

ニュートン不動点ホモトピーを用いた非線形回路の 直流動作点の大域的求解法

山村清隆* , 今井 右* , 井上靖秋**

A Globally Convergent Algorithm Using the Newton-Fixed-Point Homotopy for Finding DC Operating Points of Nonlinear Circuits

Kiyotaka Yamamura* , Yu Imai* , Yasuaki Inoue**

abstract

In circuit simulation, many circuit designers experience difficulties in finding dc operating points of nonlinear circuits because the Newton-Raphson method often fails to converge unless the initial point is sufficiently close to the solution. To overcome this convergence problem, homotopy methods have been studied, and it has been proved that the homotopy methods are globally convergent for nonlinear circuit equations. Nowadays the homotopy methods are widely used in practical circuit simulation, and bipolar analog integrated circuits with more than 20,000 elements are solved efficiently with the theoretical guarantee of global convergence. In this paper, an efficient algorithm using a new homotopy function termed the *Newton-fixed-point homotopy* is proposed, and it is shown that this algorithm is more efficient than the conventional algorithms.

1 はじめに

大規模集積回路 (LSI) の設計では、回路シミュレーション、すなわち回路を記述する非線形方程式をコンピュータで解くことが中心的作業の一つとなる。現在では SPICE とよばれる回路シミュレータが世界中の設計現場で採用され、そこでは非線形回路を修正節点方程式で記述し、それにニュートン法を適用することにより直流動作点を求めている。しかしニュートン法には大域的収束性がなく、初期値を解の近くにとらないと収束しないという欠点がある。回路方程式は一般に大規模で非線形性が強いいため、ニュートン法が収束するような初期値を見つけることは (回路が大規模になるほど) 非常に困難な問題となる。もしニュートン法が収束しなければ直流動作点が得られないので、設計がストップしてしまう。このようなニュートン法の非収束問題は LSI 設計における大きなボトルネックとして世界中の設計者を悩ませていた [1]。

このような問題に対して、ホモトピー法をベースとする収束性に優れた回路シミュレータの開発に関する研究が近年国内外で非常に活発に進められている [1] ~ [10]。ホモトピー法は回路方程式に対して大域的収束性をもつことが証明されているため [2],[6],[7],[10]、非収束問題を根本的に解決することができる。特に国内では、SPICE のプログラムに独自のホモトピー法を組み込むことにより、最も解析が困難とされるバイポーラアナロ

* 中央大学理工学部電気電子情報通信工学科
** 早稲田大学大学院情報生産システム研究科

グ回路に対して、その最大級である一兆素子クラスのアナログ LSI を世界で初めて収束の保証付きで解くことに成功し [1],[6],[7], LSI 開発期間の短縮や民生機器の高度化・低価格化に大きく貢献している¹。

ホモトピー法で使われるホモトピー関数としては、ニュートンホモトピーと不動点ホモトピーがよく知られている [12]。国内のホモトピー法ではニュートンホモトピーが多用されている。ニュートンホモトピーを用いたホモトピー法をニュートンホモトピー法とよぶ。これに対し欧米では、ほとんどの場合不動点ホモトピーが用いられている。

ところが 1995 年の国際シンポジウムで、不動点ホモトピーを用いたホモトピー法（不動点ホモトピー法とよぶ）は SPICE で用いられている修正節点方程式に対してしばしば収束しないことが報告された [8]。実際、当時欧米で使われていたホモトピー法の回路シミュレータは収束しないことが多かった。これに対し 1999 年、不動点ホモトピーのある部分に -1 を付けることにより、不動点ホモトピー法は修正節点方程式に対して必ず解に収束する（大域的収束性をもつ）ことが証明された [10]。これにより、欧米のホモトピー法の収束性は大幅に改善された。

さらに文献 [10] のアルゴリズムは、その後 IEEE（国際電気電子学会）の次世代 SPICE プロジェクトで採用された (<http://ngspice.sourceforge.net/devdoc.html>)。それにより世界中の設計者が収束率 100% の回路シミュレータを利用できるようになり、長い間多くの設計者を悩ませた「非収束問題」は国内外で理論と実用の両面から完全に解決されることになった。

残る課題は、ホモトピー法の計算効率のより一層の改善である。本論文では、修正節点方程式に対するホモトピー法の計算効率を実用的見地から改善する手法として、ニュートン不動点ホモトピー法とよばれる新しいホモトピー法を提案し、この方法の有効性について検討を行う。

