

# アブレイシブウォータージェットカッターによる 固体切削の3次元シミュレーション

名取拓弥\*, 中山司<sup>§</sup>

Three-dimensional simulation of the cutting of a solid body  
by an abrasive water jet cutter

Takuya NATORI\* and Tsukasa NAKAYAMA<sup>§</sup>

## abstract

The smoothed particle hydrodynamics (SPH) method is applied to the numerical simulation of the cutting of a solid body by a highly pressurized water jet. Water is modeled as a viscous fluid with weak compressibility. A solid body is modeled as an elastic material. The water and solid body are discretized into a lot of small volume elements called particles. Those particles are moved in a Lagrangian manner according to the governing equations. To suppress unnatural numerical oscillation in pressure distribution, two stabilizing techniques, such as the artificial density diffusion and the density re-initialization method, are employed in addition to the artificial viscosity used in the conventional SPH discretization. The combined use of those methods has produced stable computations. Also, a computational model is proposed for a mixture of water and abrasives. Instead of preparing two different kinds of particles for water and abrasives respectively, the mixed fluid of water and abrasives is expressed by single kind of particles. The frictional force caused by an abrasive on a solid surface is modeled by the Coulomb's friction. Encouraging numerical results are obtained.

## 1 はじめに

ウォータージェットカッターは、直径 0.1 mm から 1 mm 程度の細いビーム状の高速高圧水噴流によって切削加工を行う技術である。ウォータージェットカッターは、使用する水噴流は細いが単位面積あたりの加工エネルギーが非常に大きい、加工後の残留応力がない、加工時に発熱を伴わない、などの利点をもっており、金属加工だけではなく、布地のような軟質材料の切断にも用いられている。最近では、切断に伴う発熱による細胞組織の壊死の心配がないことから、医療現場での手術用メスとしての利用も広がりつつある。このように多くの利点を持つ一方で、その使用にあたっては、水噴流の速度や圧力、加工物と噴射ノズルの距離(スタンドオフ距離)などを、加工物の特性に合わせて適切に設定する必要がある。しかし、加工のための最適条件を実験的に調べることは、高速、高圧の水噴流を扱うことを考えると実験設備が大規模になり、容易ではない。そこで、数値計算によるコンピュータシミュレーションが有効であると考えられる。

\* 中央大学大学院理工学研究科精密工学専攻 (現在 日産自動車株式会社 勤務)

<sup>§</sup> 中央大学理工学部精密機械工学科 (〒112-8551 東京都文京区春日1丁目13-27)

筆者らの研究グループでは、水噴流の変形と被削材である固体の破壊(切削)を再現するのにふさわしい計算手法として粒子法に注目し、その一つである smoothed particle hydrodynamics (SPH) 法を用いるシミュレーション手法の構築の検討を進めてきた。その結果、2次元の数値計算法を構築し、その方法の概要を第1報 [1] として報告した。しかし、その報告の数値計算に用いた被削材は木綿豆腐程度の硬さの固体であった。そこで、より硬い固体を扱えるように数値計算の安定性を高めるとともに、計算機プログラムの3次元化を図った。その結果、木材の硬さの固体の切削を計算することができるようになり、その成果を第2報 [2] として報告した。以上の研究成果を踏まえて、本研究では、数値計算の安定性をさらに向上させて、より硬い固体の切削を計算するための検討を加える。

これまでの報告の計算に使用した水噴流は純水のみのでピュアウォータージェット (pure water jet) であった。しかし、加工の現場で実用に供されるウォータージェットカッターでは、水に研磨材を添加して切削性能を高めたアブレイシブウォータージェット (abrasive water jet, 研磨剤添加水噴流) を用いる場合が多い。そこで、本研究では、研磨材を混ぜた水噴流の計算モデルの構築も検討する。数値計算の安定性向上とアブレイシブウォータージェットのモデル化の2点について検討した結果を、数値計算例とともに報告する。

## 2 基礎方程式

### 2.1 水噴流の支配方程式

水を弱い圧縮性をもつニュートン流体とする。流体の支配方程式は、連続の方程式

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\alpha} \quad (1)$$

と運動方程式

$$\frac{Dv^\alpha}{Dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} + F^\alpha \quad (2)$$

と状態方程式

$$p = C \left[ \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^n - 1 \right] \quad (3)$$

である。ここに、 $t$  は時間、 $x^\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ) は直角座標、 $v^\alpha$  は速度の  $x^\alpha$  成分、 $\sigma^{\alpha\beta}$  は応力テンソルの成分、 $F^\alpha$  は外力の  $x^\alpha$  成分、 $p$  は圧力、 $\rho$  は密度、 $\rho_0$  は基準密度を表す。上付き添字  $\alpha, \beta$  を添字記法に基づく座標軸を表す指標とし、総和規約が適用されるものとする。ニュートン流体の場合、応力テンソルの成分  $\sigma^{\alpha\beta}$  は、

$$\sigma^{\alpha\beta} = -p\delta^{\alpha\beta} + \mu \left( \frac{\partial v^\beta}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\beta} - \frac{2}{3} \frac{\partial v^\gamma}{\partial x^\gamma} \delta^{\alpha\beta} \right) \quad (4)$$

で与えられる。ここに、 $\delta^{\alpha\beta}$  はクロネッカのデルタ、 $\mu$  は粘性係数である。

状態方程式 (3) の  $n$  と  $C$  は流体の圧縮性の度合いを定めるパラメータである。 $n$  に対しては文献 [3] に従って、 $n = 7$  とする。係数  $C$  は、次のようにして求められる。式 (3) の両辺を  $\rho$  で微分すると、

$$\frac{dp}{d\rho} = \frac{Cn}{\rho_0} \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{n-1} \quad (5)$$

を得る。音速を  $c$  とすれば、 $c^2 = dp/d\rho$  であるから、これを式 (5) に代入して整理すると、

$$C = \frac{c^2 \rho_0}{n} \left( \frac{\rho_0}{\rho} \right)^{n-1} \approx \frac{c^2 \rho_0}{n} \quad (6)$$

