

ウォータージェットによる固体切断の数値シミュレーション

篠原寿充^{*}, 岡部啓一[†], 中山 司[‡]

Numerical Simulation of Water-Jet Cutting of a Solid Body

Toshimitsu SHINOHARA, Keiichi OKABE and Tsukasa NAKAYAMA

abstract

The smoothed particle hydrodynamics (SPH) method is applied to the numerical simulation of cutting of a solid body by a water-jet. Water is modeled as a viscous fluid with weak compressibility. A solid body is modeled as an elastic material. The water and solid body are discretized into a lot of small volume elements called particles. Those particles are moved in a Lagrangian manner according to the governing equations of motion of water and solid body. To model the fracture of the solid body, a simple instantaneous fracture model is employed. Numerical calculations are carried out for a soft solid, the Young's modulus of which is almost same as that of "TOFU (soybean curd)". Encouraging numerical results have been obtained.

1 はじめに

10 MPa から 200 MPa の高圧で吐出された、直径 1 mm 程度の細いビーム状の高速水噴流によって物体を切削する技術が注目を集め、その応用範囲を広げつつある。切削工具としての、このような高圧水噴流を“ウォータージェット”という。ウォータージェットは、

- 単位面積あたりの加工エネルギーが大きいため加工後の残留応力がない、
- 噴流の直径が小さいので所要動力が少なく、水を使用するために維持費が安い、
- 加工物とノズルが接触しないため自由な曲線の切断が可能である、
- 切断の反力が小さいのでロボット化しやすい、

などの長所がある。いまでは、布地のような柔らかい材料から、金属、ガラス、岩石などの硬い材料までさまざまな物体の切断が可能になっている。また、医療分野では、切断に伴う発熱がないので切断面の細胞組織の変性や壊死を起こす心配がないことから、手術用のメスとしての利用も試みられている。ウォータージェットによる切削加工では、ノズルの形状、噴流のノズル出口圧力、スタンドオフ距離（ノズルと加工物の距離）、噴射角度などの加工条件を適切に決めなければならないが、現時点ではオペレータの経験に頼っているのが現状である。しかも、これらの加工条件は加工物の材料特性に応じて変える必要があり、材料にあった最適な条件を経験だけで見いだすのはかなり難しい。最適な加工条件を見いだすためには、水噴流によって物体が切削される仕組み、切削に対する物体の材料特性や噴射環境の影響などを知る必要があるが、水噴流が高速になるほ

^{*}中央大学大学院理工学研究科精密工学専攻（現在（株）ブリヂストン 勤務）

[†]中央大学大学院理工学研究科精密工学専攻

[‡]中央大学理工学部精密機械工学科（〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27）

ど実験的手法による研究は困難となる．そこで，本研究では，流体力学と破壊力学の理論に基づいて，高速水噴流による固体の切削現象を計算機シミュレーションする数値解析法を開発し，それを用いて高速水噴流による切削の仕組みと切削に対する材料特性の影響を明らかにすることによって，ウォータージェットによる切削加工の高精度化に供することを目的とする．

ウォータージェットによる固体の切削という現象は，数学的には液体領域と固体領域のそれぞれが変形する移動境界問題に分類される．このような問題を有限要素法のような領域をメッシュに分割する方法で解こうとすると，液体と固体のそれぞれの領域の変形にあわせてメッシュを変化させなければならず，たいへん複雑な計算になる．特に，固体領域内に水が複雑に浸入する状況で，それぞれの領域をメッシュに分割することは相当な困難が伴い，実用的な解析法を構築することは難しい．これに対して，連続体を粒子の集合と考えて，粒子のラグランジュ的な動きによって連続体の変形を計算する粒子法はメッシュを必要としないため，実用的な解析法を構築できる可能性がある．基本的には一つ一つの粒子の運動を時間を追いながら計算する手法であるから，複雑な現象への適用性が高い．本研究では粒子法の一つである SPH(Smoothed Particle Hydrodynamics) 法を応用する [1]．SPH 法は，もともと圧縮性流体の数値解析法として，星の分裂や衝突といった宇宙物理学の問題に適用されてきた．近年では自由表面流れのような非圧縮性流体の流れ [2] や固体力学の問題 [3] にも応用されつつあり，今後さらに応用範囲が拡大すると期待されている方法である．本論文では，SPH 法を用いたウォータージェットによる固体の切断の数値シミュレーションについて報告する．

2 計算モデル

2.1 SPH 法の概要

SPH 法による離散化は，ディラックのデルタ関数 $\delta(\mathbf{u})$ の性質を表す式

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_{\Omega} \phi(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (1)$$

から始まる．ここに， Ω は注目する物体（水あるいは固体）が占める空間領域を表し， ϕ は Ω 内に分布する物理量を表す． \mathbf{r}, \mathbf{r}' は Ω 内の点の位置ベクトルである．ディラックのデルタ関数のような不連続関数は数値計算には適さないので，これを内挿カーネル (interpolating kernel) と呼ぶ連続関数で置き換えると， $\phi(\mathbf{r})$ に対する近似 $\langle \phi(\mathbf{r}) \rangle$ が

$$\langle \phi(\mathbf{r}) \rangle = \int_{\Omega} \phi(\mathbf{r}') W(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h) d\mathbf{r}' \quad (2)$$

のように得られる．関数 $W(\mathbf{u}, h)$ が $\delta(\mathbf{u})$ に対する近似を表す内挿カーネルである． h はカーネルの大きさ（広がり）を表すパラメータである．カーネル W は次の二つの性質を持っていないといけない．

$$\int_{\Omega} W(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h) d\mathbf{r}' = 1 \quad (3)$$

