

カルマンフィルタ有限要素法を用いた実問題の推定

加藤有祐*, 川原睦人†

Estimation of Practical Problem Using Kalman Filter Finite Element Method

Yusuke KATO, Mutsuto KAWAHARA

abstract

This paper presents estimation technique using the Kalman filter finite element method (KF-FEM). The Kalman filter is employed frequently for the solution of time series analysis including the observation and the system noises. The finite element method (FEM) approximates the physical phenomena by the differential equations. In this research, as the state equation, the incompressible Navier-Stokes equation is applied. For the temporal discretization, the explicit Euler method is used and for the spatial discretization, the Galerkin method is applied. Kalman Filter Finite Element Method is the combination method of the Kalman Filter and the Finite Element Method. Kalman Filter Finite Element Method is capable estimating not only in time but also in space direction.

1 はじめに

洪水などの自然災害は深刻な問題となっている。科学技術や土木技術が発展した現在でも、多くの被害をもたらしてしまう。そういった自然災害を防ぐ際に、河川の流況を知ることは重要な意味を持つ。しかしながら、観測したい場所が必ずしも観測可能であるとは限らない。経済的理由や物理的理由によって、観測すべき場所が観測不可能である事は十分考えられる。また、仮に観測することができたとしても、その観測値は限られた点であったり、人為的誤差や機械的誤差が含まれてしまう。そこで本研究では、カルマンフィルタを用いることで誤差を含む限られた観測値から流況を推定することを目的とする。

1960年代、R. E. Kalman と R. S. Bucy は線形確率システムに対する状態空間法と直交射影の理論を用いてカルマンフィルタを開発した。カルマンフィルタでは、時々刻々と与えられる観測データを用いて、システムの状態を逐次的に推定する。したがって、観測データを全て蓄えておく必要がないので、コンピュータでフィルタを用いる場合でもメモリの節約になり、非常に便利である。また、限られた観測点や雑音に乱された観測値から未知パラメータを推定することが可能な方法でもある。しかしながら、カルマンフィルタは空間方向の状態量を推定することができない。そこで、カルマンフィルタと有限要素法を組み合わせることを考える。それによってできたカルマンフィルタ有限要素法は時間方向だけでなく、空間方向にも推定することができるようになる。

河川などにおける有限要素法を用いた解析には浅水長波方程式を用いることが多い。浅水長波方程式は Navier-Stokes 方程式の鉛直成分を静水圧分布と見なして導出された式である。これまで、浅水長波方程式を用いたカルマンフィルタ有限要素法による千葉県御宿海岸の潮流の推定を行ってきた。そこで、本研究ではカルマンフィ

*中央大学大学院理工学研究科土木工学専攻 (〒 112-8551 東京都文京区春日 1-13-27)

†中央大学理工学部土木工学 (〒 112-8551 東京都文京区春日 1-13-27)

ルタ有限要素法の適用性を広げるため、流れの基礎方程式である非圧縮 Navier-Stokes 方程式を用いる。浅水長波方程式による御宿海岸の潮流推定結果については、数値解析例で述べる。ただし、浅水長波方程式の定式化については、本研究で述べる Navier-Stokes 方程式の定式化と同様に行えるため割愛する。本研究で用いる非圧縮 Navier-Stokes 方程式は、連続的に圧力を含まないという理由から、カルマンフィルタに有限要素法を適用する為の条件を満たすことが浅水長波方程式に比べ非常に難しい。その条件とは、時間方向の離散化が陽的でなくてはならないことや、有限要素方程式の有限要素行列が一つの行列で表されなくてはならない、などである。そのほかにも、圧力の境界条件の取り扱いについて重要かつ難解な問題を抱えている。よって本研究では、これらの問題を解決する方法を提案するとともに、解析例を用いてカルマンフィルタ有限要素法の有効性を示す。

2 カルマンフィルタ

2.1 状態空間モデル

カルマンフィルタでは、時々刻々と与えられる観測データを用いて、システムの状態を逐次的に推定する。カルマンフィルタ理論の基本的な概念について述べておくことにする。カルマンフィルタは

- システム方程式の線形性
- システム及び観測雑音の白色性
- 雑音のガウス性
- 最小 2 乗規定

という仮定に基づいている。

線形性

システムが線形であるという仮定は、多くの推定問題において許容される。例えば人工衛星の軌道は本質的に非線形運動方程式により記述されるが、カルマンフィルタを用いて衛星の軌道推定に関する場合には非線形運動方程式を基準軌道のまわりで線形化して得られる線形モデルにカルマンフィルタを適用している。

白色性

雑音が白色であるということは、雑音のスペクトル密度があらゆる周波数帯で一様であることを意味する。これより白色雑音は時間的に無相関な系列であることがわかる。したがって、このような性質を持つ物理過程は実在には存在しない。しかし例えば、雑音が信号に比較してはるかに広い周波数帯域を有し、かつその周波数帯域で雑音のスペクトル密度があまり変化しないとき、この雑音を白色雑音と取り扱うことができる。

ガウス性

雑音がガウス分布であることは、時系列としての雑音の振幅分布がガウス分布（正規分布）であることを意味する。工学におけるガウス分布の重要性は、多くの物理過程の分布が近似的にガウス性と考えることができることによる。