となる。

## 2.2 被削材の支配方程式

被削材は線形弾性固体とする．固体の運動に対する支配方程式は，連続の方程式 (1) と運動方程式 (2)，そしてフックの法則を表す状態方程式

$$p = K\eta = K \left( \frac{\rho}{\rho_0} - 1 \right) \quad (7)$$

である．ここに， $K$  は体積弾性率， $\eta$  は体積ひずみである．固体の応力テンソルの成分  $\sigma^{\alpha\beta}$  は，

$$\sigma^{\alpha\beta} = -p\delta^{\alpha\beta} + s^{\alpha\beta} \quad (8)$$

のように表される．偏差応力テンソルの成分  $s^{\alpha\beta}$  の時間変化率  $Ds^{\alpha\beta}/Dt$  は，変形時の固体の回転を考慮した Jaumann stress rate を用いると，

$$\frac{Ds^{\alpha\beta}}{Dt} = 2G \left( \varepsilon^{\alpha\beta} - \frac{1}{3}\delta^{\alpha\beta}\varepsilon^{\gamma\gamma} \right) + s^{\alpha\gamma}\omega^{\beta\gamma} + s^{\gamma\beta}\omega^{\alpha\gamma} \quad (9)$$

で与えられる [4]．ここに， $G$  は横弾性係数である． $\varepsilon^{\alpha\beta}$  は変形速度テンソルの成分， $\omega^{\alpha\beta}$  は回転テンソルの成分であり，それぞれ

$$\varepsilon^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v^\beta}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\beta} \right), \quad \omega^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v^\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\beta} \right) \quad (10)$$

で定義される．

## 3 SPH 法による離散化

### 3.1 SPH 法の概要

SPH 法は，連続体を粒子の集合とみなし，この粒子上で任意の時間における物理量を計算する方法である．空間内の任意の位置  $\mathbf{r} = (x^\alpha)$  での物理量  $\phi(\mathbf{r})$  は積分表現

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_{\Omega} \phi(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (11)$$

で与えられる．ここに， $\delta(\mathbf{r})$  はディラックのデルタ関数であり， $\Omega$  は連続体が占める空間領域を表す．ディラックのデルタ関数のような不連続関数は数値計算には適さないので，これを空間方向に広がりをもつ連続関数  $W$  で置き換えて，

$$\langle \phi(\mathbf{r}) \rangle = \int_{\Omega} \phi(\mathbf{r}') W(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h) d\mathbf{r}' \quad (12)$$

のように近似する．ここに， $\langle \phi(\mathbf{r}) \rangle$  は  $\phi(\mathbf{r})$  に対する近似を表す．関数  $W$  をカーネルと呼ぶ． $h$  は  $W$  の空間的な広がりを調節するパラメータで，カーネルの大きさと呼ばれる．カーネルがディラックのデルタ関数に対する近似であることから，カーネル  $W$  は

$$\int_{\Omega} W(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h) d\mathbf{r}' = 1, \quad \lim_{h \rightarrow 0} W(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (13)$$

を満たすように決められる [5]．上記の2条件を満たす関数形にはさまざまな形のものがあるが，本研究では，SPH 法で一般的な3次のスプライン関数を用いる次式を採用する．

$$W(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h) = \frac{1}{h^d} f \left( \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{h} \right) \quad (14)$$

$$f(s) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \left( 1 - \frac{3}{2}s^2 + \frac{3}{4}s^3 \right) & (0 \leq s < 1) \\ \frac{1}{4\pi} (2-s)^3 & (1 \leq s < 2) \\ 0 & (2 \leq s) \end{cases} \quad (15)$$

式 (14) の  $d$  は問題の次元を表すパラメータである．本論文では 3 次元問題を扱うので  $d = 3$  である．関数  $f(s)$  のグラフを Fig. 1 に示す．

連続体を  $N$  個の粒子の集合体と考えると，式 (12) は

$$\langle \phi(\mathbf{r}) \rangle = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} \phi_j W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j, h) \quad (16)$$

のように離散化される [1, 2]．ここに， $m_j$ ,  $\rho_j$ ,  $\mathbf{r}_j$  はそれぞれ粒子  $j$  の質量, 密度, 重心の位置ベクトルであり， $\phi_j = \langle \phi(\mathbf{r}_j) \rangle$  である． $\phi$  の勾配  $\partial\phi/\partial x^\alpha$  に対する近似  $\langle \partial\phi/\partial x^\alpha \rangle$  は，式 (16) の両辺に  $\partial/\partial x^\alpha$  を作用させた

$$\left\langle \frac{\partial\phi}{\partial x^\alpha}(\mathbf{r}) \right\rangle = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \langle \phi(\mathbf{r}) \rangle = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} \phi_j \frac{\partial}{\partial x^\alpha} W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j, h) \quad (17)$$

と定義する．

式 (16), (17) において  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_i$  とおいて，これらの式を粒子  $i$  の重心位置に適用すると，

$$\phi_i = \langle \phi(\mathbf{r}_i) \rangle = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} \phi_j W_{ij} \quad (18)$$

$$\left( \frac{\partial\phi}{\partial x^\alpha} \right)_i = \left\langle \frac{\partial\phi}{\partial x^\alpha}(\mathbf{r}_i) \right\rangle = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} \phi_j \left[ \frac{\partial}{\partial x^\alpha} W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j, h) \right]_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_i} = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} \phi_j \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\alpha} \quad (19)$$

を得る．ここに， $W_{ij} = W(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, h)$  であり，微分演算子  $\partial/\partial x_i^\alpha$  は  $\mathbf{r}_i = (x_i^\alpha)$  について偏微分することを意味する．こうして，粒子  $i$  のもつ物理量  $\phi_i$  とその勾配を周囲の粒子の  $\phi$  の値で表すことができる．式 (18) と (19) を用いて，連続体の運動と変形に関する方程式を離散化し，粒子が持つ物理量の値を未知量とする代数方程式を粒子ごとに組み立てて解く方法が SPH 法である．

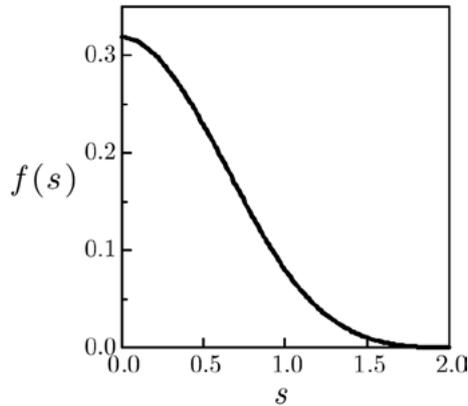


Fig. 1: Function  $f(s)$

このとき、式 (18), (19) の総和計算は領域  $\Omega$  の全粒子について行うのではなく、粒子  $i$  を中心とする半径  $R$  の球 (以後、これを影響球と呼ぶ) の内部に含まれる粒子 (個数  $n$ ) のみを対象とする。式 (15) において、 $s = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/h \geq 2$  のとき  $f = 0$  であるから、 $R = 2h$  とする。

