_i \subseteq P(V_i)$ を満たしながら置け，

$$\psi(I) = \sum_{\{i \in [s^0..t^0]|\}} \psi(A^V_i)$$

である．式 (6.34) より，すべての $i \in [s^0..t^0]$ で $\psi(A_i^W) > \psi(A_i^V)$ であるので，W_N の順序性を考慮すると，この区間 I に置ける $A_j^W = A_{s^0}^W$ の部分の大きさ $U_j(A_j^W)$ は，

$$
\begin{array}{rcl}
U_j(A_j^W) & = & \psi(P(V_j) \cap A_j^W) \\
& \leq & \psi(I) - \displaystyle\sum_{\{i \in [s^0..t^0] | i \neq j\}} \psi(A_i^W) \\
& < & \psi(I) - \displaystyle\sum_{\{i \in [s^0..t^0] | i \neq j\}} \psi(A_i^V) = \psi(A_j^V) = U_j(A_j^V)
\end{array}
$$

となり，式 (6.33) が成立する．

以上の議論より，$[s_W^0..t_W^0] = [s_V^0..t_V^0] = [s^0..t^0]$ のケースでは，$s^0 < j < t^0$ となることはなく，それ以外では式 (6.33) が成立することが得られた．

従って，これ以降は，

$$
[s_W^0..t_W^0] \neq [s_V^0..t_V^0] \tag{6.36}
$$

のときのみを議論する．

$j \neq s_V^0, t_V^0$ （従って，$j \notin [s_V^0..t_V^0]$ あるいは $s_V^0 < j < t_V^0$）とすると，$[s_V^0..t_V^0]$ の $\mathbf{V}_N$ における密度 Φ_V^0 と $[s_V^0..t_V^0]$ の $\mathbf{W}_N$ における密度は一致する．さらに，$\mathbf{W}_N$ における密度が最小となる N の連続区間は $[s_W^0..t_W^0]$ であり，その密度は Φ_W^0 であるので，

$$
\Phi_V^0 \geq \Phi_W^0
$$

が成立する．同様に，$j \neq s_W^0, t_W^0$ （従って，$j \notin [s_W^0..t_W^0]$ あるいは $s_W^0 < j < t_W^0$）とすると，$[s_W^0..t_W^0]$ の $\mathbf{W}_N$ における密度 Φ_W^0 と $[s_W^0..t_W^0]$ の $\mathbf{V}_N$ における密度は一致する．さらに，$\mathbf{V}_N$ における密度が最小となる N の連続区間は $[s_V^0..t_V^0]$ であり，その密度は Φ_V^0 であるので，

$$
\Phi_W^0 \geq \Phi_V^0
$$

が成立する．以上より，$j \neq s_V^0, t_V^0$ かつ $j \neq s_W^0, t_W^0$ とすると，

$$
\Phi_W^0 = \Phi_V^0
$$

となり，

$$
[s_W^0..t_W^0] = [s_V^0..t_V^0] = [s^0..t^0]
$$

と選べることになる．しかし，これは $[s_W^0..t_W^0] \neq [s_V^0..t_V^0]$ であるとしていたことに反する．従って，

(a) $j \notin [s_V^0..t_V^0]$ かつ $j \in [s_W^0..t_W^0]$（$j = s_W^0$ または $j = t_W^0$），あるいは，

(b) $j \in [s_V^0..t_V^0]$（$j = s_V^0$ または $j = t_V^0$）かつ $j \notin [s_W^0..t_W^0]$，あるいは，

(c) $j \in [s_V^0..t_V^0]$（$j = s_V^0$ または $j = t_V^0$）かつ $j \in [s_W^0..t_W^0]$（$j = s_W^0$ または $j = t_W^0$）