最小 2 乗規定

最小 2 乗推定が広く用いられるのは主として次の理由による。

- 最小 2 乗推定値（最小分散推定値）は条件つき期待値として明確に特徴付けられる。
- 最小分散推定値に対する近似推定値を考えることが容易にできる。
- ガウス分布の場合、最小分散推定値は観測データの線形結合となる。
- かなり広いクラスの誤差規範に対して、最適推定値は最小分散値と一致する。

このような仮定の下では、最適フィルタは線形となる。

カルマンフィルタの基礎方程式として、状態空間モデルを適用する。状態空間モデルはシステムモデルと観測モデルの 2 式から成り立つ。システムモデルは現象の状態を表し、観測モデルは観測値と観測点に依存する。

システムモデルは以下のように表される．

$$x_{k+1} = F_k x_k + G_k w_k \quad (1)$$

また，観測モデルは以下のように表される．

$$y_k = H_k x_k + v_k \quad (2)$$

ここで x_k は k 時における状態ベクトル， F_k は状態遷移行列， G_k は駆動行列 w_k はシステムノイズ， y_k は k 時における観測量， H_k は観測行列 v_k は観測雑音である．

システムノイズ w_k は以下のように仮定する．

$$E\{w_k\} = 0 \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \text{cov}\{w_k, w_j\} &= E\{w_k, w_j^T\} \\ &= Q_k \delta_{kj} \end{aligned} \quad (4)$$

また，観測ノイズ v_k は以下のように仮定する．

$$E\{v_k\} = 0 \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \text{cov}\{v_k, v_j\} &= E\{v_k, v_j^T\} \\ &= R_k \delta_{kj} \end{aligned} \quad (6)$$

また， w_k と v_k は以下の関係がある．

$$E\{w_k, v_j\} = 0 \quad (7)$$

ここで δ_{kj} はクロネッカーのデルタといい，以下に示す．

$$\delta_{kj} = \begin{cases} 1 & k = j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

最適推定値 \hat{x}_k は観測値 Y_k が与えられたときの条件付き平均値である：

$$\hat{x}_k = E\{x_k | Y_k\} \quad (8)$$

そのときの共分散 P_k は以下のとおりである．

$$\begin{aligned} P_k &= \text{cov}\{x_k | Y_k\} \\ &= E\{(x_k - \hat{x}_k)(x_k - \hat{x}_k - \hat{x}_k)^T\} \end{aligned} \quad (9)$$

ここで P_k は推定誤差共分散である．推定値 x_k^* は Y_{k-1} が与えられたときの条件付き平均値である：

$$x_k^* = E\{x_k | Y_{k-1}\} \quad (10)$$

そのときの共分散 Γ_k は以下のとおりである．

$$\begin{aligned} \Gamma_k &= \text{cov}\{x_k | Y_{k-1}\} \\ &= E\{(x_k - x_k^*)(x_k - x_k^*)^T\} \end{aligned} \quad (11)$$

ここで Γ_k は予測誤差共分散である .

2.2 Bayes の定理

Bayes 公式を以下に示す .

$$P(x_k|Y_k) = \frac{P(y_k|x_k)P(x_k|Y_{k-1})}{P(y_k|Y_{k-1})} \quad (12)$$

最適推定量 \hat{x}_k , カルマンゲイン K_k , 推定誤差共分散 P_K , 予測誤差共分散 Γ_{k+1} は仮定から導かれ , アルゴリズムは次のように表される .

$$\begin{aligned} \{\hat{x}_k\} &= \{x_k^*\} + [K_k](\{y_k - [H_k]\{x_k^*\}) \\ [\Gamma_0] &= [v_0], \{\hat{x}_{-1}\} = \{\hat{x}_0\} \\ [K_k] &= [\Gamma_k][H_k]^T([R_k] + [H_k][\Gamma_k][H_k]^T)^{-1} \\ [P_k] &= ([I] - [K_k][H_k])[\Gamma_k] \\ [\Gamma_{k+1}] &= [F_k][P_k][F_k]^T + [G_k][Q_k][G_k]^T \end{aligned} \quad (13)$$

ここで Q はシステム誤差共分散 , R は観測誤差共分散である .

3 基礎方程式

本研究では非圧縮性ナビエ・ストークス方程式を用いる . 非圧縮性ナビエ・ストークス方程式は粘性をもつ流体の動きを表す非線形偏微分方程式である . 運動方程式と連続式は以下のように表される .

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u_j u_{i,j} + p_{,i} - \nu(u_{i,j} + u_{j,i})_{,j} = f_i \quad \text{in } \Omega \quad (14)$$

$$u_{,ii} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (15)$$

ここで , u_i , p , ν はそれぞれ流速 , 圧力 , レイノルズ数の逆数である .

境界条件は以下のように表される .

$$u_i = \hat{u}_i \quad \text{on } \Gamma_1 \quad (16)$$

$$t_1 = 0, \quad u_2 = 0 \quad \text{on } \Gamma_2 \quad (17)$$

$$u_i = 0 \quad \text{on } \Gamma_3 \quad (18)$$

$$t_i = 0, p = 0 \quad \text{on } \Gamma_4 \quad (19)$$

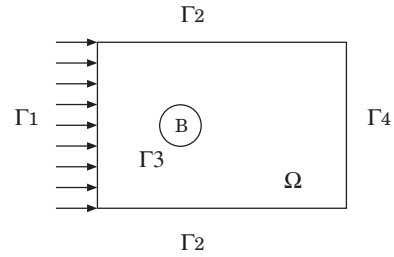


Fig. 1 Analytical domain and boundary condition

4 新手法

4.1 時間方向の離散化

時間方向の離散化は陽的オイラー法を適用する .