2 修正節点方程式に対するホモトピー法

簡単のため抵抗素子はすべて電圧制御型であるものと仮定する。このとき、修正節点方程式は一般に次のような形で表すことができる [6],[10]

$$f_g(v, i) = D_g g(D_g^T v) + D_E i + J = 0 \quad (1a)$$

$$f_E(v, i) = D_E^T v - E = 0 \quad (1b)$$

ただし、 $v \in R^N$ は節点電圧を表す変数ベクトル、 $i \in R^M$ は独立電圧源を流れる電流を表す変数ベクトル、 $g: R^K \rightarrow R^K$ は抵抗素子の電圧電流特性を表す連続関数、 D_g と D_E は回路の構造を表す $N \times K$ 並びに $N \times M$ の既約接続行列、 $J \in R^N$ と $E \in R^M$ は独立電流源および独立電圧源によって定まる定数ベクトルである。以下、式 (1a),(1b) をまとめて

$$f(x) = 0 \quad (2)$$

で表すことにする。ただし

$$f = \begin{bmatrix} f_g \\ f_E \end{bmatrix} : R^n \rightarrow R^n$$

$$x = \begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix} \in R^n \quad (n = N + M) \quad (3)$$

である。

ホモトピー法では式 (2) を解くのに、まず初期値 $x^0 \in R^n$ を選び、 x^0 を解とする別の方程式

$$f^0(x) = 0 \quad (4)$$

¹この成果は日本シミュレーション学会誌の第 18 巻 3 号の巻頭言でも大きく取り上げられている [11]。

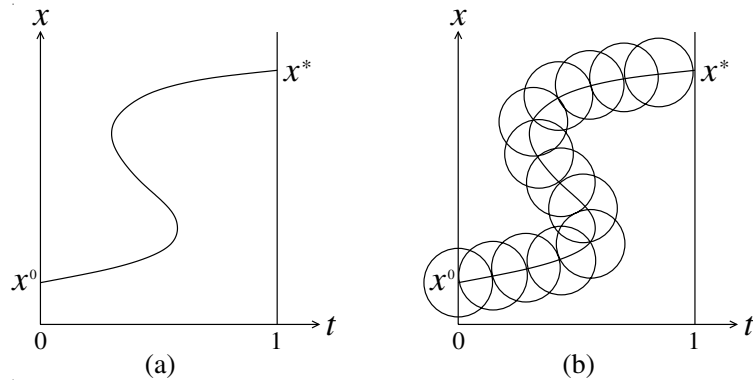


Fig. 1 ホモトピー法と球面法

を考える. ただし f^0 も R^n から R^n への写像である. そのような関数 $f^0(x)$ の例としては

$$f^0(x) = f(x) - f(x^0) \quad (5)$$

$$f^0(x) = A(x - x^0) \quad (6)$$

(ただし A は適当な $n \times n$ の正則行列) などがある. 次にパラメータ t を導入し, 写像 $h: R^{n+1} \rightarrow R^n$ を

$$h(x, t) = tf(x) + (1-t)f^0(x) \quad (7)$$

で定義する. このような h をホモトピーあるいはホモトピー関数とよぶ. また $f^0(x)$ として式 (5), 式 (6) を使ったホモトピーをそれぞれニュートンホモトピー, 不動点ホモトピーとよぶ.

ここで (x, t) を変数とする方程式

$$h(x, t) = 0 \quad (8)$$

を考える. この方程式は $t=0$ のとき式 (4), $t=1$ のとき式 (2) となり, 答のわかっている方程式から解きたい方程式へと連続的につなぐ方程式の集合となる. また式 (8) は方程式の数よりも変数の数の方が一つだけ多いので, その解集合 $\{(x, t) \mid h(x, t) = 0\}$ は R^{n+1} 空間における曲線となる. このような曲線を解曲線とよぶ. Fig. 1(a) に解曲線の例を示す.

x^0 は式 (4) の解であるから, $(x^0, 0)$ は解曲線上の点となる. もし $(x^0, 0)$ を含む解曲線が $t=1$ 超平面 $R^n \times \{1\}$ とある点 $(x^*, 1)$ で交わっているならば, x^* は式 (2) の解となる. したがって, $(x^0, 0)$ を出発点としてこの解曲線を追跡し, $t=1$ まで到達すれば, 式 (2) の解を得ることができる. このような方法をホモトピー法とよぶ.