のいずれかが成立する．

(a) $j \notin [s_V^0..t_V^0]$ かつ $j \in [s_W^0..t_W^0]$ のとき．上記の議論より

$$
\Phi_V^0 \geq \Phi_W^0
$$

であり，かつ $\psi(A_j^W)=\Phi_W^0$ であるので，$\psi(A_j^V)\geq\Phi_V^0$ から

$$\psi(A_j^V)\geq\Phi_V^0\geq\Phi_W^0=\psi(A_j^W)$$

となり，$\psi(A_j^W)>\psi(A_j^V)$ であることに矛盾する．従って，(a) のケースは起こらない．

(b) $j\in[s_V^0..t_V^0]$（$j=s_V^0$ または $j=t_V^0$）かつ $j\notin[s_W^0..t_W^0]$ のとき．上記の議論より

$$\Phi_V^0\leq\Phi_W^0$$

であり，かつ $\psi(A_j^V)=\Phi_V^0$ であるので，$\psi(A_j^W)\geq\Phi_W^0$ から

$$\psi(A_j^V)=\Phi_V^0\leq\Phi_W^0\leq\psi(A_j^W)$$

となる．$j=s_V^0$ あるいは $j=t_V^0$ のいずれかが成立する．$j=s^0=t^0$ のときには，$A_j^W=P(W_j)$ かつ $A_j^V=P(V_j)$ から，$U_j(A_j^V)=\psi(V_j)\geq U_j(A_j^W)$ となり，式 (6.33) が成立する．ゆえに，$s^0\neq t^0$ と仮定できる．対称性から，$j=s_V^0$ のときだけを議論する．$j=t_V^0$ のケースは，$j=s_V^0$ のときのケースを，パイの $(0,1]$ を時計回りか反時計回りで考えるかの違いだけであるからである．

さらに，任意の $i\in[s_V^0..t_V^0]$ に対しても $\psi(A_i^V)=\Phi_V^0$ であるので，

$$\psi(A_i^W)\geq\Phi_W^0\geq\Phi_V^0=\psi(A_i^V)\tag{6.37}$$

である．また，補題 6.2 の（包含性）より，$i\neq j$ に対して

$$A_i^W\subseteq P(W_i)=P(V_i)\tag{6.38}$$

であり，

$$A_j^W\subseteq P(W_j)$$

である．従って，式 (6.29) の

$$k_V=|[s_V^0..t_V^0]|,\quad [s_V^0..t_V^0]=[n-k_V+1..n]$$

を用いると，$\mathbf{V}_N$ の $\{V_{s_V^0},V_{s_V^0+1},\ldots,V_{t_V^0}\}$ の区間の和集合の区間

$$I=(\alpha_{s_V^0},\beta_{t_V^0}]=(\alpha_{n-k_V+1},\beta_n]$$

に $A_{s_V^0+1}^W=A_{n-k_V+2}^W,A_{n-k_V+2}^W,\ldots,A_n^W$ を式 (6.38) をみたすように置ける．従って，この区間 I に置ける $A_j^W=A_{s_V^0}^W$ の部分の大きさ $U_j(A_j^W)$ は，$\mathbf{W}_N$ の順序性を考慮すると，高々

$$\psi(I)-\sum_{\{i\in[s_V^0..t_V^0]|i\neq j\}}\psi(A_i^W)$$

である．一方，区間 I に $A_{s_V^0}$ も含めて $A_{s_V^0+1}^V=A_{n-k_V+2}^V,A_{n-k_V+2}^V,\ldots,A_n^V$ を，すべての $i\in[s_V^0..t_V^0]$ で $A_i^V\subseteq P(V_i)$ を満たしながら置け，

$$\psi(I)=\sum_{\{i\in[s_V^0..t_V^0]|\}}\psi(A_i^V)$$

である．式 (6.37) より，j と異なるすべての $i \in [s_V^0..t_V^0]$ で $\psi(A_i^W) \geq \psi(A_i^V)$ であるので，この区間 I に置ける $A_j^W = A_{s_V^0}^W$ の部分の大きさ $U_j(A_j^W)$ は，W_N の順序性を考慮すると，

$$
\begin{aligned}
U_j(A_j^W) &= \psi(P(V_j) \cap A_j^W) \\
&\leq \psi(I) - \sum_{\{i \in [s_V^0..t_V^0] | i \neq j\}} \psi(A_i^W) \\
&\leq \psi(I) - \sum_{\{i \in [s_V^0..t_V^0] | i \neq j\}} \psi(A_i^V) = \psi(A_j^V) = U_j(A_j^V)
\end{aligned}
$$