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \bar{u}_j^n u_{i,j}^n + p_{,i}^{n+1} - \nu(u_{i,j}^n + u_{j,i}^n)_{,j} = 0 \quad (20)$$

$$u_{i,i}^{n+1} = 0 \quad (21)$$

ここで,

$$\bar{u}_j = \frac{1}{2}(3u_i^n - u_i^{n-1}) \quad (22)$$

\bar{u}_j は Adams-Bashforth 近似によって与えられた流速である．圧力場は式 (20) の両辺について発散をとり，連続式 (21) を代入することで得られる．

$$p_{,ii}^{n+1} = \frac{u_{i,i}^n}{\Delta t} - u_{j,i}^n u_{i,j}^n - u_j^n u_{i,ij}^n + \mu(u_{i,j}^n + u_{j,i}^n)_{,j} \quad (23)$$

流速場は以下のように表される．

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \Delta t \{ \bar{u}_j u_{i,j}^n + p_{,i}^{n+1} - \nu(u_{i,j}^n + u_{j,i}^n)_{,j} \} \quad (24)$$

4.2 空間方向の離散化

空間方向の離散化には Galerkin 法を適用する．また，流速と圧力には三角形一次要素を用いる．有限要素方程式は以下のように表される．

$$A^{ii} P^{n+1} = -\frac{1}{\Delta t} C^i U_i^n - K^{ij} U_j^n U_i^n \quad (25)$$

$$\bar{M} U_i^{n+1} = \tilde{M} U_i^n - \Delta t \{ \bar{U}_j K_j^{ij} U_i^n - C^{iT} P^{n+1} + D^{ij} U_j^n \} \quad (26)$$

<有限要素方程式>

流速に関する有限要素方程式は以下のように表される．

$$\bar{M}_{\alpha\beta} u_\beta^{n+1} = \tilde{M}_{\alpha\beta} u_\beta^n - \Delta t \{ S + \nu(2D_{\alpha x\beta x} + D_{\alpha y\beta y}) \} u_\beta^n - \Delta t \nu D_{\alpha y\beta x} v_\beta^n \quad (27)$$

$$\bar{M}_{\alpha\beta} v_\beta^{n+1} = \tilde{M}_{\alpha\beta} v_\beta^n - \Delta t \{ S + \nu(D_{\alpha x\beta x} + 2D_{\alpha y\beta y}) \} v_\beta^n - \Delta t \nu D_{\alpha x\beta y} u_\beta^n \quad (28)$$

ここで,

$$\tilde{M} = e\bar{M} + (1-e)M, \quad S = \bar{u}K_{\alpha\beta x} + \bar{v}K_{\alpha\beta y}$$

$$M = \int_{\Omega_e} \Phi_\alpha \Phi_\beta^T d\Omega, \quad D = \int_{\Omega_e} \Phi_{\alpha,j} \Phi_{\beta,j}^T d\Omega, \quad K = \int_{\Omega_e} \Phi_\alpha \Phi_{\beta,j}^T d\Omega$$

5 カルマンフィルタ有限要素法

5.1 状態遷移行列 F_k

カルマンフィルタを有限要素法に適用するために，有限要素方程式 (27)(28) を状態遷移行列に適用する．状態遷移行列は以下のように表される．

$$\begin{Bmatrix} u_\beta \\ v_\beta \end{Bmatrix}^{n+1} = [F_k] \begin{Bmatrix} u_\beta \\ v_\beta \end{Bmatrix}^n \quad (29)$$

$$F_k = \bar{M}_{\alpha\beta}^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{M}_{\alpha\beta} - \Delta t \{ S + \nu(2D_{\alpha x\beta x} + D_{\alpha y\beta y}) \} & -\Delta t \nu D_{\alpha y\beta x} \\ -\Delta t \nu D_{\alpha x\beta y} & \tilde{M}_{\alpha\beta} - \Delta t \{ S + \nu(D_{\alpha x\beta x} + 2D_{\alpha y\beta y}) \} \end{bmatrix} \quad (30)$$

5.2 アルゴリズム

カルマンフィルタ有限要素法のアルゴリズムは以下のように表される．

- 1). $[\Gamma_0] = [v_0], \{\hat{x}_{-1}\} = \{\hat{x}_0\}$
- 2). Solve p_n by eq.(26) in Ω
- 3). $[K_n] = [\Gamma_n][H_n]^T([R_n] + [H_n][\Gamma_k][H_n]^T)^{-1}$
- 4). $[P_n] = ([I] - [K_n][H_n])[\Gamma_n]$
- 5). $[\Gamma_{n+1}] = [F_n][P_n][F_n]^T + [G_n][Q_n][G_n]^T$
- 6). $\{x_n^*\} = [F_{n-1}]\{\hat{x}_{n-1}\} + [f]\{\hat{p}_n\}$
- 7). $\{\hat{x}_n\} = \{x_n^*\} + [K_n](\{y_n - [H_n]\{x_n^*\})$