解曲線の追跡法としては種々の方法が知られているが [12], 本論文の数値実験では文献 [3] で提案された球面法を用いることにする. Fig. 1(b) に球面法のイメージ図を示す. すなわち, 解曲線を包み込む $(n+1)$ 次元球面を次々と発生させ, 球面と解曲線の交わる点をニュートン法で求めながら解曲線を追跡していく方法である. 球面法は回路方程式のように解曲線が急激に変化する方程式に対しては有効性が高く, また SPICE へのインプリメントも非常に容易である [1],[3],[6],[7].

ここで解 x^* が得られるまでに発生させた球面の数をステップ数という. 球面法では, ニュートン法が収束しなかった場合は球面を小さく取り直して再試行し, 逆に収束した場合は次のステップにおける球面を大きくする. したがって非線形性が強い箇所や解曲線が急激に変化する箇所では小さな球面が使われ, 追跡速度が低下する. 逆に非線形性が弱い箇所では大きな球面が使われ, 追跡が加速される. なお, ホモトピー法の計算時間の大半は LU 分解に要する時間で占められるため, ホモトピー法の計算効率の比較は総 LU 分解回数によって行われることが多い.

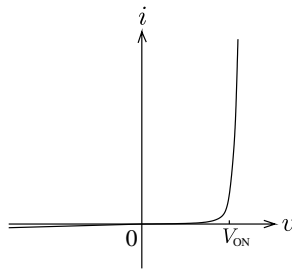


Fig. 2 トランジスタの非線形特性

不動点ホモトピー法における行列 A としては，一般に $n \times n$ の単位行列

$$A = \begin{bmatrix} I_N & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_M \end{bmatrix} \quad (9)$$

(ただし I_N, I_M はそれぞれ $N \times N, M \times M$ の単位行列) が多用される．しかし既に文献 [8] でも報告されているように，このときの不動点ホモトピー法は修正節点方程式に対してしばしば収束しないことがある．これに対し文献 [10] では，行列 A として

$$A = \begin{bmatrix} I_N & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -I_M \end{bmatrix} \quad (10)$$

を用いることにより，不動点ホモトピー法の大域的収束性が保証されることを証明している．また I_M に -1 をかけないと，たとえ良い初期値を与えても半数近くは絶対に収束しないことも示している．更に -1 をかけることにより，高い確率で実用上重要な安定解に収束することも証明している．

更に文献 [13] では，式 (10) の代わりに

$$A = \begin{bmatrix} G_{FP} I_N & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -R_{FP} I_M \end{bmatrix} \quad (11)$$

を用いることにより，不動点ホモトピー法の計算効率を大幅に改善できることが指摘されている．ただし， G_{FP} は 10^{-3} 程度のオーダーの正の実数 (コンダクタンス)， R_{FP} は 10^3 程度のオーダーの正の実数 (抵抗) である．このような「単位合わせ」により，いわゆる解曲線の“遠回り現象”を緩和し，不動点ホモトピー法のステップ数を軽減させることができる．

3 ニュートン不動点ホモトピー法

本章では，回路シミュレーションにおけるニュートンホモトピー法並びに不動点ホモトピー法の欠点を検討した上で，新しいホモトピー関数を用いた効率的なホモトピー法を提案する．

3.1 ニュートンホモトピー法の欠点

式 (5) を式 (7) に代入して整理すると

$$h(x, t) = f(x) - (1 - t)f(x^0) \quad (12)$$

となる．この式からわかるように，ニュートンホモトピー法は物理的には，もとの解くべき回路は変更せずに，その回路の電源の値だけを変化させながら解曲線を追跡する方法と解釈することができる (例えば初期値が $x^0 = \mathbf{0}$ の場合，式 (1) より， t が 0 から 1 に変化するにしたがって独立電流源，独立電圧源の値はゼロから

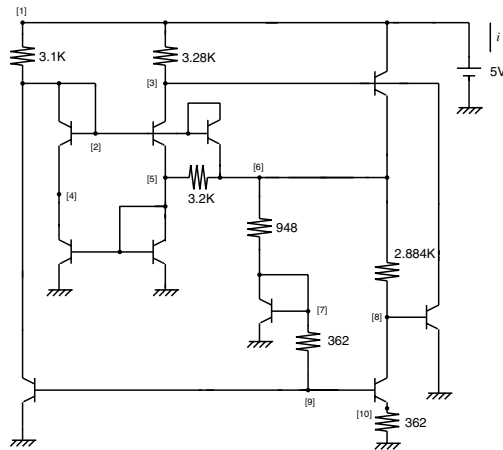


Fig. 3 例題回路 1 (基準電圧回路)