となり，式 (6.33) が成立する．

(c) $j \in [s_V^0..t_V^0]$（$j = s_V^0$ または $j = t_V^0$）かつ $j \in [s_W^0..t_W^0]$ （$j = s_W^0$ または $j = t_W^0$）のとき．$\Phi_W^0 = \psi(A_j^W)$ かつ $\Phi_V^0 = \psi(A_j^V)$ である．いまは $\psi(A_j^W) > \psi(A_j^V)$ であるときを議論しているので，

$$\Phi_W^0 = \psi(A_j^W) > \psi(A_j^V) = \Phi_V^0$$

である．ケース (b) の議論をここでも利用できる．すなわち，対称性から $j = s_V^0$ と仮定できる．さらに，任意の $i \in [s_V^0..t_V^0]$ に対しても $\psi(A_i^V) = \Phi_V^0$ であるので，

$$\psi(A_i^W) \geq \Phi_W^0 > \Phi_V^0 = \psi(A_i^V) \tag{6.39}$$

である．また，補題 6.2 の（包含性）より，$i \neq j$ に対して

$$A_i^W \subseteq P(W_i) = P(V_i) \tag{6.40}$$

であり，

$$A_j^W \subseteq P(W_j)$$

である．従って，式 (6.29) の

$$k_V = |[s_V^0..t_V^0]|, \quad [s_V^0..t_V^0] = [n - k_V + 1..n]$$

を用いると，$\mathbf{V}_N$ の $\{V_{s_V^0}, V_{s_V^0+1}, \ldots, V_{t_V^0}\}$ の区間の和集合の区間

$$I = (\alpha_{s_V^0}, \beta_{t_V^0}] = (\alpha_{n-k_V+1}, \beta_n]$$

に $A_{s_V^0+1}^W = A_{n-k_V+2}^W, A_{n-k_V+2}^W, \ldots, A_n^W$ を式 (6.40) をみたすように置ける．従って，この区間 I に置ける $A_j^W = A_{s_V^0}^W$ の部分の大きさ $U_j(A_j^W)$ は，$\mathbf{W}_N$ の順序性を考慮すると，高々

$$\psi(I) - \sum_{\{i \in [s_V^0..t_V^0] | i \neq j\}} \psi(A_i^W)$$

である．一方，区間 I に $A_{s_V^0}$ も含めて $A_{s_V^0+1}^V = A_{n-k_V+2}^V, A_{n-k_V+2}^V, \ldots, A_n^V$ を，すべての $i \in [s_V^0..t_V^0]$ で $A_i^V \subseteq P(V_i)$ を満たしながら置け，

$$\psi(I) = \sum_{\{i \in [s_V^0..t_V^0]|\}} \psi(A_i^V)$$

である．式 (6.39) より，j と異なるすべての $i \in [s_V^0..t_V^0]$ で $\psi(A_i^W) \geq \psi(A_i^V)$ であるので，この区間 I に置ける $A_j^W = A_{s_V^0}^W$ の部分の大きさ $U_j(A_j^W)$ は，W_N の順序性を考慮すると，

$$
\begin{aligned}
U_j(A_j^W) &= \psi(P(V_j) \cap A_j^W) \\
&\leq \psi(I) - \sum_{\{i \in [s_V^0..t_V^0] | i \neq j\}} \psi(A_i^W) \\
&\leq \psi(I) - \sum_{\{i \in [s_V^0..t_V^0] | i \neq j\}} \psi(A_i^V) = \psi(A_j^V) = U_j(A_j^V)
\end{aligned}
$$