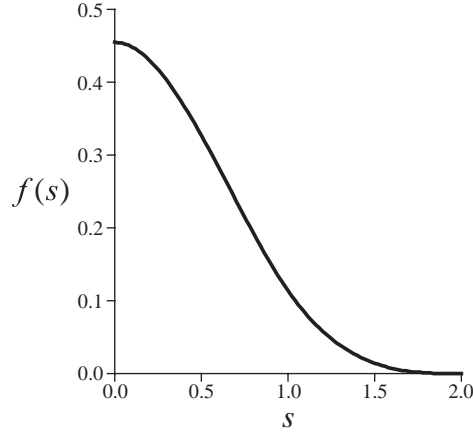
$$\lim_{h \rightarrow 0} W(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (4)$$

このような性質を持つ関数は無数に考えられるが，本研究では次式を用いる．

$$W(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h) = \frac{1}{h^n} f\left(\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{h}\right) \quad (5)$$

ここに n は問題の次元を表す数である．関数 f には次式のような 3 次のスプライン関数を用いる．

$$f(s) = \begin{cases} \frac{15}{7\pi} \left(\frac{2}{3} - s^2 + \frac{1}{2}s^3 \right) & (0 \leq s < 1) \\ \frac{5}{14\pi} (2-s)^3 & (1 \leq s < 2) \\ 0 & (2 \leq s) \end{cases} \quad (6)$$


 Fig. 1 Function $f(s)$

関数 $f(s)$ をグラフ化したものが Fig. 1 である．

式 (2) の右辺を離散化するために、物体を N 個の微小な体積要素に分割する．この体積要素を粒子 (particle) と呼ぶことにする． j 番目の粒子 (以後、粒子 j と略記する) が占める領域を Ω_j とし、その粒子の重心の位置ベクトルを \mathbf{r}_j とすると、式 (2) は

$$\begin{aligned} \langle \phi(\mathbf{r}) \rangle &\approx \sum_{j=1}^N \left[\int_{\Omega_j} \phi(\mathbf{r}_j) W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j, h) d\mathbf{r}' \right] \\ &= \sum_{j=1}^N \left[\phi_j W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j, h) \left(\int_{\Omega_j} d\mathbf{r}' \right) \right] \\ &= \sum_{j=1}^N \phi_j W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j, h) V_j \end{aligned} \quad (7)$$

となる．ここに、 $\phi_j = \phi(\mathbf{r}_j)$ 、 $V_j = \int_{\Omega_j} d\mathbf{r}'$ は、それぞれ粒子 j の ϕ の値と体積である．粒子 j の密度と質量をそれぞれ ρ_j 、 m_j とすると、 $m_j = \rho_j V_j$ であるから、上式は

$$\langle \phi(\mathbf{r}) \rangle = \sum_{j=1}^N m_j \frac{\phi_j}{\rho_j} W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j, h) \quad (8)$$

となる．

直交デカルト座標の座標軸を x^α (2 次元の場合は $\alpha = 1, 2$ 、3 次元の場合は $\alpha = 1, 2, 3$) で表すとき、 ϕ の勾配 $\partial\phi/\partial x^\alpha$ は、カーネルの勾配を計算することに帰着する．すなわち、式 (8) より

$$\frac{\partial\phi}{\partial x^\alpha} \approx \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \langle \phi(\mathbf{r}) \rangle = \sum_{j=1}^N m_j \frac{\phi_j}{\rho_j} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j, h) \quad (9)$$

となる．さらに、式 (8) と (9) において $\mathbf{r} = \mathbf{r}_i$ として両式を粒子 i の位置に適用すると、

$$\phi_i = \sum_{j=1}^N m_j \frac{\phi_j}{\rho_j} W_{ij} \quad (10)$$

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x^\alpha} \right)_i = \sum_{j=1}^N m_j \frac{\phi_j}{\rho_j} \left[\frac{\partial}{\partial x^\alpha} W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j, h) \right]_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_i} \quad (11)$$

を得る．ここに， $\phi_i = \phi(\mathbf{r}_i)$ ， $W_{ij} = W(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, h)$ である．本論文では，上付き添字 α, β, γ を添字記法に基づく座標軸を表す指標とし，下付き添字 i, j を粒子を識別するための指標とする．上付き添字に対しては総和規約が適用されるものとする．式 (11) において，表現の簡略化のために，以後 $[\partial W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j, h)/\partial x^\alpha]_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_i}$ を $\partial W_{ij}/\partial x_i^\alpha$ のように表すことにする．したがって，式 (11) は

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x^\alpha} \right)_i = \sum_{j=1}^N m_j \frac{\phi_j}{\rho_j} \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\alpha} \quad (12)$$

となる．こうして，粒子 i のもつ物理量 ϕ とその勾配を周囲の粒子の ϕ の値で表すことができる．式 (10) と (12) を用いて，物体の運動と変形に関する方程式を離散化し，粒子が持つ物理量の値を未知量とする代数方程式を粒子ごとに組み立てて解く方法が SPH 法である．このとき，式 (10), (12) の総和計算は全粒子について行うのではなく，粒子 i を中心とする半径 R の円の内部に含まれる粒子のみを対象とする．本研究では $R = 2h$ とする．

次節以降で，水と固体のそれぞれに対する支配方程式の離散化について述べる．

2.2 ウォータージェットのモデル化

水を弱い圧縮性をもつ粘性流体とすると，流れの支配方程式は，連続の方程式

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\alpha} \quad (13)$$

と運動方程式

$$\frac{Dv^\alpha}{Dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} + f^\alpha \quad (14)$$