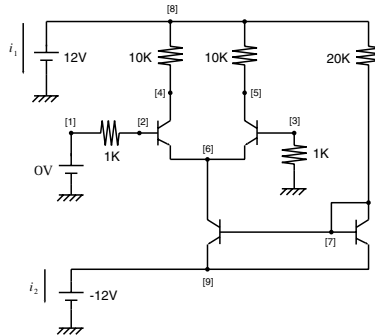


Fig. 4 例題回路 2 (差動対回路)

J, E に変化する)。この方法は回路自体を変形しないのでスムーズな連続変形が期待されるが、次のような欠点をもつ。すなわち、集積回路等の実用的なトランジスタ回路において、回路の電源をゼロから徐々に立ち上げていったときに、電源電圧のある領域で解曲線の追跡が遅くなることが経験的に知られている。このような現象を device-on game とよぶ。この原因は、電源電圧が回路に含まれる BJT (バイポーラ接合トランジスタ) の PN 接合の導通開始電圧に達すると、非線形素子である BJT が動作を開始して回路が複雑な動きをするためである。このとき、電源電圧は本来の値に比べてまだ低く、回路が正常な動作をする領域には達していないため、その回路は電源電圧の変化に対して、本来の電源電圧の近傍で想定される正常動作とはかけ離れた複雑な動きをすることがよくある。このことは、式 (1) に含まれる非線形関数が Fig. 2 に示すように導通開始電圧 V_{ON} の付近で高い非線形を示すことから也容易に想像できる。

3.2 不動点ホモトピー法の欠点

不動点ホモトピー法は物理的には、式 (4),(6) が表す簡単な線形回路から出発して、もとの解くべき非線形回路へと回路を連続的に変形させながら解曲線を追跡する方法と解釈することができる。このときの連続変形の過程は、 t の値により概ね次のような三つのフェーズに分けて考えることができる。

- I) 簡単な線形回路から出発して非線形回路の影響割合が急激に増加する領域 ($t = 0$ 近傍)
- II) 線形回路ともとの解くべき非線形回路が互いに影響し合う領域 ($t = 0.5$ 周辺)
- III) 線形回路の影響割合が急激に低減してもとの非線形回路本来の動作に移行する領域 ($t = 1$ 近傍)

これらのフェーズの中で、II の領域では、線形回路がもとの回路の非線形性を緩和して解曲線の暴れを抑える効果が期待される。しかし、I と III の各領域では、解曲線の追跡が遅くなることが経験的に知られている。

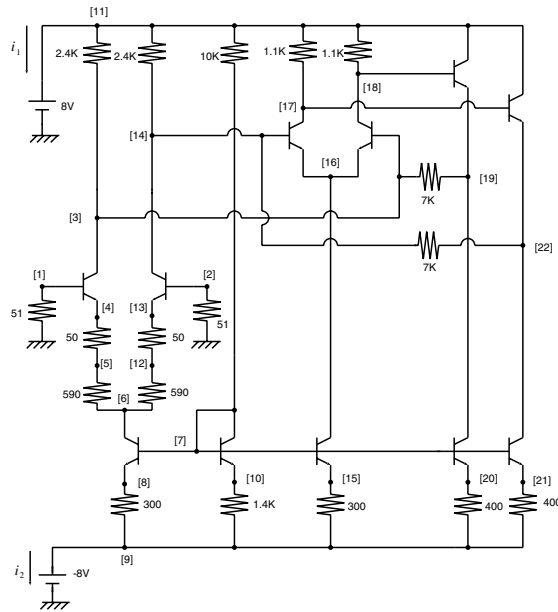


Fig. 5 例題回路 3 (UA733 型ビデオ増幅器)

I の領域では、本来の正常動作に至っていない非線形回路の影響が急激に増加することにより、回路が複雑な動作をする場合がある。逆に線形回路の影響が相対的に大きい場合は、非線形回路の影響がなかなか現れないため、解曲線の動きが鈍化することもある。このような現象を *start game* とよぶ。また III の領域では、非線形回路が線形回路による緩和から解放されて急激に本来の動作に移る複雑な動きをする。このような現象を *end game* とよぶ。このような現象が現れるのは、不動点ホモトピー法が本来解くべき非線形回路とは全く無関係な線形回路から出発するためである。

