

# Navier-Stokes 方程式の一般化座標系への座標 変換手法と座標変換プログラムの提案(1)

山田拓也\*, 山田 正†

## Proposal of a coordinate transformation method for Navier-Stokes equation and coordinate transformation program (1)

Takuya Yamada\*, Tadashi Yamada†

### abstract

The objectives of the present study are to improve coordinate transformation method for gravity term in Navier-Stokes equation and to disclose coordinate transformation program based on tensor analysis. Coordinate transformation is the effective tool for theoretical and numerical analysis from the perspective that analysis of physical phenomena on appropriate coordinate system makes its essential physical mechanism intelligible and makes treatment of boundary condition simple. However coordinate transformation accompany with a number of complex, difficult and time-consuming calculations. Traditional coordinate transformation method of gravity terms especially requires complicated calculation procedure. This study improves coordinate transformation idea by putting concept of gravity potential in use and makes its calculation much easier. In addition, whole coordinate transformation procedures of Navier-Stokes equation are programmed based on tensor analysis and this makes it possible to calculate a lot of coordinate transformation computation instantly.

### 1 はじめに

物理現象を適切な座標系に変換して後に理論解析をおこなうことは、すなわち現象の物理メカニズムに即した解析を行うことに通じ、難解な偏微分方程式の常微分方程式としての取り扱いや境界条件の取り扱いを容易にするなど、理論及び数値解析の両面において利点がある。座標変換に有効な数学的手段としては、1901年にリッチ、レビ・チビタにより創始され、アインシュタインの相対性理論 [1] によりその有効性が示されたテンソル解析がある。テンソル解析を用いた流体力学や気象学で用いる基礎式の座標変換手法については、Gal-Chen ら [3] や Pielke ら [4][5] により示されている。

Gal-Chen ら [3] はテンソル解析を用いて圧縮性流体の Navier-Stokes 方程式を天気予報などの気象学の数値解析で用いられる地形に沿う  $\sigma$  座標系へ座標変換する手法を示し、 $\sigma$  座標系での解析における境界条件の設定や流体塊の運動における連続性などに関して考察している。

Pielke ら [4][5] は、気象で用いる支配方程式を古典テンソル解析を用いて地形に沿う  $\sigma$  座標系へ座標変換する手法を示すと共に、静水圧の方程式系では、地形のスロープが十分小さくない場合、静水圧近似後に Chain

---

\*中央大学理工学部土木工学科 (〒112-8551 東京都文京区春日1丁目13-27)

†中央大学理工学部 (〒112-8551 東京都文京区春日1丁目13-27)

rule で座標変換した式とテンソル解析で座標変換を行った後に静水圧近似した式は一致しないことを示した。

これに対し Wong ら [6] は、微分の Chain rule とテンソル解析を用いた座標変換の計算が一致することを示したが、これは  $\sigma$  座標における地形に沿う座標方向の流速を水平方向流速と考えた場合に一致することを示しており、依然として微分の Chain rule による座標変換がテンソル解析を用いた場合と一致することは厳密には証明されていない。

本研究と同様にテンソル解析を用いた座標変換手法を示し、かつ座標変換プログラムを作成した研究として、著者の一人が数式処理言語である“REDUCE”を用いた研究がある。山田 [2] は、Navier-Stokes 方程式 (以後、NS 方程式と記す) を一般化座標系へ座標変換する手順を定式化し、数式処理言語“REDUCE”を用いて古典テンソル解析の範囲内で、NS 方程式を任意の座標系へ変換するプログラムを提案した。このように座標変換自体をプログラム化することで、非常に複雑な計算を伴うテンソル解析をもちいた座標変換を瞬時に行うことができるプログラムは山田が作成した REDUCE の座標変換プログラムが最初であり、理論解析における大きな飛躍をなしたと言える。

このようにテンソル解析を用いた気象・流体現象を支配する方程式の座標変換手法は、さまざまな研究者により研究され、論文や教科書などの形で出版されている。一方で、従来の座標変換手法については計算が困難な場合がある。従来、重力加速度の座標変換では、1 階の反変テンソルの座標変換則に沿った手法が一般的であるが、座標間関係式は旧座標を新座標の関数として定義する場合が多いため、実際の重力加速度項の座標変換では複雑な逆行列を計算する難点がある。本研究では重力ポテンシャルの考え方を重力加速度項の座標変換へと応用し、結果的に Gal-Chen ら [3] の方法と本質的に同じ結果を導くが計算が非常に容易な、スカラー量の座標変換手法に則した重力加速度項の変換手法を提案する。さらに本論文では、論文や教科書などに散在しているテンソル解析を用いた座標変換手法に関する知識を集約し、ベクトル表記の方程式をテンソル表記の方程式に変換し、テンソル解析を用いて座標系を変換し、最後にテンソル成分から物理成分へと変換する一連の座標変換手順について詳細に記載する。

## 2 テンソル解析の基本概念

### 2.1 テンソルの定義と基底ベクトル

デカルト座標系における NS 方程式の一般化座標系への座標変換に際し、まずテンソル解析の基礎概念を記述する。デカルト座標系における座標系を  $x^i = (x, y, z) = (x^1, x^2, x^3)$  とし、また基底ベクトルを  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  とする。この時、デカルト座標系での任意のベクトル  $\mathbf{f}$  は単位基底ベクトルを用いて次の様に表される。

$$\mathbf{f} = f^1 \mathbf{i} + f^2 \mathbf{j} + f^3 \mathbf{k} \quad (1)$$

次に一般化座標における基底ベクトルを示す。一般化座標系を  $\tilde{x}^i = (\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3)$  とする。一般化座標系においては、基底ベクトルは、以下の 2 通りで表される。ベクトル  $\boldsymbol{\tau}_i$  は  $\tilde{x}^i = \text{const}$  平面以外の座標平面に接する基底ベクトルであり、 $\boldsymbol{\eta}^j$  は  $\tilde{x}^j = \text{const}$  平面に直交する基底ベクトルである。 $\boldsymbol{\tau}_i$  及び  $\boldsymbol{\eta}^j$  の定義を Fig. 1 に示す。

任意の 1 階のテンソル (ベクトル)  $\mathbf{f}$  を一般化座標系の基底ベクトルを用いて表すと

$$\mathbf{f} = \tilde{f}_i \boldsymbol{\eta}^i = \tilde{f}^j \boldsymbol{\tau}_j \quad (2)$$

である。ただしテンソル解析においては一つの項の中に同じ添字の一对の共変添字 (下付き) 及び反変添字 (上付き) がある場合には、添字の全成分について総和をとることとする。これをアインシュタインの総和規約という。総和規約に基づいて式 (2) を書き換えると次の様になる。

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \tilde{f}_1 \boldsymbol{\eta}^1 + \tilde{f}_2 \boldsymbol{\eta}^2 + \tilde{f}_3 \boldsymbol{\eta}^3 \\ &= \tilde{f}^1 \boldsymbol{\tau}_1 + \tilde{f}^2 \boldsymbol{\tau}_2 + \tilde{f}^3 \boldsymbol{\tau}_3 \end{aligned} \quad (3)$$

また 2 階のテンソル  $\mathbf{A}$  は次式で表される。

$$\mathbf{A} = A^{ij} \boldsymbol{\tau}_i \boldsymbol{\tau}_j = A_{ij} \boldsymbol{\eta}^i \boldsymbol{\eta}^j = A_i^j \boldsymbol{\eta}^i \boldsymbol{\tau}_j = A_j^i \boldsymbol{\tau}_i \boldsymbol{\eta}^j \quad (4)$$

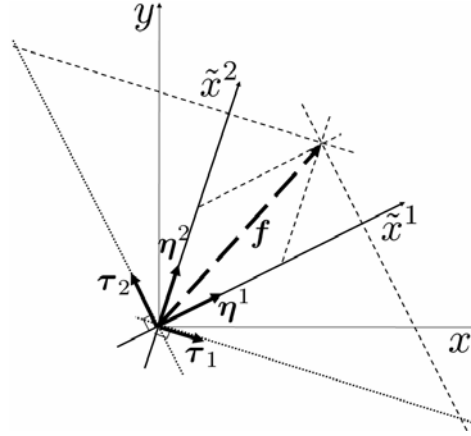


Fig. 1 テンソル解析で用いる基底ベクトルの定義

ここで、式 (4) 中の  $\tau_i \tau_j, \eta^i \eta^j, \eta^i \tau_j, \tau_i \eta^j$  はテンソル積 (ディアド積) と呼ばれており、以下の演算式を満たす。  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  を任意の基底ベクトルとすると

$$\begin{aligned} (\mathbf{ab}) \cdot \mathbf{c} &= \mathbf{a} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \\ \mathbf{c} \cdot (\mathbf{ab}) &= (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{b} \end{aligned} \quad (5)$$

が成立する。従って  $\mathbf{ab} \neq \mathbf{ba}$  であることがわかる。

一般化座標における基底ベクトル  $\tau_i$  及び  $\eta^j$  は、デカルト座標系の基底ベクトルを用いて次の様に表すことができる。

$$\tau_i = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i} (x^1 \mathbf{i} + x^2 \mathbf{j} + x^3 \mathbf{k}) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \tilde{x}^i} \quad (6)$$

$$\eta^j = \mathbf{i} \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^1} + \mathbf{j} \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^2} + \mathbf{k} \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^3} = \nabla \tilde{x}^j \quad (7)$$

一般化座標系における基底ベクトル (6), (7) は以下の考え方にに基づき定められる。デカルト座標系を  $x^i = (x^1, x^2, x^3)$ 、一般化座標系を  $\tilde{x}^i = (\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3)$  とすると、デカルト座標系から一般化座標系への座標変換はテンソル表記を用いて次式で表される。

$$\tilde{x}_i = f_i(x_1, x_2, x_3) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (8)$$

また、ベクトル表記では次式を用いて表される。

$$\tilde{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) \quad (9)$$

このとき、デカルト座標系における任意のベクトル  $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}^1 + x_2 \mathbf{e}^2 + x_3 \mathbf{e}^3$  (ただし  $\mathbf{e}^i$  はデカルト座標系における単位基底ベクトル) とすると、このベクトル  $\mathbf{x}$  の微小線素  $d\mathbf{x}$  は、デカルト座標系では単位基底ベクトルを用いて

$$d\mathbf{x} = \mathbf{e}_j dx^j \quad (10)$$

と表される。また、一般化座標系では合成関数の微分に基づき次式で表される。

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \tilde{x}^j} d\tilde{x}^j \quad (11)$$

従って同一のベクトルのデカルト座標系及び一般化座標系における表記 (10), (11) を比較すると, 一般化座標系における基底ベクトルの一つとして式 (6) を用いることが妥当である. また, 式 (6) が偏微分で表現されることから, 一般化座標系の基底ベクトル  $\boldsymbol{\tau}^i$  が一般化座標系の軸  $\tilde{x}^i$  方向にのみ変化し,  $\tilde{x}^i$  軸以外の軸方向に変化しないベクトルであることから, 基底ベクトル  $\boldsymbol{\tau}_i$  は  $\tilde{x}^i = \text{const}$  面以外の座標軸の等座標平面に接する基底ベクトルであることが解かる.