ここで, n, x, p はそれぞれ時間, u, v 方向の水の流速, 圧力を表している．

6 境界条件問題

本研究では前節で説明した手法を用いる．流速場と圧力場に分けて求めるのであるが, 式 (23) の圧力ポアソン方程式を解くためには, 必ず圧力の境界条件を与えなければならない．しかしながら, 実際の現象や河川などにおいて適切な圧力の境界条件を決定するのは難しい．よって, 従来では Fig. 2 のように便宜的に, 流出部分に圧力を 0 として与えていた．しかし, この条件は便宜的に置いているのであって, 解の精度に著しく悪い影響を与えてしまうことも事実である．そこで, 本研究では Fig. 3 のように解析領域を延長することを考える．Fig. 4 と Fig. 5 は Fig. 2, Fig. 3 それぞれの解析領域を用いて解析した結果である．Fig. 4 と Fig. 5 を比較してみると, Fig. 5 は流出部において連続性を保っていることがわかる．つまり Fig. 3 のように延長することで, 流出部に与えた圧力の境界条件が実際解析する領域に対して与える影響を減らすことができる．これらの理由により, 本研究では延長した解析領域を用いることにする．

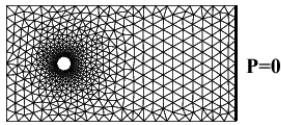


Fig. 2 conventional analytical model

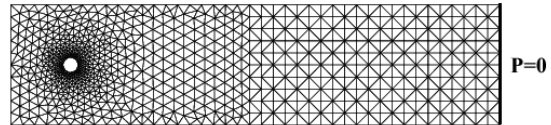


Fig. 3 extended analytical model



Fig. 4 pressure distribution using conventional analytical model

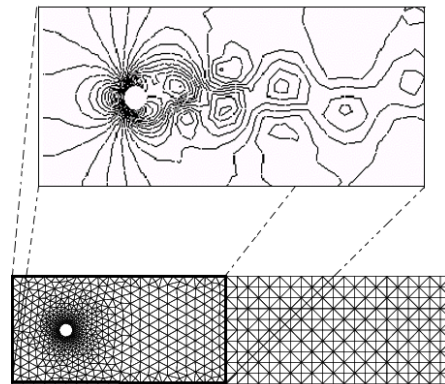


Fig. 5 pressure distribution using extended analytical model

7 数値解析例

最初に述べたように、本研究は、浅水長波方程式による実問題の推定をふまえてその応用として非圧縮 Navier-Stokes 方程式の適用を試みている。よってそれぞれの数値解析例として、以下の2つの例を取り上げる。

- 御宿海岸の潮流の推定
- 円柱周りの流れの推定

7.1 浅水長波方程式を用いた御宿海岸の潮流推定

浅水長波方程式による実問題のモデルとして、千葉県御宿海岸を取り上げる。近年、御宿海岸に注ぎ込む清水川からの汚染物質の流入により海岸付近での水質汚濁が進んでいる。よってこの水質汚濁問題の早期解決が重用視されている。そこで、汚染物質の動向を把握するために、この御宿海岸付近での潮流の流況を推定した。観測データは、1997年7月16日から同月20日までの5日間のデータを用いて解析を行った。Fig. 6は有限要素分割図と観測点を表している。Fig. 7は御宿海岸の水深を表している。この潮流推定では、観測点 No.1 ~ No.4 地点での観測値を解析に代入し推定を行った。そして解析に使用しなかった観測点 No.5、推定値と観測値との比較を行い、カルマンフィルタ有限要素法の妥当性を検証した。

