

確率微分方程式を用いたパラメータの不確実性を考慮した 降雨流出解析に関する研究

成岱蔚*, 山田正*, 山田朋人**

Study on Rainfall-runoff analysis considering the uncertainty of model
parameters based on stochastic differential equation

Daiwei CHENG*, Tadashi YAMADA* and Tomohito YAMADA**

Abstract

The rainfall-runoff analysis is an essential topic in hydrology. Generally speaking, it is difficult to directly apply first physical principles in the rainfall-runoff analysis because of the scale of river basin. Thus, simplifying and modeling are necessary. However, modeling also means incomplete information, when it comes to rainfall-runoff analysis, incomplete information means insufficient observation data, simplifying the physical process, and the uncertainty of model parameters. Usually, the best fitting parameter set will be different even in the same river basin. Researchers had done a lot of works to find better modeling structures in order to let the parameters more stable, however, the basic conception of deterministically rainfall-runoff analysis has its limitation.

In this study, the Rainfall-runoff system is considered to be a stochastic system. So, the uncertainty of parameters will be natural of the system in which its effects can be described by the control equations. Stochastic differential equations theory is used in this study. Unlike the traditional deterministic rainfall-runoff analysis, this study gives a result of the probability distribution of runoff. Besides, the present study also suggested a way to deal with complex hydrological models with many parameters.

1 はじめに

近年、計画規模を上回る洪水災害が頻発している。そのため、洪水災害が発生する前にいかに避難情報を発信し、被害を軽減させることが喫緊の問題である。避難情報を発信する基準は、洪水時の河川の水位予測に基づいている。そのため流域における降雨や河川流量、水位の関係を明らかにすることは極めて重要である。そのための手法として降雨流出解析は、水文学の中において最も重要な課題の一つであり、過去から現在にいたるまで多くの研究が行われている。その中でも大きな問題点は、降雨流出現象が扱う対象、流域のスケールが非常に大きいため、第一物理法則を直接応用することができず、現象を単純化する必要がある。これが降雨流出モデルの役割である。しかし、降雨流出現象を単純化したため、解析のプロセスにおいて不確実性が生じる。通常、同様な流域においても、降雨イベントごとに降雨の空間分布や強度が異なること、流域の土壌状態や植生の有無や種類も変化するため、最適なパラメータセットが異なる。そのため、降雨流出の時系列をある降雨イベントごとに最適なパラメータセットを用いれば、非常に高い精度で再現できるが、リアルタイムの流出予測の精度は相対的に低いことが予想される。

降雨流出過程の不確実性を考慮するために、これまで多数の研究が行われてきた。例えば、日野ら[1]は Kalman フィルタを導入し洪水予測問題に適用することで、パラメータとシステムノイズの不確実性が考慮できるようにした。その後、星ら[2]は Kalman フィルタを改善し、リアルタイムの洪水予測システムを実装

* 中央大学理工学部都市環境学科 〒112-8551 東京都文京区春日1-13-27

** 北海道大学大学院工学研究院 〒060-8628 北海道札幌市北区北十三条西8丁目

した。このシステムは北海道において多くの実績がある。その後、椎葉・立川[3]らは、粒子フィルタリングを洪水予測に取り入れ、非線形システムと非ガウスシステムに適用できる洪水予測システムを開発した。これらの洪水予測方法は多くの実績があるが、洪水現象の不確実性の性質および物理的な要因に関する研究は十分ではない。

それらに対し、山田・吉見[4]らは、2014年に伊藤確率微分方程式と Fokker-Planck 方程式を用いて降雨の不確実性を考慮した流出過程を表現する先行研究を行った。この研究は不確実性の物理的性質を考慮できる方法である。さらに、Fokker-Planck 方程式は本来 Brownian 運動を記述する方程式であるため、この研究は巨視的な降雨流出現象と微視的な不確実性の架け橋にもなっている。山田らは、降雨流出システムを複雑系として扱った小時間スケールの降雨強度の振動と大スケールの流出の関係を分析した。本研究はそれを基礎として、確率微分方程式を用いたパラメータの不確実性が流出に及ぼす影響を調べる手法を提案した。

2 確率微分方程式を用いた降雨流出解析

本研究の手法は山田、吉見らによって提案された確率微分方程式を用いた降雨流出解析の枠に基づいているため、確率微分方程式の歴史を簡単に説明し、山田、吉見[4]らの理論を紹介する。

2.1 確率微分方程式と Fokker-Planck 方程式

確率微分方程式とは、不確実性を有する現象を記述する式である。確率方程式の歴史を振り返ると、1900年に Albert Einstein[5]が Brownian 運動を研究する時に初めて微分方程式にランダム項を導入した。その後、P. Langevin が Einstein の研究を引き継ぎ、以下の Langevin 方程式を提案した。

$$\frac{dv(t)}{dt} = -\beta v(t) + \eta'(t) \quad (2-1)$$

ここに、 $v(t)$ は Brownian 粒子の速度であり、 $-\beta v(t)$ は水の粘性から生じる抵抗力である。 $\eta'(t)$ はランダム外力である。このように連続関数の微分がランダム項になり、ランダム時系列の微分は、当時、数学的な基礎がまだ固まっていなかったが、この問題は日本の数学者である伊藤清によって解決された。伊藤[6]らは1940年に、確率微分方程式に関する数学基礎理論を提案しており、その理論によって、式(2-1)は以下のように書き換えることができる。

$$dv(t) = -\beta v(t)dt + \eta'(t)dt \quad (2-2)$$

さらに、ランダム外力 $\eta'(t)$ が White noise の場合、式(2-2)は以下ようになる。

$$dv(t) = -\beta v(t)dt + \sigma dw \quad (2-3)$$

ここに、 σ は $\eta'(t)$ の標準偏差であり、 dw は標準 Winner 過程の微小時間 dt の間の変化量である。式(2-3)のように記述されたものを通常伊藤の確率微分方程式と呼ぶ。式(2-3)は式(2-1)と比較すると、方程式の形が変わったとともに、数学的な意味も異なっている。式(2-1)は連続関数 $v(t)$ の微分が抵抗力の項とランダム項の和になるが、式(2-3)は、微小時間 dt 間の速度 $v(t)$ の変化量が抵抗力による速度の変化量と標準 Winner 過程の変化量の和になる。このように式形の変化による数学的解釈によって、連続関数の微分とランダム項の関係が明らかとなった。

