

双対単体法を用いた弱非線形方程式の すべての解を求めるアルゴリズム

田中克昌*, 山村清隆*

Finding All Solutions of Weakly Nonlinear Equations Using the Dual Simplex Method

Katsumasa Tanaka*, Kiyotaka Yamamura*

abstract

Recently, efficient algorithms have been proposed for finding all solutions of systems of nonlinear equations using linear programming. In these algorithms, linear programming problems are formulated by surrounding component nonlinear functions by rectangles or right-angled triangles. In this short note, an efficient algorithm using parallelograms and the dual simplex method is proposed for finding all solutions of weakly nonlinear equations.

1 はじめに

非線形方程式のすべての解を求める問題は科学技術の諸方面で派生する重要な問題の一つである [1] ~ [8]. 同時にこの問題は, 変数の数 n の増加とともに計算時間が指数関数的に増大する, 非常に難しい問題としても知られている.

非線形方程式のすべての解を求める方法としては, 区間解析に基づくアルゴリズムがよく知られている [1],[2]. 区間解析では, n 次元直方体で与えられた初期領域を各変数方向に再帰的に 2 分割しながら, 解の存在しえない領域を除去していく. したがってアルゴリズムの計算効率を高めるためには, 与えられた領域に解が存在しないことを判定する強力な解の非存在判定テストの導入が重要となる.

このような問題に対し, 1998 年に文献 [3] で線形計画法 (単体法) を用いた強力な解の非存在テストが提案された. この方法は, 関数曲線を長方形で囲むことにより非線形方程式を線形計画問題に置き換え, それに単体法を適用するもので, 従来の非存在テストよりも遥かに強力であることが示されている. このテストは LP テストと呼ばれる. また文献 [5] では, LP テストに双対単体法を導入することにより, アルゴリズムの計算効率を飛躍的に改善できることが示されている. この方法は既に得られている実行可能タブロー (最適タブロー) から次の領域用の双対実行可能タブローを導き, そこから双対単体法をスタートさせるもので, それにより LP テストにおけるピボット演算回数を大幅に減少させることができる. 文献 [5] では, この方法により 200 変数の非線形方程式の全解探索に初めて成功している.

また文献 [3] の方法のバリエーションとして, 非線形関数が単調かつ凸である場合 (トランジスタ回路を記述する方程式などが相当する) を対象に, 文献 [4] で「直角三角形を用いた LP テスト」が提案されている. 一般に関数曲線を囲む多角形が小さいほど LP テストは強力になるので, この方法は文献 [3] の「長方形を用いた

*中央大学理工学部電気電子情報通信工学科

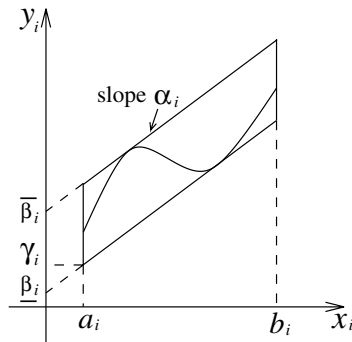


Fig. 1 LP test using a parallelograms.

LP テスト」よりも効率的となる¹．更に文献 [6] では、「直角三角形を用いた LP テスト」を双対単体法により実行できることが示されている．これにより（単調凸関数に対しては）文献 [5] 以上の効率化を実現している．

ところで，単調凸ではない一般の非線形関数で，特に非線形性が比較的弱い関数（以下弱非線形関数と呼ぶ）を対象にする場合，Fig. 1 のように関数曲線を平行四辺形で囲む方が LP テストをより強力にできることが予想される²．しかし LP テストは双対単体法の導入により計算効率が飛躍的に改善されるため，この方法を効率的な方法として確立するには，文献 [6] 同様，「平行四辺形を用いた LP テスト」に双対単体法を導入できることを示す必要がある．しかし文献 [6] で直角三角形を対象にした場合でさえも，双対単体法を導入するためにはかなり複雑な議論と場合分け，更には複雑なプログラミングが必要であった．すなわち文献 [6] のようなアプローチでは，「平行四辺形を用いた LP テスト」に双対単体法を導入することは困難であると予想される．

本稿では，“変数変換”という全く別のアプローチにより，「平行四辺形を用いた LP テスト」に双対単体法を導入できることを示す．また簡単な数値例によりその有効性を検証する．