またさらに, ベクトル  $d\mathbf{x}$  の成分をデカルト座標系において求めると

$$dx^i = \mathbf{e}^i \cdot d\mathbf{x} \quad (12)$$

であり, 一般化座標系では

$$d\tilde{x}^i = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} dx^j = (\nabla \tilde{x}^i) \cdot d\mathbf{x} \quad (13)$$

と表現される. 従って同一ベクトルの, 異なる座標系における成分表記 (12), (13) を比較することにより, 一般化座標系における基底ベクトルとして式 (7) を用いることが妥当である. さらに式 (7) より, 一般化座標系における基底ベクトル  $\boldsymbol{\eta}^j$  が  $\tilde{x}^j$  軸の等座標平面 ( $\tilde{x}^j = \text{const}$  面) に直交する基底ベクトルであることが解かる.

一般化座標における基底ベクトル  $\boldsymbol{\tau}_i$ ,  $\boldsymbol{\eta}^i$  は, 直交座標系では

$$\boldsymbol{\tau}_i \cdot \boldsymbol{\tau}_j = \boldsymbol{\eta}^i \cdot \boldsymbol{\eta}^j = 0 \quad (14)$$

であり, 且つ  $\boldsymbol{\tau}_i = \boldsymbol{\eta}^i$  となり一致する. 一方, 非直交座標系では

$$\boldsymbol{\tau}_i \cdot \boldsymbol{\tau}_j \neq 0 \quad \boldsymbol{\eta}^i \cdot \boldsymbol{\eta}^j \neq 0 \quad (15)$$

となる. これらの基底ベクトルを用いて,  $\boldsymbol{\eta}^j$  で定義されるテンソルの成分  $\tilde{f}_j$  を共変テンソル成分,  $\boldsymbol{\tau}_i$  で定義されるテンソル成分  $\tilde{f}^i$  を反変テンソル成分と呼び, 各々上付きの添字 (反変添字) 及び下付きの添字 (共変添字) で表される. ただし上付きの添字は乗数ではないことに注意が必要である. また添字の数はテンソルの階数を表し,  $\tilde{u}^{ij}$  を 2 階の反変テンソル成分,  $\tilde{u}_{ij}$  を 2 階の共変テンソル成分,  $\tilde{u}^i_j$  を 2 階の混合テンソル成分と呼ぶ. ここで, 2 階のテンソルを行列で表す場合は以下の約束に従うものとする. 例として 2 階の反変テンソル成分を以下に示す.

$$a^{ij} = \begin{pmatrix} a^{11} & a^{12} & a^{13} \\ a^{21} & a^{22} & a^{23} \\ a^{31} & a^{32} & a^{33} \end{pmatrix} \quad (16)$$

2 階の共変及び反変テンソルの場合, 第 1 番目の添字が横行の番号を, 第 2 番目の添字が縦列の番号を表すものとする. また, 2 階の混合テンソルの場合には, 反変添字 (上付き) が横行の番号を, 共変添字 (下付き) が縦列の番号を表す.

## 2.2 基底ベクトルの座標変換

新座標  $\hat{x}^i$  (変数に  $\hat{\cdot}$  を付して表す) 及び旧座標  $x^i$  の基底ベクトルの座標変換則を求める. 新座標系の基底ベクトルを微分の連鎖則を用いて書き換えて整理する.

$$\hat{\boldsymbol{\tau}}_j = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \hat{x}^j} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial \hat{x}^j} = \boldsymbol{\tau}_i \frac{\partial x^i}{\partial \hat{x}^j} \quad (17)$$

以上より, 新座標及び旧座標の基底ベクトル  $\boldsymbol{\tau}$  を相互に座標変換する関係式を導いた.

同様に基底ベクトル  $\boldsymbol{\eta}$  に関しても、新座標と旧座標間で次式の座標変換則が成り立つ。

$$\begin{aligned}
 \hat{\boldsymbol{\eta}}^i &= \nabla \hat{x}^i = \left( \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^1}, \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^2}, \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^3} \right) \\
 &= \left( \frac{\partial x^j}{\partial x^1} \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^j}, \frac{\partial x^j}{\partial x^2} \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^j}, \frac{\partial x^j}{\partial x^3} \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^j} \right) \\
 &= \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^j} \left( \frac{\partial x^j}{\partial x^1}, \frac{\partial x^j}{\partial x^2}, \frac{\partial x^j}{\partial x^3} \right) \\
 &= \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^j} \nabla x^j \\
 &= \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^j} \boldsymbol{\eta}^j
 \end{aligned} \tag{18}$$

従って、上記の関係式 (17), (18) により、新座標及び旧座標間における基底ベクトルの座標変換則が示された。

### 2.3 テンソルの座標変換則

新旧座標間の基底ベクトルの座標変換則 (17), (18) を用いて、反変・共変テンソルの座標変換則を導く。新座標  $\hat{x}^i$  (変数に $\hat{\phantom{x}}$ を付して表す) 及び旧座標  $x^i$  とし、任意のベクトル  $\mathbf{f}$  を基底ベクトル  $\boldsymbol{\tau}$  に基づき新旧座標において表し、基底ベクトル  $\boldsymbol{\tau}$  の座標変換則 (17) を適用して式 (19) を得る。

$$\mathbf{f} = f^i \boldsymbol{\tau}_i = \hat{f}^i \hat{\boldsymbol{\tau}}_i = \hat{f}^i \frac{\partial x^j}{\partial \hat{x}^i} \boldsymbol{\tau}_j \tag{19}$$

式 (19) の最右辺の項の添字はアインシュタインの総和規約を適用するダミー添字であるので、ダミー添字を  $i \rightarrow j, j \rightarrow i$  と変更し、基底ベクトルについてまとめて整理することにより、1 階の反変テンソル成分の座標変換則 (20) を得る。

$$\hat{f}^i = \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^j} f^j \tag{20}$$

同様に任意のベクトル  $\mathbf{f}$  を基底ベクトル  $\boldsymbol{\eta}$  に基づき表し、さらに基底ベクトルの座標変換則 (18) を適用して式 (21) を得る。

$$\mathbf{f} = f_j \boldsymbol{\eta}^j = \hat{f}_i \hat{\boldsymbol{\eta}}^i = \hat{f}_i \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^j} \boldsymbol{\eta}^j \tag{21}$$

式 (21) を整理することにより、1 階の共変テンソル成分の座標変換則 (22) を得る。

$$\hat{f}_i = \frac{\partial x^j}{\partial \hat{x}^i} f_j \tag{22}$$

### 2.4 テンソルの定義

ここで、テンソルの定義について述べる。任意の座標系  $x^i = (x^1, x^2, x^3)$  で定義されている変数  $f_i$  及び  $f^j$  が、座標系  $\hat{x}^i = (\hat{x}^1, \hat{x}^2, \hat{x}^3)$  に座標変換される場合において、テンソル演算の座標変換則 (20), (22) に従う場合、その変数  $f_i$  及び  $f^j$  を成分とするものをテンソルであると定義する。ただし、これは 1 階の共変・反変テンソルにおける座標変換則であり、2 階以上の高階のテンソルに関しては式 (22) 及び式 (20) を応用して、反変及び共変添字の各成分の変換係数の積であらわされる。一般化座標系  $x^i$  での任意の階数の混合テンソル  $f_{ij\dots k}^{ab\dots c}$  を一般化座標系  $\hat{x}^i$  へ変換する際の変換則を以下に示す。

$$\tilde{f}_{\rho\alpha\dots\tau}^{\lambda\mu\dots\nu} = \frac{\partial \tilde{x}^\lambda}{\partial x^a} \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^b} \cdots \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^c} \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^\rho} \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^\alpha} \cdots \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^\tau} f_{ij\dots k}^{ab\dots c} \tag{23}$$

一般にテンソル解析において、変換式 (23) を満たす変数がテンソルと定義されている。

## 2.5 計量テンソルの定義と特性

直交座標系  $x^i$  における線素  $ds$  の微小線要素を  $d\mathbf{x} = (dx^1, dx^2, dx^3)$  とすると、線素  $ds$  の 2 乗は

$$\begin{aligned} ds^2 &= d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} \\ &= (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \\ &= \sum_{i=1}^3 dx^i dx^i \end{aligned} \quad (24)$$

と表される。ここで線素  $ds$  を一般化座標系  $\tilde{x}^j$  に座標変換する。式 (20) より、 $dx^i$  を座標系  $\tilde{x}^j$  を用いてあらわすと、

$$dx^i = \left( \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j} \right) d\tilde{x}^j \quad (25)$$