式(2-3)は微小時間 dt 間の速度 $v(t)$ の変化量を記述したが、不確実性を有する現象について、 $v(t)$ よりも、 v の確率密度関数 $P(v, t)$ のほうがシステムの状態を反映できる。そこで、伊藤らは、式(2-3)の伊藤の確率微分方程式が以下の式(2-4)で示す Fokker-Planck 方程式と数学的に等価であることを証明した。

$$\frac{\partial P(v, t)}{\partial t} = -\frac{\partial(-\beta v)P(v, t)}{\partial v} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \sigma^2 P(v, t)}{\partial v^2} \quad (2-4)$$

Fokker-Planck 方程式とは、本来、統計力学における気体分子群速度分布の確率密度関数の時間発展を記述する方程式であるが、伊藤の確率微分方程式と等価であることから、式(2-4)を解けば、Brownian 粒子速度の確率密度関数が得られる。

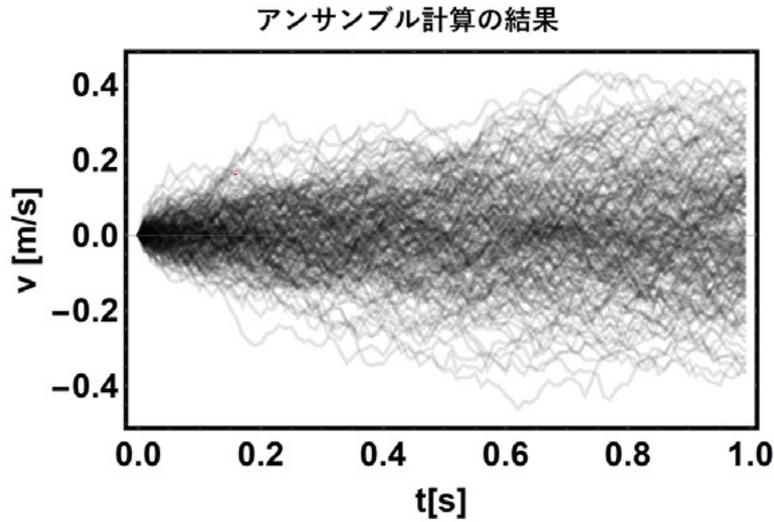


Fig.2-1 The time evolution of the velocity of Brownian particles (500 particles ensemble).

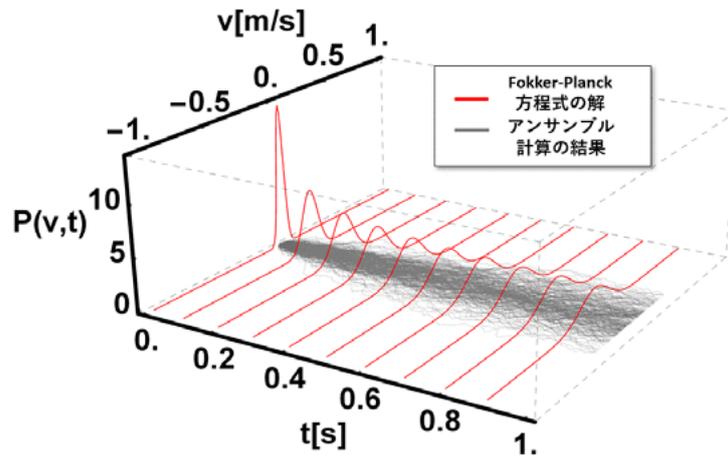


Fig.2-2 The time evolution of the distribution of the velocity of Brownian particles (Fokker-Planck equation's solution)

Fig.2-1, Fig.2-2 に示したのはそれぞれ式(2-3)と式(2-4)の解である。簡単のため、パラメータは以下のように設定した。 $\beta = 0.6$, $\sigma = 0.2(m/s)$, 初期条件 $v_0 = 0m/s$, 計算期間は 1s である。式(2-3)を 500 回アンサンブル計算の結果を図 2-1 に示している。速度は時間とともに拡散していくことが分かる。図 2-2 は Fokker-Planck 方程式の解である。赤い線は各時刻の速度分布であり、アンサンブル計算の結果と一致している。

2. 2 確率微分方程式を用いた降雨流出解析

前節では、簡単に確率微分方程式の歴史を振り返るとともに、伊藤の確率方程式と Fokker-Planck 方程式を用いた不確実性の外力を有する物理システム (Brownian 運動) を解析する手法を紹介した。本節では、同様の手法を基礎とした上で、吉見、山田[4]らによって提案された降雨の不確実性を考慮した降雨流出解析について説明する。

本研究では、吉見、山田らによって提案された単一斜面における降雨流出に確率微分方程式を適用した。その理由は以下の 3 点である：1、本手法の基礎式は、連続式と Kinematic Wave から導出した式であるた