そして，状態方程式

$$p = B \left[\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^n - 1 \right] \quad (15)$$

である．ここに， t は時間， v^α は流速の x^α 成分， $\sigma^{\alpha\beta}$ は応力テンソルの成分， f^α は外力の x^α 成分， p は圧力， ρ は密度， ρ_0 は基準状態での密度を表す．また， D/Dt はラグランジュ微分演算子である．状態方程式 (15) は，水に対する状態方程式として Batchelor[4] が提案し，Monaghan[2] が SPH 法による自由表面流れの計算に用いたもので， $n = 7$ とするのがよいとされている．式中の B は流体の圧縮性の度合いを定める定数係数で，次のようにして求められる．式 (15) の両辺を ρ で微分すると

$$\frac{dp}{d\rho} = \frac{Bn}{\rho_0} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{n-1} \quad (16)$$

を得る．音速を c とすれば $c^2 = dp/d\rho$ であるから，これを式 (16) に代入して整理すると，

$$B = \frac{c^2 \rho_0}{n} \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^{n-1} \approx \frac{c^2 \rho_0}{n} \quad (17)$$

となる．ところで，流体の代表速さを V ，その速さに対するマッハ数を M とすると， $M = V/c$ である．ここで， $M = 0.1$ に相当する弱い圧縮性を流体に仮定するものとすれば，

$$c = 10V \quad (18)$$

であるから，式 (17) より

$$B = \frac{100V^2 \rho_0}{n} \quad (19)$$

となる．本論文の数値計算ではウォータージェットのノズルからの噴出速さを V としている． $V = 5 \text{ m/s}$ の場合，式 (18) で計算される音速は $c = 50 \text{ m/s}$ である．現実の水中での音速は 20°C で 1481 m/s であるから，SPH による数値計算の中での音速は実際よりも相当に小さい．このように，実際よりも小さい音速を仮定することによって流体の圧縮性を導入するのが，非圧縮性流体を扱うときの SPH の考え方である．

連続の方程式 (13) を離散化するために，右辺を

$$\rho \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (\rho v^\alpha) - v^\alpha \frac{\partial \rho}{\partial x^\alpha} \quad (20)$$

と変形する．そこで，式 (13) を粒子 i の位置で離散化するものとすれば，この式の右辺の各項は式 (12) を用いることによって，それぞれ

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^\alpha} (\rho v^\alpha) \right]_i = \sum_j m_j v_j^\alpha \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\alpha}, \quad \left(v^\alpha \frac{\partial \rho}{\partial x^\alpha} \right)_i = v_i^\alpha \sum_j m_j \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\alpha} \quad (21)$$

のように離散化される．ここで，表現の簡単化のために総和記号を \sum_j のように略記する．式 (21) を式 (20) に代入すると，粒子 i に関する離散化された連続の方程式が

$$\frac{D\rho_i}{Dt} = \sum_j m_j (v_i^\alpha - v_j^\alpha) \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\alpha} \quad (22)$$

のように得られる．

同様にして，運動方程式 (14) を粒子 i の位置で離散化すると

$$\frac{Dv_i^\alpha}{Dt} = \frac{1}{\rho_i} \sum_j m_j \frac{\sigma_j^{\alpha\beta}}{\rho_j} \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta} + f_i^\alpha \quad (23)$$

となる．ここで，関係式

$$\sum_j m_j \frac{\sigma_i^{\alpha\beta}}{\rho_i \rho_j} \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta} = \frac{\sigma_i^{\alpha\beta}}{\rho_i} \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta} = \frac{\sigma_i^{\alpha\beta}}{\rho_i} \frac{\partial(1)}{\partial x_i^\beta} = 0 \quad (24)$$

が成り立つことを利用して，式 (24) の左辺を式 (23) の右辺に加えると，

$$\frac{Dv_i^\alpha}{Dt} = \sum_j m_j \frac{\sigma_i^{\alpha\beta} + \sigma_j^{\alpha\beta}}{\rho_i \rho_j} \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta} + f_i^\alpha \quad (25)$$

を得る．さらに，右辺に人工粘性項を加えると最終的に

$$\frac{Dv_i^\alpha}{Dt} = \sum_j m_j \left(\frac{\sigma_i^{\alpha\beta} + \sigma_j^{\alpha\beta}}{\rho_i \rho_j} + \delta^{\alpha\beta} \Pi_{ij} \right) \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta} + f_i^\alpha \quad (26)$$

を得る．ここに， Π_{ij} は粒子 i と j の間に働く人工粘性である． $\delta^{\alpha\beta}$ は

$$\delta^{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & (\alpha = \beta) \\ 0 & (\alpha \neq \beta) \end{cases} \quad (27)$$

で定義されるクロネッカーのデルタである．人工粘性については 2.4 節で述べる．

水はニュートン流体と考えてよいから，応力テンソルの成分 $\sigma^{\alpha\beta}$ は

$$\sigma^{\alpha\beta} = -p \delta^{\alpha\beta} + \mu V^{\alpha\beta} \quad (28)$$

で与えられる．ここに μ は粘性係数， $V^{\alpha\beta}$ は変形速度テンソルの成分である．圧力 p は状態方程式 (15) より求めることができる． $V^{\alpha\beta}$ は

$$V^{\alpha\beta} = \frac{\partial v^\beta}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\beta} - \frac{2}{3}\delta^{\alpha\beta}\frac{\partial v^\gamma}{\partial x^\gamma} \quad (29)$$

