

構造物の制震・免震に関する研究

加藤証一郎^{*}, 八木裕子[†], 川原睦人[‡]

Research for the Response Control and Seismic Isolation of Building

Shoichiro KATO, Hiroko YAGI, Mutsuto KAWAHARA

abstract

The purpose of this study is to perform a numerical application of a shape optimization formulation of a body located in an incompressible viscous flow field. The formulation is based on an optimal control theory in which a performance function of fluid forces is introduced. The performance function should be minimized satisfying the state equation. This problem can be transformed into the minimization problem without constrain condition by the Lagrange multiplier and the adjoint equations using adjoint variables corresponding to the state equations. As a numerical example, drag force minimization problem in unsteady Navier-Stokes flow is carried out.

1 はじめに

流体中に置かれた物体が受ける抗力の大きさは物体形状に依存する．容積一定条件の下，最も抗力が小さくなるのはどのような形状であろうか．以前はこのような，ある条件を満たす形状の設計は，実験や技術者の経験に基づいて行われてきた．本研究の目的は，最適な形状を最適制御理論に基づき数値的に決定することである．

抗力最小化形状決定問題への取り組みは，Pironneau[1] [2] が Stokes 近似の成立する範囲でその解法の手順と解の性質を示し，その後数値流体力学の発展により流れ場が精度良く解析できることになったことにより本格化した．現在までに軸対象の場合においていくつかの仮定を設けることにより近似解が得られている．しかしこれらの結果は流れ関数が既知の場合にしか適用できず，汎用性がある解法とはいえない．

そこで，抗力を直接目的関数に取り，物体表面の座標値を設計変数に使用して形状決定を行う取り組みがなされてきた [3] [4] [5] [6]．この中で定常低 Reynolds 数流中での形状同定に成功している．本研究ではここで考案されたアルゴリズムを，Stokes 近似や Oseen 近似の成り立たない範囲の非定常流れに適用し，解を得ることを目的としている．

2 最適形状問題の定式化

最適形状問題の定式化は最適制御理論に基づいて行うものとする．尚，本論文では数式の表記に総和規約を用いている．形状を n 個の設計変数 X_1, X_2, \dots, X_n を使って定義する．評価関数 $F(U_i, X_j)$ は設計変数 X_i と状態量 U_i の関数である．本研究では Lagrange 乗数法を用い，支配方程式 $R_k(U_i, X_j) = 0$ を満たしな

^{*}中央大学大学院理工学研究科土木工学専攻（現在(株)ラティス 勤務）

[†]中央大学大学院理工学研究科土木工学専攻（現在(株)アイ・エヌ・エー 勤務）

[‡]中央大学理工学部土木工学（〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27）

がら評価関数 $F(U_i, X_j)$ を最小にするような X_i を求める拘束条件付の最小化問題を，拘束条件なしの最小化問題に置き換える．Lagrange 乗数 λ_i を導入すると，拡張評価関数 J は

$$J(U_i, X_j) = F(U_i, X_j) - \lambda_k R_k(U_i, X_j) \quad (1)$$

と表せる．評価関数を最小化する為の最適条件は， J の第一変分をゼロにすることにより導かれる．

$$\begin{aligned} \delta J(U_i, X_j) &= \left(\frac{\partial F}{\partial U_i} - \lambda_k \frac{\partial R_k}{\partial U_i} \right) \delta U_i \\ &+ \left(\frac{\partial F}{\partial X_i} - \lambda_k \frac{\partial R_k}{\partial X_i} \right) \delta X_i - R_k = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

これより，形状更新の勾配 G_i は次式で表される．

$$G_i = \frac{\partial J}{\partial X_i} = \frac{\partial F}{\partial X_i} - \lambda \frac{\partial R_k}{\partial X_i} \quad (3)$$

本研究では有限要素法により離散化した無次元化非圧縮 Navier-Stokes 方程式と面積一定条件を支配方程式 R_k として解析した．形状の設計変数 X_i は物体周りの座標値とし，自由度の高い設計を可能にした．また，目的関数 F には物体が流れから受ける力を直接用いる．