となり、従って式 (24) は

$$\begin{aligned} ds^2 &= \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j} d\tilde{x}^j \right) \left( \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k} d\tilde{x}^k \right) \\ &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j} \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k} d\tilde{x}^j d\tilde{x}^k \\ &= \tilde{G}_{jk} d\tilde{x}^j d\tilde{x}^k \end{aligned} \quad (26)$$

と一般化座標系  $\tilde{x}^j$  の変数を用いて表現される。ここで  $\tilde{G}_{jk}$  は反変形量テンソルと呼ばれており、次式で定義される。

$$\tilde{G}_{jk} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j} \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k} \quad (27)$$

また、同様に共変形量テンソルは

$$\tilde{G}^{jk} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i} \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^i} \quad (28)$$

と定義される。計量テンソルは座標変換前後におけるテンソルの物理成分の変化の大きさを表す重要な基本量である。計量テンソルの場合、下付き添字は反変計量テンソル、上付き添字は共変計量テンソルを表しており、テンソルの添字の位置と共変・反変の名前の関係が他のテンソルと異なることに注意する必要がある。

計量テンソルの重要な特性の 1 つは反変計量テンソルを用いて、反変テンソルを共変テンソルへ変換可能であり、また共変計量テンソルを用いることでその逆もまた可能なことである。共変・反変テンソルはそれぞれ異なる基底ベクトルに基づいて定義されているために、同種 (共変もしくは反変) のテンソル同士の和しか取ることができないテンソル演算において、この計量テンソルの特性は非常に重要な意味を持つ。なぜならば、デカルト座標系では反変・共変成分が一致するために、NS 方程式中の各項が共変・反変のいずれの成分であるかに注意にする必要は無い。しかしデカルト座標系から一般化座標系へ NS 方程式を変換する場合、NS 方程式の各項はそれぞれ共変・反変のいずれかの成分に分かれるため、各項の成分を共変・反変のどちらかに統一しなければならないためである。

以下に共変計量テンソル  $\tilde{G}^{jk}$  を用いて共変テンソル  $\tilde{f}_j$  を反変テンソル  $\tilde{f}^k$  に変換する方法を示す。ただし、計量テンソルの場合には、反変形量テンソル (27) の分子及び共変形量テンソル (28) の分母の同一の添字に付いて和を取ることにし、 $\Sigma$  を消去して表記する。

$$\begin{aligned}
\tilde{G}^{jk} \tilde{f}_j &= \left( \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i} \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^i} \right) \tilde{f}_j \\
&= \left( \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i} \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^i} \right) \frac{\partial x^l}{\partial \tilde{x}^j} f_l \\
&= \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i} \frac{\partial x^l}{\partial \tilde{x}^j} \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^i} f_l \\
&= \delta_i^l \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^i} f_l \\
&= \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^i} f_l \\
&= \tilde{f}^k
\end{aligned} \tag{29}$$

共変テンソル  $\tilde{f}_j$  は、反変計量テンソル  $\tilde{G}_{jk}$  及び反変テンソル  $\tilde{f}^k$  を用いて、同様な計算の結果導出される。

計量テンソルの値について見てみると、直交座標系においては、反変・共変計量テンソルの対角成分以外は全て 0 となり、一方、斜交座標系では計量テンソルの対角成分以外も値を持つ。座標系が直線座標系の場合、計量テンソルは全て定数となる。また、反変計量テンソルと共変計量テンソルの間には逆行列の関係が存在し、次式が成立する。

$$\tilde{G}^{jk} = \left[ \tilde{G}_{jk} \right]^{-1} \tag{30}$$

さらに反変計量テンソル  $\tilde{G}_{jk}$  の行列式を  $\tilde{G}$  とすると、

$$\begin{aligned}
\tilde{G} &= \left| \tilde{G}_{jk} \right| \\
&= \left| \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j} \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k} \right| \\
&= \left| \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j} \right|^2 \neq 0
\end{aligned} \tag{31}$$

となり、 $\tilde{G}$  は常に 0 でない正の値をとる。

式 (26) の  $ds$  はベクトル  $dx^i (= d\mathbf{x})$  の大きさであるので、 $ds, dx^i$  の代わりにベクトルの大きさ  $V$  (座標系に依らない物理的大きさ)、1 階の反変テンソル  $V^i$  を用いて式 (26) を表すと、

$$V = |V^i| = \left( G_{ij} \tilde{V}^i \tilde{V}^j \right)^{\frac{1}{2}} \tag{32}$$

となる。この時、添字  $i, j$  は総和規約により総和をとるダミー添字であるので式 (32) は不変量である。さらに同じテンソルの共変成分を  $V_i$  と置くと

$$V = |V_i| = \left( G^{ij} \tilde{V}_i \tilde{V}_j \right)^{\frac{1}{2}} \tag{33}$$

となる。

## 2.6 テンソルの共変微分

デカルト座標系の座標軸は直線であるため、単位基底ベクトルの大きさ及び方向は場所に依存しない。一方、一般化座標系では座標軸は直線が無い場合があり、よって基底ベクトルの大きさも場所に依存して変化する。従って、テンソル  $\mathbf{A} = A_j \boldsymbol{\eta}^j = A^j \boldsymbol{\tau}_j$  の空間微分を考える際には、基底ベクトルの空間変化を考慮する必要がある。

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x^i} &= \frac{\partial}{\partial x^i} (A_j \boldsymbol{\eta}^j) \\
 &= \frac{\partial A_j}{\partial x^i} \boldsymbol{\eta}^j + A_j \frac{\partial \boldsymbol{\eta}^j}{\partial x^i} \\
 &= A_{j;i} \boldsymbol{\eta}^j
 \end{aligned} \tag{34}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x^i} &= \frac{\partial}{\partial x^i} (A^j \boldsymbol{\tau}_j) \\
 &= \frac{\partial A^j}{\partial x^i} \boldsymbol{\tau}_j + A^j \frac{\partial \boldsymbol{\tau}_j}{\partial x^i} \\
 &= A^j_{;i} \boldsymbol{\tau}_j
 \end{aligned} \tag{35}$$

テンソル  $\mathbf{A}$  の共変成分及び反変成分の共変微分を式 (34), (35) に示す. テンソル成分の下付文字; は, その後に続く添字方向の空間独立変数によるテンソルの共変微分を示す. このようにデカルト座標系では単位基底ベクトルは空間の関数ではないが, 一般化座標系では基底ベクトルも空間の関数であるために, テンソルの空間微分に寄与する.

0 階, 1 階, 2 階のテンソルの共変微分を以下に示す. ここで, テンソル成分の微分及び共変微分の記号の定義を行う. 下付添字の「,」は, その後に続く添字の方向の空間座標による通常の微分を表し, 「;」はその後に続く添字の方向の空間座標による共変微分を表す.

0 階のテンソル (スカラー) は大きさのみをもち方向を持たない量である. 従って基底ベクトルの空間変化に依存しないため, 0 階のテンソル  $\tilde{\phi}$  の微分は以下のように定義される.

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tilde{x}^i} = \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\partial \phi}{\partial x^j} \tag{36}$$

これは, 共変テンソルの座標変換式 (22) に対応していることが分かる. テンソルの定義を考えるに, テンソル演算の座標変換則を満たす量をテンソルと定義しているため, 0 階のテンソルの微分 (共変微分) は 1 階の共変テンソルとなることが確認できる.

$$\tilde{\phi}_{;i} = \tilde{\phi}_{,i} = \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{x}^i} \tag{37}$$

0 階のテンソルの共変微分は式 (37) の左辺において, 共変微分の記号が下付き文字として付いているので, 共変微分により 1 階の共変テンソルとなることがテンソルの添字システムからも見て取れる. NS 方程式の一般化座標への座標変換においては, 圧力勾配項及び重力ポテンシャル項などのスカラー量の共変微分は 1 階の共変テンソルへと変化する.

次に 1 階の反変テンソル  $\phi^i$  の共変微分を以下に示す. 1 階のテンソルは一般化座標系の基底ベクトルに基づいて定義されるので, その微分においては基底ベクトルの空間変化を考慮する必要がある. NS 方程式における  $i$  方向の流速成分  $\tilde{u}^i$  は 1 階の反変テンソルであり, その共変微分は以下の式に従う.

$$\tilde{\phi}^i_{;j} = \frac{\partial \tilde{\phi}^i}{\partial \tilde{x}^j} + \tilde{\Gamma}^i_{jk} \tilde{\phi}^k \tag{38}$$

ただし  $\tilde{\Gamma}^i_{jk}$  は第 2 種クリストフェル記号であり, 一般化座標における座標軸の曲がりの影響を表す. クリストフェル記号の定義は,

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Gamma}^s_{ml} &= \frac{1}{2} \tilde{G}^{sj} \left( \frac{\partial \tilde{G}_{lj}}{\partial \tilde{x}^m} + \frac{\partial \tilde{G}_{mj}}{\partial \tilde{x}^l} - \frac{\partial \tilde{G}_{lm}}{\partial \tilde{x}^j} \right) \\
 &= \frac{\partial^2 x^n}{\partial \tilde{x}^l \partial \tilde{x}^m} \frac{\partial \tilde{x}^s}{\partial x^n}
 \end{aligned} \tag{39}$$

であり、添字の  $j$  について  $j = 1, 2, 3$  の和を取ることに注意が必要である。またクリストフェル記号の定義式 (6) より、添字の  $m$  と  $l$  に関して対称であり、 $\tilde{\Gamma}_{ml}^s = \tilde{\Gamma}_{lm}^s$  が成立する。直線座標系では計量テンソルは定数となり、従ってクリストフェル記号の成分は 0 となる。またクリストフェル記号と一般化座標の基底ベクトルの微分の間には次式が成立する。

$$\tau_{j,i} = \Gamma_{ji}^m \tau_m \quad (40)$$

$$\eta_{,i}^j = -\Gamma_{im}^j \eta^m \quad (41)$$

従って式 (40), (41) からクリストフェル記号が座標軸の曲がりの影響を表していることが理解でき、さらに 1 階の反変テンソルの共変微分の定義式 (4) は、式 (35) と等価であることが分かる。