### 3.2 支配方程式の離散化

式 (18), (19) を用いて、連続の方程式 (1) と運動方程式 (2) を離散化すると、

$$\frac{D\rho_i}{Dt} = \rho_i \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{\rho_j} v_{ij}^\alpha \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\alpha} \quad (20)$$

$$\frac{Dv_i^\alpha}{Dt} = \sum_{j=1}^n m_j \left( \frac{\sigma_i^{\alpha\beta} + \sigma_j^{\alpha\beta}}{\rho_i \rho_j} \right) \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta} + F_i^\alpha \quad (21)$$

を得る。ここに、 $v_{ij}^\alpha = v_i^\alpha - v_j^\alpha$  である。これらの式の導出過程の詳細は第1報 [1] を参照していただきたい。

流体と固体の応力の構成式 (4), (8) は次のように離散化される。

$$\text{(流体)} \quad \sigma_i^{\alpha\beta} = -p_i \delta^{\alpha\beta} + \mu \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{\rho_j} \left( v_{ji}^\beta \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\alpha} + v_{ji}^\alpha \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta} - \frac{2}{3} v_{ji}^\gamma \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\gamma} \delta^{\alpha\beta} \right) \quad (22)$$

$$\text{(固体)} \quad \sigma_i^{\alpha\beta} = -p_i \delta^{\alpha\beta} + s_i^{\alpha\beta} \quad (23)$$

式 (9) は次のように離散化される。

$$\frac{Ds_i^{\alpha\beta}}{Dt} = 2G \left( \varepsilon_i^{\alpha\beta} - \frac{1}{3} \delta^{\alpha\beta} \varepsilon_i^{\gamma\gamma} \right) + s_i^{\alpha\gamma} \omega_i^{\beta\gamma} + s_i^{\gamma\beta} \omega_i^{\alpha\gamma} \quad (24)$$

ここに、 $\varepsilon_i^{\alpha\beta}$  と  $\omega_i^{\alpha\beta}$  は式 (10) の離散形で、次式で得与えられる。

$$\varepsilon_i^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{\rho_j} \left( v_j^\beta \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\alpha} + v_j^\alpha \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta} \right), \quad \omega_i^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{\rho_j} \left( v_j^\beta \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\alpha} - v_j^\alpha \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta} \right) \quad (25)$$

状態方程式 (3), (7) の離散形は、それらの式の圧力  $p$  と密度  $\rho$  に下付き添字  $i$  を付けることによって得られる。

### 3.3 支配方程式の時間積分

SPH 法においては、粒子をラグランジュ的に移動させながら、その粒子がもつ物理量の時間変化を計算する。粒子の移動は

$$\frac{Dx_i^\alpha}{Dt} = v_i^\alpha \quad (26)$$

で計算する。速度成分  $v_i^\alpha$  は運動方程式 (21) より求められる。密度は連続の方程式 (20) で計算し、その密度を状態方程式 (3), (7) に代入して圧力を求める。

式 (20), (21), (24), (26) の時間積分には2次のルンゲ・クッタ法を用いる。時間変化する物理量を記号  $\phi$  で代表させて、これらの式を、

$$\frac{D\phi}{Dt} = G(\phi) \quad (27)$$

のように表す. 時間増分を  $\Delta t$  として, 時刻  $t^n = n \Delta t$  の値  $\phi^n$  を知って時刻  $t^{n+1} = (n+1) \Delta t$  の値  $\phi^{n+1}$  を求めるために, 次の2段階の計算を行う.

$$\phi^{n+\frac{1}{2}} = \phi^n + \frac{\Delta t}{2} G(\phi^n) \quad (28)$$

$$\phi^{n+1} = \phi^n + \Delta t G(\phi^{n+\frac{1}{2}}) \quad (29)$$

## 4 計算安定化のための数値技法

### 4.1 人工粘性と人工密度拡散

これ以降, 水噴流を表す粒子を流体粒子, 被削材を表す粒子を固体粒子と呼ぶことにする. 前節で導いた連続の方程式 (20) と運動方程式 (21) を用いて, 水噴流を固体に衝突させる計算を行うと, 衝突時の水中の圧力分布に Fig. 2 に示すような不自然な数値振動が発生する. このような現象は他の自由表面問題の数値計算でも発生し, 計算を不安定にすることが知られている. そこで, このような数値振動を抑制するために SPH 法では, 運動方程式に人工粘性項を付加する手法が用いられる [6].

人工粘性項は

$$\Pi_{ij} = \begin{cases} \frac{-A \bar{c}_{ij} \theta_{ij} + B \theta_{ij}^2}{\bar{\rho}_{ij}} & (v_{ij}^\alpha x_{ij}^\alpha < 0) \\ 0 & (v_{ij}^\alpha x_{ij}^\alpha \geq 0) \end{cases} \quad (30)$$

で与えられ, 運動方程式 (21) に

$$\frac{Dv_i^\alpha}{Dt} = \sum_{j=1}^N m_j \left( \frac{\sigma_i^{\alpha\beta} + \sigma_j^{\alpha\beta}}{\rho_i \rho_j} + \delta^{\alpha\beta} \Pi_{ij} \right) \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta} + F_i^\alpha \quad (31)$$

のように付加される. 式 (30) において,

$$\bar{c}_{ij} = \frac{1}{2}(c_i + c_j), \quad \bar{\rho}_{ij} = \frac{1}{2}(\rho_i + \rho_j), \quad x_{ij}^\alpha = x_i^\alpha - x_j^\alpha \quad (32)$$

$$\theta_{ij} = \frac{\bar{h}_{ij} v_{ij}^\alpha x_{ij}^\alpha}{x_{ij}^\beta x_{ij}^\beta + 0.01 \bar{h}_{ij}^2}, \quad \bar{h}_{ij} = \frac{1}{2}(h_i + h_j) \quad (33)$$

であり,  $c, \rho, h$  はそれぞれ音速, 密度, カーネルの大きさである.  $A, B$  は人工粘性の大きさを調整するパラメータである. 本研究では, これまでの数値計算の経験に基づいて, 流体粒子に対しては  $A = 1.0, B = 1.0$  とし, 固体粒子に対しては  $A = 0.35, B = 0.35$  とする.