で与えられる．これを離散化して，粒子 i の変形速度テンソルの成分 $V_i^{\alpha\beta}$ を求めると，

$$V_i^{\alpha\beta} = \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} (v_j^\beta - v_i^\beta) \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\alpha} + \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} (v_j^\alpha - v_i^\alpha) \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta} - \frac{2}{3}\delta^{\alpha\beta} \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} (v_j^\gamma - v_i^\gamma) \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\gamma} \quad (30)$$

となる．以上より，粒子 i の応力テンソルの成分 $\sigma_i^{\alpha\beta}$ は

$$\sigma_i^{\alpha\beta} = -p_i \delta^{\alpha\beta} + \mu V_i^{\alpha\beta} \quad (31)$$

で与えられる．

2.3 固体のモデル化

固体はフック弾性体とする．固体の運動に対する支配方程式は液体と同様に連続の方程式 (13)，運動方程式 (14) とフックの法則を表す状態方程式

$$p = K\eta = c^2\rho_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1 \right) \quad (32)$$

である．ここに， K は体積弾性率， η は体積ひずみである．連続の方程式と運動方程式は，それぞれ式 (22)，(26) ように離散化される．

応力テンソルの成分 $\sigma^{\alpha\beta}$ は，圧力 p と偏差応力 $s^{\alpha\beta}$ を用いて

$$\sigma^{\alpha\beta} = -p \delta^{\alpha\beta} + s^{\alpha\beta} \quad (33)$$

のように表す．変形時の物体の回転運動を考慮した Jaumann stress rate[3] を用いると，偏差応力の時間変化率 $\dot{s}^{\alpha\beta}$ が

$$\dot{s}^{\alpha\beta} = 2G \left(\dot{\epsilon}^{\alpha\beta} - \frac{1}{3}\delta^{\alpha\beta}\dot{\epsilon}^{\gamma\gamma} \right) + s^{\alpha\gamma}\omega^{\beta\gamma} + s^{\gamma\beta}\omega^{\alpha\gamma} \quad (34)$$

で与えられる．ここに， G は横弾性係数である． $\dot{\epsilon}^{\alpha\beta}$ はひずみテンソルの成分の時間変化率， $\omega^{\alpha\beta}$ は回転テンソルの成分であり，それぞれ

$$\dot{\epsilon}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\beta} + \frac{\partial v^\beta}{\partial x^\alpha} \right), \quad \omega^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\beta} - \frac{\partial v^\beta}{\partial x^\alpha} \right) \quad (35)$$

で定義される．これらのテンソルの成分の離散形は

$$\dot{\epsilon}_i^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} \left[(v_j^\alpha - v_i^\alpha) \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta} + (v_j^\beta - v_i^\beta) \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\alpha} \right] \quad (36)$$

$$\omega_i^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} \left[(v_j^\alpha - v_i^\alpha) \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta} - (v_j^\beta - v_i^\beta) \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\alpha} \right] \quad (37)$$

となる．式 (36) と (37) を式 (34) に代入すると， $s^{\alpha\beta}$ に関する常微分方程式が得られる．これを時間について積分すれば時々刻々の偏差応力が得られる．その偏差応力と状態方程式 (32) より計算される圧力を式 (33) に代入すれば，応力 $\sigma^{\alpha\beta}$ を知ることができるから，運動方程式 (26) を解くことができる．

固体の破壊に対しては、主ひずみを用いて計算される相当ひずみが限界値 $\bar{\varepsilon}_{max}$ を越えたときに破壊が発生すると考える、瞬時単純破壊モデル [6] を用いる。破壊が生じた後、破壊が生じた領域の粒子には圧縮力以外の力は働かないものとする。

2.4 人工粘性

式 (26) の人工粘性は、粒子のすり抜けを防ぎ、高速流の計算に伴う数値的不安定を防ぐために導入されるもので、次式で与えられる [2]。

$$\Pi_{ij} = \begin{cases} \frac{-A_{\Pi} \bar{c}_{ij} \theta_{ij} + B_{\Pi} \theta_{ij}^2}{\bar{\rho}_{ij}} & (\mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{d}_{ij} < 0) \\ 0 & (\mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{d}_{ij} \geq 0) \end{cases} \quad (38)$$

ここに、

$$\bar{c}_{ij} = \frac{1}{2}(c_i + c_j), \quad \bar{\rho}_{ij} = \frac{1}{2}(\rho_i + \rho_j), \quad \theta_{ij} = \frac{\bar{h}_{ij}(\mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{d}_{ij})}{|\mathbf{d}_{ij}|^2 + C_{\Pi} \bar{h}_{ij}}, \quad \bar{h}_{ij} = \frac{1}{2}(h_i + h_j) \quad (39)$$

である。 \mathbf{v}_{ij} は粒子 j に対する粒子 i の相対速度を表す。すなわち、粒子 i, j の速度をそれぞれ $\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j$ とするとき、 $\mathbf{v}_{ij} = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j$ である。 \mathbf{d}_{ij} は粒子 i と j の重心の位置ベクトルの差を表し、 $\mathbf{d}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ である。 c_i, h_i は、それぞれ粒子 i の位置における音速と粒子 i のカーネルの大きさを表す。式 (38) において、分子の第 1 項はせん断粘性とバルク粘性を表し、第 2 項は高速流の計算に必要な Von Neumann-Richtmyer 粘性を表わす。上式中に現れる係数 $A_{\Pi}, B_{\Pi}, C_{\Pi}$ の値は、文献 [2, 5] を参考にして、液体に対して $A_{\Pi} = 0.01, B_{\Pi} = 0, C_{\Pi} = 0.1$ とし、固体に対して $A_{\Pi} = 2.5, B_{\Pi} = 2.5, C_{\Pi} = 0.1$ とする。