同様の考察のもとに、1 階の共変テンソルの共変微分は以下の様に定義される。

$$\tilde{\phi}_{i;j} = \frac{\partial \tilde{\phi}_i}{\partial \tilde{x}^j} - \tilde{\Gamma}_{ji}^k \tilde{\phi}_k \quad (42)$$

また 2 階のテンソルの共変微分もクリストフェル記号を用いて次の様に表される。

$$\tilde{\phi}_{;k}^{ij} = \frac{\partial \tilde{\phi}^{ij}}{\partial \tilde{x}^k} + \tilde{\Gamma}_{mk}^i \tilde{\phi}^{mj} + \tilde{\Gamma}_{mk}^j \tilde{\phi}^{im} \quad (43)$$

$$\tilde{\phi}_{ij;k} = \frac{\partial \tilde{\phi}_{ij}}{\partial \tilde{x}^k} - \tilde{\Gamma}_{ik}^m \tilde{\phi}_{mj} - \tilde{\Gamma}_{jk}^m \tilde{\phi}_{im} \quad (44)$$

$$\tilde{\phi}_{j;k}^i = \frac{\partial \tilde{\phi}_j^i}{\partial \tilde{x}^k} + \tilde{\Gamma}_{mk}^i \tilde{\phi}_j^m - \tilde{\Gamma}_{jk}^m \tilde{\phi}_m^i \quad (45)$$

## 2.7 テンソル成分から物理成分へ変換

ここまで一般化座標系への座標変換において重要なテンソル解析の基礎を示して来た。テンソル解析では、未知量は全てテンソル成分として方程式を作るため、実用的な物理成分を求めるためにはテンソル解析の最後にテンソル成分を物理成分に変換する必要がある。テンソル成分と物理成分の関係を式 (32), (33) より考える。まず、反変テンソル  $V^i$  の特定の  $i = 2$  方向成分 (従って  $i$  の総和はとらない)  $V^2$  の大きさは

$$|V^2| = \sqrt{\tilde{G}_{22}} V^2 \quad (46)$$

と表されることから、テンソル  $V^j$  の特定の  $i$  成分の実際の大きさを  $\hat{V}^i$  として表すと

$$\hat{V}^i = |V^i| = \sqrt{\tilde{G}_{ii}} V^i \quad (47)$$

である。このようにテンソル  $V^j$  の  $i$  成分の実際の大きさ  $\hat{V}^i$  を物理成分と呼ぶ。また 1 階のテンソル (ベクトル)  $V^i$ ,  $V_i$  はそれぞれ  $\sqrt{\tilde{G}_{ii}}$ ,  $\sqrt{\tilde{G}^{ii}}$  を単位とした大きさであることがわかる。

以下に、テンソルの物理成分の求め方を示す。0 階のテンソル (スカラー) は、物理成分とテンソル成分が同じ大きさの値を持っている。従って以下に示す方法を用いて物理成分に変換する必要は無い。1 階の共変・反変テンソルを物理成分に変換する場合、反変及び共変計量テンソルを用いて、

$$\tilde{\phi}^i = \frac{1}{\sqrt{\tilde{G}_{ii}}} \hat{\phi}^i \quad (48)$$

$$\tilde{\phi}_i = \frac{1}{\sqrt{\tilde{G}^{ii}}} \hat{\phi}_i \quad (49)$$

により変換可能である。ただし、変数  $\phi$  上の  $\sim$  はテンソル成分を、 $\wedge$  は物理成分を表す。

さらに 2 階のテンソルを物理成分に変換する場合,

$$\tilde{\phi}^{ij} = \frac{1}{\sqrt{\tilde{G}_{ii}\tilde{G}_{jj}}} \hat{\phi}^{ij} \quad (50)$$

$$\tilde{\phi}_{ij} = \frac{1}{\sqrt{\tilde{G}^{ii}\tilde{G}^{jj}}} \hat{\phi}_{ij} \quad (51)$$

$$\tilde{\phi}_j^i = \frac{1}{\sqrt{\tilde{G}_{ii}\tilde{G}^{jj}}} \hat{\phi}_j^i \quad (52)$$

と変換することが可能である．ただし, 式 (48), (49), (50), (51), (52) では  $i, j$  について和を取らない．

### 3 NS 方程式の座標変換

#### 3.1 ベクトル表記とテンソル表記

ここまで, テンソル解析の基本的な計算方法を示した．従ってテンソルを用いて表記された支配方程式の各項を, テンソル解析に基づいて計算を行うことで座標変換を行うことが可能である．本章では座標変換を行うまえに, 支配方程式をテンソル表記へと書き換える手順を示す．テンソル成分表記への書き換えも, ここまで述べてきた基本的なテンソルの定義及び概念を理解すれば, 機械的に書き換えることが可能である．本章では, ベクトル表記の NS 方程式から出発して, NS 方程式をテンソル表記で表す方法を示す．

まず, 基礎方程式をベクトル表記により表す．ベクトルとは大きさと方向性を持つ物理量を指し, したがって座標系の取り方に依らず一意に定めることが可能である．これは任意のベクトル  $\mathbf{u}$  は如何なる座標系から眺めるとも, ただひとつのベクトルとして定まることを意味する．ただし, ベクトルの成分は空間座標の設定に依存し変化するが, これはベクトル自体が大きさ及び方向に関して変化しておらず, この特性を座標変換に用いる．ベクトル表記の NS 方程式は次式のように表される．

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \mathbf{f} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{T} \quad (53)$$

ただし,  $\mathbf{T}$  は応力テンソルであり, 次式で表される．

$$\mathbf{T} = - \left( P + \frac{2}{3} \mu \theta \right) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{e} \quad (54)$$

式 (54) を式 (53) に代入して整理して次式を得る．

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla \left( P + \frac{2}{3} \mu \theta \right) + 2\nu \nabla \cdot \mathbf{e} \quad (55)$$

ただし,  $\mathbf{u}$ : 流速ベクトル,  $\nabla$ : 微分演算子ナブラ,  $\rho$ : 水の密度,  $P$ : 圧力,  $\mu$ : 粘性率,  $\nu$ : 運動粘性率  $\left( = \frac{\mu}{\rho} \right)$ ,  $\theta$ : 体積圧縮率  $(= \nabla \cdot \mathbf{u})$ ,  $\mathbf{e}$ : 変形速度テンソルであり, 応力テンソル中の第一種及び第二種粘性率に関して Stokes の関係を適用している．

デカルト座標に基づいて考える場合, 流速ベクトル  $\mathbf{u}$  はただひとつの基底ベクトル  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  に基づいて  $\mathbf{u} = u_i \mathbf{i} + u_j \mathbf{j} + u_k \mathbf{k}$  と表現される．一方, テンソルの領域まで拡張する場合には, テンソルは 2 組の基底ベクトル  $\boldsymbol{\tau}_j, \boldsymbol{\eta}^j$  に基づいて定義されるため, 次の 2 通りの表現ができる．

$$\mathbf{u} = \begin{cases} u^j \boldsymbol{\tau}_j & (\text{反変成分表示}) \\ u_j \boldsymbol{\eta}^j & (\text{共変成分表示}) \end{cases} \quad (56)$$

ただし、基底ベクトル  $\boldsymbol{\tau}_j$  に基づくテンソルが反変テンソル、基底ベクトル  $\boldsymbol{\eta}^j$  に基づくテンソルが共変テンソルである。また、式中の添字  $j$  について、アインシュタインの総和規約に基づき総和を取る。以上より、ベクトル表記の NS 方程式 (55) の局所加速度項は、共変成分および反変成分に基づく 2 通りの表し方がある。

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} (u^j \boldsymbol{\tau}_j) & (\text{反変成分表示}) \\ \frac{\partial}{\partial t} (u_j \boldsymbol{\eta}^j) & (\text{共変成分表示}) \end{cases} \quad (57)$$

次に、微分演算子  $\nabla$  を、テンソルで表すと以下の様に表される。

$$\nabla = \boldsymbol{\eta}^j \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \quad (58)$$

テンソル表記のナブラを用いて、NS 方程式 (55) 中の左辺第 2 項のベクトル表記の移流項をテンソル表記に書き換える。

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= \left( (u^i \boldsymbol{\tau}_i) \cdot \boldsymbol{\eta}^j \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \right) u^k \boldsymbol{\tau}_k \\ &\quad \text{ここで } \boldsymbol{\tau}_i \cdot \boldsymbol{\eta}^j = \delta_i^j \text{ を使用.} \\ &= \left( u^i \delta_i^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) u^k \boldsymbol{\tau}_k \\ &= \left( u^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) u^k \boldsymbol{\tau}_k \\ &= u^j (u^k_{,j} \boldsymbol{\tau}_k + u^k \boldsymbol{\tau}_{k,j}) \\ &\quad \text{ここで, } \boldsymbol{\tau}_{k,j} = \Gamma_{kj}^m \boldsymbol{\tau}_m \text{ を使用.} \\ &= u^j (u^k_{,j} \boldsymbol{\tau}_k + u^k \Gamma_{kj}^m \boldsymbol{\tau}_m) \\ &= u^j (u^i_{,j} + u^k \Gamma_{kj}^i) \boldsymbol{\tau}_i \\ &= u^j u^i_{,j} \boldsymbol{\tau}_i \end{aligned} \quad (59)$$

となり、基底ベクトル  $\boldsymbol{\tau}_i$  に基づく反変テンソル成分表記へと書き換えることができる。

外力項  $\mathbf{f}$  も同様に

$$\mathbf{f} = \begin{cases} f^j \boldsymbol{\tau}_j & (\text{反変成分表示}) \\ f_j \boldsymbol{\eta}^j & (\text{共変成分表示}) \end{cases} \quad (60)$$