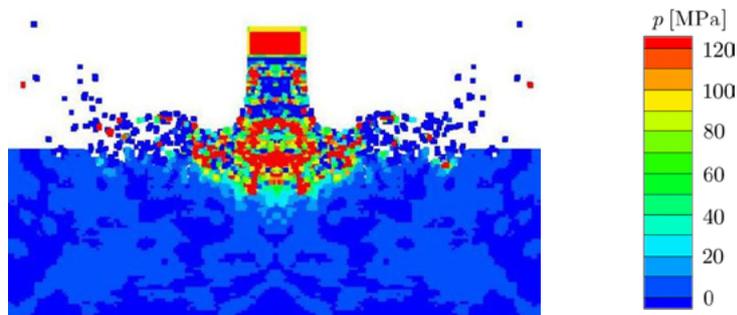


Fig. 2: Pressure distribution calculated without artificial viscosity and density diffusion

前報 [2] では、人工粘性項を付加するとともに、物理量の勾配の計算精度を高めるために Chen ら [7] によって提案された *corrective smoothed particle method* を採用した。しかし、切削計算ができる固体は木材程度の硬さまでで、それ以上の硬さの固体に対しては計算が不安定になってしまい、満足いく結果が得られなかった。圧力は状態方程式を介して密度と密接につながっていることから、圧力の数値振動を抑制するためには密度計算の安定化が不可欠である。そこで、密度の時間変化率を与える連続の方程式の求解過程の計算を安定させることが重要であると考え、Molteni and Colagrossi[8] によって提案された人工密度拡散項の導入を検討した。人工密度拡散項を付加した連続の方程式は、

$$\frac{D\rho_i}{Dt} = \rho_i \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{\rho_j} v_{ij}^\alpha \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\alpha} + \delta h_i c_i \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{\rho_j} \psi_{ij}^\alpha \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\alpha} \quad (34)$$

のようになる。ここに、右辺第2項が人工密度拡散項である。 $\delta$  は拡散項の大きさを調節するパラメータであり、Marrone ら [9] にならって  $\delta = 0.1$  とする。 $\psi_{ij}^\alpha$  は、

$$\psi_{ij}^\alpha = \frac{2(\rho_i - \rho_j)x_{ij}^\alpha}{x_{ij}^\beta x_{ij}^\beta} - [\langle \nabla \rho \rangle_i^\alpha + \langle \nabla \rho \rangle_j^\alpha] \quad (35)$$

で定義される。ここに、 $\langle \nabla \rho \rangle_i^\alpha$  は再正規化した密度勾配の  $x^\alpha$  成分で、次式で定義される。

$$\langle \nabla \rho \rangle_i^\alpha = \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{\rho_j} (\rho_j - \rho_i) L_i^{\alpha\beta} \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta} \quad (36)$$

ここに、 $L_i^{\alpha\beta}$  は3行3列の行列

$$\left[ \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{\rho_j} (x_j^m - x_i^m) \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^n} \right]^{-1} \quad (m, n = 1, 2, 3) \quad (37)$$

の  $\alpha$  行  $\beta$  列成分を表す。

Fig. 2 と同じ問題について、人工粘性項と人工密度拡散項を付加して計算した圧力分布を Fig. 3 に示す。Fig. 2 に見られた数値振動が抑えられ、妥当な層状の圧力分布が得られている。人工粘性項と人工密度拡散項の使用が有効であることを確認することができた。

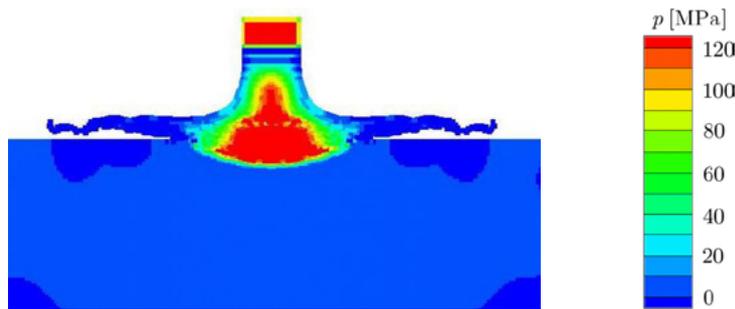


Fig. 3: Pressure distribution calculated with artificial viscosity and density diffusion

## 4.2 密度の再初期化

SPH 法は、有限要素法や有限体積法のように計算メッシュを必要とせず、粒子をラグランジュ的に動かすだけでいいので、大変形や不連続領域の計算に適している。しかし、その反面、粒子分布に粗

密が生じやすく、近傍粒子の増減によって不自然な圧力損失や圧力振動を起こしやすい。Dilts[10, 11] は、式 (31) や式 (34) の右辺の総和計算において粒子分布の不均一による精度低下を防ぐために、移動最小二乗法 (moving-least-square method) を用いる MLSPH 法を提案した。そして、Chen ら [12] は、SPH 法によるシミュレーションの計算過程において、MLSPH 法を用いて定期的に密度の再初期化を行う density re-initialization method (DRM) を提案した。本研究では、この DRM も採用する。

式 (18) において  $\phi = \rho$  とおくと、粒子  $i$  の密度  $\rho_i$  を与える式

$$\rho_i = \sum_{j=1}^n m_j W_{ij} \quad (38)$$

を得る。DRM では、この式のカーネル  $W_{ij}$  を  $(a^0 + a^1 x_{ij}^1 + a^2 x_{ij}^2)W_{ij}$  で置き換えた

$$\rho_i = \sum_{j=1}^n (a^0 + a^1 x_{ij}^1 + a^2 x_{ij}^2) m_j W_{ij} \quad (39)$$

を用いる。係数  $a^0, a^1, a^2$  は、連立 1 次代数方程式

$$\mathbf{A} \begin{Bmatrix} a^0 \\ a^1 \\ a^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (40)$$

の解として求められる。ここに、係数行列  $\mathbf{A}$  は、

$$\mathbf{A} = \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{\rho_j} W_{ij} \begin{bmatrix} 1 & x_{ij}^1 & x_{ij}^2 \\ x_{ij}^1 & (x_{ij}^1)^2 & x_{ij}^1 x_{ij}^2 \\ x_{ij}^2 & x_{ij}^1 x_{ij}^2 & (x_{ij}^2)^2 \end{bmatrix} \quad (41)$$