3.3 提案手法

本章で提案する方法は、次のようなホモトピー関数を用いるものである。

$$h(x, t) = f(x) - (1 - t)f(x^0) + (1 - t)A(x - x^0) \quad (13)$$

ただし A は式 (11) で与えられるものとする。このホモトピーはニュートンホモトピーと不動点ホモトピーの相補的作用によって方程式のよりスムーズな連続変形を意図したものである。このようなホモトピー関数をニュートン不動点ホモトピーとよぶことにする。

ニュートン不動点ホモトピー法において、式 (13) の右辺は三つの項から構成される。第 1 項と第 2 項はニュートンホモトピーを表しているから、このホモトピーはニュートンホモトピーに不動点ホモトピーの補助関数である第 3 項を付加したものと見ることもできる。すなわち、2 つの項（もとの非線形回路の電源値の変化と付加した線形回路の影響割合の変化）を用いて連続変形を行うのが本手法の特徴である。式 (13) の右辺第 3 項には非線形回路の非線形性を緩和する作用があるので、ニュートンホモトピー法において PN 接合導通開始時に見られる *device-on game* をよりスムーズにする効果がある。また本手法では、単純な線形回路から出発するのではなく、もとの非線形回路（電源を初期値に設定したもの）に線形回路を付加した回路から出発するので、不動点ホモトピー法におけるフェーズ I はなくなるから、*start game* は生じにくくなる。更に、不動点ホモトピー法では非線形回路の非線形性を緩和する必要から行列 A の要素をある程度大きく ($G_{FP} = 10^{-3}$ 程度に) とらなければならないが、それが *end game* を引き起こす原因となるが、本手法では二つの項が連続変形に関与しているため A の要素を大きくする必要がなく ($G_{FP} = 10^{-4}$ 程度にできる)、その結果 *end game* をよりスムーズにする効果がある。

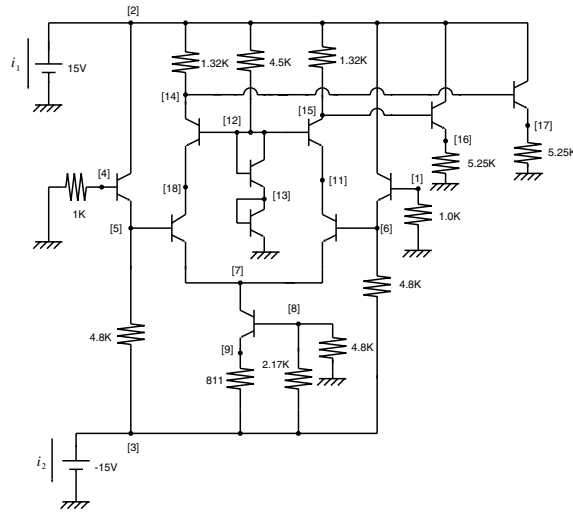


Fig. 6 例題回路 4 (RCA3040 型広帯域増幅器)

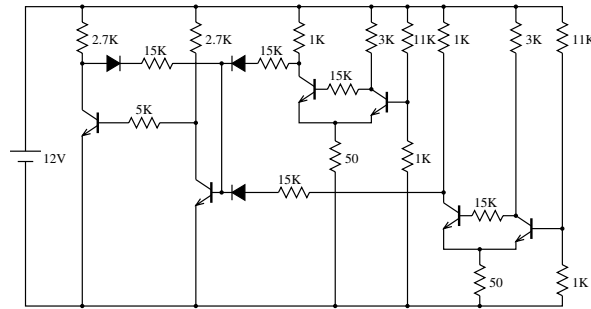


Fig. 7 例題回路 5 (シュミットトリガ回路)

4 数値例

本章では数値実験結果をいくつか示し、前章で提案したニュートン不動点ホモトピー法の有効性を検証する。ここでは例題回路として実用的な回路である SPICE のベンチマーク回路 [14] (Figs. 3~7) を考えることにする。