となり，式 (6.33) が成立する．

従って，式 (6.33) の

$$U_j(A_j^W) \leq U_j(A_j^V)$$

が常に成立ことが示せた．すなわち，アルゴリズム 3 の戦略的操作不可能性を証明できた．

補題 6.1，6.4，6.5，6.6 および本項の議論から，アルゴリズムは，$O(n^3)$ で四つの性質をみたすことを示せた．以下に定理としてこの事実を示す．

定理 6.1 仮定 6.1 をみたす任意の $\mathbf{V}_N$ に対し，P-EFISM アルゴリズムは，無羨望性・カット数の最小性・最適性・戦略的操作不可能性をみたし，計算時間は $O(n^3)$ である．□

6.5 本章のむすび

6 章では，Alijani ら [1] が提案した EFISM アルゴリズムをパイ分割問題へも適用できるよう，拡張した．具体的には，P-EFISM アルゴリズムが無羨望性・カット数の最小性・最適性・戦略的操作不可能性をみたし，計算時間は $O(n^3)$ であることを示した．このことは，定義 6.7 より，強安定であることを意味する（戦略的操作不可能性・無羨望性が同時に成り立つとき，強安定と定義されている）．さらに，最適性から，アルゴリズムは常に目的関数の値が最大であるような割当を返す．また，目的関数の値が同じであれば，カット数は最小であることが望まれる．従って，四つの性質をもつことは，アルゴリズムが強安定であり、かつ最適であることを意味する．

以上の議論より，本章ではパイ分割問題に対し，安定的で最適な財の配分を行うアルゴリズムを提案した，といえる．

第 7 章　結論

本論文では，財が分割不可能である場合と，財が分割可能な場合，すなわち任意の箇所で切って分けることができる場合，それぞれに対して，安定的・最適な財の配分を達成するメカニズムおよびアルゴリズムの研究を行った．

前者を扱う問題として，組合せオークションを取り上げた．その中でも品物別入札の組合せオークション [9] を扱った．このメカニズムに対し，評価関数が劣加法性をみたし，超過入札がないと仮定すれば，無秩序の対価は 2 であることが証明されている [4]．これは，ナッシュ均衡解が存在すれば，その社会的幸福度は最適解の値の半分以上であることを意味する．これがナッシュ均衡解さえみつかれば，メカニズムが最適な財の配分（の近似）を達成する根拠である．

しかし，このメカニズムは評価関数プロファイルによっては弱安定ではない（ナッシュ均衡が存在しない）．ナッシュ均衡が存在しなければ，無秩序の対価による近似保証も利用できない．さらに，彼らはナッシュ均衡が存在する条件については未解決問題である，としている [4]．

そこで，本論文前半ではナッシュ均衡が存在するための必要十分条件を求めた．さらに，それを求めるための計算時間を示した．

具体的な成果として 2 章では，評価関数が劣加法性をみたし，かつ対称性をもつ場合，入札プロファイル $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ が実行可能（超過入札がないこと）であるための必要十分条件（定理 2.1）をもとめた．さらに，この条件から入札プロファイル $\boldsymbol{b}$ が実行可能であるかどうか判定するための計算時間は品物数を m, 入札者（プレイヤー）数を n とした場合，$O(mn)$ であること（系 2.1）を示した．

3 章では，プレイヤー数 $n = 2$ のときを議論した．まず，ナッシュ均衡が存在する必要十分条件（定理 3.2）を示した．次に準安定・安定という概念を定義し，入札プロファイル $\boldsymbol{b}$ がナッシュ均衡であることと，入札プロファイル $\boldsymbol{b}$ が準安定かつ安定であることが同値であることを証明した（定理 3.3）．このことにより，入札プロファイル $\boldsymbol{b}$ がナッシュ均衡であるかどうかは $O(m)$ で判定できることを示した（系 3.2）．さらに，定理 3.2，定理 3.3 を組み合わせれば，ナッシュ均衡が存在するかどうかを $O(m^2)$ で判定でき，存在する場合はナッシュ均衡解を $O(m^2)$ で求めることができることを示した（系 3.3）．