2 提案手法

本稿の内容は基本的に文献 [3],[5] の拡張であるため，これらの文献に書かれていることは極力割愛して議論を進める．

以下では議論を簡明にするため，解くべき非線形方程式が次のように表されるものと仮定する．

$$Pg(x) + Qx - r = 0 \tag{1}$$

ただし $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ は変数ベクトル， $g(x) = [g_1(x_1), g_2(x_2), \dots, g_n(x_n)]^T : R^n \rightarrow R^n$ は弱非線形関数 $g_i(x_i) : R^1 \rightarrow R^1$ ($i = 1, 2, \dots, n$) を要素とする非線形関数ベクトル， P, Q は $n \times n$ の定数行列， $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)^T$ は定数ベクトルである．なお本稿の議論はより一般的な非線形方程式にも容易に拡張することができる．詳しくは文献 [3] を参照されたい．

また， x_i 軸上の閉区間 $[a_i, b_i]$ ($i = 1, 2, \dots, n$) を要素とする n 次元区間ベクトルを

$$X = ([a_1, b_1], \dots, [a_n, b_n])^T \tag{2}$$

で表すことにする．幾何学的には， X は n 次元直方体となる．

区間解析では， n 次元直方体で与えられた初期領域を各変数方向に再帰的に 2 分割しながら，解曲線の存在しえない領域を除去していく．今，Fig. 2 の領域 $X (= X' + X'')$ に対して「平行四辺形を用いた LP テス

¹ただし，あまり複雑な多角形を用いると制約条件の数が増えるため逆に非効率的となる [4]．一般的な関数に対しては長方形，単調凸関数に対しては直角三角形を用いるのが最もバランスが良く効率的であるというのがこれまでの認識である．

²Fig. 1 のような（関数曲線を挟み込む）2 本の平行線を求める方法は文献 [7] ~ [10] などに示されている．

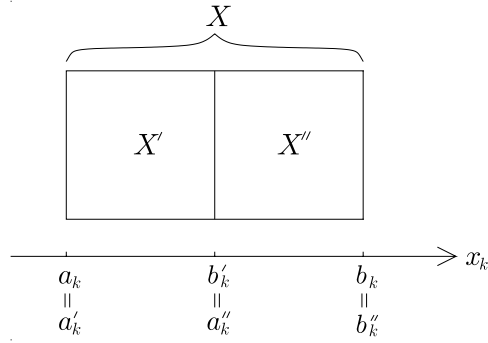


Fig. 2 Illustration of the proposed technique I.

ト」を適用したものとす。このとき、領域 X に対する「平行四辺形を用いた LP テスト」では線形計画問題

最大化： 任意の定数

制約条件：

$$\begin{aligned}
 Py + Qx - r &= 0 \\
 a_i &\leq x_i \leq b_i, & i = 1, 2, \dots, n \\
 y_i &\leq \alpha_i x_i + \bar{\beta}_i, & i = 1, 2, \dots, n \\
 y_i &\geq \alpha_i x_i + \underline{\beta}_i, & i = 1, 2, \dots, n
 \end{aligned} \tag{3}$$

に線形計画法（単体法または双対単体法）を適用する。ただし $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ は補助変数ベクトル、 α_i は Fig. 1 の平行四辺形の横辺の傾きで

$$\alpha_i = \frac{g_i(b_i) - g_i(a_i)}{b_i - a_i} \tag{4}$$

とする。また $\bar{\beta}_i, \underline{\beta}_i$ は Fig. 1 に示す y_i 座標である。なお、本稿では線形計画問題を書く際に非負条件は省略する。

明らかに式 (1) の領域 X 内の解は、 $y_i = g_i(x_i)$ とおくことにより式 (3) の制約条件を満足する。したがってもし式 (3) に線形計画法を適用した結果、式 (3) の実行可能領域が存在しないことがわかれば（すなわち式 (3) の制約条件を満たす x と y が存在しなければ）、 X に式 (1) の解は存在しないことになる。

なお式 (3) に単体法を適用する際、変数変換 $\bar{x}_i = x_i - a_i, \bar{y}_i = y_i - \gamma_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) により平行四辺形が第一象限の左下隅に来るように平行移動し、次にスラック変数 $\bar{\lambda}_i, \bar{\mu}_i, \bar{\nu}_i$ の導入により式 (3) を標準形