3 計算手順

離散化された連続の方程式 (22) と運動方程式 (26) を見ると、いずれも時間に関する 1 階の常微分方程式である。この常微分方程式の時間積分にはいろいろな解法を使うことができるが、ここでは文献 [2] を参考にして次のような解法を用いる。すなわち、1 階の常微分方程式を

$$\frac{d\phi}{dt} = F(\phi) \quad (40)$$

のように表すとき、時刻 $t^n = n\Delta t$ の値 ϕ^n を知って時刻 $t^{n+1} = (n+1)\Delta t$ の値 ϕ^{n+1} を求める計算過程は次のようになる。ここに、 Δt は時間増分である。

$$\phi^{n+\frac{1}{2}} = \phi^n + \frac{\Delta t}{2} F(\phi^n) \quad (41)$$

$$\phi^{n+1} = \phi^n + \Delta t F\left(\phi^{n+\frac{1}{2}}\right) \quad (42)$$

ここに、上付き添字 $n, n + \frac{1}{2}, n + 1$ は、それぞれ時刻 $t^n, t^{n+\frac{1}{2}} = (n + \frac{1}{2})\Delta t, t^{n+1}$ における値を表わす。以上の計算を、時間を Δt ずつ進めながら実行する。

そこで、時刻 t において、各粒子の位置と速度、密度がわかっているとき、時刻 $t + \Delta t$ の状態を知るための計算は次の手順で行われる。

1. 連続の方程式 (22) を解いて密度 ρ_i^{n+1} を求める。このとき、水粒子と固体粒子を区別することなく、両者の連続の方程式を同時に解く。そうすることによって、ウォータージェットと固体が衝突する際に、密度が高くなり、その密度に応じた高い圧力が計算される。

2. 密度 ρ_i^n を用いて状態方程式により水粒子と固体粒子の圧力 p_i^n を計算する．求めた圧力と粒子の速度 $(v_i^\alpha)^n$ を用いて，運動方程式 (26) を解き，速度 $(v_i^\alpha)^{n+1}$ を求める．運動方程式を解く際に，水粒子については圧力項と粘性項を，固体粒子については圧力項と偏差応力の項を分離して計算する．圧力項は，連続の方程式のように水粒子と固体粒子を区別せず同時に計算することで，固体がウォータージェットから受ける力を考慮することができる．粘性項と偏差応力項については，水粒子と固体粒子を区別し，総和計算は水粒子についてのみ，あるいは固体粒子についてのみ行うものとする．
 3. 速度 $(v_i^\alpha)^{n+1}$ を積分して，粒子の座標 x_i^α を求める．
 4. 固体粒子について破壊の判定を行う．
- 以上の手順を，時間を Δt ずつ進めながら繰り返す．

4 数値計算例

構築した数値解法の性能を検証するために，柔らかい固体にウォータージェットを当てる計算を行った．問題を 2 次元とし，Fig. 2 に示す計算モデルを用いる．緑の粒子はウォータージェットを表し，赤の粒子は切断される固体を表す．固体の下の黄の粒子は固体を支える板を表し，これは固定された剛体とする．この剛体を構成する粒子のうち最上層の粒子（すなわち切断される固体と接する粒子）に対しては，接近してくる粒子に

$$\mathbf{f} = \begin{cases} D \left[\left(\frac{d_0}{d_{ij}} \right)^{n_1} - \left(\frac{d_0}{d_{ij}} \right)^{n_2} \right] \frac{\mathbf{d}_{ij}}{d_{ij}^2} & (d_{ij} \leq d_0) \\ 0 & (d_{ij} > d_0) \end{cases} \quad (43)$$

なる反発力を与える機能を付加する [2]．これによって，水や固体の粒子が剛体の板をすり抜けるのを防ぐことができる．式 (43) において， d_0 は初期状態での粒子間距離を表し， $d_{ij} = |\mathbf{d}_{ij}|$ はある時刻の粒子 i と j の間の距離を表す．係数 D は問題によって変化するパラメータで，速度の 2 乗の次元を持つ．また，パラメータ n_1, n_2 に対しては， $n_1 = 4, n_2 = 2$ とする．固体の密度を $\rho = 940 \text{ kg/m}^3$ ，縦弾性係数を $E = 1.0 \times 10^5 \text{ Pa}$ ，ポアソン比を $\nu = 0.3$ ，限界相当ひずみを $\bar{\varepsilon}_{max} = 0.1$ とする．水の粒子の直径を 1 mm，固体の粒子の直径を 2 mm とし，内挿カーネルの大きさを表すパラメータ h は $h = 1.5d$ (d : 粒子の直径) とする．ウォータージェットカッターでは，固体の大きさに対してジェットの幅が非常に小さいので，水と固体の粒子の大きさを同じにして水の粒子数を増やそうとすると固体の粒子数が非常に多くなり，計算コストがかかってしまう．そ