で与えられる。密度の再初期化は、毎時刻ステップ行う必要はなく、 $k$  時刻ステップに 1 回でよい。本論文の計算では  $k = 20$  としている。

## 5 アブレイシブウォータージェットのモデル化

研磨材を添加した水噴流の SPH モデルを構築するとき、2 通りの方法が考えられる。一つは、水を流体、研磨材を固体として扱い、それぞれを異なる粒子で表現する方法である。もう一つは、水と研磨材の混合物を流体と見なし、1 種類の粒子で表現する方法である。前者の方法によると、水噴流を構成する 2 種類の粒子を扱うことになり、粒子数や粒径比など計算のための設定条件が増え、数値計算が複雑になることが予想される。さらに、数値計算の過程で、研磨材の粒子を均一に分布させ続けられるとは限らず、計算結果に研磨材の粒子の偏在による影響が現れることもあり得る。そこで、本研究では、後者の方法を採用する。

水と研磨材の密度をそれぞれ  $\rho_w, \rho_a$  とし、研磨材の体積混合率を  $f$  [%] とするとき、水と研磨材の混合流体の密度  $\rho^{\text{mix}}$  を

$$\rho^{\text{mix}} = \left( \frac{f}{100} \right) \rho_a + \left( 1 - \frac{f}{100} \right) \rho_w \quad (42)$$

とする。一般に、液体と固体の混合流体は非ニュートン流体であり、その粘度は流動状態に応じて変化する。しかし、水と研磨材の混合流体を非ニュートン流体として扱うことは今後の課題とし、本論文では混合流体の粘性係数は一定と仮定して、水の粘性係数の値を用いることにする。研磨材が固体に及ぼす力は摩擦力のみと仮定し、その摩擦力をクーロン摩擦で表現する。摩擦係数を  $\lambda$ 、接触面積

を  $S$ 、圧力を  $p$  とすると、クーロン摩擦力の大きさは  $F = \lambda p S$  で与えられる。摩擦力は表面力であるが、ここでは、固体粒子  $i$  の影響球内に存在する混合流体の粒子  $j$  が、粒子  $i$  に作用する摩擦力に寄与すると考える。そこで、粒子  $i$  が受ける摩擦力における粒子  $j$  の寄与分  $F_{ij}$  を SPH 法の離散化の考え方に従って

$$F_{ij} = \lambda \frac{m_j^{\text{mix}}}{\rho_j^{\text{mix}}} p_j \ell_j^2 W_{ij}$$

で与える。本方法では、粒子の形状は立方体としており、 $\ell_j$  はその1辺の長さである。また、 $m_j^{\text{mix}}$  は混合流体の粒子  $j$  の質量である。摩擦力が作用する向きは固体表面に平行である。しかし、固体が破壊される現象において破断面に平行な方向を求めることは困難である。そこで、上述の摩擦力への寄与分  $F_{ij}$  は固体粒子  $i$  と混合流体の粒子  $j$  の相対速度  $\mathbf{v}_{ji} = \mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i$  の向きに作用すると考える。以上より、固体粒子  $i$  に作用する摩擦力を  $\mathbf{F}_i$  とすると、

$$\mathbf{F}_i = \frac{1}{m_i} \sum_{j=1}^n F_{ij} \frac{\mathbf{v}_{ji}}{|\mathbf{v}_{ji}|} \quad (43)$$

を得る。これを、固体の運動方程式の外力項に加える。運動方程式中の外力は単位質量あたりに作用する力であるから、式 (43) において、混合流体の粒子からのすべての寄与分の和を固体粒子の質量  $m_i$  で割っている。

## 6 計算手法

### 6.1 流体と固体の連成方法

流体と固体の連成計算の方法は、さまざまな考え方が提案されている。たとえば、固体表面の近傍において、流体粒子と固体粒子の間で及ぼし合う力を計算し、その力を固体表面に接する流体粒子と流体に接する固体粒子にそれぞれ作用させる方法がある [13]。この場合、固体表面近傍の固体粒子や流体粒子を識別する必要があり、計算はかなり複雑化する。そこで、前報 [1,2] では、SPH 法による計算の過程に自然に取り込むことのできる簡便な連成計算の方法を提案した。本研究においても同じ方法を採用する。

たとえば、連続の方程式 (34) の右辺を組み立てるとき、総和計算の対象となる粒子は、粒子  $i$  の影響球内に含まれる、粒子  $i$  と同種の粒子に限られる。すなわち、粒子  $i$  が流体粒子ならば、総和計算の対象となる  $n$  個の粒子はすべて流体粒子である。しかし、運動方程式 (31) の  $(\sigma_i^{\alpha\beta} + \sigma_j^{\alpha\beta})/\rho_i\rho_j$  の項だけは、粒子を区別せず影響球内のすべての粒子を総和計算の対象とする。こうすることによって、自動的に流体粒子と固体粒子の間の力の相互作用を計算することができる。

### 6.2 固体の破壊条件

破壊の判定にはミーゼスの降伏条件を用いる。降伏応力を  $\sigma_Y$  とするとき、ミーゼスの降伏条件では、

$$\sqrt{\frac{1}{2} (3\sigma^{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta} - \sigma^{\alpha\alpha}\sigma^{\beta\beta})} = \sigma_Y \quad (44)$$

のときに降伏が生じるとされる。そこで、固体粒子  $i$  に対して

$$\sqrt{\frac{1}{2} (3\sigma_i^{\alpha\beta}\sigma_i^{\alpha\beta} - \sigma_i^{\alpha\alpha}\sigma_i^{\beta\beta})} \geq \sigma_Y \quad (45)$$

が成立するとき、粒子  $i$  を破壊粒子と判定し、周囲の固体粒子との結合を解除する。破壊粒子は自由粒子であり、周囲の流体粒子から受ける作用によって水流に乗って流れ去る。

## 7 数値計算

### 7.1 ピュアウォータージェットによる固体の切削

4節で述べた数値計算の安定化のための技法の効果を確認するために、研磨材を含まないピュアウォータージェットによる固体の切削のシミュレーションを計算する。被削材を中炭素鋼とし、Fig. 4の計算モデルを用いる。被削材の上面から2mm離れた位置に内径3mmのノズルを設置し、ここから水噴流を被削材上面の中心に向けて鉛直真下に吐出する。ノズルは固定したままとし、被削材上面の中心に水噴流を当て続けて被削材に穴をあける模様を計算する。吐出速さを500m/s、吐出圧力を125MPaとする。水の密度を1000kg/m<sup>3</sup>、粘性係数を1.3×10<sup>-3</sup>Pa·sとする。中炭素鋼の密度を7860kg/m<sup>3</sup>、ヤング率を210GPa、降伏応力を260MPaとする。時間増分Δtを10<sup>-7</sup>sとする。計算に用いる流体粒子と固体粒子は、それぞれ1辺の長さが0.3mmと0.5mmの立方体とする。