最大化： 任意の定数

制約条件：

$$\begin{aligned}
 P\bar{y} + Q\bar{x} - \bar{r} &= 0 \\
 \bar{x}_i + \bar{\lambda}_i &= b_i - a_i, & i = 1, 2, \dots, n \\
 \bar{y}_i + \bar{\mu}_i &= \alpha_i \bar{x}_i + \alpha_i a_i + \bar{\beta}_i - \gamma_i, & i = 1, 2, \dots, n \\
 \bar{y}_i - \bar{\nu}_i &= \alpha_i \bar{x}_i + \alpha_i a_i + \underline{\beta}_i - \gamma_i, & i = 1, 2, \dots, n
 \end{aligned} \tag{5}$$

で表してから初期タブローを構成することに注意する。ただし γ_i は Fig. 1 に示す y_i 座標で、 $\alpha_i \geq 0$ のときは $\gamma_i = \alpha_i a_i + \underline{\beta}_i$ 、 $\alpha_i \leq 0$ のときは $\gamma_i = \alpha_i b_i + \bar{\beta}_i$ となる。

さて、Fig. 2 の領域 $X (= X' + X'')$ に対して LP テストを適用した結果、式 (3) の実行可能領域が存在したものとす。 (存在しなければ X は除去されるので以下の議論は必要ない。) このとき、領域 X に対する式 (5) の最適タブローが得られている。

ここで領域 X を二つの領域 X' と X'' に分割したものとす。ただし、 X' と X'' は Fig. 2 に示すように x_k 軸方向に隣接しているものとす。次に X' と X'' に対して LP テストを適用す。ここで Fig. 3 を用いて領域 X' に対する LP テストを考えると、まず解くべき線形計画問題は次のようになる。

最大化： 任意の定数

制約条件：

$$\begin{aligned}
 & Py + Qx - r = 0 \\
 & a_i \leq x_i \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, i \neq k \\
 & a'_k \leq x_k \leq b'_k \\
 & y_i \leq \alpha_i x_i + \bar{\beta}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, i \neq k \\
 & y_k \leq \alpha'_k x_k + \bar{\beta}'_k, \\
 & y_i \geq \alpha_i x_i + \underline{\beta}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, i \neq k \\
 & y_k \geq \alpha'_k x_k + \underline{\beta}'_k
 \end{aligned} \tag{6}$$

ただし $\alpha'_k, \bar{\beta}'_k, \underline{\beta}'_k$ は Fig. 3 に示すような傾きと y_k 座標を表すものとす。

ここで変数変換 $\bar{x}_i = x_i - a_i$ ($i = 1, 2, \dots, n, i \neq k$), $\tilde{x}_k = x_k - a'_k$, $\bar{y}_i = y_i - \gamma_i$ ($i = 1, 2, \dots, n, i \neq k$), $\tilde{y}_k = y_k - \gamma'_k$ とスラック変数 $\bar{\lambda}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n, i \neq k$), $\tilde{\lambda}_k, \bar{\mu}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n, i \neq k$), $\tilde{\mu}_k$ の導入により式 (6) を標準形で表すと次のようになる。

最大化： 任意の定数

制約条件：

$$\begin{aligned}
 & P\bar{y} + Q\tilde{x} - \tilde{r} = 0 \\
 & \bar{x}_i + \bar{\lambda}_i = b_i - a_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, i \neq k \\
 & \tilde{x}_k + \tilde{\lambda}_k = b'_k - a'_k, \\
 & \bar{y}_i + \bar{\mu}_i = \alpha_i \bar{x}_i + \alpha_i a_i + \bar{\beta}_i - \gamma_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, i \neq k \\
 & \tilde{y}_k + \tilde{\mu}_k = \alpha'_k \tilde{x}_k + \alpha'_k a'_k + \bar{\beta}'_k - \gamma'_k \\
 & \bar{y}_i - \bar{\nu}_i = \alpha_i \bar{x}_i + \alpha_i a_i + \underline{\beta}_i - \gamma_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, i \neq k \\
 & \tilde{y}_k - \tilde{\nu}_k = \alpha'_k \tilde{x}_k + \alpha'_k a'_k + \underline{\beta}'_k - \gamma'_k
 \end{aligned} \tag{7}$$