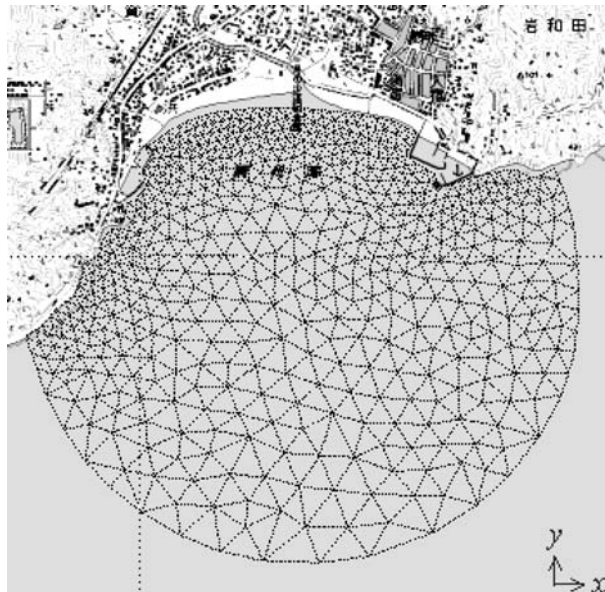


Fig. 6 Finite element mesh

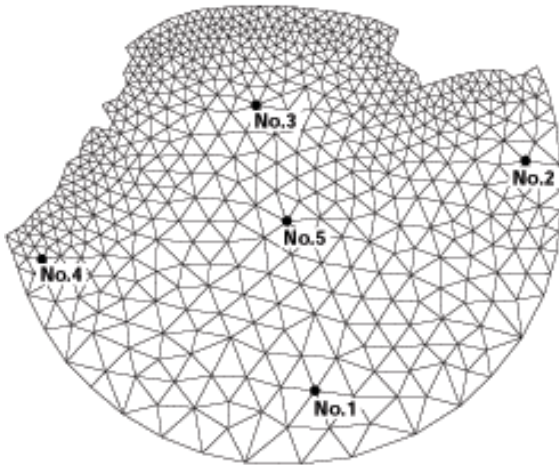


Fig. 7 Observation points

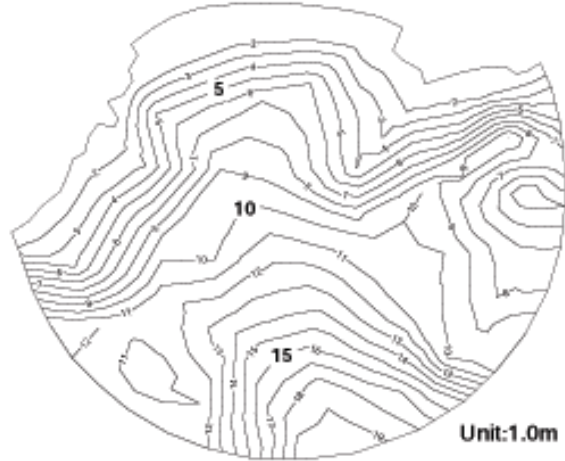


Fig. 8 Water depth

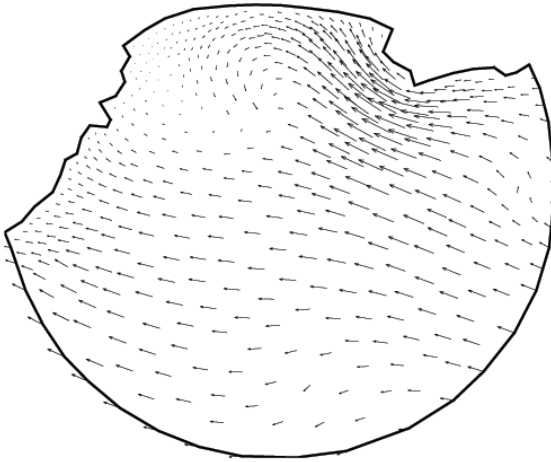


Fig. 9 Distribution of the flow velocity on July 17

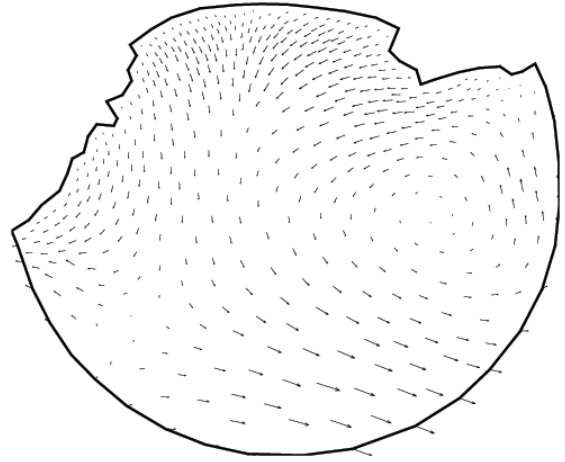


Fig. 10 Distribution of the flow velocity on July 19

Fig. 11 から Fig. 13 に観測点 5 における推定値と観測値の比較結果を示す．水位変動量に関しては，推定値と観測値がよく一致しており，非常によい推定結果が得られた．しかし，流速に関しては，時系列上で見られるような急激な変化（予測できない変化）には対応することができなかった．この原因として，現地観測において流速を計測する際にある程度の正確さが欠けていたのではないかと考えられる．つまり，白色ノイズではなく，有色ノイズのように非常に不規則なノイズが含まれていたのではないかと考えられる．それゆえ，流速に含まれる過大な誤差を正規分布で的確に表現することができなかったのではないかと考える．