被削材は固定された剛体平板の上に置かれているとし、固体粒子が剛体平板を貫通しないように剛体平板から固体粒子に対して反発力を作用させる。すなわち、剛体平板を構成する粒子のうち最上層の粒子(被削材に接する粒子)には、

$$\mathbf{R}_i = \begin{cases} D \left[ \left( \frac{r_0}{r_{ij}} \right)^{n_1} - \left( \frac{r_0}{r_{ij}} \right)^{n_2} \right] \frac{\mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}^2} & (r_{ij} \leq r_0) \\ 0 & (r_{ij} > r_0) \end{cases} \quad (46)$$

という反発力 $\mathbf{R}_i$ を接近する固体粒子に作用させる機能を与える[6]。ここに、添字*i, j*はそれぞれ固体粒子*i*と剛体平板の粒子*j*に関する量であることを示す。粒子*i, j*の位置ベクトルをそれぞれ $\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j$ とすると、 $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ 、 $r_{ij} = |\mathbf{r}_{ij}|$ である。 $r_0$ は初期配置時の2種類の粒子の距離を表す。 $n_1, n_2, D$ は問題に依存するパラメータであり、本論文では $n_1 = 4, n_2 = 2, D = 1000 \text{ N}\cdot\text{m}$ とする。式(46)の反発力は固体を剛体平板上に保持するためのものであるから、固体粒子にのみ作用させ、流体粒子と破壊粒子に対しては作用させない。流体粒子と破壊粒子は剛体平板を通り抜けることができるものとする。これは、加工の現場では被削材が金網状の平板に置かれることを反映した設定である。

計算結果をFig. 5に示す。図の左列は粒子の種別を色で区別して示しており、赤は固体粒子、緑は流体粒子、青は破壊粒子である。図の右列はウォータージェットと被削材の内部の圧力分布を示してい

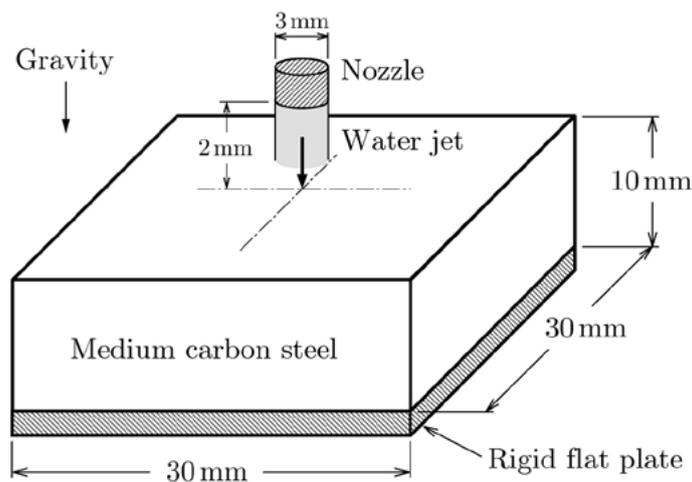


Fig. 4: Computational model for the cutting of a solid body by a water jet

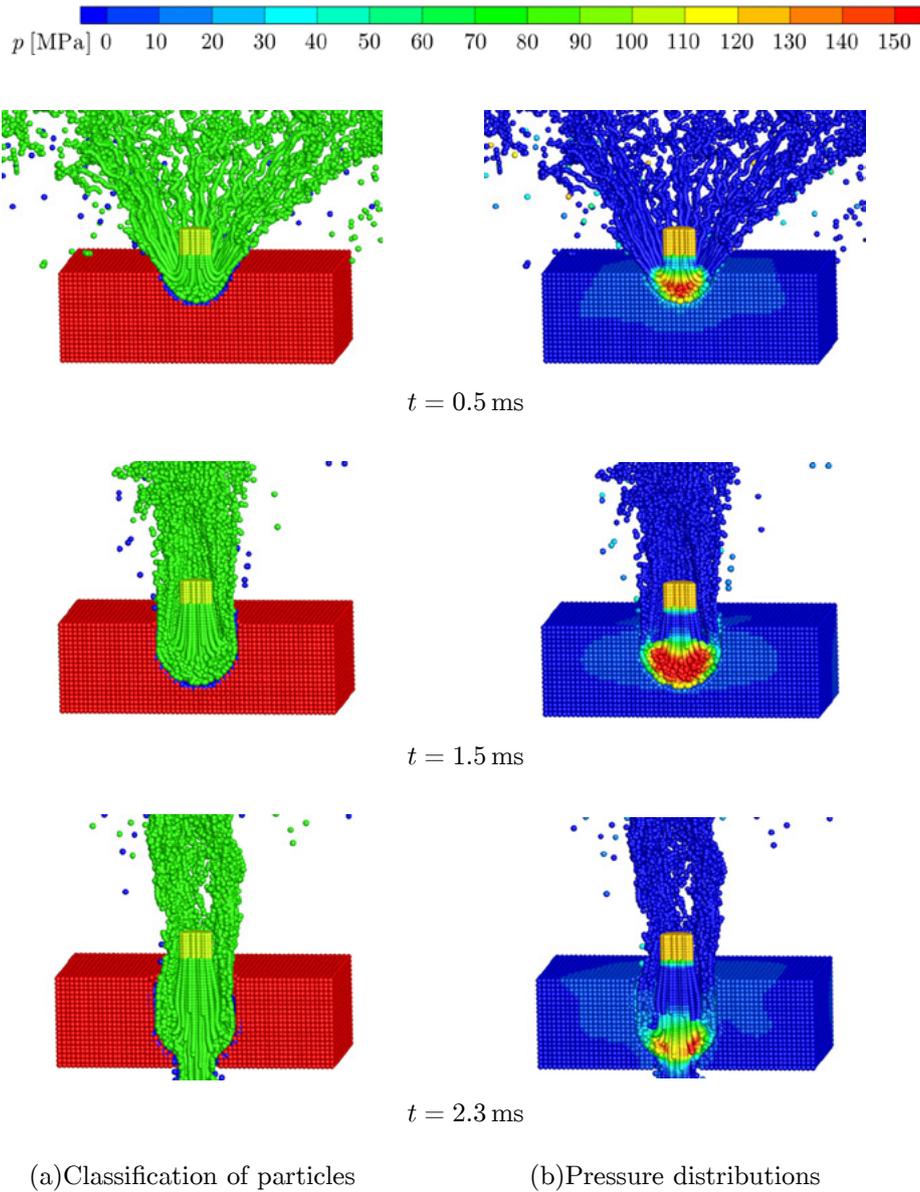


Fig. 5: Particle and pressure distributions at different time instants in pure water-jet cutting