ただし $\tilde{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{k-1}, \tilde{x}_k, \bar{x}_{k+1}, \dots, \bar{x}_n)^T$, $\bar{y} = (\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{k-1}, \tilde{y}_k, \bar{y}_{k+1}, \dots, \bar{y}_n)^T$ である。

ところが $\bar{x}_k = x_k - a_k$ と $\tilde{x}_k = x_k - a'_k$ より $\bar{x}_k = \tilde{x}_k + (a'_k - a_k)$ が導かれる。またこの式と式 (5) の $\bar{x}_k + \bar{\lambda}_k = b_k - a_k$ 並びに式 (7) の $\tilde{x}_k + \tilde{\lambda}_k = b'_k - a'_k$ より $\bar{\lambda}_k = \tilde{\lambda}_k + (b_k - b'_k)$ が導かれる。同様にして式 (5), (7) の制約条件より、

$$\begin{aligned}
 \bar{x}_k &= \tilde{x}_k + (a'_k - a_k) = \tilde{x}_k \\
 \bar{y}_k &= \tilde{y}_k + (\gamma'_k - \gamma_k) \\
 \bar{\lambda}_k &= \tilde{\lambda}_k + (b_k - b'_k) \\
 \bar{\mu}_k &= \tilde{\mu}_k + (\alpha_k - \alpha'_k) \tilde{x}_k + \{(\alpha_k a_k + \bar{\beta}_k) - (\alpha'_k a'_k + \bar{\beta}'_k)\} \\
 \bar{\nu}_k &= \tilde{\nu}_k - (\alpha_k - \alpha'_k) \tilde{x}_k + \{(\alpha'_k a'_k + \underline{\beta}'_k) - (\alpha_k a_k + \underline{\beta}_k)\}
 \end{aligned} \tag{8}$$

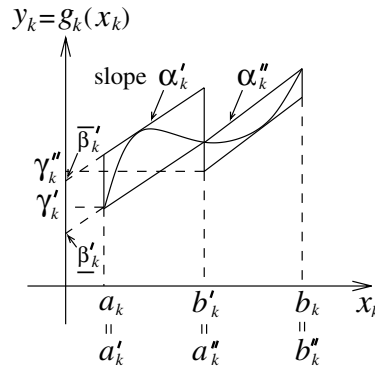


Fig. 3 Illustration of the proposed technique II.

が導かれる．したがって前述の式 (5) に対する最適タブローにこれらの関係式を代入すれば，式 (7) に対する双対実行可能タブローを得ることができる³．双対実行可能タブローが得られれば，そこからスタートして式 (7) を双対単体法で解くことができる．これが本稿で提案する「平行四辺形と双対単体法を用いた LP テスト」で，式 (8) のような変数変換に基づくため，文献 [6] と比べると遥かにシンプルでプログラミングも容易である．

多くの場合上記の双対実行可能タブローは実行可能に近い状態になっているので，この LP テストは単体法を最初から適用する LP テストよりも遥かに少ない反復回数で終了する．また，上記の双対実行可能タブローを定式化した時点で実行可能領域の存在・非存在を判定できる場合も多く，その場合 LP テストは 0 回のピボット演算で終了する．

以上の手順は，領域 X'' に対しても同様に適用することができる．また X' を分割して得られる新たな領域に対しても， X' を前述の X と考えることにより同様に適用することができる．すなわち，2 回目以降すべての LP テストを双対単体法で行うことができる．これにより，アルゴリズム全体での総ピボット演算回数を大幅に減少させることが可能となる．

3 数値例

提案手法を C 言語でプログラミングし，Sun Ultra 10 (UltraSPARC-IIi 360MHz, 1GB RAM) 上で数値実験を行った．本プログラムはまだ任意の方程式を解くことのできる完成版ではないため，ここでは簡単な例題として

$$x_i - \frac{1}{20} \left(\sum_{j=1}^{10} x_j^3 + i \right) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, 10$$