め、すべてのパラメータには物理的な意味がある。2、本手法は降雨流出解析に広く用いられている貯留関数法の基礎式と同形であり、その精度と有効性は多くの検証がされている。3、式形が比較的簡単であるため、確率微分方程式に適用することが容易である。単一斜面における降雨流出の基本的式は下記の式(2-5)である。

$$\frac{dq}{dt} = \alpha q^\beta (r(t) - q) \tag{2-5}$$

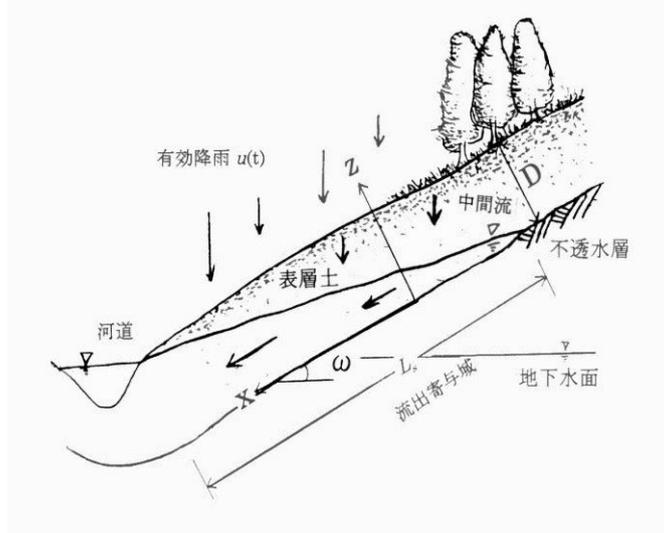


Fig.2-3 The conception of the basic equation of rainfall-runoff system in slope

ここに、 α, β は流域の物理性質（土質、斜面勾配など）によって決まるパラメータである。 $q(t)$ は流出高[mm/h]であり、流域の支配断面の流量を流域面積で割ったものである。 $r(t)$ は流域平均有効降雨強度[mm/h]である。この式より降雨強度 $r(t)$ が得られると、式(2-5)を解くことができ、流域の支配断面の流出高と流量または水位の時系列を得ることができる。しかし、時々刻々の降雨強度を予測するのは困難であるため、雨量強度を決定論的な部分（現在予測可能な部分）と不確実な部分（現在予測困難な部分）を分けて考えることが本理論の基本設定である。これにより、降雨強度の不確実性が流出予測の結果に及ぼす影響を議論できるようになり、さらに、各パラメータの不確実性の影響も議論できる。

$$\frac{dq}{dt} = \alpha q^\beta (\bar{r}(t) + r'(t) - q) \tag{2-6}$$

式(2-5)の降雨強度 $r(t)$ を $\bar{r}(t) + r'(t)$ に分けると、式(2-6)になる。式(2-6)を式(2-2)、式(2-3)の形式に書き換えると式(2-7)、式(2-8)になる。

$$dq = \alpha q^\beta (\bar{r}(t) - q)dt + \alpha q^\beta r'(t)dt \tag{2-7}$$

$$dq = \alpha q^\beta (\bar{r}(t) - q)dt + \sigma \sqrt{T_L} dw \tag{2-8}$$

式(2-8)は伊藤の確率微分方程式と同型である。ここで注意すべきところは以下である。 σ は降雨強度の不確実性成分の標準偏差である。式(2-2)、式(2-3)の場合、不確実外力 $\eta'(t)$ を White noise と仮定している。サンプル率が如何に小さくなくても、White noise の自己相関は 0、かつ標準偏差が一定である。降雨強度の場合、無限に小さいサンプル率でデータを取れないため、ある一定なサンプル率で取った観測データで、自己相関を取り、自己相関がある時間間隔を T_L とする。それより大きい間隔で取られたデータは、White noise として見なすと、その拡散係数が $\sigma \sqrt{T_L}$ になる。そのため、式(2-8)と対応する Fokker-Planck 方程式は

$$\frac{\partial P(q,t)}{\partial t} + \frac{\partial \alpha q^\beta (\bar{r}(t) - q)P(q,t)}{\partial q} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (\alpha q^\beta \sigma \sqrt{T_L})^2 P(q,t)}{\partial q^2} \tag{2-9}$$

となる。ここに、 $P(q,t)$ は流出高 q の確率密度関数である。

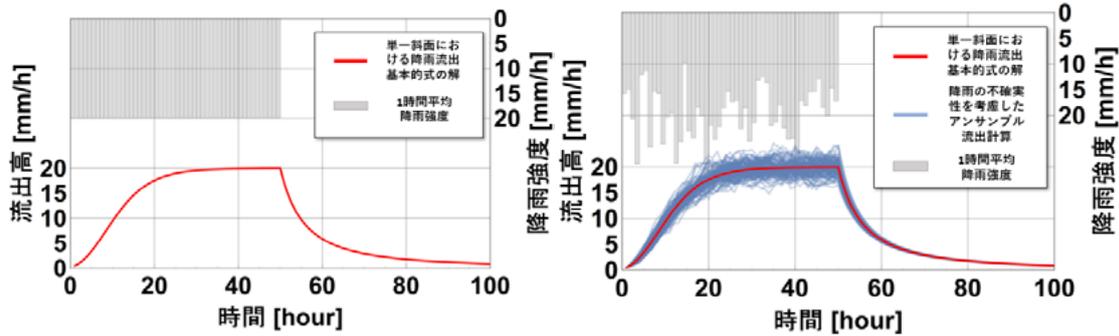


Fig.2-4 Solution of the basic equation of rainfall-runoff system in slope
(left : Not considering rainfall uncertainty, right : Considering rainfall uncertainty)