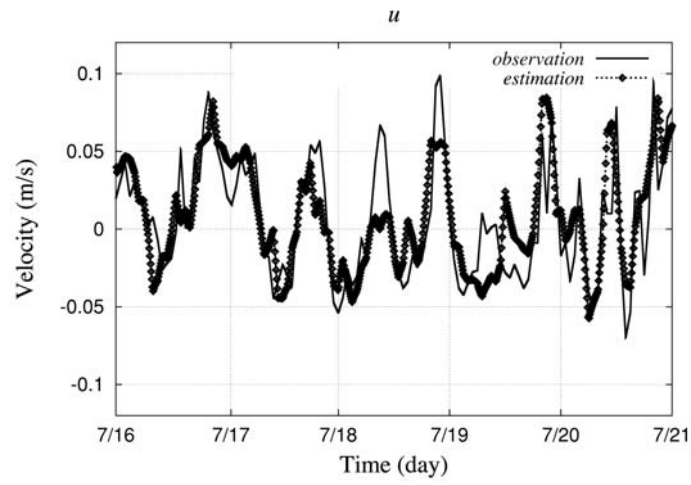


Fig. 11 Comparison of x-velocity

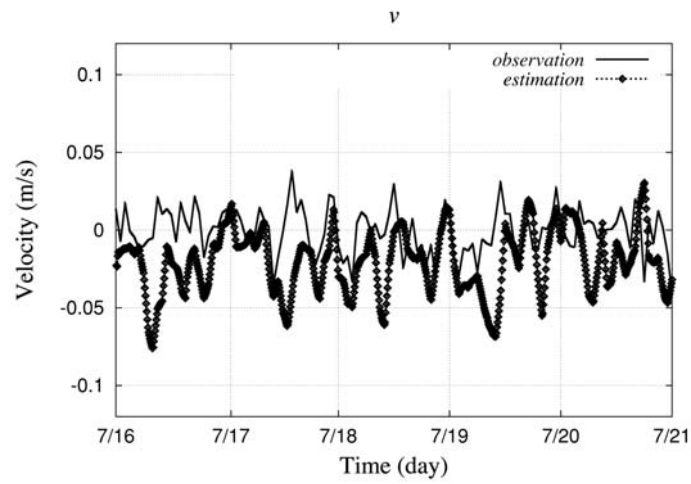


Fig. 12 Comparison of y-velocity

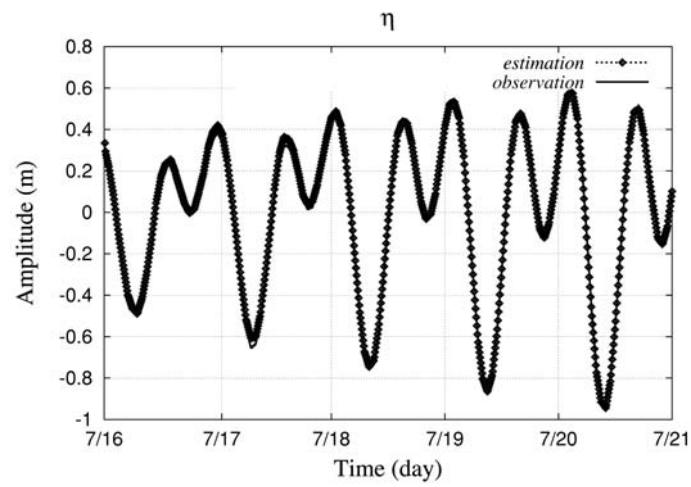


Fig. 13 Comparison of water elevation

7.2 非圧縮 Navier-Stokes 方程式を用いた数値解析例

カルマンフィルタ有限要素法の有効性を示すために, Fig. 14 のような円柱周りの流れの解析を例として取り上げる. 有限要素法で求めた解析解を観測値とし, カルマンフィルタ有限要素法によって求めた推定点での推定値と解析値とを比較する.

Fig. 14 の計算モデルにおいて, 左側は u 方向の流速を 1.0 [m/s], 右側は p を 0 とする. レイノルズ数, 時間増分量, ランピングパラメータはそれぞれ $50(\nu=0.02)$, 0.04 [s], 0.9992 とし, 観測誤差共分散 R とシステム誤差共分散 Q はそれぞれ 1.0×10^{-3} とする.

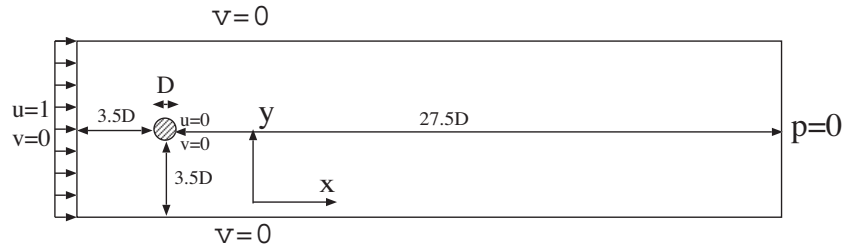
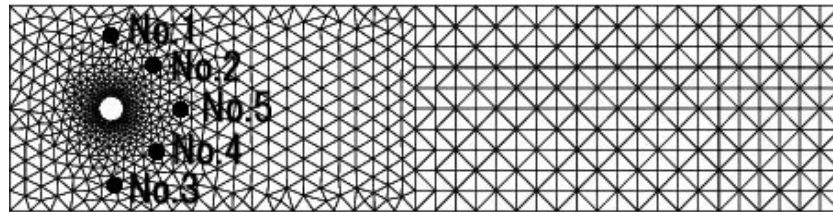


Fig. 14 model for numerical simulation

Fig. 15 のような有限要素分割図を用いる. 流速と圧力は, No.1 から No.4 までの点の観測値を用いて No.5 の点の状態量を推定する.



Nodes: 878 Elements: 1624

Fig.15 Finite Element Mesh

Fig. 16 と Fig. 17 はそれぞれ No.1 の観測点における有限要素法によって求められた解析解を示している.