を考える [3]．初期領域を $([-10, 10], \dots, [-10, 10])^T$ とし文献 [3] の「長方形と単体法を用いたアルゴリズム」，「平行四辺形と単体法を用いたアルゴリズム」，並びに提案手法である「平行四辺形と双対単体法を用いたアルゴリズム」を適用したときの計算結果（得られた解の個数，探索領域数，総ピボット演算回数，1 領域当たりの平均ピボット演算回数，計算時間）を Table 1 に示す．なおどのアルゴリズムでも同じ 3 個の解を得ることができた．この表より，探索領域数，ピボット演算回数，計算時間ともに提案手法が最も少なくなっていることがわかる．すなわち，まず探索領域数は平行四辺形を用いることにより約 2.5 倍減少されている．その代わり平行四辺形を用いると制約条件の数が増えるため，1 領域当たりの平均ピボット演算回数は約 2.4 倍増加し，その結果 1 行目と 2 行目の計算時間はほぼ同等となっている．しかし双対単体法の導入により 1 領域当

³このタブローの定数列の要素はすべて正とは限らないので，このタブローは実行可能とは限らないが，補助目的関数行が最適条件を満足しているので，双対実行可能となる．

Table 1 Comparison of the number of analyzed boxes, the total number of pivotings, the average number of pivotings per box, and the computation time

	解の個数	探索領域数	総ピボット回数	平均ピボット回数	時間 (秒)
長方形 + 単体法	3	3,173	39,776	12.53	1.53
平行四辺形 + 単体法	3	1,243	37,006	29.77	1.45
平行四辺形 + 双対単体法	3	1,243	2,438	1.96	0.32

たりの平均ピボット演算回数は大幅に減少されるため、総ピボット演算回数、計算時間ともに提案手法が最も少なくなっている。

4 結論

本ショートノートでは、「変数変換」というシンプルな方法により、非常に複雑であると予想された「平行四辺形と双対単体法を用いた LP テスト」が簡単に実現できることを示し、数値例によりその有効性を確認した。今後はこの方法の改良を図るとともに、多くの数値例による有効性の詳細な検証を行っていく予定である。

謝辞

本研究の一部は文部科学省科学研究費補助金基盤研究 (C) 「非線形システムの数値解析法の開発とその応用・実用化に関する研究」、文部科学省 21 世紀 COE プログラム「電子社会の信頼性向上と情報セキュリティ」(中央大学研究拠点)、並びに中央大学理工学研究所共同研究「非線形システムの数値解析法の開発と LSI 設計への応用に関する研究」の補助を受けました。ここに謝意を表します。

参考文献

- [1] Moore R. E. and Jones S.T.: *Safe starting regions for iterative methods*. SIAM J. Numer. Anal., **14**, 6, 1051–1065 (1977)
- [2] Moore R. E.: *Methods and Applications of Interval Analysis*. SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia (1979)
- [3] Yamamura, K., Kawata, H. and Tokue, A.: *Interval solution of nonlinear equations using linear programming*. BIT—Numerical Mathematics—, **38**, 1, 186–199 (1998)
- [4] Yamamura K. and Nishizawa, M.: *Finding all solutions of a class of nonlinear equations using an improved LP test*. The Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, **16**, 3, 349–368 (1999)
- [5] Yamamura, K. and Fujioka, T.: *Finding all solutions of systems of nonlinear equations using the dual simplex method*. Proc. Int. Symp. Nonlinear Theory and its Applications, Zao, Japan, 219–222 (2001)
- [6] Yamamura, K. and Nakamura, O.: *Finding all solutions of transistor circuits using the dual simplex method*. IEICE Trans. Fundamentals, **E86-A**, 2, 434–443 (2003)
- [7] Tadeusiewicz, M. and Glowienka, K.: *A contraction algorithm for finding all the DC solutions of piecewise-linear circuits*. J. Circuits, Systems, and Computers, **4**, 3, 319–336 (1994)
- [8] Kolev, L. V.: *A new method for global solution of systems of non-linear equations*. Reliable Computing, **4**, 2, 125–146 (1998)
- [9] Yamamura, K.: *Finding all solution sets of piecewise-trapezoidal equations described by set-*

valued functions. *Reliable Computing*, **9**, 3, 241–250 (2003)

- [10] 宮田孝富, アフィン演算について, 日本知能情報ファジィ学会誌, **15**, 2, 155–160 (2003)