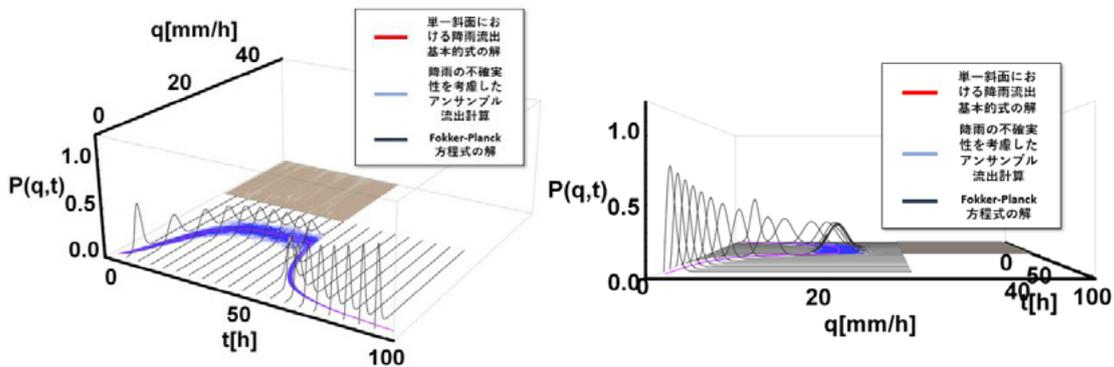


Fig.2-5 The time evolution of the probability density function of runoff rate (Fokker-Planck equation's solution)

Fig.2-4 に単一斜面における降雨流出の基礎式の解を示している。モデルパラメータは $\alpha = 0.03, \beta = 0.6$ と設定されている。左側は降雨強度に不確実性がない場合であり、20mm/hの雨が50時間降り続く場合の流出高である。右側は降雨強度に $\sigma = 5\text{mm/h}, T_L = 1\text{h}$ の不確実成分がある場合の5000回アンサンブル計算の結果を示している。流出高の分散は、時間とともに大きくなるが、ピーク付近に一定の値になることが分かる。Fig.2-5にFokker-Planck方程式の解を示している。アンサンブル計算の結果と一致していることが分かる。

3. 確率微分方程式を用いた降雨流出のパラメータの不確実性に関する検討 (パラメータの個数が少ない場合)

前節は、山田、吉見らによって提案された確率微分方程式を用いた降雨流出解析の理論を紹介した。本研究はこの理論に基づいて、同様の手法でパラメータの不確実性を考慮した降雨流出関係を明らかにすることを目的とする。

山田、吉見らの理論は、降雨の時系列を、決定論的な成分(時間平均成分) $\bar{r}(t)$ と不確実成分 $r'(t)$ に分割し、その不確実成分 $r'(t)$ をシステムのランダム外力として扱った。この理論を直接パラメータの不確実性として適用すれば、パラメータも降雨と同様に2つの部分に分割する必要がある。しかし、パラメータの不確実性と降雨の不確実性とは性質が異なる。前節で述べたように、時間平均成分と不確実成分はそれぞれ長時間スケールの変動成分と短時間スケールの変動成分に対応している。この2成分は同時に不確実性が持っているが、降雨の場合において、長時間スケールの変動成分は観測値の時間平均値になり、各時間における観測値の不確実性が平均の効果により抑えられているが、短時間スケールの変動成分のほうは不確実性が大きい。それに対して、パラメータはその流域の物理性質を表しているのだから、比較的安定し、短時間スケールの変動成分が小さいが、長時間スケールの変動成分は直接的に観測できず、過去のデータから同定しなければならない。そのためパラメータの不確実性を考慮する場合、長時間スケールの変動成

分の不確実性を Fokker-Planck 方程式に入れる必要がある。

短時間スケールの変動成分はシステムのランダム外力として扱っているので、システムの変数の確率密度関数の独立変数には含まれていない。式(2-9)の場合、 P の独立変数は q と t のみである。しかし、長い時間スケールの変動成分の不確実性を考慮する場合、その変数を外力として扱うことができなくなり、システムの内部変数になる。したがって、式(2-5)のパラメータ α 、 β の不確実性を考慮する場合、変数の確率密度関数の独立変数は q 、 α 、 β 、 t の4つになる。そして、連立常微分方程式で物理システムを記述する場合、方程式の本数と内部変数の個数が一致しないと、方程式が閉じないため、 α 、 β の時間発展を記述する方程式も必要になる。したがって、式(2-5)は以下になる。

$$\begin{cases} \frac{dq}{dt} = \alpha q^\beta (r(t) - q) \\ \frac{d\alpha}{dt} = 0 \\ \frac{d\beta}{dt} = 0 \end{cases} \quad (3-1)$$

簡単化のため、パラメータ α 、 β 長い時間スケールの変動成分の不確実性のみを考慮すると、式(3-1)に対応する Fokker-Planck 方程式は以下になる。

$$\frac{\partial P(q, \alpha, \beta, t)}{\partial t} + \frac{\partial \alpha q^\beta (\bar{r}(t) - q) P(q, \alpha, \beta, t)}{\partial q} = 0 \quad (3-2)$$

式(3-2)と式(2-9)を比較すると、 α 、 β の短い変動成分は考慮していないため、式(3-2)の右辺は0となっている。式の左辺は形式上が類似しているが、 P の独立変数が違うため、同様な方程式ではない。式(2-9)は α 、 β の不確実性を考慮できないことに対し、式(3-2)は α 、 β の確率分布を、初期条件として扱うことができる。最後に、式(3-2)の解 $P(q, \alpha, \beta, t)$ を α 、 β に関して積分すれば、流出高 q の確率密度関数 $P(q, t)$ が得られる。

式(3-2)の性質を議論するため、以下の降雨イベントを例として計算を行った。対象とする流域は草木ダム流域である。草木ダムは利根川水系渡良瀬川の本川上流部に建設されたダムである。ダムが支配している流域面積は約 254km²であり、流域の概要を Fig. 3-1 に示す。