これらの回路に $x^0 = \mathbf{0}$ としてニュートンホモトピー法 (NH), 行列 A として式 (11) を用いた不動点ホモトピー法 (FPH, ただし $G_{FP} = 10^{-3}$, $R_{FP} = 10^3$), 及び提案手法であるニュートン不動点ホモトピー法 (NFPH, ただし $G_{FP} = 10^{-4}$, $R_{FP} = 10^3$) を適用したときの解曲線を Figs. 8~12 に示す。ただし横軸は t , 縦軸はあるトランジスタのベース・エミッタ間電圧である。なお、解曲線追跡法としては文献 [3] の球面法を使用し、球面法における各パラメータの値は文献 [10] と同じものを使用した。図中、解曲線上のマークはニュートン法により計算された「解曲線と球面の交わる点」を表す。すなわち、マークが少ないほどステップ数が少なく、逆にマークが多い箇所は解曲線の追跡が鈍化していることを表す。

また、このときのステップ数 S と総 LU 分解回数を Table 1 に示す。この表より、すべての回路に対して提案手法のステップ数と LU 分解回数が最も少なくなっていることがわかる。ちなみに計算時間はどれも 1 秒未満であった。

以下、それぞれの解曲線についてもう少し詳しく検討する。

Fig. 8 において、NH では $t = 0.3$ 付近で解曲線が急激に変化し (device-on game), ステップ数の増大を

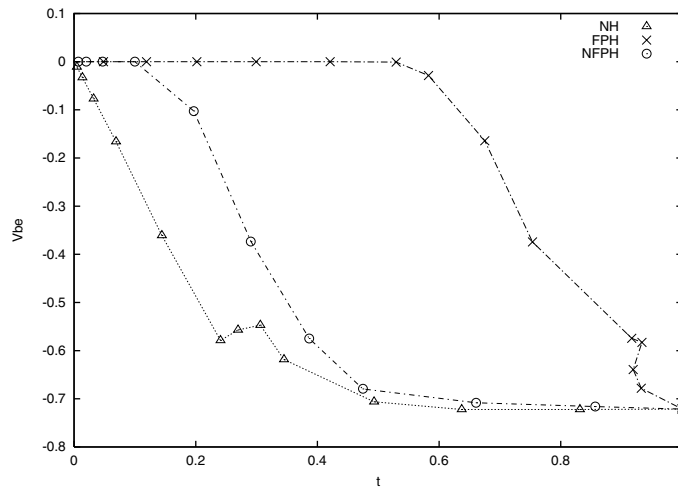


Fig. 8 例題回路 1 に対する計算結果

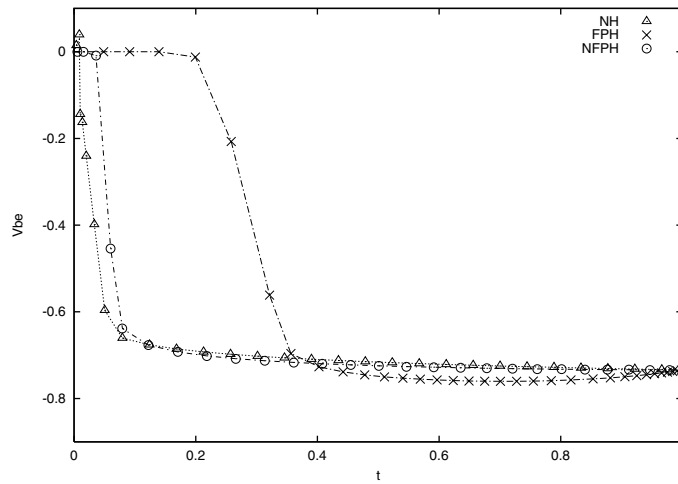


Fig. 9 例題回路 2 に対する計算結果

招いていることがわかる．また FPH では $t = 1$ 付近で追跡の鈍化 (end game) を起こし，ステップ数の増大を招いている．これに対し本手法 (NFPH) では NH で見られるような解曲線の急激な変化も，また FPH で見られるような $t = 1$ 付近での追跡の鈍化もなく，より滑らかな解曲線となっていることがわかる．

Fig. 9 において，NH では $t = 0$ 付近で解曲線の複雑な挙動が生じているが，NFPH はその領域では FPH のような滑らかな曲線になっている．また，FPH では $t = 1$ 付近で end game が生じステップ数が増大しているが，NFPH はその領域でも NH のようなスムーズな追跡が行われている．

Fig. 10 でも，Fig. 9 と似たような傾向を確認することができる．

Fig. 11 において，NH では $t = 0.1$ 付近で解曲線の複雑な挙動が生じ，FPH では $t = 0.8$ 以降で end game が生じているが，NFPH ではスムーズな解曲線追跡が行われている．