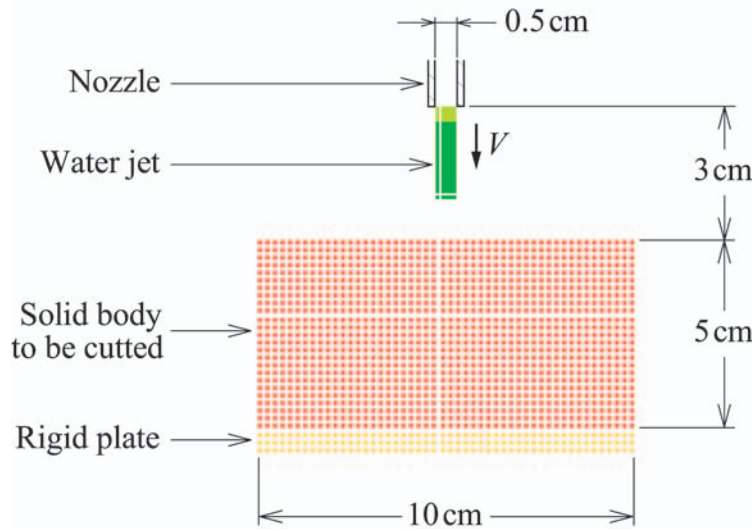


Fig. 2 Computational model for the simulation of water-jet cutting

ここで、本計算では水の粒子の直径を固体の粒子の直径の半分にする事で固体の粒子数の増加を抑え、計算コストを減少させている。

Fig. 3 に、流速 $V = 5 \text{ m/s}$ のウォータージェットを固体に当てたときの計算結果を示す。水の粒子の下に現れる青の粒子は、相当ひずみが ε_{max} を超えて破壊が発生した粒子である。Fig. 3 を見ると、時刻 $t=0.010 \text{ s}$

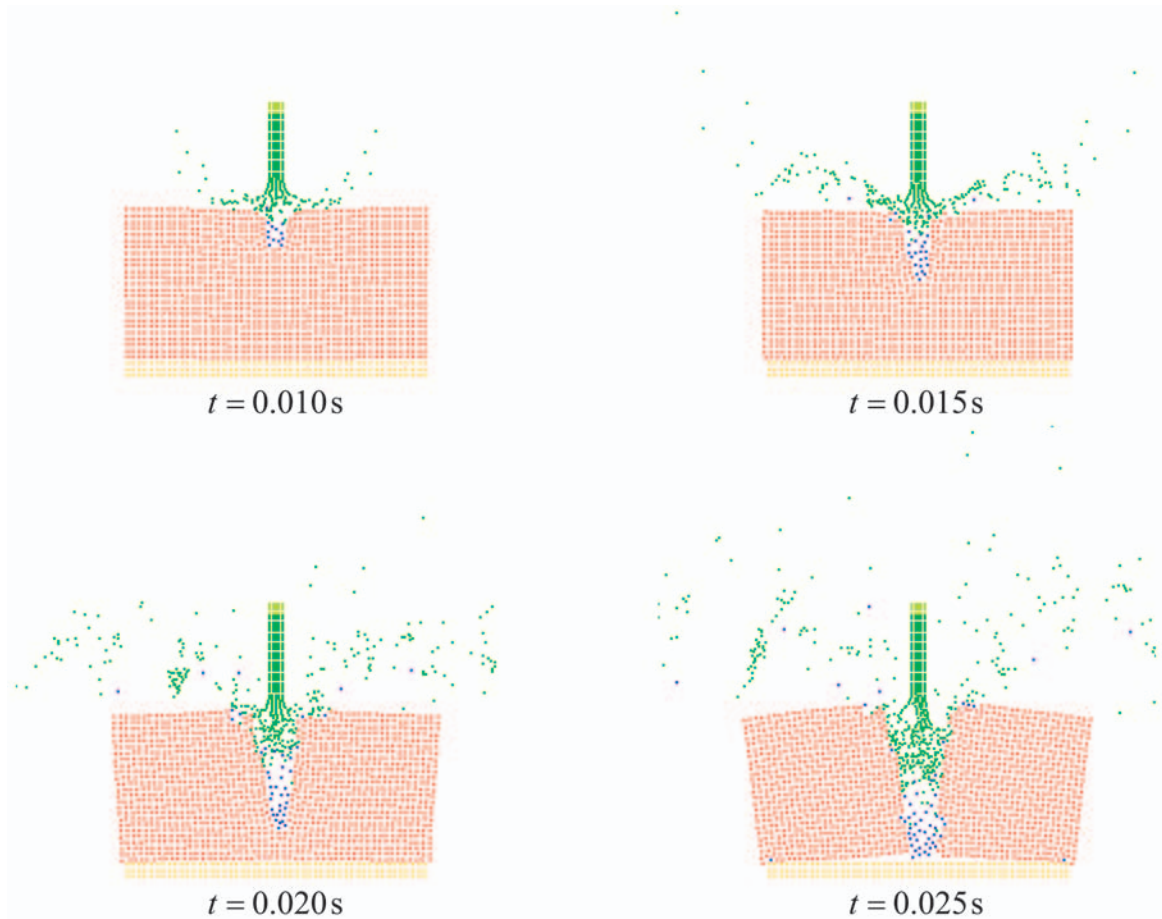


Fig. 3 Particle distributions in the cutting process of a solid body by water-jet ($V = 5 \text{ m/s}$)

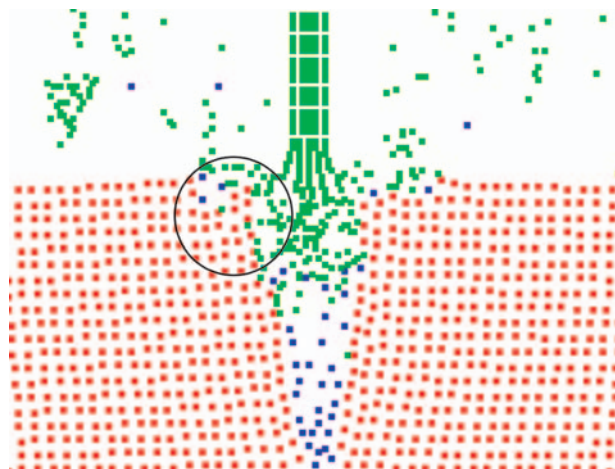


Fig. 4 Enlargement of the vicinity of a crack ($t = 0.020 \text{ s}$)