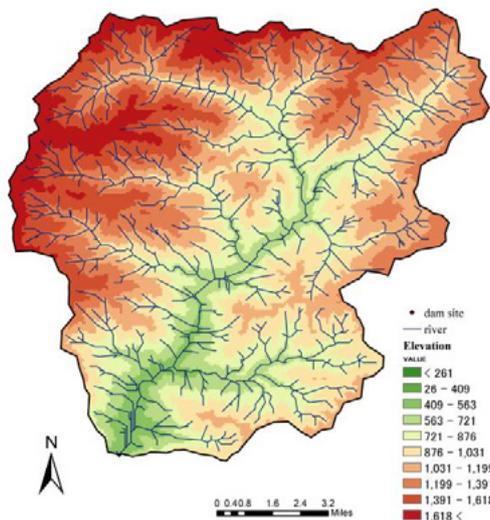


Fig. 3-1 The basic information about Kusaki dam river basin

計算イベントは 2003 年 8 月 8 日から 8 月 12 日までの洪水を選定した。総雨量は約 250mm である。計算条件は下記の通り：降雨強度の不確実性を考慮しない。モデルパラメータ α 、 β の不確実性は正規分布に従うと仮定し、 $\alpha, \beta \sim N(0.045, (k * 0.045)^2), N(0.41, (k * 0.41)^2)$ と設定した。ここに k は標準偏差を平均値の割合で表す係数であり、今回の計算は $k = 0.1, 0.2, 0.3$ 三ケースを計算した。

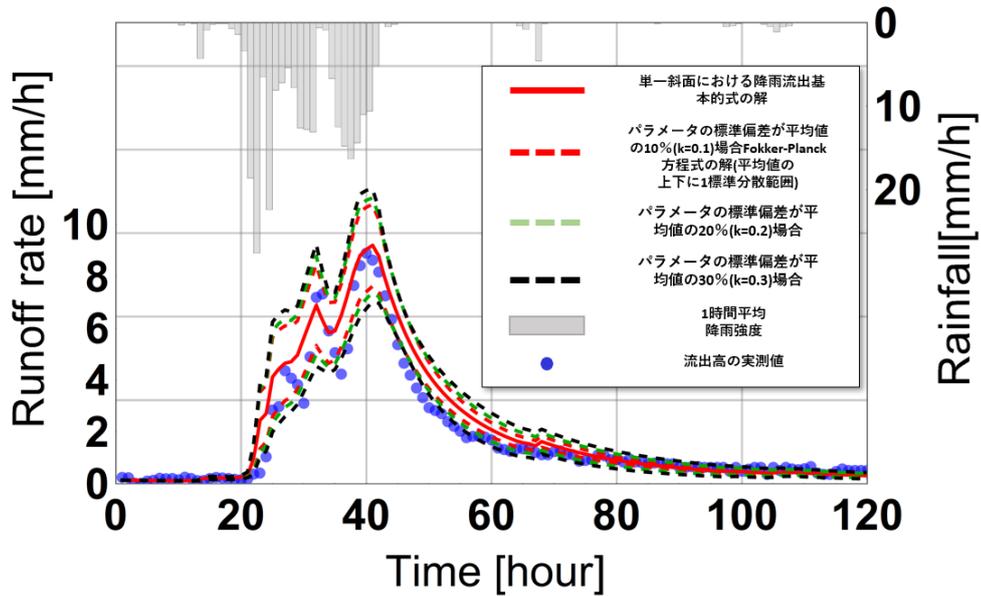


Fig.3-2 Rainfall runoff analysis of 2003-08-08 rainfall event in Kusaki dam river basin, considering the uncertainty of model parameters (1-layer model)

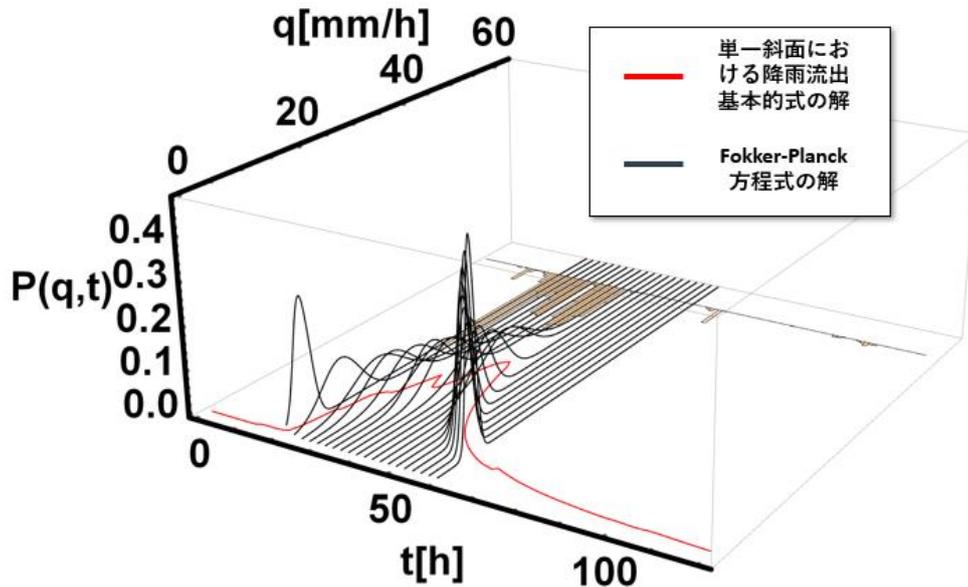


Fig.3-3 Rainfall runoff analysis of 2003-08-08 rainfall event in Kusaki dam river basin, considering the uncertainty of model parameters (1-layer mode, Fokker-Planck equation's solution)

Fig.3-2 と Fig.3-3 に計算の結果を示す。Fig.3-3 に Fokker-Planck 方程式の解を直接に示し、Fig.3-2 に平均値の上下 1 標準偏差の範囲と流出高の実測値を示した。流出高 q の分布が正規分布あるいは正規分布に近似できる場合、観測値が図に示した範囲内にある確率は約 68%であるため、この範囲は信頼性 68%の予測区間とも言いえる。Fig.3-2 に示したように、ピーク付近の予測区間が一番広く、その幅は平均値の上下約 25%であることが分かった。一方、パラメータの標準偏差が増えても、予測区間はほぼ変化しないことが分かった。