4 章では，任意のプレイヤー数に関して同様の議論を行った．まず，ナッシュ均衡が存在する必要十分条件を示した（定理 4.1）．次に準安定・安定という概念を定義し，入札プロファイル $\boldsymbol{b}$ がナッシュ均衡であることと，入札プロファイル $\boldsymbol{b}$ が準安定かつ安定であることが同値であることを証明した（定理 4.2）．このことにより，入札プロファイル $\boldsymbol{b}$ がナッシュ均衡であるかどうかは $O(mn)$ で判定できることを示した（系 4.1）．さらに，定理 4.1，定理 4.2 を組み合わせて用いれば，ナッシュ均衡が存在するかどうかを $O(mn\binom{m+n-1}{n-1})$ で判定でき，存在する場合は $O(mn\binom{m+n-1}{n-1})$ でナッシュ均衡を求めることができることを示した（系 4.2）．これは n が定数であれば，多項式

時間である．

以上の議論から，ナッシュ均衡が存在する必要十分条件が証明され，もし存在すれば，それを求めることが可能になったといえる．言い換えれば，メカニズムが弱安定である条件を示した．さらに存在するときは，ナッシュ均衡解を求めるためのアルゴリズムを明らかにした．これが求まれば，無秩序の対価が 2 である [4] ため，最適性に関しても最適解の値の半分以上が自動的に達成されることになる．

4 章までは分割不可能な財に関する議論であった．5 章以降では分割可能な財に関して議論を行った．これを扱う問題として，本論文ではケーキ分割問題およびパイ分割問題を扱った．本論文の直接的貢献は，Alijani et al. [1] が提案した EFISM アルゴリズムを，パイ分割問題においても適用できるように拡張したことである．

5 章では，Alijani et al. [1] が提案した，半開区間に対するケーキ分割問題に対するアルゴリズム，EFISM アルゴリズムが無羨望性・カット数の最小性・最適性・戦略的操作不可能性を同時にみたすことを改めて証明した（定理 5.1）．

戦略的操作不可能性とは，各プレイヤーがアルゴリズムへ嘘の評価区間を申告する誘因をもたない，すなわち，真の評価区間を申告することが支配戦略であることを意味する．これは，自動的にナッシュ均衡が存在することを意味するため，アルゴリズムは常に弱安定である．これに加えて，無羨望性も成り立つため，アルゴリズムは常に強安定であるといえる．

さらに最適性は，割当による効用の和が常に最大であることを意味する．すなわち，アルゴリズムは最適であるといえる．また，カット数は少ない方が，同じ効用であっても，より好ましいと考えられる（カット数が多いと，ケーキの細切れを割り当てることになるため）．アルゴリズムはカット数の最小性をもつため，各プレイヤーにちょうど 1 つのケーキの部分を割り当てる．

6 章では，EFISM アルゴリズムをパイ（始点と終点を同一視した半開区間）へ適用できるように拡張した，P-EFISM アルゴリズムを示した．このアルゴリズムが，パイ分割問題に対し，戦略的操作不可能性・無羨望性および，最適性・カット数の最小性を同時にみたすことを証明した（定理 6.1）．

6 章の議論によって，パイ分割問題においても，5 章と同様に最適で安定的な財の配分ができることを示すことができた．

謝辞

本論文の成果を博士論文へまとめることができたのは，第一に，研究へご指導および助言して下さった皆様のおかげです．

学部 2 年から現在までご指導賜りました中央大学理工学部情報工学科 浅野　孝夫 教授には，特にお世話になりました．学部 2 年の頃に自作の証明を丁寧に読んで頂き，その正当性についてご教授頂けたことは，今も深い感動とともに記憶に残っております．また，私は修士卒業後 2 年間，自分の生きるべき道を探すために，様々なチャレンジを行っていました．その時も，その様子を気にかけて下さっていたことおよび，共同研究員として大学に在籍させて頂き，勉強をさせて頂いたことも大変思い出深く，今でも感謝しております．もちろん，学生として在学中も研究面でお世話になりました．