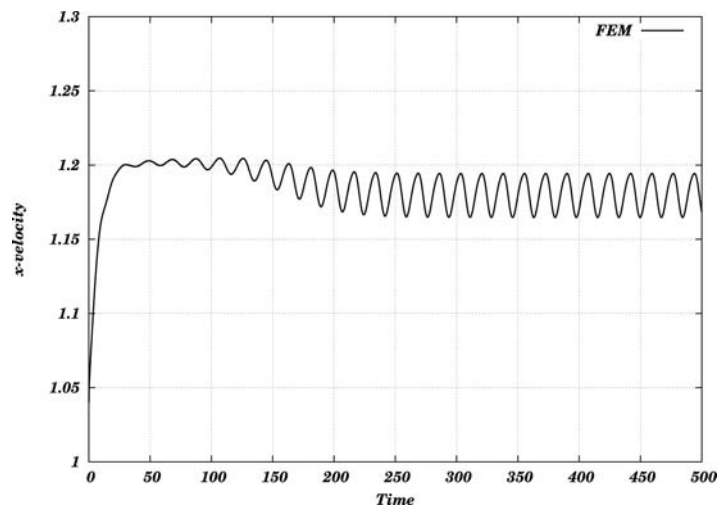


Fig. 16 x-velocity

カルマンフィルタ有限要素法を用いた実問題の推定

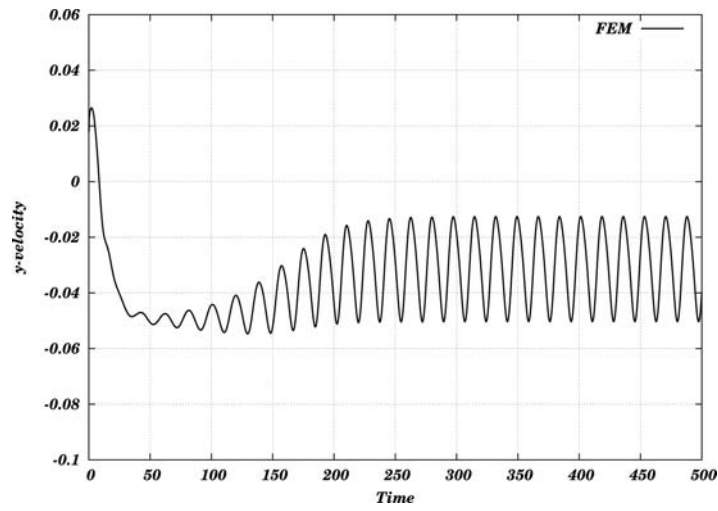


Fig. 17 y-velocity

本研究では観測値として、有限要素法を用いて解析したこれらの観測点の解析値に擬似ノイズを加えた値を用いる。ここで加えたノイズは、平均0のホワイトノイズである。Fig. 18とFig. 19は観測点 No.1におけるノイズに乱された観測値を示している。

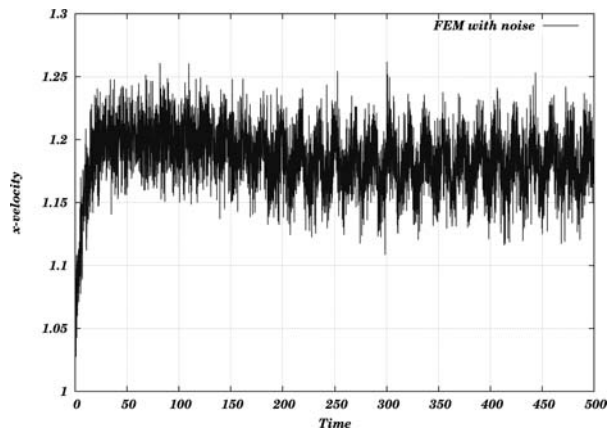


Fig. 18 x-velocity

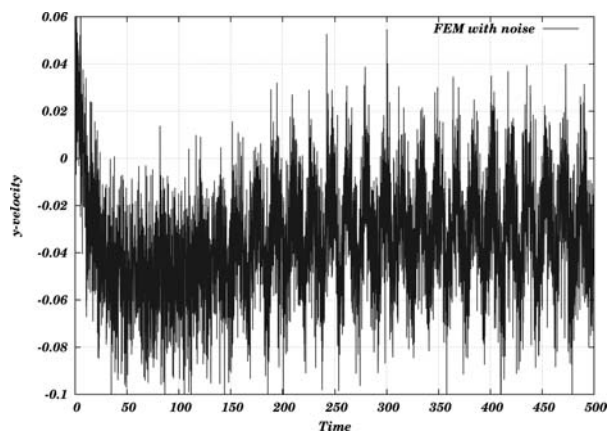


Fig. 19 y-velocity

8 結果

Fig. 20 から Fig. 22 は、推定点 No.5 における推定値と観測値の比較結果を表している。ただし、ここでいう推定点 No.5 における観測値というのは、あらかじめ有限要素法で No.5 の解析値を求めたものを指す。この観測値と、ノイズを含んだ No.1 から No.4 の観測値を用いた推定結果を比較することで精度の検証を行う。