3 支配方程式

3.1 Navier-Stokes 方程式

境界 Γ を有する 2 次元空間領域 $\Omega \in R^2$ を定義し，領域 Ω は非圧縮粘性流体で満たされているものとする (Fig. 1)．支配方程式には，以下の無次元化された非圧縮 Navier-Stokes 方程式を用いる．

$$\dot{u}_i + u_j u_{i,j} + p_{,i} - \nu(u_{i,j} + u_{j,i})_{,j} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (4)$$

$$u_{i,i} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (5)$$

ここで， u_i と p は流速と圧力であり， ν は $1/Re$ を示し， Re は Reynolds 数である．境界条件は以下のよう
に与える．

$$u_i = (U_0, 0) \quad \text{on } \Gamma_U \quad (6)$$

$$t_i = 0 \quad \text{on } \Gamma_D \quad (7)$$

$$t_1 = 0, \quad u_2 = 0 \quad \text{on } \Gamma_S \quad (8)$$

$$u_i = 0 \quad \text{on } \Gamma_B \quad (9)$$

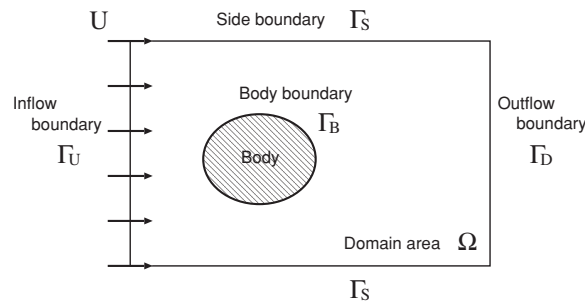


Fig. 1 Analysis domain and boundary condition

ここで，

$$t_i = \{-p\delta_{ij} + \nu(u_{i,j} + u_{j,i})\}n_j \quad (10)$$

であり， n_i は境界 Γ 上の法線方向単位ベクトルを表す．物体が受ける流体力は F_i と表され， F_1 は抗力を， F_2 は揚力を示す．流体力は物体周り Γ_B のトラクションの積分で与えられる．

$$F_i = - \int_{\Gamma_B} t_i d\Gamma \quad (11)$$

3.2 有限要素近似

支配方程式は，有限要素法を用いて近似することにより，設計変数 X_i の関数となり，勾配を直接計算することが可能になる．基礎方程式の重み付き残差方程式は以下のように表せる．

$$\int_{\Omega} w_i \dot{u}_i d\Omega + \int_{\Omega} w_i u_j u_{i,j} d\Omega + \int_{\Omega} w_i p_{,i} d\Omega - \nu \int_{\Omega} w_i (u_{i,j} + u_{j,i})_{,j} d\Omega = 0 \quad (12)$$

$$\int_{\Omega} q u_{i,i} d\Omega = 0 \quad (13)$$

ここで， w_i ， q は重み関数である．

補間関数には安定化気泡関数有限要素法 [7] [8] を用いる．この手法では，流速に関しては気泡関数要素 (Fig. 2) を，圧力に関しては一次要素を補間関数 (Fig. 3) に用いる．

1). 気泡関数補間

$$u_i = \Phi_1 u_{i1} + \Phi_2 u_{i2} + \Phi_3 u_{i3} + \Phi_4 \tilde{u}_{i4} \quad (14)$$

$$\tilde{u}_{i4} = u_{i4} - \frac{1}{3}(u_{i1} + u_{i2} + u_{i3}) \quad (15)$$

2). 一次補間

$$p = \Psi_1 p_1 + \Psi_2 p_2 + \Psi_3 p_3 \quad (16)$$

ここで， $\Phi_\alpha (\alpha = 1, 2, 3, 4)$ ， $\Psi_\lambda (\lambda = 1, 2, 3)$ はそれぞれ流速，圧力における形状関数を表す．

気泡関数は，どのような関数を選んでも，気泡関数要素の安定化パラメータを一定値以上に出来ないことから，数値的な安定性は必ずしも十分でないことが知られている．本手法では，適切に数値粘性を補う為に，式 (17) のように安定化作用 τ_{eB} を導入する．

$$\tau_{eB} = \frac{\langle \phi_e, 1 \rangle_{\Omega_e}^2}{(\nu + \nu') \|\phi_{e,j}\|_{\Omega_e}^2 A_e} \quad (17)$$