中央大学理工学部情報工学科で助教を勤められていた，鮭川 矩義 先生には，論文に対しアドバイスを頂き，研究を良くすることが出来ました．

第二に，生活を支えて下さった皆様のおかげです．

まず，家族へ感謝申し上げます．私のことを全面的に信頼して頂き，博士後期課程への進学，および研究活動に対して理解して協力して頂いていることによって研究へ集中できていると感じています．

平岡 大輔 氏には，データ分析業務の実際をご教授頂きました．さらに，それを活かせる仕事も紹介して頂きました．これによって得たスキル・収入は，研究を続ける上で大切な資本になっています．

第三に，私に成長機会を与えて下さって皆様のおかげです．

上記に挙げた方々から，多大な影響を受けたのはいうまでもありません．また，浅野研究室の学部生・修士の方々に対して研究指導を行った経験は，まだまだ未熟な身である自分にとってもたくさんの気づきを与えてくれる貴重な機会でした．

また，友人たちにも感謝申し上げます．精神的に厳しいときも，彼らのおかげで乗り切ることができました．

最後に私に関係した全ての人へ感謝申し上げます．その方々がいらっしゃらなければ，今の私がないことは言うまでもありません．

参考文献

[1] R. Alijani, M. Farhadi, M. Ghodsi, M. Seddighin, and A. S. Tajik, Envy-free mechanisms with minimum number of cuts, *Proc. of 31st AAAI Conference on Artificial Intelligence*, pp. 312–318, 2017.

[2] H. Aziz and S. Mackenzie, A Discrete and Bounded Envy-Free Cake Cutting Protocol for Any Number of Agents, *Proc. of 57th IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, pp. 416–427, 2016.

[3] J. B. Barbanel, S. J. Brams, and W. Stromquist, Cutting a pie is not a piece of cake, *The American Mathematical Monthly*, Vol. 116, pp. 496–514, 2009.

[4] K. Bhawalkar and T. Roughgarden, Welfare guarantees for combinatorial auctions with item bidding, *Proc. of 22nd Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, pp. 700–709, 2011.

[5] A. Blume, P. Heidhues, J. Lafky, J. Münster, and M. Zhang, All Nash equilibria of the multi-unit Vickrey auction, *SFB/TR 15 Discussion Paper 116*, 2006.

[6] S. J. Brams and A. D. Taylor, An envy-free cake division rotocol, *The American Mathematical Monthly*, Vol.102.1, pp. 9–18, 1995.

[7] S. J. Brams and A. D. Taylor, *Fair Division : From Cake-Cutting to Dispute Resolution*, Cambridge University Press, 1996.

[8] Y. Chen, J. K. Lai, D. C. Parkes, and A. D. Procaccia, Truth, justice, and cake cutting, *Games and Economic Behavior*, Vol.77.1, pp. 284–297, 2013.

[9] G. Christodoulou, A. Kovács, and M. Schapira, Bayesian combinatorial auctions, *Proc. of 35th ICALP*, pp.820–832, 2008.

[10] X. Deng, Q. Qi, A. Saberi, Algorithmic solutions for envy-free cake cutting, *Operations Research*, Vol.60.6, pp. 1461–1476, 2012.

[11] S. Dobzinski, H. Fu, and R. Kleinberg, On the complexty of computing an equilibrium in combinatorial auctions, *Proc. of 26th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, pp. 110–122, 2015.

[12] S. Dobzinski, N. Nisan, and M. Schapira, Approximation Algorithms for combinatorial auctions with complement-free bidders, *Proc. of 37th Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, pp. 610–618, 2005.

[13] S. Dobzinski and M. Schapira, An improved approximation algorithm for combinatorial auctions with submodular bidders, *Proc. of 17th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, pp. 1064–1073, 2006.