Fig. 12 では，FPH において $t = 0.6$ 以降でステップ数が増大し追跡が鈍化していることがわかる．またこの回路ではどのホモトピー法も device-on game は起こしていないが，NFPH は NH よりも解曲線が短く，より効率的な追跡が行われていることがわかる．

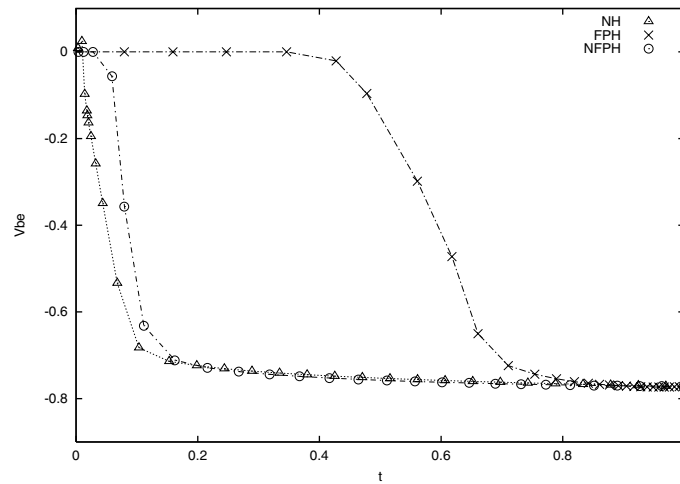


Fig. 10 例題回路 3 に対する計算結果

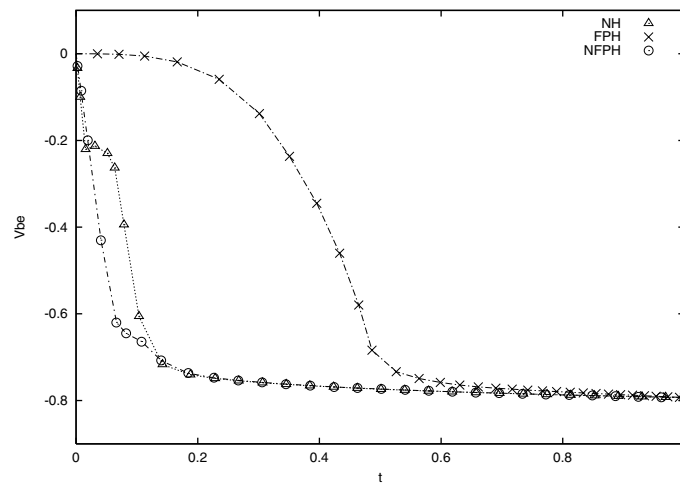


Fig. 11 例題回路 4 に対する計算結果

5 結論

本論文では、修正節点方程式の大域的求解法であるホモトピー法に対し、その計算効率を改善する手法を提案し、数値実験による有効性の検証を行った。その結果、数種類のベンチマーク回路で計算効率の改善を確認することができた。

なお本論文で提案した手法は、文献 [15] で提案した初期値設定法と併用すると、その相乗効果により計算効率の飛躍的な改善を実現することが確認されている [16]。今後はこのような方向も含めて、「ホモトピー法の大域的収束性を保存しながらその計算効率を飛躍的に改善する手法」の研究を行い、回路シミュレーションにおけるホモトピー法の実用的有効性を完成させることを目指したい。

謝辞

貴重な御示唆を頂きました中央大学の篠田庄司教授に感謝致します。なお本研究の一部は文部科学省科学研究費補助金基盤研究 (C) 「非線形システムの数値解析法の開発とその応用・実用化に関する研究」、文部科学