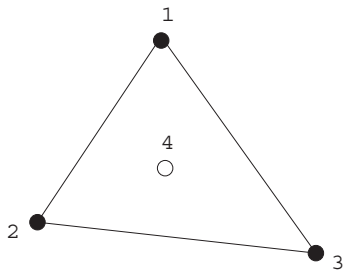


Fig. 2 Bubble function element

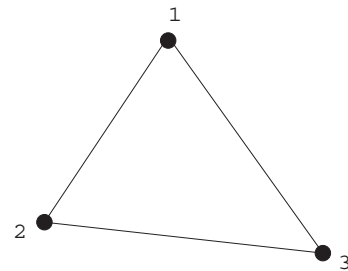


Fig. 3 Linear element

$$\langle \phi_e, 1 \rangle_{\Omega_e} = \frac{A_e}{3}, \quad \|\phi_{e,j}\|_{\Omega_e}^2 = 2A_e g, \quad g = \sum_{i=1}^2 |\Psi_{\alpha,i}|^2$$

ここで, ν', Ω_e, A_e はそれぞれ, 安定化作用に対する制御パラメータ, 各要素領域とその面積を表す. この値は式 (18) で与えられる SUPG 法 [9] の安定化パラメータ τ_{eS} と等価になるように決定する.

$$\tau_{eS} = \left[\left(\frac{2|u_i|}{h_e} \right)^2 + \left(\frac{4\nu}{h_e^2} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (18)$$

ここで, h_e は要素サイズを表す.

結果的に安定化気泡関数有限要素法の安定化パラメータは重心点のみに式 (19) で与えられる安定化項を付加した形となる.

$$\sum_{e=1}^{N_e} \nu' \|\phi_{e,j}\|_{\Omega_e}^2 b_e \quad (19)$$

N_e, b_e はそれぞれ, 総要素数と要素の重心点を表す.

以上を考慮すると, 有限要素方程式は以下のように示される.

$$M\dot{U}_i + A_{,j}(U_j)U_i - C_{,i}P + D_{,j,j}U_i + D_{,j,i}U_j = T_i \quad \text{in } \Omega \quad (20)$$

$$C_{,i}^T U_i = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (21)$$

ここで,

$$M = \int_{\Omega} \Phi_{\alpha} \Phi_{\beta}^T d\Omega, \quad A_{,j}(U_i) = \int_{\Omega} \Phi_{\alpha} \Phi_{\beta}^T U_i \Phi_{\gamma,j}^T d\Omega$$

$$C_{,i} = \int_{\Omega} \Phi_{\alpha,i} \Psi_{\beta}^T d\Omega, \quad T_i = \int_{\Gamma_B} \Phi_{\alpha} t_i d\Gamma$$

$$D_{,j,j} = \nu \int_{\Omega} \Phi_{\alpha,j} \Phi_{\beta,j}^T d\Omega, \quad D_{,j,i} = \nu \int_{\Omega} \Phi_{\alpha,j} \Phi_{\beta,i}^T d\Omega$$

であり, 各節点で離散化された流速と圧力はそれぞれ U_i, P と表される.

4 形状の決定

1 章で挙げた形状設計アルゴリズムを適用して, Navier-Stokes 流体中の物体が受ける力が最小になるような形状を, 境界の座標値を未知数として決定する.

4.1 面積一定条件

物体形状は, 全ての計算過程において面積一定条件を満たしながら最適化しなければならない. 物体の面積が一定であることは, 有限要素メッシュの全要素の面積の合計が一定であることと等価である. 面積一定条件は次の方程式で示される.

$$\sum_{e=1}^m (a_e(X_i)) - A_0 = 0 \quad (22)$$

ここで, $a_e(X_i)$ は各要素の面積の総和を, A_0 は初期領域の面積を表す.