4. 確率微分方程式を用いた降雨流出のパラメータの不確実性に関する検討
(パラメータの個数が多い場合)

単一斜面における降雨流出の基礎式は雨の鉛直方向の浸透を考慮していない。それに対し、吉見、山田 [7]らは式(2-5)を以下のように拡張した。まず、山腹斜面が複数の層で構成されると考え、 n 層目における鉛直浸透について考える。 $n-1$ 層から n 層目への浸透量 $V_{n-1} (=b_{n-1}s_{n-1})$ 、 n 層目から $n+1$ 層目への浸透量 $V_n (=b_n s_n)$ と各層における流出に寄与する雨量(流出に寄与する降雨量)の連続関係から(4-1)式を得る。

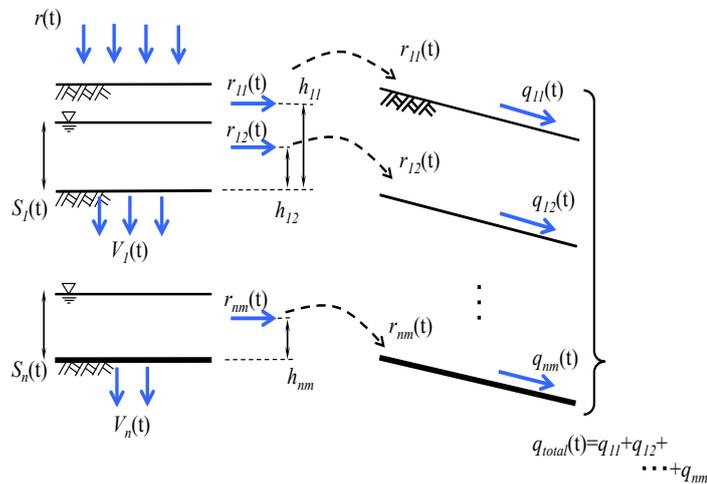
$$\frac{ds_n}{dt} = V_{n-1} - r_{nm} - V_n \tag{4-1}$$

$$\begin{cases} r_{nm} = 0 & (s_n < h_{nm}) \\ r_{nm} = a_{nm}(s_n - h_{nm}) & (s_n \geq h_{nm}) \end{cases} \tag{4-2}$$

各層の流出に寄与する降雨量は式(4-1)に示すように土層内水位 s_n が各層の保水力 h_{nm} を超えた時点で発生するとする。また、鉛直方向への浸透量 V_n は土層内水位 s_n に比例するものとした。さらに、式(4-1)中の r_{nm} を式(4-3)の基礎式に斜面流出に寄与する降雨として与えることで一連の斜面計算が行われる。

$$\frac{dq_{nm}}{dt} = a_{nm} q_{nm}^{b_{nm}} (r_{nm} - q_{nm}) \tag{4-3}$$

ここに、 n : 層数, m : 各層における側方成分の数である。例えば、流出高 q_{21} は「表層から数えて2層目の上から1つ目の流出成分」であるとする。また、 s_n : 各層の土壌内水位[mm], a_{nm} , b_n : 各側方成分, 浸透成分の比例定数[1/h], h_{nm} : 流出成分発生の閾値[mm], r_{nm} : 有効降雨量[mm/h], V_n : 鉛直浸透量[mm/h]である。 a_{nm} , b_{nm} は単一斜面における基礎式中のパラメータ a_0 , β にそれぞれ対応する。このような構造を取ることで、鉛直浸透に起因する非線形性、側方流出に起因する非線形性を表現可能となった。以上の計算過程の概念図を Fig. 4-1 に示す。



鉛直浸透の概念図

斜面計算の概念図

Fig. 4-1 The conception of rainfall-runoff model considering the vertical infiltration

上述の鉛直浸透を考慮した降雨流出モデルを2段3層の構造だと考える場合、モデルのパラメータは14個ある。パラメータをすべてシステム変数と考慮すると、方程式は20元連立常微分方程式になり、それと対応する Fokker-Planck 方程式も20次元の位相空間における方程式となり、直接に数値解を求めるのはほぼ不可能である。そこで、本研究において摂動法を用いた Fokker-Planck 方程式の近似解を求める方法を提案する。

4. 1 方程式の線形化

連立常微分方程式は一般的に以下のように書くことができる.

$$d\vec{X}(t) = \vec{f}(\vec{X})dt \quad (4-4)$$

ここに, $\vec{X}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), \dots, x_n(t))$, $\vec{f} = (f_1(\vec{X}), f_2(\vec{X}), f_3(\vec{X}), \dots, f_n(\vec{X}))$ である. 線形化するには, 摂動法を用いる. 式(4-4)の解を以下のように分解する.

$$\vec{X}(t) = \vec{X}^0(t) + \varepsilon \vec{X}^1(t) + \varepsilon^2 \vec{X}^2(t) + \dots \quad (4-5)$$

ε の 1 次オーダーまでを考慮し, 式(4-4)を代入し, 右側を Taylor 展開すると, ε の 1 次オーダー方程式は線形になる.

$$d\vec{X}^1(t) = D_x f(\vec{X}^0(t)) \cdot \vec{X}^1(t)dt \quad (4-6)$$

ここに, $D_x \vec{f}(\vec{X}^0(t))$ は \vec{f} のヤコビ行列である. $(D_x \vec{f})_{ij} = ((\partial f_i)/(\partial x_j))$. 式(4-4)から式(4-6)までの操作によって, 一般的な連立方程式を線形化できた. これによって, ε の 1 次オーダーの不確実性を線形方程式で検討することができるようになった.

