

論文の内容の要旨

論文題目 Chow group of zero cycles and Syntomic complex with modulus

本論文は第 I 部、第 II 部の二部構成である。両方に共通しているのは、 p 進体という整数論において基本的かつ重要な体上の代数多様体、あるいは p 進体の付値環(p 進整数環)上のスキームを扱っているという点である。以下にそれぞれの要旨を述べる。

第 I 部

一般に、体上の代数多様体が与えられると、それに付随して 0 サイクルの Chow 群とよばれる可換群が自然に定まる。代数多様体の Chow 群は、一般には「定義により可換群である」ということ以外にはほとんど分かっていない。本論文の第 I 部では、3 進体 k 上の多様体としてフェルマー型三次方程式

$$x^3 + y^3 + z^3 + c w^3 = 0 \quad (c \text{ は } k \text{ に属する定数で、} 3 \text{ 乗元でない})$$

で定義される射影曲面(対角的三次曲面)を考え、 c の order が 3 の倍数でないという仮定の下で、その 0 サイクルの Chow 群の構造がかなり詳しく分かることを計算によって示した。3 進体上の対角的三次曲面の 0 サイクルの Chow 群の構造については、斎藤秀司、佐藤周友、植松哲也らによって、部分的に計算されている。ただし、彼らの計算方法はブラウア一群の指標を計算する方法によるもので、 c の order が 3 を法として 2 に合同な場合には、 k の絶対分岐指数が 3 より大きいという仮定が必要であった。本論文では、曲面上に必要な 0 サイクルを具体的に作るという方法を用いているため、絶対分岐指数に関する仮定は不要になっている。

第 II 部

p 進体の絶対 Galois 群の p 進表現を解析する道具として、 p 進 Hodge 理論は今や必要不可欠である。その p 進 Hodge 理論の構築の際、J.-M. Fontaine と W. Messing により約 40 年前に導入されたのがスキームのサントミック景(サイト)という概念である。このサントミック景上の基本的な係数層 $S_n(r)$ の順像をとり、エタール景に落としたものがスキームのサントミック複体 $s_n(r)$ である。本論文では、 p 進整数環 O_k 上の正則半安定族 X に O_k 上平坦な有効 Cartier 因子 D によるモジュラスを付けた対 (X, D) に付随したサントミック複体 $s_n(r)_{X|D}$ を定義し、そのコホモロジー層をシンボル写像で解析した。モジュラスを付けない場合に、サントミック複体 $s_n(r)_X$ のコホモロジー層がシンボル写像の像で生成されていることは 30 年以上前から知られていたが、本論文では、次の二点を明らかにしている。(1) 因子 D が重複度 2 以上の成分をもつ場合、サントミック複体のコホモロジー層はもはやシンボルでは生成されない。(2) しかしながら、 D の台を固定して既約成分の重複度を動かすことによってシンボル写像を射影系とみなすと、シンボル写像は層の射影系の射として全射になっている。

論文審査の結果の要旨

1. 論文の主題

Chow group of zero cycles and Syntomic complex with modulus

(0 サイクルの Chow 群とモジュラス付きサントミック複体)

2. 当該研究分野における位置づけ

大域体 (代数体) および局所体 (p 進体) 上の代数多様体の Chow 群の構造は数論幾何学にとって基本的な問題意識である。また整数環上のスキームのコホモロジーの創造およびその双対性の探求も数論幾何学にとって大いに研究の余地のあるところである。本論文では、それらの問題意識について新しい知見を与えるものである。特に、第 II 部の主結果は、栗原将人、加藤和也、辻雄らによるサントミック複体 (ないし対数的サントミック複体) のコホモロジー層の計算の拡張であるだけでなく、2010 年代に Bruno Kahn、斎藤秀司、山崎隆雄らによって導入されたモジュラス付きモチーフという新しい混合モチーフ論のパラダイムにおいて、将来完成されるべき p 進実現の理論の基礎となり得るものであり、今後大きく発展することが期待される。

3. 論文の構成

本論文は序文、第 I 部、第 II 部で構成されている。全体のより詳しい構成は以下のとおりである。

Preface

References

Part I

1. Introduction
2. Preliminaries
3. Proof of the main results

References

Part II

4. Introduction
5. Syntomic complex with modulus
6. Main results
7. Proof of the main results
8. Calculation of $H^q(S_n(r)_{X|D})$ for $0 \leq r < q \leq p-2$
9. Acknowledgements

References

4. 論文の独自性と成果

第 I 部の主結果は J.-L. Colliot-Thélène、斎藤秀司、佐藤周友、植松哲也らの結果の拡張であるが、これらの先行研究は主に、対角的三次曲面の Brauer 群の指標を計算することによって 0 サイクルの Chow 群の構造を決定するという方針で得られたものがあった。これに対し、本論文の方針は対角的三次曲面の 0 サイクルの Chow 群の上限が予め決まっていることを用いて、対角的三次曲面上に 0 サイクルを具体的に構成するという「シンプルな」発想で行われている。そのため、Brauer 群の指標の計算に比べて技術的な条件が付きにくく、その結果として良い拡張が得られた。ただし、実際に構成したサイクルが欲しいサイクルであることを確かめるには、3 進体の 3 を法としたヒルベルト記号に関する明示公式を用いた繊細な計算が必要であったことを強調しておきたい。

第 II 部ではまず、J.-M. Fontaine、W. Messing、加藤和也、辻雄らが定義したスキームのサントミック複体をスキームと有効 Cartier 因子の対 (モジュラス対) に対するサントミック複体に拡張しているが、もともとあるスキームのサントミック複体の定義を援用するために、本論文では定義そのものをかなり工夫して与えている。また主結果であるシンボル写像の計算結果は、「モジュラスを一つ決めると全射ではないが、モジュラスの台を固定して重複度を動かすことによって射影系の射として全射になる」というこれまでになかった現象を捉えており、独自性は非常に高い。今後の応用が大いに期待できる結果である、といって過言ではないだろう。

5. 論文の課題

モジュラス付サントミック複体の応用の可能性について、整数環上の固有的でないスキームの算術的 dual 性やモジュラス付モチーフの p 進実現などが本論文で述べられているが、具体的には述べられていない。またモジュラスを定める因子 D が O_k 上平坦でない場合についても技術的な理由で扱われていない。今後の研究に期待したい。

6. 論文の評価

本論文では、 p 進整数環 O_k 上の正則スキーム X と O_k 上平坦な有効 Cartier 因子 D の対 (X, D) に対し、モジュラス付きサントミック複体を定義し、そのコホモロジー層をシンボル写像で理解することに成功している。また、整数環上固有的でないスキームの算術的 dual 性への応用だけでなく、モジュラス付きモチーフという新しい混合モチーフの枠組みにおいて p 進実現の理論を構築する際に基本的かつ重要な役割を果たすであろうことも期待される。これらのことを総合して、本論文の成果は単に新しいだけでなく、当該分野における学術的貢献度が極めて高いと判断し、本論文が博士 (理学) の学位論文として価値あるものと認める。また、2020 年 1 月 24 日、論文内容とそれに関連した事項について試問を行った結果、最終試験に合格と判断した。