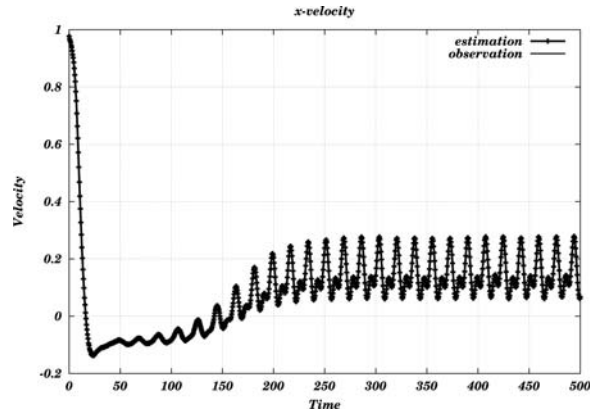


Fig. 20 x-velocity

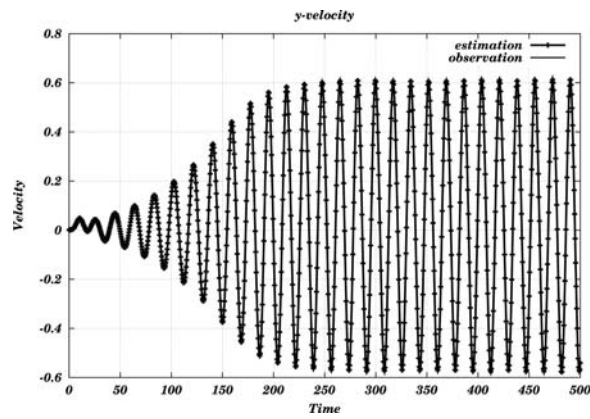


Fig. 21 y-velocity

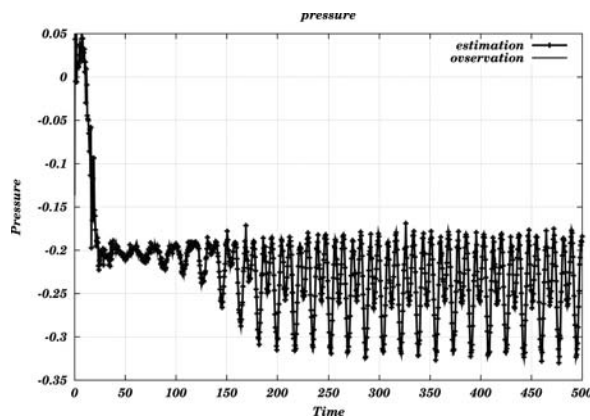


Fig. 22 pressure

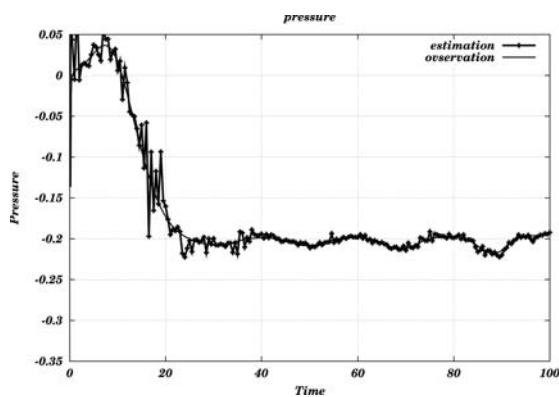


Fig. 23 unit matrix

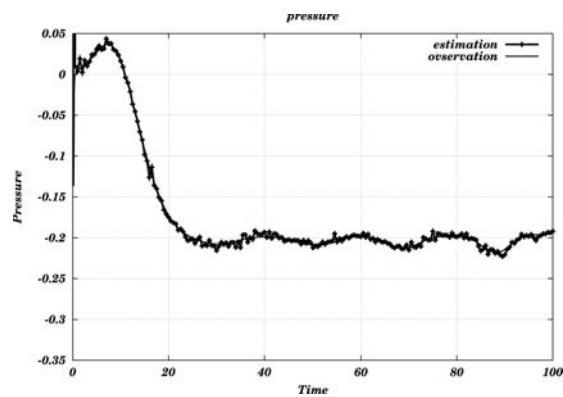


Fig. 24 predicted error covariance at the 2000-time

9 予測誤差共分散

カルマンフィルタを用いて計算する際に、予測誤差共分散の最適な初期条件を与える必要がある。しかし予測誤差共分散の最適な初期条件の与え方は非常に困難を極める。そのため、通常は単位行列を適用することが多い。しかしながら、単位行列を適用すると、Fig. 23 のように初期時間において良い推定値を得ることは難しい。そこで、よりよい推定値を得るため、次のような解決策を試みる。一度カルマンフィルタの計算を行い、カルマンゲインが十分に収束した時の予測誤差共分散を初期条件としてもう一度計算する。本研究では無次元時間 200 での予測誤差共分散を用いる。Fig. 23 と Fig. 24 は初期条件に、単位行列を用いた場合と無次元時間 200 での予測誤差共分散を用いた場合の比較結果である。

10 おわりに

本研究では、カルマンフィルタ有限要素法を非圧縮粘性流れに適用した。基礎方程式として、カルマンフィルタ有限要素法の適用性を広げるため Navier-Stokes 方程式を用いた。連続的に圧力を含まないため、容易に適用させることができなかつたが、Navier-Stokes 方程式を圧力場と流速場に分離することで適用させることができた。また、分離した際に導出された圧力ポアソン方程式についてだが、この方程式を解くためには必ず圧力の境界条件が必要である。しかし実際の現象や河川などにおいては、容易に圧力の境界条件を決定することはできない。それゆえに、従来では今回使用した計算モデルにおいて、便宜的に流出部分に圧力を 0 として計算していた。しかしながら、それによる計算誤差が解析解に大きく影響してしまうため、結果の信頼性を失ってしまうことになる。よって本研究では解析領域を延長することで、便宜的に与えられた圧力の境界条件が本来解析すべき領域に対して与える影響を減らす、という解決策を試みた。Fig. 20 から Fig. 22 は推定値と観測値の比較であるが、流速、圧力ともによく一致している。圧力に関しては初期時間において、推定値と観測値に誤差が生じたが、予測誤差共分散の初期条件の与え方を検討した結果、解決策の一つを見出すことができた。この研究によって、カルマンフィルタ有限要素法を Navier-Stokes 方程式に適用させることができ、カルマンフィルタ有限要素法の適用性が広がったといえよう。

参考文献

- [1] R, Suga: Estimation of Tidal Current in Onjuku Coast Using Kalman Filter Finite Element Method, Research Report of Professor M. Kawahara Lab, Vol.1, pp.56-63, (2003).
- [2] H, Wakita: Estimation of Water Flow at Watarase Retardation Pond Using Kalman Filter Finite Element Method, Research Report of Professor M. Kawahara Lab, Vol.1, pp.64-63, (2003).
- [3] J, Kobayashi: Incompressible Viscous Flow Analysis With Superposed Wave, Research Report

of Professor M. Kawahara Lab, Vol.1, pp.10–16, (2003).

- [4] J. Matsumoto and M. Kawahara: Stability Analysis of Incompressible Flow Past a Circular Cylinder, Asia-Pacific Conference on Computational Mechanics, 4, pp.663–668, (1999).
- [5] J. Matsumoto: Incompressible Viscous Flow Analysis Based on Bubble Function Element Stabilization Method, International Workshops on Advances in Computational Mechanics, November, (2004).