と書き換えられる。

さらに、ベクトル表記の NS 方程式の右辺第 2 項  $\frac{1}{\rho} \nabla \left( P + \frac{2}{3} \mu \theta \right)$  をテンソル成分で表す。微分演算子  $\nabla$  を式 (58) に基づき書き換える。ここで注目すべきは、圧力  $P$  は圧力の等方性からスカラー量である。従ってテンソル領域では、テンソルの共変微分は共変成分へと変化することを、この演算から理解することができる点である。

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \nabla \left( P + \frac{2}{3} \mu \theta \right) &= \frac{1}{\rho} \left( \boldsymbol{\eta}^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \left( P + \frac{2}{3} \mu \theta \right) \\ &= \frac{1}{\rho} \left( G^{ij} \boldsymbol{\tau}_i \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \left( P + \frac{2}{3} \mu \theta \right) \\ &= \frac{1}{\rho} \left\{ G^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j} \left( P + \frac{2}{3} \mu \theta \right) \right\} \boldsymbol{\tau}_i \end{aligned} \quad (61)$$

ただし、基底ベクトル  $\boldsymbol{\eta}^j$  は式 (29) に基づき、 $\boldsymbol{\eta}^j = G^{ij} \boldsymbol{\tau}_i$  のように基底ベクトル  $\boldsymbol{\tau}_i$  を用いた形式に書き換えられている。

ベクトル表記の NS 方程式 (55) の右辺第 3 項  $\nabla \cdot \mathbf{e}$  をテンソル成分表記の方程式系に変換する。ただし、変形速度テンソル  $\mathbf{e}$  は次式で定義される。

$$\mathbf{e} = e^{ij} \boldsymbol{\tau}_i \boldsymbol{\tau}_j \quad (62)$$

従って、右辺第 3 項  $\nabla \cdot \mathbf{e}$  は以下の様になる。

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{e} &= \left( \boldsymbol{\eta}^m \frac{\partial}{\partial x^m} \right) \cdot (e^{ij} \boldsymbol{\tau}_i \boldsymbol{\tau}_j) \\ &= \boldsymbol{\eta}^m \cdot (\boldsymbol{\tau}_i \boldsymbol{\tau}_j) e_{,m}^{ij} + e^{ij} \boldsymbol{\eta}^m \cdot \{ \boldsymbol{\tau}_{i,m} \boldsymbol{\tau}_j + \boldsymbol{\tau}_i \boldsymbol{\tau}_{j,m} \} \\ &= (\delta_i^m e_{,m}^{ij}) \boldsymbol{\tau}_j + e^{ij} \boldsymbol{\eta}^m \cdot (\Gamma_{im}^l \boldsymbol{\tau}_l \boldsymbol{\tau}_j + \Gamma_{jm}^l \boldsymbol{\tau}_l \boldsymbol{\tau}_i) \\ &= (\delta_i^m e_{,m}^{ij}) \boldsymbol{\tau}_j \\ &\quad + e^{ij} (\Gamma_{im}^l \boldsymbol{\eta}^m \cdot (\boldsymbol{\tau}_l \boldsymbol{\tau}_j) + \Gamma_{jm}^l \boldsymbol{\eta}^m \cdot (\boldsymbol{\tau}_i \boldsymbol{\tau}_l)) \\ &= (\delta_i^m e_{,m}^{ij}) \boldsymbol{\tau}_j + e^{ij} (\Gamma_{im}^l \delta_l^m \boldsymbol{\tau}_j + \Gamma_{jm}^l \delta_i^m \boldsymbol{\tau}_l) \\ &= e_{,i}^{ij} \boldsymbol{\tau}_j + e^{ij} (\Gamma_{il}^l \boldsymbol{\tau}_j + \Gamma_{ji}^l \boldsymbol{\tau}_l) \\ &= \left( e_{,i}^{ij} + e^{ij} \Gamma_{il}^l + e^{in} \Gamma_{ni}^j \right) \boldsymbol{\tau}_j \\ &= e_{;i}^{ij} \boldsymbol{\tau}_j \end{aligned} \quad (63)$$

このとき、テンソル積の演算式 (5) を用いている。また各項中のアインシュタインの総和規約をとるダミー添字の対応は一見、2 階の反変テンソル成分の共変微分の定義式 (5) に反している様に見えるが、実質上の計算は同じであることに注意する。

変形速度テンソル  $e^{ij}$  は次式で定義される。

$$\begin{aligned} e^{ij} &= \frac{1}{2} G^{im} G^{jn} (u_{m;n} + u_{n;m}) \\ &= \frac{1}{2} \left( G^{jn} (u^i)_{;n} + G^{im} (u^j)_{;m} \right) \end{aligned} \quad (64)$$

従って変形速度テンソルは添字に対して対称であり、 $e^{ij} = e^{ji}$  である。これより、式 (63) の変形速度テンソル  $e^{ij}$  の添字の順序を  $e^{ji}$  と変更し、かつ添字  $i, j$  自体を、 $i \leftrightarrow j$  と変更すると、式 (63) は最終的に次式で表現される。

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{e} &= e_{;i}^{ij} \boldsymbol{\tau}_j \\ &= e_{;j}^{ij} \boldsymbol{\tau}_i \end{aligned} \quad (65)$$

以上、個別に計算した NS 方程式の各項を反変の基底ベクトル  $\boldsymbol{\tau}_i$  に基づくテンソル表記にまとめて、NS 方程式 (55) に代入すると以下の式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^i}{\partial t} \boldsymbol{\tau}_i + u^j (u_{;j}^i + u^k \Gamma_{kj}^i) \boldsymbol{\tau}_i \\ = f^i \boldsymbol{\tau}_i - \frac{1}{\rho} \left\{ G^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j} \left( P + \frac{2}{3} \mu \theta \right) \right\} \boldsymbol{\tau}_i + 2\nu e_{;j}^{ij} \boldsymbol{\tau}_i \end{aligned} \quad (66)$$

式 (66) の両辺を基底ベクトル  $\boldsymbol{\tau}_i$  によりまとめることで、ベクトル表記の NS 方程式をテンソル表記へと書き換えることができる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^i}{\partial t} + u^j (u_{;j}^i + u^k \Gamma_{kj}^i) \\ = f^i - \frac{1}{\rho} \left\{ G^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j} \left( P + \frac{2}{3} \mu \theta \right) \right\} + 2\nu e_{;j}^{ij} \end{aligned} \quad (67)$$

また、ベクトル表記の NS 方程式 (53), (54) に対応する、応力テンソルを用いた表記は次式の様に表記される。

$$\frac{\partial u^i}{\partial t} + u^j u_{;j}^i = f^i + \frac{1}{\rho} T_{;j}^{ij} \quad (68)$$

$$T^{ij} = - \left( P + \frac{2}{3} \mu \theta \right) \tilde{G}^{im} \delta_m^j + 2\mu e^{ij} \quad (69)$$

ただし添字  $i$  は一般化座標系  $\tilde{x}^i$  での  $i = 1, 2, 3$  方向成分を表す。また  $\delta_m^j$  はクロネッカーのデルタ関数 (2 階の混合テンソル) であり、 $u^i$  は  $i$  方向の流速 (反変成分) である。

以上、テンソル解析を用いてテンソル成分表記の NS 方程式及び連続式を導いた。いずれの項も全て反変テンソルにより表記されている。また流体を非圧縮として取り扱う場合には、応力テンソル中の体積圧縮率は  $\theta = \text{div} \mathbf{u} = 0$  となる。非圧縮性流体の NS 方程式及び連続式は次式で表される。

$$\frac{\partial \tilde{u}^i}{\partial t} + \tilde{u}^j \cdot \tilde{u}_{;j}^i = - \frac{1}{\rho} \tilde{G}^{ij} P_{;j} - g \tilde{G}^{ij} \frac{\partial x^3}{\partial \tilde{x}^j} + 2\nu e_{;j}^{ij} \quad (70)$$

$$\tilde{u}_{;j}^j = 0 \quad (71)$$

## 4 テンソル解析を用いたテンソル成分表記の NS 方程式の座標変換方法

### 4.1 局所加速度項 $\frac{\partial \tilde{u}^i}{\partial t}$ の変換

まず、局所加速度項  $\frac{\partial \tilde{u}^i}{\partial t}$  の変換について考える。局所加速度項は時間についての微分であり、空間的な座標変換においては変化しない。

### 4.2 移流項 $\tilde{u}^j \tilde{u}_{;j}^i$ の変換

次に NS 方程式の移流項の座標変換を行う。共変微分の計算式 (4) 及びクリストフェル記号 (6) を用いて移流項を書き換える。

$$\begin{aligned} \tilde{u}^j \tilde{u}_{;j}^i &= \tilde{u}^j \left( \frac{\partial \tilde{u}^i}{\partial \tilde{x}^j} + \Gamma_{jk}^i \tilde{u}^k \right) \\ &= \tilde{u}^j \frac{\partial \tilde{u}^i}{\partial \tilde{x}^j} + \tilde{u}^j \Gamma_{jk}^i \tilde{u}^k \quad (j, k \text{ で和をとる}) \\ &= \tilde{u}^1 \frac{\partial \tilde{u}^i}{\partial \tilde{x}^1} + \tilde{u}^2 \frac{\partial \tilde{u}^i}{\partial \tilde{x}^2} + \tilde{u}^3 \frac{\partial \tilde{u}^i}{\partial \tilde{x}^3} \\ &\quad + \tilde{u}^1 \Gamma_{11}^i \tilde{u}^1 + \tilde{u}^2 \Gamma_{21}^i \tilde{u}^1 + \tilde{u}^3 \Gamma_{31}^i \tilde{u}^1 \\ &\quad + \tilde{u}^1 \Gamma_{12}^i \tilde{u}^2 + \tilde{u}^2 \Gamma_{22}^i \tilde{u}^2 + \tilde{u}^3 \Gamma_{32}^i \tilde{u}^2 \\ &\quad + \tilde{u}^1 \Gamma_{13}^i \tilde{u}^3 + \tilde{u}^2 \Gamma_{23}^i \tilde{u}^3 + \tilde{u}^3 \Gamma_{33}^i \tilde{u}^3 \end{aligned} \quad (72)$$