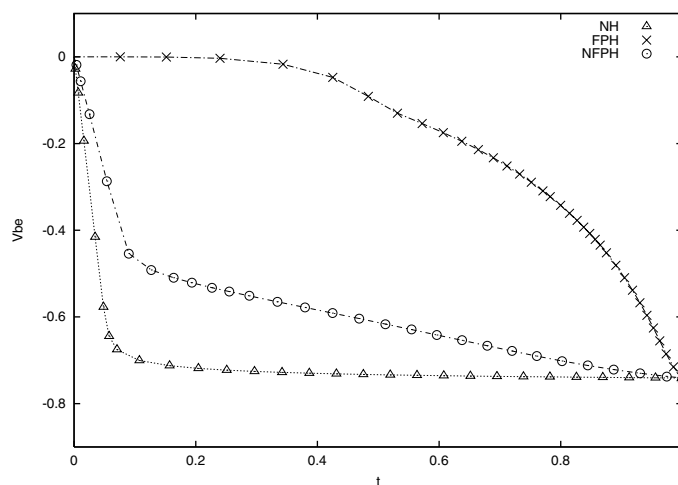


Fig. 12 例題回路 5 に対する計算結果

Table 1 ステップ数 S と LU 分解回数の比較

回路	NH		FPH		NFPH	
	S	LU	S	LU	S	LU
回路 1	16	105	22	96	11	61
回路 2	36	134	37	149	28	115
回路 3	41	141	30	143	27	109
回路 4	33	140	35	139	31	112
回路 5	32	135	38	150	29	107

省 21 世紀 COE プログラム「電子社会の信頼性向上と情報セキュリティ」(中央大学研究拠点), 並びに中央大学工学研究所共同研究「非線形システムの数値解析法の開発と LSI 設計への応用に関する研究」の補助を受けました。ここに謝意を表します。

参考文献

- [1] 山村清隆: 理論が実用になるまで. 電子情報通信学会誌, **81**, 1, 33-36 (1998)
- [2] Yamamura, K. and Horiuchi, K.: *A globally and quadratically convergent algorithm for solving nonlinear resistive networks*. IEEE Trans. Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems, **9**, 5, 487-499 (1990)
- [3] Yamamura K.: *Simple algorithms for tracing solution curves*. IEEE Trans. Circuits and Systems-I, **40**, 8, 537-541 (1993)
- [4] Chang M.-C., Chern J.-H. and Yang P.: *Efficient and robust path tracing algorithm for DC convergence problem*. Proc. 1993 IEEE Int. Symp. Circuits and Systems, Chicago, 1635-1638 (1993)
- [5] Melville, R. C., Trajković, L., Fang, S. C. and Watson, L. T.: *Artificial parameter homotopy methods for the DC operating point problem*. IEEE Trans. Comput.-Aided Des. Integrated Cir-

- cuits and Systems, **12**, 6, 861–877 (1993)
- [6] 井上靖秋：大規模回路の直流動作点解析法, 電子情報通信学会論文誌 (A), **J77-A**, 3, 388–398 (1994)
- [7] Inoue, Y. and Yamamura, K.: *Practical algorithms for dc operating-point analysis of large-scale circuits*. Proc. 1995 Int. Symp. Nonlinear Theory and its Applications, Las Vegas, NV, 1153–1158 (1995)
- [8] Trajković, L. and Mathis, W.: *Parameter embedding methods for finding DC operating points: Formulation and implementation*. Proc. 1995 Int. Symp. Nonlinear Theory and its Applications, Las Vegas, NV, 1159–1164 (1995)
- [9] Yamamura K.: *Spherical methods for tracing solution curves*. Proc. 1995 Int. Symp. Nonlinear Theory and its Applications, Las Vegas, NV, 1177–1182 (1995)
- [10] Yamamura, K., Sekiguchi, T., and Inoue, Y.: *A fixed-point homotopy method for solving modified nodal equations*. IEEE Trans. Circuits and Systems, **46**, 6, 654–665 (1999)
- [11] 篠田庄司：日本シミュレーション学会活動への期待．シミュレーション, **18**, 3, 155 (1999)
- [12] 山村清隆：非線形現象の解析手法〔V〕—非線形方程式の数値解法—．電子情報通信学会誌, **79**, 7, 740–745 (1996)
- [13] 山村清隆, 高橋重憲：不動点ホモトピーを用いた修正節点方程式の大域的求解アルゴリズム．中央大学理工学研究所論文集, **5**, 89–97 (1999)
- [14] Nagel L. W.: *SPICE2, A computer program to simulate semiconductor circuits*. Univ. of California, Berkeley, CA, ERL-M520 (1975)
- [15] Inoue Y., Kusanobu S., Yamamura K., Ando M.: *An initial solution algorithm for globally convergent homotopy methods*. IEICE Trans. Fundamentals, **E87-A**, 4, 780–786 (2004)
- [16] Inoue Y., Imai Y., Ando M. and Yamamura K.: *An efficient homotopy method for solving transistor circuits*. Proc. 2004 IEEE Int. Midwest Symp. Circuits and Systems, Hiroshima, Japan, 621–624 (2004) .