で固体に衝突した噴流が左右に分かれているのが確認できる．また固体は噴流の衝突による衝撃によって変形し相当ひずみが限界値を超えて破壊が発生している． $t=0.020\text{ s}$ では，噴流は左右に飛散する他に破壊が生じたき裂に入りこみき裂が進展している．また飛散していく水の緑の粒子に，破壊が生じた青の粒子が混ざっている． $t=0.025\text{ s}$ では，き裂が固体の底面まで達し，固体が二つに分離している．

Fig. 4 は，Fig. 3 の時刻 $t=0.020\text{ s}$ の図を拡大したものである．黒い丸で囲ってある部分を見ると，水の粒子が固体の粒子の隙間に入り込む現象が起きている．これは，水の粒子を固体の粒子の半分の大きさにしたことによって両粒子の初期配置が Fig. 5 のようになり，水の粒子が固体の粒子の隙間へ入りやすくなったことが原因であると考えられる．この結果は，粒子の大きさの比や初期配置のパターンについて詳細な検討の必要性

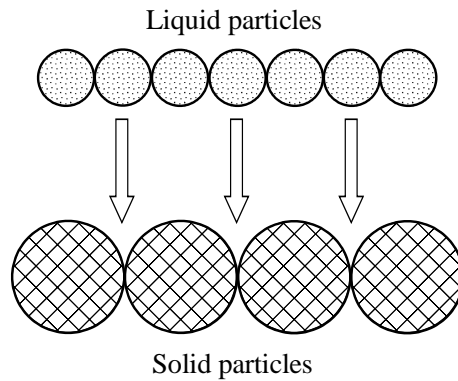


Fig. 5 Initial layout of particles

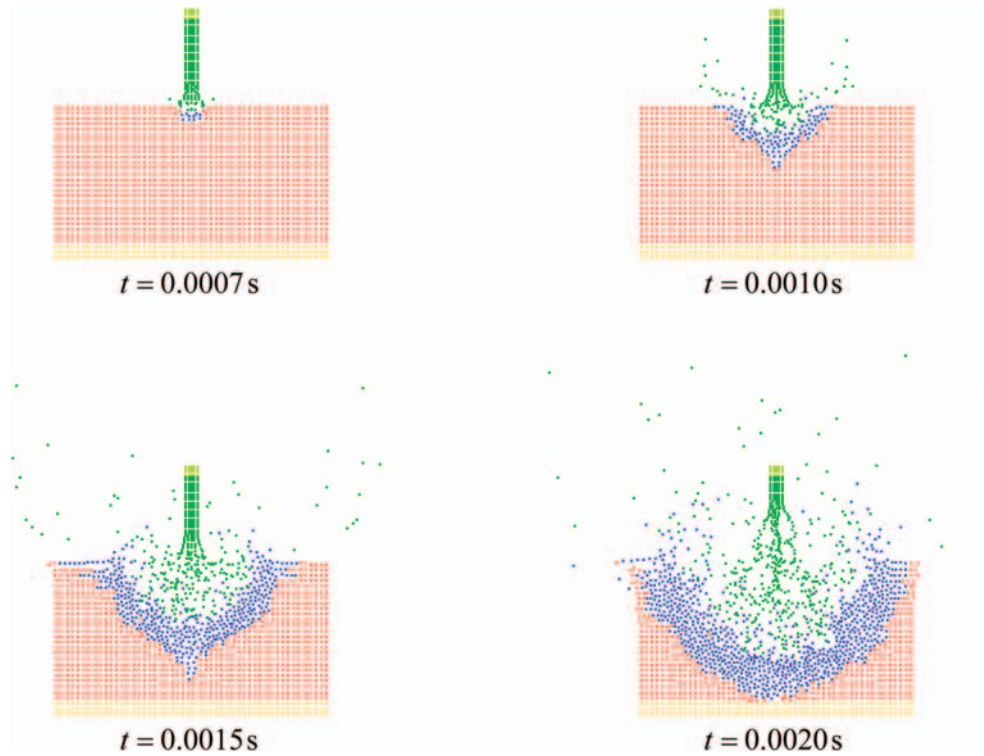


Fig. 6 Particle distributions in the cutting process of a solid body by water-jet ($V = 50\text{ m/s}$)

を示唆している．

Fig. 6 はウォータージェットの流速を 50 m/s にした場合の結果である．時刻 $t = 0.0007\text{ s}$ では噴流が衝突した部分に破壊が生じている． $t = 0.0010\text{ s}$, $t = 0.0015\text{ s}$ の図を見ると，流速が遅い場合には破壊が縦方向に進むのに対して，流速が速い場合には放射状に破壊が進展していることがわかる． $t = 0.0020\text{ s}$ では，噴流付近の固体粒子はばらばらに飛び散っており，切断されているというよりも崩されているという印象を受ける．