どちらの図も、ウォータージェットの衝突点を含む断面の様子を示している。時刻が進むにつれて、切削によってできる穴が深くなり、 $t = 2.3$  ms で穴が貫通している。穴の深さの変化に応じて水しぶきの角度が変化することも確認できる。また、破壊粒子が固体から離脱し、水噴流によって押し流される様子も確認することができる。図の右列の圧力分布には数値振動は見られず、良好な結果が得られている。

図の左列の黄緑の部分と右列の橙色の部分は、ノズル内に配置され、吐出を待っている流体粒子を表している。すなわち、この部分の幅がノズルの内径に相当する。図を見ると、切削によってできる穴の内径はノズルの内径の約2倍ある。実際の加工では、ノズルの内径にほぼ等しい直径の穴ができるとされており、この点に関しては粒子の大きさの変更など改良の余地が残されていると考えられる。

## 7.2 アブレイシブウォータージェットによる固体の切削

研磨材としてガーネットを使用する．ガーネットの密度を  $\rho_a = 4000 \text{ kg/m}^3$ ，摩擦係数を  $\lambda = 0.2$  とする．計算モデルには Fig. 4 と同じものを使用し，ノズルから吐出される流体は 5 節で述べた水とガーネットの混合流体とする．計算条件は 7.1 節と同じである．

Fig. 6 に，流体粒子 (緑)，固体粒子 (赤)，破壊粒子 (青) の分布の時間変化を，研磨材の混合率が  $f = 0\%$  の場合と  $f = 30\%$  の場合について，比較して示す． $t = 0.75 \text{ ms}$  の図を見ると， $f = 30\%$  の場合は穴が貫通しているのに対して， $f = 0\%$  の場合は被削材の厚さの半分程度しか切削されていない．研磨材添加の効果を示すことができたと考えられる．

Fig. 7 は， $f = 0, 10, 20, 30\%$  の 4 ケースについて，厚さ  $10 \text{ mm}$  の被削材に貫通孔を作るのに要する時間を示したものである．研磨材の混合率が高くなるに従って所要時間が短くなるという定性的な傾向が示されている．ところで，研磨材を添加することによって切削に要する時間が短くなる理由として，二つの要因が考えられる．一つは研磨材が被削材に及ぼす摩擦の効果である．もう一つは，研磨材添加による混合流体の密度増加である．流体が固体に衝突すると流体には大きな運動量変化が生じ，

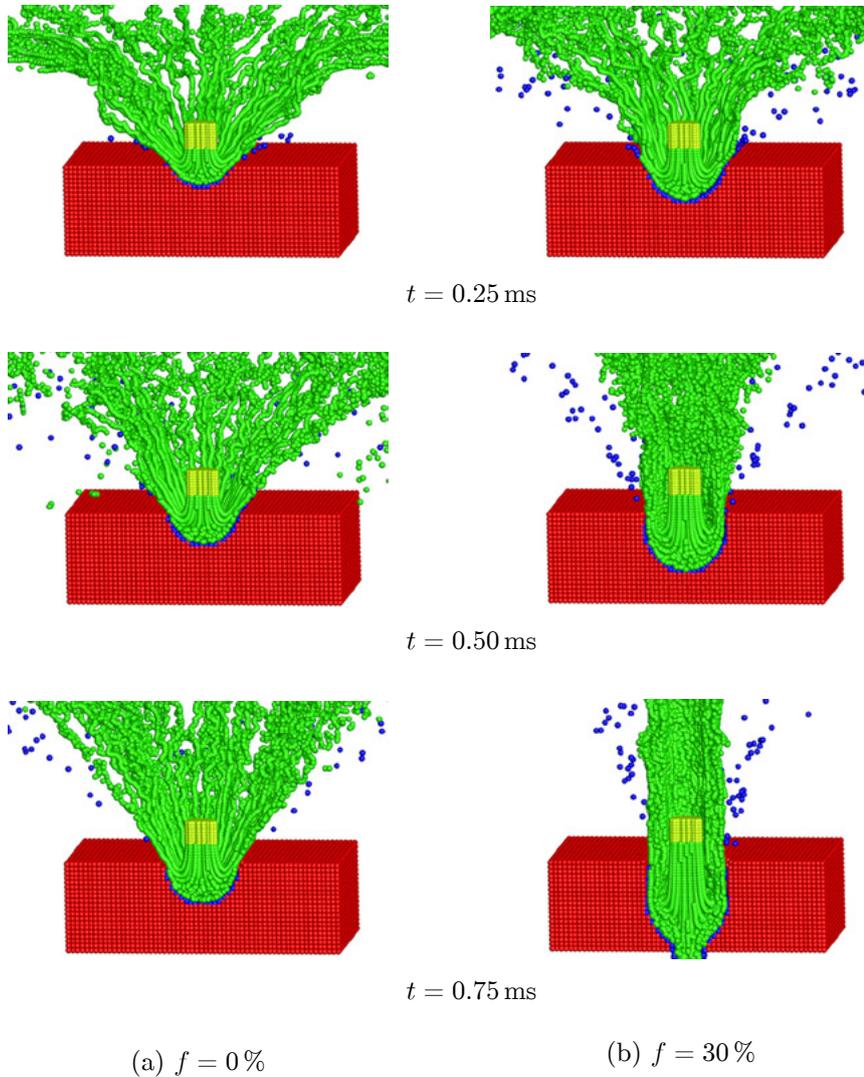


Fig. 6: Particle distributions at different time instants in pure and abrasive water-jet cutting

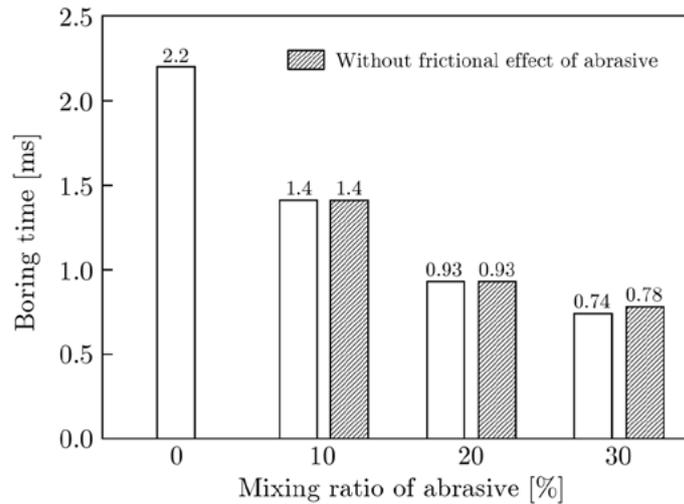


Fig. 7: Relation between the boring time versus the mixing ratio  $f$  of abrasive