### 4.3 圧力勾配項 $P_{;j}$ の変換

圧力勾配項  $P_{;j}$  を座標変換する。圧力  $P$  は等方性であるので、座標変換を行ってもその大きさは変化しない。つまり、任意の地点における圧力の大きさは、空間座標の設定方法に依らない。以上より、圧力はテンソルの定義より 0 階のテンソル (スカラー) であると言える。また共変微分の定義より、0 階のテンソルの共変微分は 1 階の共変テンソルとなるので、圧力の共変微分  $\frac{\partial P}{\partial \tilde{x}^j}$  は、式 (37) より共変成分である。NS 方程式の座標変換において、全項を反変テンソル成分に統一する場合、全ての共変成分を反変成分に変換する必要があることに

注意が必要である．圧力の反変成分は，共変成分に共変計量テンソルをかけることにより以下の様に求めることができる．

$$\begin{aligned}
 \tilde{G}^{ij} \frac{\partial P}{\partial \tilde{x}^j} &= \left( \tilde{G}^{ij} P \right)_{;j} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\tilde{G}}} \frac{\partial \left( \tilde{G}^{ij} \sqrt{\tilde{G}} P \right)}{\partial \tilde{x}^j} + \tilde{\Gamma}_{mn}^i \left( \tilde{G}^{ij} P \right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\tilde{G}}} \frac{\partial \left( \tilde{G}^{ij} \sqrt{\tilde{G}} P \right)}{\partial \tilde{x}^j} \\
 &\quad - \frac{P}{\sqrt{\tilde{G}}} \frac{\partial \left( \tilde{G}^{ij} \sqrt{\tilde{G}} \right)}{\partial \tilde{x}^j}
 \end{aligned} \tag{73}$$

#### 4.4 本研究が提案する新しい重力加速度項の変換手法

従来の重力加速度の計算方法は，1 階の反変テンソルの座標変換則 (20) に基づく方法が一般的であり，以下の様に計算できる．

$$\begin{aligned}
 \tilde{g}^i &= \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} g^j \\
 &= \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^1} g^1 + \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^2} g^2 + \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^3} g^3 \\
 &= \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^3} g
 \end{aligned} \tag{74}$$

ただし， $g^i$  はデカルト座標系  $x^i$  における重力加速度ベクトル  $g^i = (g^1, g^2, g^3) = (0, 0, g)$  である．しかしながら，式 (9) の右辺の重力加速度の係数に注目すると，新座標  $\tilde{x}^i$  を旧座標  $x^j$  で微分する形となっており非常に計算し難い．なぜならば，座標変換において，座標間の関係式は一般的に  $x^j = f(\tilde{x}^i)$  の様に旧座標を新座標の関数として定義することが多く，また右辺の係数  $\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j}$  は行列  $\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j}$  の成分であり，単純な逆関数の微分から  $\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^3}$  を求めることができないためである．この場合，NS 方程式の全項の座標変換では，旧座標を新座標で微分する  $\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j}$  で計算可能であるのに対して，重力加速度項の計算には後に示す複雑な逆行列の計算を行う必要が生じる．

上記の重力加速度項の座標変換における煩雑な計算を回避するため，本研究では従来の重力加速度項の座標変換方法と最終的に同じ結果を導くが，計算が非常に簡易である座標変換方法を導いた．まず重力が保存力であり，流れの場に保存力場を仮定すると，重力ポテンシャル  $\phi$  が存在し，デカルト座標系では

$$\phi = \rho g z = \rho g x^3 \tag{75}$$

と記述することができる．ただし  $\rho$  は密度， $g$  はデカルト座標系における重力加速度項， $z (= x^3)$  はデカルト座標系における鉛直座標である．したがってデカルト座標系では共変の重力加速度ベクトル  $g_i$  は重力ポテンシャルを用いて次のように表される．

$$g_i = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \tag{76}$$

ここで重力ポテンシャルは 0 階のテンソルであり，その共変微分は 1 階の共変テンソルになる．したがってデカルト座標系における重力ポテンシャルの微分  $\frac{\partial \phi}{\partial x^i}$  は，テンソル解析における共変微分をデカルト座標系において行っただと考えると，計算の結果生じる重力加速度ベクトルは厳密には 1 階の共変テンソルである．デカル

ト座標系においては、共変テンソルと反変テンソルは一致するため、通常は共変・反変成分のいずれかであるかは配慮する必要は無いが、一般化座標に基づくテンソル解析においては変数が共変・反変テンソルのどちらであるかを明確にすることが非常に重要である。

同様に新座標  $\tilde{x}^i$  において、重力ポテンシャル  $\phi$  を用いて重力加速度ベクトル  $\tilde{g}_j$  を定義する。

$$\tilde{g}_j = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{x}^j} \quad (77)$$

テンソル解析における座標変換則 (22) より、デカルト座標及び新座標における重力加速度ベクトル  $g_i$ ,  $\tilde{g}_j$  は次の様に表される。

$$\tilde{g}_j = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j} g_i \quad (78)$$

次に、新座標における重力加速度ベクトルの共変成分  $\tilde{g}_j$  を反変成分  $\tilde{g}^i$  に式 (29) に基づいて変換する

$$\tilde{g}^i = \tilde{G}^{ij} \tilde{g}_j \quad (79)$$

以上の関係を用いて重力加速度の座標変換手法を以下に示す。式 (14) に式 (13), (11), 及び共変計量テンソルの定義 (28) を代入する。

$$\begin{aligned} \tilde{g}^i &= \tilde{G}^{ij} \tilde{g}_j \\ &= \tilde{G}^{ij} \frac{\partial x^m}{\partial \tilde{x}^j} g_m \\ &= \frac{1}{\rho} \tilde{G}^{ij} \frac{\partial x^m}{\partial \tilde{x}^j} \frac{\partial \phi}{\partial x^m} \end{aligned} \quad (80)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^k} \frac{\partial x^m}{\partial \tilde{x}^j} \frac{\partial \phi}{\partial x^m} \\ &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial x^m}{\partial x^k} \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial \phi}{\partial x^m} \\ &= \frac{1}{\rho} \delta_k^m \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial \phi}{\partial x^m} \end{aligned} \quad (81)$$

本研究の提案する重力加速度項の計算方法としては、式 (15) に重力ポテンシャルの定義 (10) を代入して

$$\begin{aligned} \tilde{g}^i &= \frac{1}{\rho} \tilde{G}^{ij} \frac{\partial x^m}{\partial \tilde{x}^j} \frac{\partial \phi}{\partial x^m} \\ &= \frac{1}{\rho} \tilde{G}^{ij} \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{x}^j} \\ &= g \tilde{G}^{ij} \frac{\partial x^3}{\partial \tilde{x}^j} \end{aligned} \quad (82)$$

と導出した。従来の重力加速度項は、座標変換において NS 方程式の重力加速度項以外の項はすべて座標変換前の座標  $x^i$  を変換後の座標  $\tilde{x}^j$  で微分しているのに反して唯一微分関係が逆となっており、実際の解析上、計算が困難であった。しかし本研究により示す式 (17) の重力加速度の座標変換手法ではこの点が改良されており、実際の計算上、解析が容易であるという長所をもつ。

また、従来の重力加速度の計算方法に関しても式 (16) より求めることができる。

$$\begin{aligned} \tilde{g}^i &= \frac{1}{\rho} \delta_k^m \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial \phi}{\partial x^m} \\ &= \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x^1} \delta_1^i \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^1} + \frac{\partial \phi}{\partial x^2} \delta_2^i \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^2} + \frac{\partial \phi}{\partial x^3} \delta_3^i \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^3} \right) \\ &\quad (\text{重力ポテンシャルの定義式 (10) を代入}) \\ &= g \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^3} \end{aligned} \quad (83)$$

従って本研究において提案する重力加速度の計算方法 (17) と、従来の計算方法 (18) は本質的に一致することが示された。

最後に、座標変換における座標間関係式が  $x^j = f(\tilde{x}^i)$  と与えられる場合の、従来の重力加速度の座標変換手法 (9) に基づく計算方法を示す。従来の重力加速度の座標変換における係数  $\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^3}$  は行列式  $\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j}$  の要素の 1 つである。したがって重力加速度係数の計算については逆関数の微分が成立しない。言い換えると

$$\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^3} \neq \frac{1}{\frac{\partial x^3}{\partial \tilde{x}^i}} \quad (84)$$

であり、複雑な計算を行う必要がある。一方で、重力加速度の係数を含む行列  $\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j}$  と  $\frac{\partial x^m}{\partial \tilde{x}^n}$  には逆行列の関係が存在し、次の様に表される。

$$\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} = \left( \frac{\partial x^m}{\partial \tilde{x}^n} \right)^{-1} \quad (85)$$

上記関係より、重力加速度の係数  $\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^3}$  を計算するためには、第 1 として式 (85) の右辺の行列  $\frac{\partial x^m}{\partial \tilde{x}^n}$  を計算する。右辺は旧座標  $x^j$  を新座標  $\tilde{x}^j$  で微分する形式であり、容易に解が得られることが解る。 $\frac{\partial x^m}{\partial \tilde{x}^n}$  の全成分を計算し、さらにその逆行列を求めることにより、求める重力加速度係数を含む行列  $\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j}$  の全項が求まる。これにより求めるべき重力加速度の係数  $\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^3}$  を計算することが可能である。しかしながら、上記行列計算は非常に複雑である場合が多く、従って本研究で示した重力加速度の計算方法が厳密性及び計算の簡易さを考慮して、非常に優れていると考える。