さて，Fig. 6 の計算結果を検討したところ，固体に衝突したあと亀裂底部からノズル方向に切断面に沿って逆流する水の粒子の圧力によって切断面が押し広げられていることが判明した．衝突後の水が固体の変形に関与することはあり得ない．また，実際の現象は 3 次元であるから，固体に衝突した後の水はジェットに垂直な方向（紙面に垂直な方向）に抜けていき，ノズル方向に逆流するものは少ない．しかし，2 次元問題として解析すると，固体に衝突した水はノズルに向かって逆流するしかなく，このような計算結果が得られたものと推測される．そこで，理論的には不自然な計算方法ではあるが，Fig. 6 の計算において逆流する粒子を意図的に計算領域外へ排除するという計算を行ってみた．これは衝突後の水が紙面に垂直な方向に逃げていく現象を考慮したものである．その結果が Fig. 7 である．この図における亀裂の広がり方は，Fig. 6 のそれとは明らかに異なっている．Fig. 6 の結果に比べて，亀裂の広がり方は小さく，ジェットが衝突した箇所からジェットの進行方向に破壊領域（青い領域）が広がっており，ジェットの衝突によって亀裂が進展するという好ましい結果になっている．この結果から，Fig. 6 の計算で固体が崩されるようなシミュレーション結果になったのは，逆流する水の粒子の副作用によるものであることがわかった．これは，ウォータージェットによる固体切断の現象の数値解析においては，衝突後の水の粒子がジェットに垂直な方向に抜けていく現象を考慮する必要があるためには 3 次元解析が必要であることを示唆する結果であると考えられる．

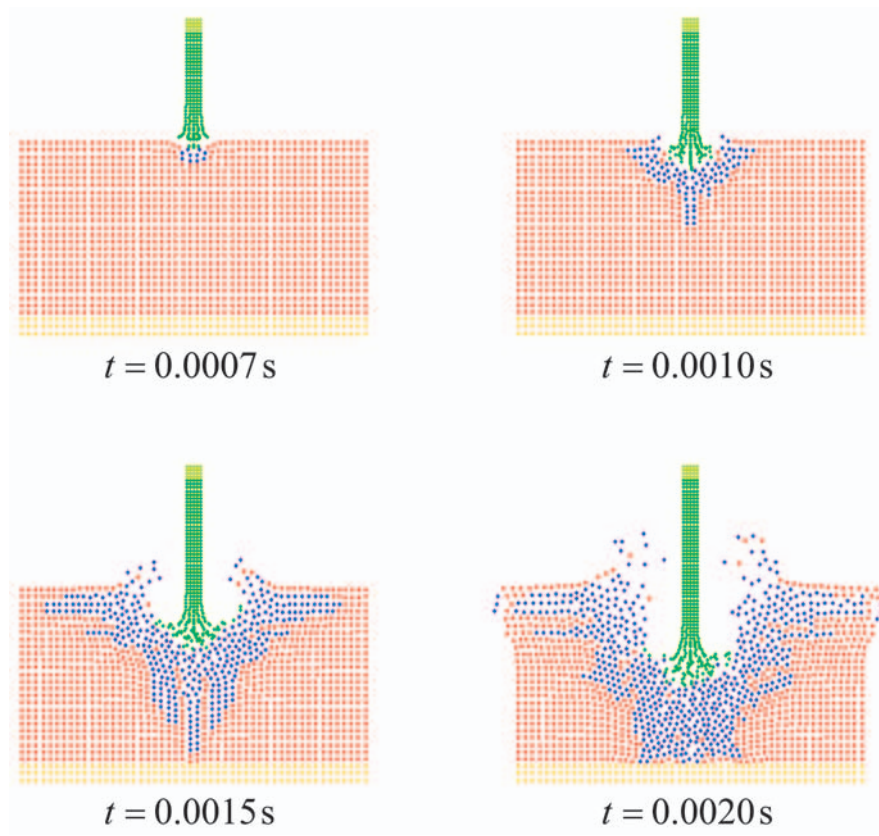


Fig. 7 Computational results for the case in which particles in a backward flow are erased ($V = 50\text{ m/s}$)

5 おわりに

SPH 法を用いて、ウォータージェットによる固体切断を解析するための数値計算法を構築した。柔らかい固体を用いて計算を行い、噴流の衝突によって固体が変形し、破壊が発生し、亀裂が進展していく様子が計算できることを確認した。

今回の計算では、5 m/s という比較的遅い流速による衝突においては固体が切断される結果になったが、流速を 50 m/s に上げた場合には固体が粉々に砕ける結果となった。原因としては、ジェットが太いことが考えられる。また、亀裂がジェットの流れ方向にのみ延びていくのではなく、放射状に広がってしまう結果も見られた。これは、固体に衝突したあと逆流する水の粒子の影響によるものであることがわかった。このような影響を排除するための一つの方法は、衝突後の水の粒子の抜け道を考慮した 3 次元解析である。今後の課題として、さらに検討を加えていきたい。

参考文献

- [1] Monaghan, J. J.: *Smoothed particle hydrodynamics*. Annual Review of Astrophysics, **30**, 543–574 (1992).
- [2] Monaghan, J. J.: *Simulating free surface flows with SPH*. Journal of Computational Physics, **110**, 399–406 (1994).
- [3] Gray, J. P., Monaghan, J. J. and Swift, R. P.: *SPH elastic dynamics*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, **190**, 6641–6662 (2001).
- [4] Batchelor, G. K.: “An Introduction to Fluid Dynamics” Cambridge University Press, Cambridge, U. K. (1974).
- [5] Libersky, L. D., Petschek, A. G., Carney, T. C., Hipp, J. R. and Allahdadi, F. A.: *High Lagrangian hydrodynamics*. Journal of Computational Physics, **109**, 67–75 (1993).
- [6] 新館恭嗣, 関根英樹: SPH 法による超高速衝突現象解析における新粒子の生成手法の提案. 日本機械学会論文集 (A 編), **68**, 132–138 (2001).