その運動量変化は固体に対して衝撃力として作用する。運動量変化には流体の密度が影響するから、研磨材の混合率が高い混合流体ほど衝撃力は大きいと考えられる。そこで、一つの数値実験を行ってみる。すなわち、アブレイシブウォータージェットにおいて、混合流体の密度は研磨材の混合率に応じて式 (42) で設定するが、被削材に対して式 (43) で計算される摩擦力を作用させないという計算を行ってみる。この計算によって貫通孔を作るのに要する時間を、Fig. 7 の網がけの棒グラフで示す。  $f = 10$ , 20% のグラフを見ると、摩擦力の有無による所要時間の差はなく、この場合の切削は、主として混合流体の運動量変化による衝撃力と噴流内の圧力によって行われていると考えられる。  $f = 30\%$  のグラフにはわずかな差が見られ、研磨材による摩擦効果が現れている。

## 8 おわりに

筆者らの研究グループが提案した SPH 法を用いたウォータージェットカッターによる固体切削の数値シミュレーションの計算手法について、圧力の数値振動を抑制して計算を安定させ、より硬い被削材の切削を計算できるように方法の再検討を行った。その結果、安定した数値計算を実現することができ、これまでの数値計算例の中では最も硬い中炭素鋼の切削のシミュレーションを計算することができた。本論文では紹介しなかったが、アルミニウムの切削のシミュレーションも実現している。

さらに、研磨材を添加したアブレイシブウォータージェットの計算モデルを提案した。そのモデルを用いて数値計算を行い、研磨材の混合率が高くなるに従って被削材に貫通孔を作る時間が短くなるという定性的な傾向を再現することができた。しかし、研磨材の混合率が小さい場合、切削に対する研磨材の摩擦効果の影響は小さく、研磨材の添加による混合流体の密度増加が切削に大きく影響していることがわかった。アブレイシブウォータージェットの計算モデルのさらなる検証は今後の課題の一つである。

さて、本論文で報告した計算手法を実用に供するためには、計算値と実験値の比較による計算精度の検証が不可欠である。本論文で使用しているのと同じ、SPH 法に基づく数値計算法を用いて 2 次元自由表面流れと 2 次元の流体-固体連成現象を計算し、計算値と実験値の比較を行った結果、2 次元流れでは満足のいく計算精度が得られることを確認している [14]。しかし、ウォータージェットの 3 次

元計算ではまだ精度検証を果たせていない。すでに入手している Hashish[15] や Chithirai Pon Selvan ら [16, 17] の論文には、吐出圧力と切削深さの関係、ノズル径と切削深さの関係、そして研磨材の混合率と切削深さの関係などに関する実験値が報告されている。それらの実験値との比較を行うためには、約 2 秒間の切削過程を計算しなければならない。しかし、Fig. 5 に示した 2.3 ms までのシミュレーション結果を得るために、Intel 社製の Xeon Gold 6126(2.6 GHz, 12 コア) を有するワークステーションを用いて 96 時間を要しており、実験値との比較のための計算には膨大な計算時間を必要とする。計算時間を短縮するための対策を講じることも今後の課題の一つである。

## 参考文献

- [1] 篠原寿充, 岡部啓一, 中山 司: ウォータージェットによる固体切断の数値シミュレーション. 中央大学理工学研究所論文集, **10**, 21–32 (2004).
- [2] 佐藤裕介, 岡部啓一, 中山 司: Smoothed Particle Hydrodynamics 法によるウォータージェットカッターの 3 次元シミュレーション. 中央大学理工学研究所論文集, **14**, 7–17 (2008).
- [3] J. J. Monaghan, Smoothed Particle Hydrodynamics, Annual Review of Astrophysics, **30**, 543–574 (1992).
- [4] Gray, J. P., Monaghan, J. J. and Swift, R. P.: *SPH elastic dynamics*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, **190**, 6641–6662 (2001).
- [5] Liu, G. R. and Liu, M. B.: “Smoothed Particle Hydrodynamics : a meshfree particle method” World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore (2003).
- [6] Monaghan, J. J.: *Simulating free surface flows with SPH*. Journal of Computational Physics, **110**, 399–406 (1994).
- [7] Chen, J. K., Beraun, J. D. and Jih, C. J.: *An improvement for tensile instability in smoothed particle hydrodynamics*. Computational Mechanics, **23**, 279–287 (1999).
- [8] Molteni, D. and Colagrossi, A.: *A simple procedure to improve the pressure evaluation in hydrodynamic context using the SPH*. Computer Physics Communications, **180**, 861–872 (2009).
- [9] Marrone, S. and Antuono, M.:  *$\delta$ -SPH model for simulating violent impact flows*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, **200**, 1526–1542 (2011).
- [10] Dilts, G. A.: *Moving-least-squares-particle hydrodynamics – I. consistency and stability*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, **44**, 1115–1155 (1999).
- [11] Dilts, G. A.: *Moving-least-squares-particle hydrodynamics – II. conservation and boundaries*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, **48**, 1503–1524 (2000).
- [12] Chen, Z., Zong, Z., Liu, M. B. and Li, H. T.: *A comparative study of truly incompressible and weakly compressible SPH methods for free surface incompressible flows*. International Journal for Numerical Methods in Fluids, **73**, 813–829 (2013).
- [13] Antoci, C., Gallati, M. and Sibilla, S.: *Numerical simulation of fluid–structure interaction by SPH*. Computers and Structures, **85**, 878–890 (2007).

- [14] 落合美鈴, 中山 司: SPH 法を用いた流体と弾性体の連成現象の数値解析. 日本機械学会論文集, **81**, 1–12 (2015).
- [15] Hashish, M.: *A modeling study of metal cutting with abrasive waterjets*. Transaction of the ASME, **106**, 88–100 (1984).
- [16] Chithirai Pon Selvan, M.: *Selection of process parameters in abrasive waterjet cutting of titanium*. Proceedings of the Second International Conference on Emerging Trends in Engineering and Technology, 27–31 (2014).
- [17] Chithirai Pon Selvan, M., Mohana Sundara, N. and Rajavel, R.: *Effects of process parameters on depth of cut in abrasive waterjet cutting of cast iron*, International Journal of Scientific Research, **2**, 1–5 (2011).