#### 4.5 共変微分をとった応力テンソル項の変換

NS 方程式中の共変微分を施した応力テンソル項の座標変換手法について考察する。共変微分を施した応力テンソル項は式 (2) に基づき次式で表される。

$$\begin{aligned} T_{;j}^{ij} &= - \left\{ \left( P + \frac{2}{3} \mu \theta \right) \tilde{G}^{im} \delta_m^j \right\}_{;j} + 2\mu e_{;j}^{ij} \\ &= -\delta_m^j \tilde{G}^{im} \left( P + \frac{2}{3} \mu \theta \right)_{;j} + 2\mu e_{;j}^{ij} \\ &= -\tilde{G}^{ij} \left( P + \frac{2}{3} \mu \theta \right)_{;j} + 2\mu e_{;j}^{ij} \end{aligned} \quad (86)$$

ここで非圧縮流体の場合、 $\theta = \text{div} \mathbf{u} = 0$  より、上式は以下の様に書き換えられる。

$$\begin{aligned} T_{;j}^{ij} &= -\tilde{G}^{ij} \left( P + \frac{2}{3} \mu \theta \right)_{;j} + 2\mu e_{;j}^{ij} \\ &= -\tilde{G}^{ij} P_{;j} + 2\mu e_{;j}^{ij} \end{aligned} \quad (87)$$

圧力項の共変微分は既に述べたので、ここではその計算方法を省略する。

従って次にテンソル表記の NS 方程式において変形速度テンソルの共変微分形式  $e_{;j}^{ij}$  で表される粘性項の計算手法を示す。NS 方程式において、変形速度テンソルのみが 2 階のテンソル成分であり、その共変微分をとるために非常に複雑なテンソル計算が必要となる。まず、変形速度テンソルの定義式 (3) を用いて、共変微分を施した変形速度テンソル項を展開する。

$$\begin{aligned} e_{;j}^{ij} &= \frac{1}{2} \left( G^{jn} (u^i)_{;n} + G^{im} (u^j)_{;m} \right)_{;j} \\ &= \frac{1}{2} \left( G^{jn} (u^i)_{;nj} + G^{im} (u^j)_{;mj} \right) (\because G_{;n}^{im} = 0) \\ &= \frac{1}{2} \left( G^{jn} (u^i)_{;nj} + G^{im} (u^j)_{;jm} \right) \end{aligned} \quad (88)$$

上記の計算より，共変微分を施した変形速度テンソルの右辺第 2 項は体積圧縮率  $\theta = u_{;j}^j$  となり，従って非圧縮性流体を考える場合には  $\theta = u_{;j}^j = 0$  となり消える．その後は，2 階の反変テンソル成分の共変微分の定義式 (5) に従い計算を行うことができる．

## 5 河川形状に沿う直交曲線座標系への NS 方程式の座標変換

### 5.1 河川に沿う直交曲線座標系の設定

河川の流れを理論・数値計算を用いて解析する場合，デカルト座標系に基づく矩形格子を用いることは地形形状への適用性，境界条件の設定が煩雑であり，理論解析上は計算が非常に複雑となる．また数値計算の観点からみると矩形格子が計算領域の形状に適合していないため，計算機のリソースを余分に消費することが考えられる．

以上の観点から，本研究では計算領域の形状に適合する座標系を採用することで，上記の困難を排除することを目的として，テンソル解析を用いた座標変換方法を前章までに示してきた．本章では，河川形状を正確に考慮することができる座標系の一例を示す．

デカルト座標系及び河川形状に沿う座標系間の関係式は，式 (22)，(23)，(24) の様に設定することができる．デカルト座標における独立変数を  $(x, y, z) = (x^1, x^2, x^3)$  と表し，河川形状に沿う座標系における座標を  $(s_a, n_a, z_a) = (\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3)$  と表している．

$$x^1 = \left( \int_0^{\tilde{x}^1} \cos \theta d\tilde{x}^1 - \tilde{x}^2 \sin \theta \right) \cos \alpha + \tilde{x}^3 \sin \alpha \quad (89)$$

$$x^2 = \int_0^{\tilde{x}^1} \sin \theta d\tilde{x}^1 + \tilde{x}^3 \cos \alpha \quad (90)$$

$$x^3 = - \left( \int_0^{\tilde{x}^1} \cos \theta d\tilde{x}^1 - \tilde{x}^2 \sin \theta \right) \sin \alpha + \tilde{x}^3 \cos \alpha \quad (91)$$

また，河川形状に沿う座標系の定義図を Fig. 3, Fig. 4 に示す．河川形状に沿う座標系の各独立変数は，流路中心軸と谷線との交点から流れ方向に流路中心線に沿って測った距離を  $\tilde{x}^1$ ，流路中心線の直角方向軸を  $\tilde{x}^2$ ，河床に垂直に  $\tilde{x}^3$  と定義する．河川に沿う座標系の座標軸  $\tilde{x}^1, \tilde{x}^2$  に接する面の，水平面からの勾配を  $\alpha$  とし，また座標系の設定時に任意に定める谷線と流路中心線の成す角  $\theta$  は，空間独立変数  $\tilde{x}^1$  の関数として  $\theta(\tilde{x}^1)$  と定める．ここで注意すべきは河川に沿う座標系の場合，座標を一意に定める変数は流路中心線を定める従属変数  $\theta(\tilde{x}^1)$  であり，デカルト座標と河川に沿う座標の関係式 (22)，(23)，(24) を座標として採用しても，実際の河川形状は未だ定まっていない点である．従って，座標形状を一意に定める従属変数  $\theta(\tilde{x}^1)$  を任意関数として，

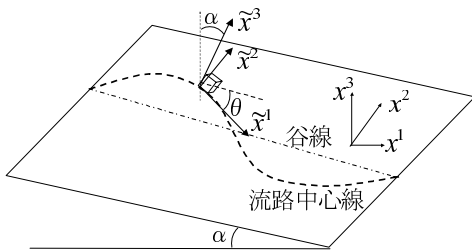


Fig. 2 河川形状に適合する直交曲線座標系の設定図 (1)

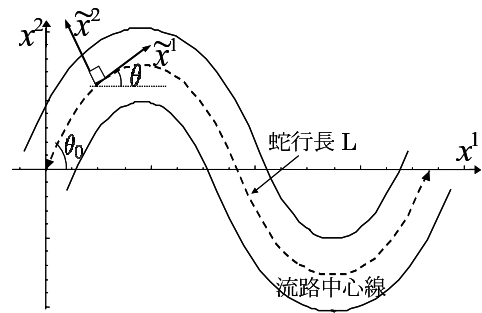


Fig. 3 河川形状に適合する直交曲線座標系の設定図 (2)

座標間関係式 (22), (23), (24) を用いて座標変換を行うことで, 座標変換後の方程式は, 座標系の設定をも方程式中に含んだ極めて一般的な方程式となる. 実際の座標系を確定するためには座標変換後の方程式中の変数  $\theta(\tilde{x}^1)$  に, 解析を行う河川形状に合う関数を代入すればよい.

以下に, デカルト座標と河川に沿う座標系の関係式 (22), (23), (24) を用いて座標変換を行う場合の計量テンソル及びクリストフェル記号の値を示す.

$$\tilde{G}_{jm} = \begin{pmatrix} (1 - \tilde{x}^2 \frac{d\theta}{d\tilde{x}^1})^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (92)$$

また, 共変計量テンソルは反変形量テンソルの逆テンソルとして次のように表される.

$$\tilde{G}^{jl} = \begin{pmatrix} \frac{1}{(1 - \tilde{x}^2 \frac{d\theta}{d\tilde{x}^1})^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (93)$$

さらに,  $\tilde{G}_{jm}$  の行列式を  $G$  とおくと

$$\begin{aligned} \tilde{G} &= |\tilde{G}_{ij}| \\ &= \left| \frac{\partial x^m}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\partial x^m}{\partial \tilde{x}^j} \right| \\ &= \left| \frac{\partial x^m}{\partial \tilde{x}^i} \right|^2 \\ &= \begin{vmatrix} (1 - \tilde{x}^2 \frac{d\theta}{d\tilde{x}^1})^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \left(1 - \tilde{x}^2 \frac{d\theta}{d\tilde{x}^1}\right)^2 \end{aligned} \quad (94)$$

となる. 座標変換におけるヤコビアン  $J$  は  $\tilde{G}$  を用いて次のように表すことができる.

$$J = \sqrt{\tilde{G}} = \left(1 - \tilde{x}^2 \frac{d\theta}{d\tilde{x}^1}\right) \quad (95)$$

次にクリストフェル記号  $\tilde{\Gamma}_{ml}^s$  を求める. デカルト座標系から河川に沿う座標系への変換におけるクリストフェル記号の成分を示す.

$$\tilde{\Gamma}_{ml}^1 = \begin{pmatrix} \frac{\tilde{x}^2 \frac{d^2\theta}{d\tilde{x}^1{}^2}}{1 - \tilde{x}^2 \frac{d\theta}{d\tilde{x}^1}} & -\frac{\frac{d\theta}{d\tilde{x}^1}}{1 - \tilde{x}^2 \frac{d\theta}{d\tilde{x}^1}} & 0 \\ -\frac{\frac{d\theta}{d\tilde{x}^1}}{1 - \tilde{x}^2 \frac{d\theta}{d\tilde{x}^1}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (96)$$

$$\tilde{\Gamma}_{ml}^2 = \begin{pmatrix} \frac{d\theta}{d\tilde{x}^1} - \tilde{x}^2 \left(\frac{d\theta}{d\tilde{x}^1}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (97)$$

$$\tilde{\Gamma}_{ml}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (98)$$

以上でテンソルを用いてデカルト座標系から河川に沿う座標系への座標変換を行う際に用いる共変計量テンソル, 反変計量テンソル及びクリストフェル記号を求めた. 依然として, 河川に沿う座標の形状を一意に定めるために用いる流路中心線は, 流路中心線を定める変数  $\theta(\tilde{x}^1)$  が任意関数の形を保っているために定まっていないことに注意する.