[14] Debt Management Report 2011, The Government Debt Management and the State of Public Debts, Financial Bureau, Ministry of Finance, Japan, pp. 34–46.

[15] U. Feige, On maximizing welfare where utility functions are subadditive, *Proc. of 38th Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, pp. 41–50, 2006 (see also *SIAM J. Computing*, 39, pp. 122–142, 2009).

[16] D. Gale, Mathematical entertainments, *The Mathematical Intelligencer*, 15.1, pp. 48–52, 1993.

[17] G. Gamow, M. Stern, *Puile-math*, Viking Press, 1958.

[18] 伊藤　孝行，計算論的メカニズムデザイン，コンピュータソフトウェア，Vol. 25, pp.20–32, 2008.

[19] 伊藤　孝行,「メカニズムデザイン」（人工知能学会　編,『人工知能学大事典』），共立出版，pp.912–915，2017.

[20] 金森　久雄, 荒憲　治郎, 森口　親司,「資源配分」,『有斐閣経済辞典』第 5 版，有斐閣，p.499, 2013.

[21] B. de Keijzer, E. Markakis, G. Schäfer, and O. Telelis, Inefficiency of standard multi-unit auctions, *Proc. of 21th Annual European Symposium on Algorithms*, pp. 385–396, 2013.

[22] S. Khot, R. Lipton, E.Markakis, and A. Mehta, Inapproximability results for combinatorial auctions with submodular utility functions, *Proc. of WINE 2005, Lecture Notes in Computer Science 3828* pp. 92–28, 2005.

[23] E. Koutsoupias and C. Papadimitriou, Algorithmic Mechanism Design, *Computer Science Review*, Vol. 3, pp. 65–69, 2009.

[24] V. Krishna, *Auction theory* 2nd edition. Academic Press, 2010.

[25] A. M. Kwasnica and K. Sherstyuk, Multi-unit auctions, *Journal of Economic Surveys*, 27.3, pp. 461–490, 2013.

[26] B. Lehmann, D. Lehmann, and N. Nisan, Combinatorial auctions with decreasing marginal utilities, *Proc. of 3rd Annual ACM Symposium on Electronic Commerce*, pp. 18–28, 2001.

[27] N. Nisan, Bidding and allocation in combinatorial auctions, *Proc. of 2nd Annual ACM Symposium on Electronic Commerce*, pp. 1–12, 2000.

[28] N. Nisan and A. Ronen, Algorithmic Mechanism Design, *Games and Economic Behavior*, Vol. 35, pp. 166–196, 2001.

[29] A.D. Procaccia, Cake cutting: not just child's play, *Communications of ACM*, Vol.56, pp.78–87, 2013.

[30] T. Roughgarden, *Twenty Lectures on Algorithmic Game Theory*, Cambridge University Press, 2016.

[31] W. Stromquist, How to cut a cake fairly, *The American Mathematical Monthly*, Vol. 87.8, pp. 640–644, 1980.

[32] F. E. Su, Rental harmony: Sperner's lemma in fair division, *The American Mathematical Monthly*, 106.10, pp. 930–942, 1999.

[33] H. Umeda and T. Asano, Nash equilibria in combinatorial auctions with item bidding by two bidders, *Journal of Information Processing*, Vol.25, pp.745 – 754, 2017.

[34] H. Umeda and T. Asano, Nash equilibria in combinatorial auctions with item bidding and subadditive symmetric valuations, *IEICE Transactions on Fundamentals*, Vol.101-A(9) pp.1324–1333.

[35] H. Umeda and T. Asano, Unpublished note, Department of Information and System Engineering, Chuo University, 2017.

[36] J. Vondrák, Optimal approximation for the submodular welfare problem in the value oracle model, *Proc. of 40th Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, pp. 67–74, 2008.

[37] 横尾　真,「オークション」(人工知能学会　編.『人工知能学大事典』), 共立出版, pp. 910–912, 2017.