4.2 評価関数

本研究では、流体力を直接評価関数に用いる [10]。評価関数 J は Navier-Stokes 方程式から計算されて得られた流体力の二乗和で定義される。

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (q_1 F_1^2 + q_2 F_2^2) dt \quad (23)$$

ここで、 q_1 と q_2 はそれぞれ抗力と揚力に対する重み関数を表す。Lagrange 乗数 U_i^* , P^* , λ を導入すると、拡張評価関数は式 (24) で表される。

$$\begin{aligned} J^* = & \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (q_1 F_1^2 + q_2 F_2^2) dt \\ & - \int_{t_0}^{t_f} U_i^{*T} (M \dot{U}_i + A_{,j}(U_j) U_i - C_{,i} P + D_{,j,j} U_i + D_{,j,i} U_j - T_i) dt \\ & + \int_{t_0}^{t_f} P^{*T} C_{,i}^T U_i dt \\ & + \lambda \left\{ \sum_{e=1}^m (a_e(X_i)) - A_0 \right\} \end{aligned} \quad (24)$$

4.3 停留条件

拡張評価関数 J^* の第一変分を取る。

$$\begin{aligned} \delta J^* = & - \int_{t_0}^{t_f} \delta U_i^{*T} (M \dot{U}_i + A_{,j}(U_j) U_i - C_{,i} P + D_{,j,j} U_i + D_{,j,i} U_j - T_i) dt \\ & + \int_{t_0}^{t_f} \delta P^{*T} C_{,i}^T U_i dt \\ & - \int_{t_0}^{t_f} \delta U_i^T (M^T \dot{U}_i^* + A_{,j}^T(U_j) U_i^* - C_{,i} P^* + D_{,j,j}^T U_i^* + D_{,j,i}^T U_j^* - T_i) dt \\ & + \int_{t_0}^{t_f} \delta P^T C_{,i}^T U_i^* dt \\ & + \int_{t_0}^{t_f} \delta T_1^T (U_1^* - q_1 F_1) dt + \int_{t_0}^{t_f} \delta T_2^T (U_2^* - q_2 F_2) dt \\ & + \delta \lambda^T \left\{ \sum_{e=1}^m (a_e(X_i)) - A_0 \right\} \\ & + \delta X_i^T G_i \end{aligned} \quad (25)$$

ここで、

$$\begin{aligned} G_k = & - \int_{t_0}^{t_f} U_i^{*T} \left(\frac{\partial M}{\partial X_k} \dot{U}_i + \frac{\partial A_{,j}(U_j)}{\partial X_k} U_i - \frac{\partial C_{,i}}{\partial X_k} P + \frac{\partial D_{,j,j}}{\partial X_k} U_i + \frac{\partial D_{,j,i}}{\partial X_k} U_j - \frac{\partial T_i}{\partial X_k} \right) dt \\ & + \int_{t_0}^{t_f} P^{*T} \frac{\partial C_{,i}^T}{\partial X_k} U_i dt \\ & + \lambda^T \frac{\partial}{\partial X_k} \sum_{e=1}^m a_e(X_i) \end{aligned} \quad (26)$$

であり, G_k は拡張評価関数の勾配となる．最適条件を得る為に各項をゼロとすると, 以下の式が得られる．

$$M\dot{U}_i + A_{,j}(U_j)U_i - C_{,i}P + D_{,j,j}U_i + D_{,j,i}U_j = T_i \quad \text{in } \Omega \quad (27)$$

$$C_{,i}^T U_i = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (28)$$

$$M^T \dot{U}_i^* + A_{,j}^T(U_j)U_i^* - C_{,i}P^* + D_{,j,j}^T U_i^* + D_{,j,i}^T U_j^* = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (29)$$

$$C_{,i}^T U_i^* = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (30)$$

$$U_1^* - q_1 F_1 = 0, \quad U_2^* - q_2 F_2 = 0 \quad \text{on } \Gamma_B \quad (31)$$

$$\sum_{e=1}^m (a_e(X_i)) - A_0 = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (32)$$

$$G_i = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (33)$$

$U_i, P, U_i^*, P^*, \lambda$ を式 (27) から (33) を満たすように解く．本問題の最適条件は (33) 式で表される．

4.4 スムージング法

計算された勾配はメッシュの方向性に依存することが分かっている．また, 数値振動の影響を受けやすい．そこで, 本研究では勾配を Laplace の方程式を用いてスムージングすることを考える．一次元の場合を考えると, 得られた勾配は (34) 式でスムージングできる．

$$\bar{G} - \epsilon \frac{\partial^2 \bar{G}}{\partial x^2} = G \quad (34)$$

5 最小化手法

5.1 最急降下法

本研究では最小化手法として最急降下法を用いた．この手法を用いると, 形状決定のパラメーターは以下の式で更新される．

$$X_i^{(l+1)} = X_i^{(l)} - \alpha \frac{\partial J^*(l)}{\partial X_i^{(l)}} \quad (35)$$