## 5.2 任意の河川形状に沿う座標系における NS 方程式の導出

座標形状を定める変数  $\theta(\tilde{x}^1)$  を任意関数として, 河川形状に沿う座標系における NS 方程式を導出する. NS 方程式を導出するにあたっては, 一般化座標系の NS 方程式 (70), 連続式 (71), デカルト座標系と河川に沿う座標系の関係式 (22), (23), (24), 反変計量テンソル (32) 及び共変計量テンソル (33), クリストフェル記号 (36), (37), (38) を用いる. 座標変換後の河川形状に沿う座標系における NS 方程式を式 (39), (40), (41) に, 連続式を (42) に示す. ただし, NS 方程式 (70) 及び連続式 (71) 中の流速のテンソル成分  $\tilde{u}^i$  は式 (48) を用いて, 式 (39), (40), (41), (42) 中では物理成分  $u^i$  に変換されている. この様にしてテンソル解析を用いて導出した物理成分表記の河川に沿う直交曲線座標系における NS 方程式を以下に示す.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u^1}{\partial t} + \left(1 - \tilde{x}^2 \frac{d\theta}{d\tilde{x}^1}\right)^{-1} u^1 \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{x}^1} + u^2 \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{x}^2} + u^3 \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{x}^3} \\ & - u^1 u^2 \left(1 - \tilde{x}^2 \frac{d\theta}{d\tilde{x}^1}\right)^{-1} \frac{d\theta}{d\tilde{x}^1} - g \cos \theta \sin \alpha \\ & - \left(1 - \tilde{x}^2 \frac{d\theta}{d\tilde{x}^1}\right)^{-1} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \tilde{x}^1} - \frac{\mu}{\rho} \left\{ -\frac{u^1 \left(\frac{d\theta}{d\tilde{x}^1}\right)^2}{\left(1 - \tilde{x}^2 \frac{d\theta}{d\tilde{x}^1}\right)^2} \right. \\ & - \frac{u^2 \frac{d^2\theta}{d\tilde{x}^{12}}}{\left(1 - \tilde{x}^2 \frac{d\theta}{d\tilde{x}^1}\right)^3} + \frac{\tilde{x}^2 \frac{d^2\theta}{d\tilde{x}^{12}}}{\left(1 - \tilde{x}^2 \frac{d\theta}{d\tilde{x}^1}\right)^3} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{x}^1} \\ & - \frac{\frac{d\theta}{d\tilde{x}^1}}{\left(1 - \tilde{x}^2 \frac{d\theta}{d\tilde{x}^1}\right)} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{x}^2} - \frac{2 \frac{d\theta}{d\tilde{x}^1}}{\left(1 - \tilde{x}^2 \frac{d\theta}{d\tilde{x}^1}\right)^2} \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{x}^1} \\ & \left. + \frac{1}{\left(1 - \tilde{x}^2 \frac{d\theta}{d\tilde{x}^1}\right)^2} \frac{\partial^2 u^1}{\partial \tilde{x}^{12}} + \frac{\partial^2 u^1}{\partial \tilde{x}^{22}} + \frac{\partial^2 u^1}{\partial \tilde{x}^{32}} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (99)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u^2}{\partial t} + \left(1 - \tilde{x}^2 \frac{d\theta}{d\tilde{x}^1}\right)^{-1} u^1 \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{x}^1} + u^2 \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{x}^2} + u^3 \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{x}^3} \\ & - (u^1)^2 \left(1 - \tilde{x}^2 \frac{d\theta}{d\tilde{x}^1}\right)^{-1} \frac{d\theta}{d\tilde{x}^1} + g \sin \theta \sin \alpha \\ & + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \tilde{x}^2} - \frac{\mu}{\rho} \left\{ -\frac{u^2 \left(\frac{d\theta}{d\tilde{x}^1}\right)^2}{\left(1 - \tilde{x}^2 \frac{d\theta}{d\tilde{x}^1}\right)^2} + \frac{u^1 \frac{d^2\theta}{d\tilde{x}^{12}}}{\left(1 - \tilde{x}^2 \frac{d\theta}{d\tilde{x}^1}\right)^3} \right. \\ & + \frac{\partial^2 u^2}{\partial \tilde{x}^{22}} + \frac{2 \frac{d\theta}{d\tilde{x}^1}}{\left(1 - \tilde{x}^2 \frac{d\theta}{d\tilde{x}^1}\right)^2} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{x}^1} + \frac{\partial^2 u^2}{\partial \tilde{x}^{32}} \\ & - \frac{\frac{d\theta}{d\tilde{x}^1}}{\left(1 - \tilde{x}^2 \frac{d\theta}{d\tilde{x}^1}\right)} \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\tilde{x}^2 \frac{d^2\theta}{d\tilde{x}^{12}}}{\left(1 - \tilde{x}^2 \frac{d\theta}{d\tilde{x}^1}\right)^3} \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{x}^1} \\ & \left. + \frac{1}{\left(1 - \tilde{x}^2 \frac{d\theta}{d\tilde{x}^1}\right)} \frac{\partial^2 u^2}{\partial \tilde{x}^{12}} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (100)$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial u^3}{\partial t} + \left(1 - \tilde{x}^2 \frac{d\theta}{d\tilde{x}^1}\right)^{-1} \tilde{u}^1 \frac{\partial u^3}{\partial \tilde{x}^1} + u^2 \frac{\partial u^3}{\partial \tilde{x}^2} + u^3 \frac{\partial u^3}{\partial \tilde{x}^3} \\
 & + g \cos \alpha + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \tilde{x}^3} - \frac{\mu}{\rho} \left\{ \frac{\partial^2 u^3}{\partial \tilde{x}^{32}} + \frac{\partial^2 u^3}{\partial \tilde{x}^{22}} \right. \\
 & - \frac{\frac{d\theta}{d\tilde{x}^1}}{\left(1 - \tilde{x}^2 \frac{d\theta}{d\tilde{x}^1}\right)} \frac{\partial u^3}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\tilde{x}^2 \frac{d^2\theta}{d\tilde{x}^{12}}}{\left(1 - \tilde{x}^2 \frac{d\theta}{d\tilde{x}^1}\right)^3} \frac{\partial u^3}{\partial \tilde{x}^1} \\
 & \left. + \frac{1}{\left(1 - \tilde{x}^2 \frac{d\theta}{d\tilde{x}^1}\right)^2} \frac{\partial^2 u^3}{\partial \tilde{x}^{12}} \right\} = 0
 \end{aligned} \tag{101}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{x}^1} + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^2} \left\{ \left(1 - \tilde{x}^2 \frac{d\theta}{d\tilde{x}^1}\right) u^2 \right\} \\
 & + \left(1 - \tilde{x}^2 \frac{d\theta}{d\tilde{x}^1}\right) \frac{\partial u^3}{\partial \tilde{x}^3} = 0
 \end{aligned} \tag{102}$$

従って、式 (39), (40), (41), (42) において、任意の河川の形状を座標系として採用する場合には、河川の流路中心線と谷線のなす角  $\theta$  を場所の関数として与えることにより、座標系を一意に定めることができ、任意の河川形状を座標系として取り込んだ NS 方程式及び連続式を得ることが可能である。

## 6 まとめ

本研究で得られた知見およびまとめを以下に示す。

- (1) 本研究では、ベクトル表記の方程式をテンソル表記の方程式に変換し、テンソル解析を用いて座標系を変換し、最後にテンソル成分から物理成分へと変換する一連の座標変換手順について詳細に記載し、本論文のみで座標変換に際して実質的に必要なテンソル解析の知識を習得できるようにまとめている。
- (2) 重力加速度項の座標変換手法において、重力ポテンシャルの考え方をを用いることで、従来の重力加速度の座標変換手法と本質的に同じ結果を出力するが、計算が非常に簡易である計算手法を導いた。
- (3) テンソル解析を用いて、デカルト座標系における NS 方程式を河川に沿う直交曲線座標系へと座標変換し、河川に沿う直交曲線座標系における NS 方程式を導出した。

## 謝辞

本研究は中央大学大学院理工学研究所の平成 15,18 年度共同研究プロジェクトおよび文部科学省科学研究費補助金基盤研究 (B) の支援を受けるものである。ここに記して謝意を表す。

## 参考文献

- [1] アインシュタイン選集 1, 2, 湯川秀樹監修, 共立出版, 1971 年
- [2] 山田 正: 数式処理言語 (REDUCE) を用いたナビエ・ストークス方程式の一般化座標への変換, 土木学会論文集, No.434/II-16, pp.77-80, 1991
- [3] Gal-Chen, T. and Somerville, R. C. J.: On the Use of a Coordinate Transformation for the Solution of the Navier-Stokes equations, *Journal of Computational Physics*, Vol.17, pp.209-228, 1975.
- [4] Pielke, R. A. and Martin, C. L.: The Derivation of a Terrain-Following Coordinate System for Use in a Hydrostatic Model, *J. Atmos. Sci.*, pp.1707-1713, 1981.

- [5] Pielke, R. A.: Mesoscale Meteorological Modelling, Academic Press, 1984.
- [6] Wong, R. K. W. and Hage, K. D.: Comment on “Terrein-following coordinates and the hydrostatic approximation”, J. Atmos. Sci., pp.2875–2880, 1983.
- [7] 横道 英雄：工学系のためのテンソル解析, 技報堂出版, 1983
- [8] 池谷 毅, 玉井 信行：平坦固定床蛇行水路に於ける三次元流況解析, 土木学会論文報告集, 第 342 号, pp.107–113, 1984.
- [9] 池谷 毅, 玉井 信行：蛇行河道内の流れの 3 次元解析, 第 27 回水理講演会論文集, pp.91–96, 1983.
- [10] 中林 功一, 鬼頭 修己：大学院のための流体力学, コロナ社, 1983.
- [11] 吉崎 正憲：地形に沿う座標系における方程式系, 気象研究ノート, 第 196 号, 1999.
- [12] Dutton J. A.: The Ceaseless Wind, An Introduction to the Theory of Atmospheric Motion, Dover Phoenix Edition.
- [13] Yen, B. C.: Characteristics of subcritical flow in a meandering channel, Institute of Hydraulic Research, The University of Iowa, 77 p.1965.