4. 2 Fokker-Planck 方程式の近似解

伊藤の確率微分方程式の一般的な形式は以下のように書ける.

$$d\vec{X}(t) = \vec{f}(\vec{X})dt + \vec{\sigma}(\vec{X})d\vec{w} \quad (4-7)$$

式(4-7)と対応する Fokker-Planck 方程式は,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial P(x_1, x_2, \dots, x_n, t)}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) P(x_1, x_2, \dots, x_n, t)}{\partial x_i} \\ & = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 \sigma_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \sigma_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \rho_{ij} P(x_1, x_2, \dots, x_n, t)}{\partial x_i \partial x_j} \end{aligned} \quad (4-8)$$

である. 一般的にランダム変数を記述するには, 確率密度関数を用いられる. 確率密度関数にはランダム変数のすべての情報が含まれている. しかし, 確率密度関数を直接得ることが困難である場合, ランダム変数のモーメントで表すこともできる.

キュムラント展開定理(cumulant expansion theorem)は確率密度関数をモーメントに関する漸近級数で表すことができる定理である. ランダム変数のモーメントが分かるとランダム変数の一部の情報が分かる. なお, モーメントは以下の統計的な意味を持つ. 1, 2, 3, 4-次モーメントはそれぞれランダム変数の期待値, 分散, 歪度, 尖度である. したがって, 確率密度関数の時間発展を直接求めることが困難である場合は, モーメントの時間発展を求めることが考えられる. ランダム変数 X の n -階モーメントを以下のように定義する.

$$\langle \bar{X}^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{X}^n P(\bar{X}) d\bar{X} \quad (4-9)$$

式(4-9)と式(4-8)を合わせて, ランダム変数のモーメントの時間発展を支配する方程式を導くことができる. 以下にランダム変数 X の 1 階モーメントの支配方程式を導出する.

$$\frac{d\langle \bar{X} \rangle(t)}{dt} = \langle \vec{f}(\bar{X}) \rangle \rightarrow \frac{d\langle \bar{X} \rangle(t)}{dt} = \vec{f}(\langle \bar{X} \rangle) \quad (4-10)$$

モーメントを取る操作は線形演算子なので, \vec{f} が線形である場合, モーメントを取る操作と \vec{f} の順番が交換できる. \vec{f} が非線形である場合モーメントに関する方程式は完結問題 (closure problem) が発生するため, 以下は 4.1 節に議論した線形化した後の方程式を議論する. 式(4-6)を ε の 1 次オーダーの不確実性外力を加えると,

$$d\vec{X}^1(t) = D_x f(\vec{X}^0(t)) \cdot \vec{X}^1(t)dt + \vec{\sigma}(\vec{X}^0(t))d\vec{W} \quad (4-11)$$

式(4-11)の 1 階モーメントの支配方程式は

$$\frac{d\langle \bar{X}^1(t) \rangle}{dt} = D_x f(\bar{X}^0(t)) \cdot \langle \bar{X}^1(t) \rangle dt \quad (4-12)$$

同様に、式(4-11)、式(4-9)と式(4-8)を合わせて、 $\bar{X}^1(t)$ の2階モーメントの支配方程式を導出できる。

$$\frac{d\langle x_i^1 x_j^1 \rangle(t)}{dt} = \sum_{k=1}^n (D_{\bar{x}f})_{ik} \langle x_i^1 x_k^1 \rangle(t) + \sum_{l=1}^n (D_{\bar{x}f})_{lj} \langle x_l^1 x_j^1 \rangle(t) + \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j \quad (4-13)$$

式(4-13)を2段3層モデルに適用すれば、直接に Fokker-Planck 方程式を解かずに、流出高 q の分散 $\langle q^2 \rangle(t)$ が得られる。それを検証するため、第3節で検証した降雨イベントを2段3層モデルでもう一度計算する。

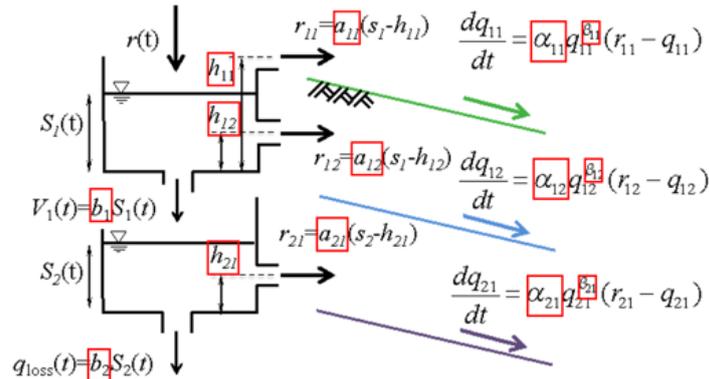


Fig.4-2 The conception of 2-tanks-3-layers model

2段3層モデルの基本式およびパラメータは Fig.4-2 に示す。計算条件は下記のとおり。パラメータの不確定性は第3節と同様に正規分布だと仮定した。標準偏差が平均値の10%,20%,30%三ケースを計算した。パラメータの平均値は $\alpha_{11} = 0.1266, \alpha_{12} = 0.1048, \alpha_{21} = 0.0521, \beta_{11} = 0.6832, \beta_{12} = 0.6865, \beta_{21} = 0.6779, a_{11} = 0.5722, a_{12} = 0.3430, a_{21} = 0.1418, b_1 = 0.1233, b_2 = 0.0455, h_{11} = 20m, h_{12} = 10m, h_{21} = 5m$ である。

4. 3 結果の検討

Fig. 4-3 に計算結果を示す。第3節に述べたように、図に平均値の上下1標準偏差の範囲と流出高の実測値を示している。これは信頼性68%の予測区間とも言いえる。パラメータの標準偏差が平均値の10%,20%,30%場合、ピーク付近流出高の68%の予測区間はそれぞれ平均値の上下10%,15%,20%ほどある。Fig.3-2の1層モデルの結果と比較すると、2段3層モデルの計算結果の幅が狭いことが分かった。これより、パラメータの不確定性が同様の場合、詳細なモデルほど、計算結果が安定していることが分かった。なお、1層モデルの結果は予測幅がパラメータの標準偏差に対して鈍感であることに対し、2段3層モデルは敏感である。その原因は、詳細なモデルは、パラメータの組み合わせによって、より多くの流出波形が表現できる可能性がある。今後、パラメータの不確定性はどんな値を取るべきかを検討する。