ここで α は重みを表すスカラー値である．

5.2 アルゴリズム

数値計算は以下のようなアルゴリズムに沿って行われる．

1. 初期形状の決定．
2. 式 (27), (28) より $U_i^{(0)}, P^{(0)}$ を解く．
3. 評価関数 $J^{(0)}$ を計算する．
4. 式 (29), (30), (31) より $U_i^{*(0)}, P^{*(0)}$ を解く．
5. 式 (35) より $X_i^{(l)}$ を計算する．
6. 式 (27), (28) より $U_i^{(l)}, P^{(l)}$ を解く．
7. 評価関数 $J^{(l)}$ を計算する．
8. $|X_i^{(l)} - X_i^{(l-1)}| < \epsilon$ ならば計算終了．
そうでなければ式 (29), (30), (31) より $U_i^{*(l)}, P^{*(l)}$ を解き, 5へ．

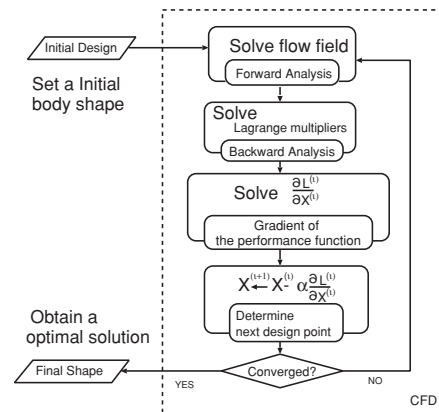


Fig. 4 Process of optimization

6 数値解析結果

数値解析例として、以下のような領域における物体の流体力最小化問題を扱った。領域は非圧縮粘性流体で満たされている。重み関数 q_1, q_2 はそれぞれ 1.0, 0.0 に設定した。Fig. 5 に解析領域を、Fig. 6 にその有限要素メッシュを示す。

6.1 Reynolds 数 1.0 における最適形状

はじめに、Reynolds 数を 1.0 として解析した。得られた形状と初期形状の比較を Fig. 7 に示す。Fig. 8 は解析結果の有限要素メッシュ図である。Reynolds 数 1.0 の時、Stokes 流れ中において、Pironneau は物体表面上で渦度が一定になるという最適形状の必要条件を示した。ここで、解析により得られた形状を、Stokes 流れ中の解析で得られた Pironneau の条件を満たす形状と比較する (Fig. 9)。形状は一致しており、最適形状のアルゴリズムが非定常流れに適用できたといえる。

6.2 Reynolds 数 250.0 における最適形状

次に、Reynolds 数を 250.0 として解析する。初期形状として、円と 6.1 で得られた Reynolds 数 1.0 における最適形状の 2 つを用いる。Fig. 10 は初期形状のメッシュを、Fig. 11 は最適形状のメッシュを示す。どちらの場合も、同じように重心が後方に移動し、先端がとがり、後方が丸まった形状が得られた。Fig. 12 は物体表面上の圧力分布を示している。最適形状においては、初期形状 (円柱) に比べて、物体前後と上下における圧力差が低減していることが分かる (本研究では円柱の中心を座標値 (0,0) と定めた)。Fig. 13 は抗力係数の時間履歴を示している。抗力係数は円柱に比べて 64% 減少した。Figs. 14, 15 はそれぞれの形状での周囲の流況 (圧力分布と流速分布) を示している。