5. まとめ

本研究は確率微分方程式を用いてパラメータの不確定を考慮した場合の降雨流出解析手法を提案した。第1節は、確率微分方程式の理論について紹介した。確率微分方程式は、元々統計力学の中の解析手法であり、不確実性を有する物理システムに対しては最も厳密かつ有力な解析手法である。第2節は、山田、吉見らによって提案された確率微分方程式を用いた降雨流出解析手法を紹介した。山田、吉見らが扱っている不確実性は、降雨の短時間スケール変化であり、パラメータの不確定のような長いスケール変化の不確定性を考慮するには、理論を拡張する必要がある。第3節は、山田、吉見らの理論を拡張し、パラメータの不確定を入れた Fokker-Planck 方程式を提案した。1層モデルの場合、Fokker-Planck 方程式は直接に数値解を求められるが、詳細なモデルの場合に対し、理論を更に拡張する必要がある。第4節は詳細なモデルの Fokker-Planck 方程式の近似解法を提案した。

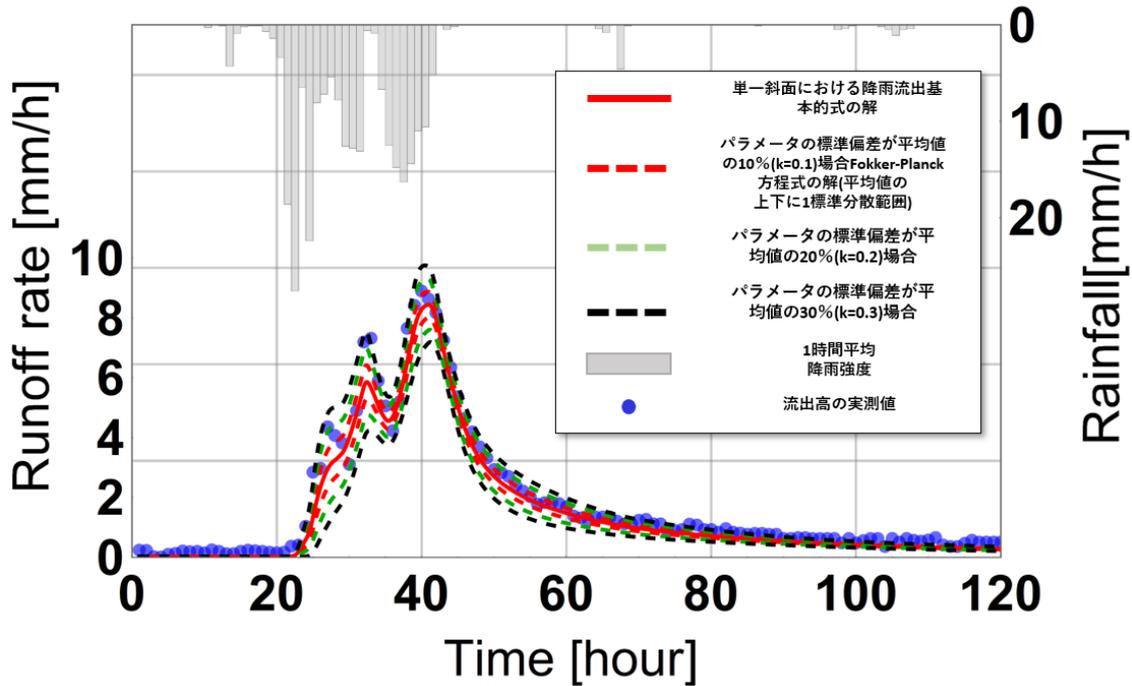


Fig. 4-3 Rainfall runoff analysis of 2003-08-08 rainfall event in Kusaki dam river basin, considering the uncertainty of model parameters (2-tanks-3-layers model)

その結論の式を鉛直浸透を考慮した2段3層モデル（パラメータ数14個）に適用した結果、パラメータが平均値の10%、20%、30%ほどの不確実性がある場合、ピーク付近の流出高の予測幅は平均値の上下10%、15%、20%ほどあることが分かった。

現在パラメータの推定はすべて決定論的な考えであるが、本研究が提案する手法に基づいて、今後、パラメータの不確実を前提としてのパラメータ推定方を検討する必要がある。

参考文献

- [1] 日野幹雄：水文流出系予測へのカルマンフィルター理論の適用，土木学会論文集，No.221，pp.39-47，1974.
- [2] 星清，山岡勲，茂木 映治：流出予測における適応制御理論の応用に関する研究，昭和56年度土木学会，北海道支部論文報告集，II-17，1981.
- [3] 立川康人，須藤純一，椎葉充晴，萬和明，キムソンミン：粒子フィルタを用いた河川水位の実時間予測手法の開発，土木学会論文集 B1（水工学），67(4)，pp.I_511-I_516，2011.
- [4] 吉見和紘，山田正，山田朋人：確率微分方程式の導入による降雨流出過程における降雨の不確実性の評価，土木学会論文集 B1(水工学)，Vol.71，No.4，I_259-I264，2015.
- [5] Albert Einstein: On the Motion of Small Particles Suspended in Liquids at Rest Required by the Molecular-Kinetic Theory of Heat, Annalen der Physik 17 [1905]: 549-560.
- [6] 伊藤清：確率論【現代数学(14)】，岩波書店，1953.
- [7] 吉見和紘，山田正：鉛直浸透を考慮した斜面内流出計算手法の提案，土木学会論文集 G（環境），69(5)，pp.I_145-I_150，2013.