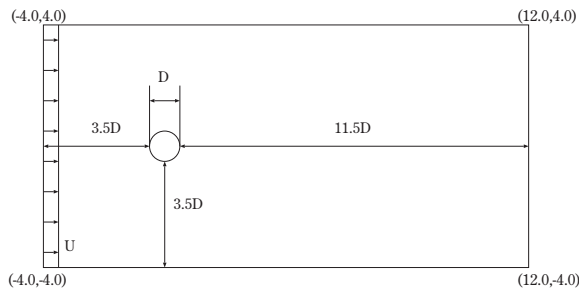


Fig. 5 Computational domain

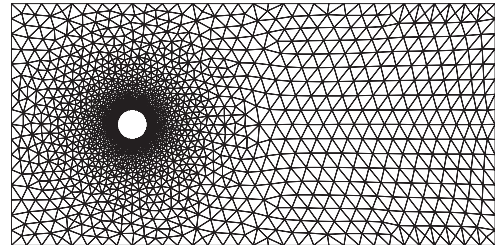


Fig. 6 Finite element mesh

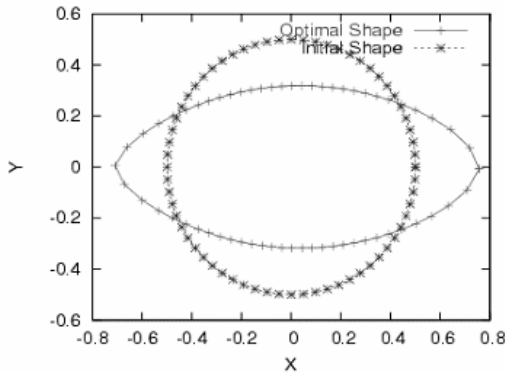


Fig. 7 Initial shape and optimal shape

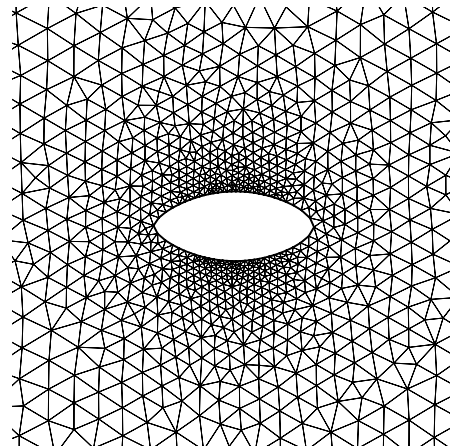


Fig. 8 Finite element mesh of optimal shape

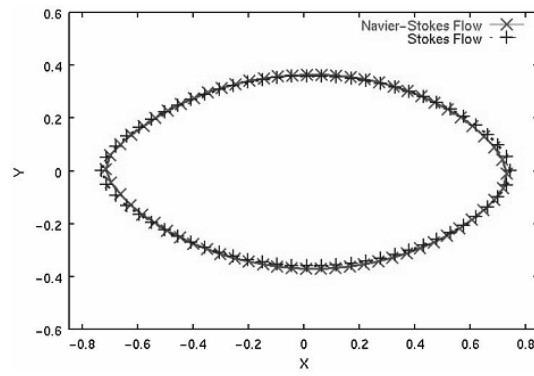
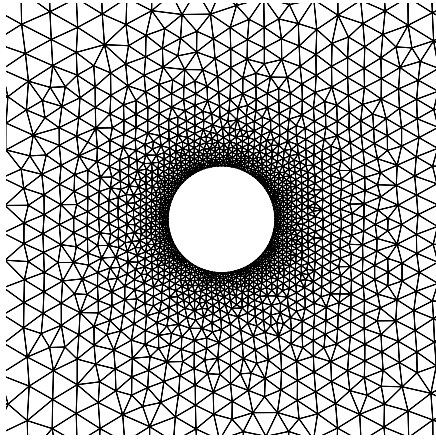
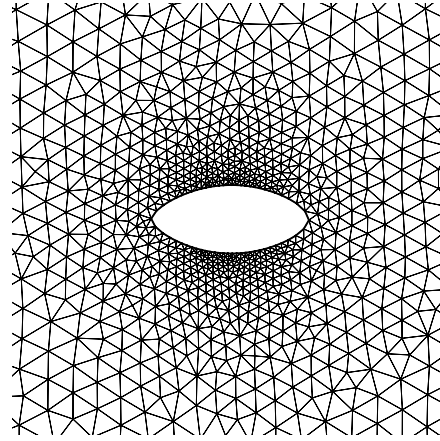


Fig. 9 Comparison of optimal shape

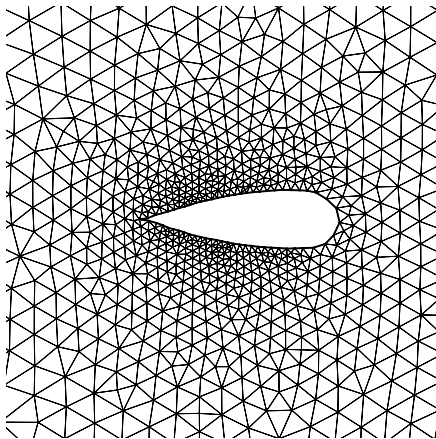


(a)

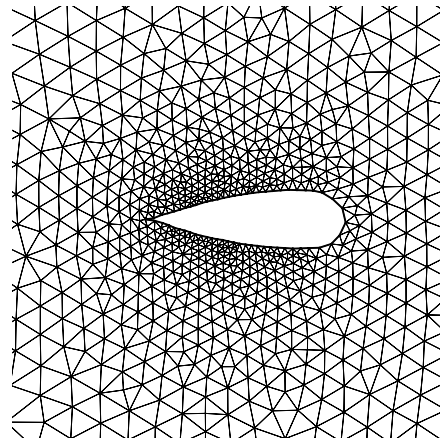


(b)

Fig. 10 Finite element mesh of initial shape



(a)



(b)

Fig. 11 Finite element mesh of optimal shape

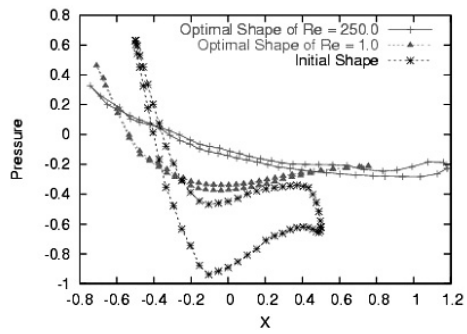


Fig. 12 Pressure distribution on surface of body

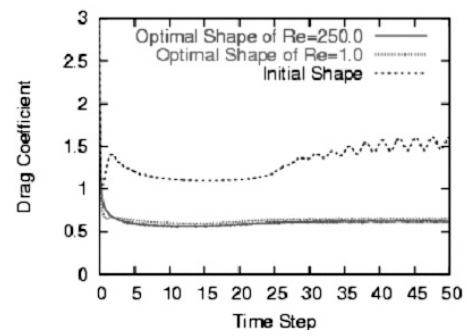


Fig. 13 Drag coefficient

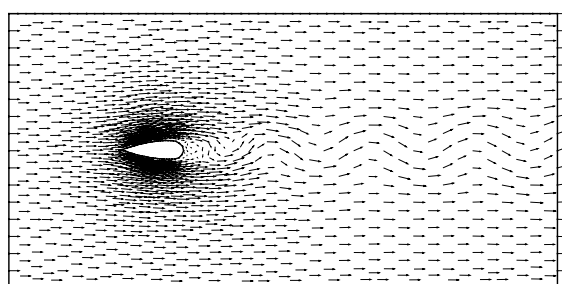
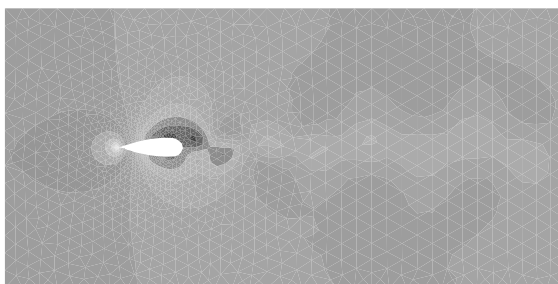
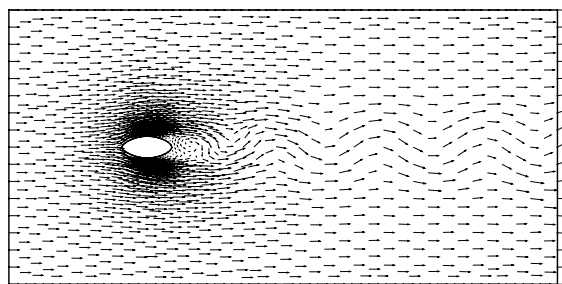
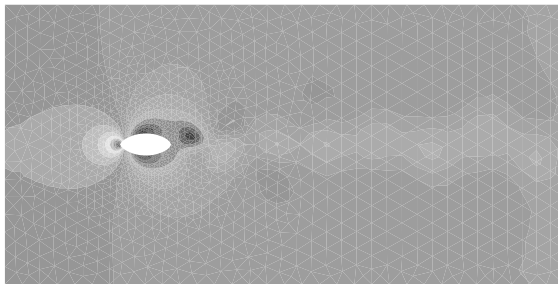
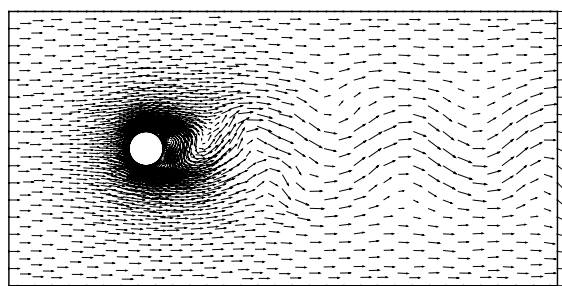
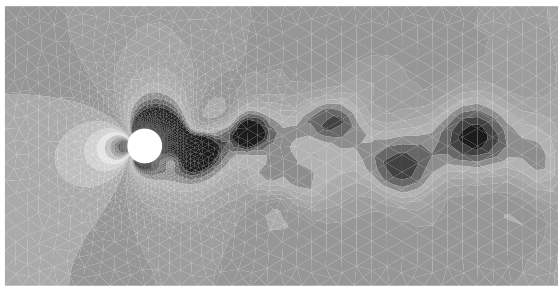


Fig. 14 Pressure distribution

Fig. 15 Velocity vector distribution

7 おわりに

最適制御理論に基づく形状決定のアルゴリズムを非定常流れに適用し、定式化、解析を行うことが出来た。初期形状を複数用いて計算し、同等の解を得ることが出来たことにより、解の妥当性を示した。今後の課題として、解の正当性を数値的に証明することが必要となる。また、より大規模な問題にこのアルゴリズムを適用していきたい。

謝辞

この研究の一部は中央大学大学院理工学研究所の研究題「構造物の制震・免震に関する研究」の支援を受けるものである。

参考文献

- [1] O. Pironneau, On optimum profiles in Stokes flow. *J. Fluid Mech*, **59**, No.1, 117–128, 1973.
- [2] O. Pironneau, On optimum design in fluid mechanics. *J. Fluid Mech*, **64**, No.1, 97–110, 1974.
- [3] 松本純一, 安定化気泡関数有限要素法を用いた非圧縮粘性流れにおける形状同定解析, 応用力学論文集, **6**, pp.267-274, 2003.
- [4] J. Matsumoto and M. Kawahara, Shape Identification for Fluid-Structure Interaction Problem using Improved Bubble Element, *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, **15**, pp.33-45, 2001.
- [5] 松本純一, 気泡関数要素安定化法を用いた非圧縮粘性流体における形状同定並列解析, 理論応用力学講演会, **54**, pp.557-558, 2005.
- [6] Y. Ogawa and M. Kawahara, Shape optimization a body located in incompressible viscous flow based on optimal control theory, *Int. J. Comp. Fluid Dyn*, **17**, No.4, 243–251, 2003.
- [7] J. Matsumoto, T. Umetsu and M. Kawahara, Incompressible viscous flow analysis and adaptive finite element method using linear bubble function, *Journal of Applied Mechanics*, **2**, 223–232, 1999.
- [8] J. Matsumoto and M. Kawahara, Stable shape identification for fluid-structure interaction problem using MINI element, *Journal of Applied Mechanics*, **3**, 263–274, 2000.
- [9] T.J.R. Hughes, L.P. Franca and M. Balestra, A new finite element formulation for computational fluid dynamics: V. Circumventing the Babuska-Brezzi condition: A stable Petrov-Galerkin formulation of the Stokes problem accommodating equal order interpolation, *Comp. Methods. Appl. Mech. Eng.*, **59**, 85–99, 1986.
- [10] A. Maruoka and M. Kawahara, Optimal control in Navier-Stokes equation, *Int. J. Comp. Fluid Dyn*, **9**, 313–322, 1998.