

ゲルの衝突と接触時間

田中良巳^{*}、小林奈央樹[†]、山崎義弘[‡]、奥村 剛[§]、松下 貢[†]

1 序論

1.1 背景

固体の衝突は、惑星科学、材料力学 [1]、球技(戯) [2] など、基礎科学から工学あるいは日常生活に至るまで広範囲の事柄に関わる現象である。その科学的な研究の始まりは、ヘルツによる弾性接触理論 [3] の提出とその結果の接触時間問題 (2 物体の衝突において、衝突速度とそれらが接触している時間の関係を問う問題) への適用にまで遡ることが出来る。20 世紀以降は、固体衝突の研究は主として応用的な観点から行われて、金属を中心とする構造材料の衝突特性について多くの知見が蓄積されてきた。さらに、1990 年代からは、粉体ダイナミクスを基礎づけることを目的として、球状固体の衝突現象が、特に跳ね返り係数の衝突速度依存性を中心とて、再び基礎的・物理的な観点から研究されるようになってきている [4, 5, 6]。

硬い固体の衝突現象の研究においては、線形弾性論に基づくヘルツ理論が議論の基礎になっている。その上に、弾性振動や様々な散逸効果、例えば、塑性変形や固体粘性などを現象論的に考慮することで、多様な物質における衝突挙動を理解しようと努力されている [1, 7]。

そうした研究の流れに対比すべきものとして、超撥水性の基板上への小さな (サブミリ程度) 水滴の衝突挙動の研究を挙げることができる [8]。水滴は、サイズが小さくなると表面エネルギーが支配的になり、球という固有の形をもち、その形を乱すような変形に対して復元力を生ずる。このような水滴が (それがへばりつくことの無い) 超撥水性の基板上に打ち付けられると、跳ね返りやその後の内部振動といった衝突現象特有の振舞いを示す。このような液滴衝突の理解には、通常の硬質の固体衝突におけるものとは異なった、新たな (かつ、大胆な簡単化を伴った) 物理的視点が有用であることが示されている [9]。

微小水滴にとどまらず、いわゆるソフトマターと総称されるような物質群における衝突現象には、それ固有の意義を見出すことができる。まず、第一に、ソフトマターは小さな外力にたいしても大きな変形を生じ、かつ、その構成関係は多種多様である。こうした系の衝突挙動を、通常の硬質の固体におけるものと対比させながら特徴づけ、理解していくことは、進行形の学問としての力学にとって、興味深いことである。また、ある種のソフトマターは緩衝材として用いられ、生体組織のモデル物質とみなされている。そうした系の衝突特性を研究することは、基礎科学としての (ソフトマター) 物理学が、バイオメカニクス等応用も含めた他分野と生産的な交流を行う機会の一つになり得る。(ソフトマター物理学は、元来境界領域に生じた研究分野であり、今後もその発展の仕方は、岩の隙間を滲みて流れる水のように様々な学問分野の境界を浸透しながら広がって行くのだと筆者は捉えている)。

この研究では、ソフトマターの一つであるゲルにおける衝突を研究する。ゲル系の特徴として、その組成を調節する事で、力学特性を広く変化させることが可能である。例えば、ある程度弾性率の大きなゲルを用いると硬質の固体衝突のモデル系と見なし得るような実験系を設定することができる。あるいは、粘性散逸が著しい状況で衝突挙動を研究することができる。ここでは、ソフトマターの衝突という観点からの研究を行う第一段階として、粘性が小さく衝突が起こる程度の時間尺度では、ほぼ弾性体として振舞うゲルを扱う。ただし、衝突において大きな変形を起こすような実験条件 (衝突速度等) を採用する。そして、ヘルツ理論 (あるいはその元になる線形弾性論) が破綻するであろう弾性的大変形を伴う衝突における、接触時間問題を扱う。やや

* 富山県立大学工学部

† 中央大学理工学研究科

‡ 早稲田大学理工学部

§ お茶の水女子大学理学部

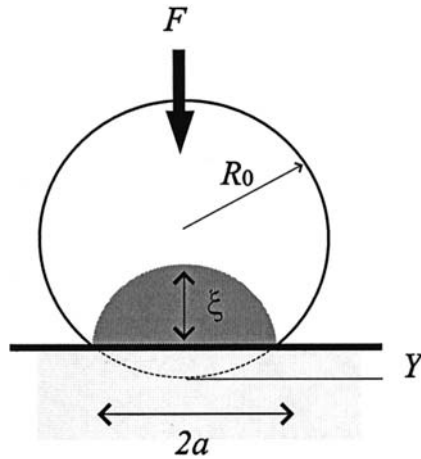


図 1.1 半径 R_0 の弾性体球を力 F で剛体壁に押し付けたときの変形。

特殊な（ある意味では、中途半端な）問題設定ではあるが、大変形はソフトマターに強い外力が印加されたときには、常に生じる効果である。反発係数などの衝突を特徴付けるより興味深い量の振舞いや、あるいは、粘弾性などよりゲル（あるいはソフトマター）らしい効果を議論する上において、ここで扱うことはクリアーされていない事柄である。上で第一段階という表現を用いたのは、この意味からである。

以下では、まず、背景知識として線形弾性論に基づくヘルツ接触理論の要約を行う。

1.2 スケーリングによる Hertz 理論の要約

ここではまず、Hertz による弾性接触理論を、スケーリングの観点から見直した後、オリジナルの解析的取り扱い [3, 10, 11] の結果について要約する。

まず、静的な圧縮の場合から論じる。図 1.1 に示したように、半径 R_0 、Young 率 E の球状弾性体を、剛体壁に力 F で押し付けた状況を考える。球の底部の凹みを Y 、また接触面の半径を a とする。ここで問いたいことは、「凹み Y と接触力 F には、どのような関係があるか？」である。次元的には、歪エネルギー U は以下の形をとる：

$$U \cong E \varepsilon_c^2 W_c. \quad (1.1)$$

ここで、記号「 \cong 」は、数係数を除いて等しいという意味に用いることとする。 E は Young 率、 W_c は歪んでいる領域の体積の典型値、 ε_c はその領域での歪の典型値である。また、図 1.1 に示した ξ は、歪領域の典型的な高さである。まず、 $\xi \cong a$ が成り立つ。これは、「等方」弾性体の本質的性質としてある面にサイズ a にわたって乱れが加えられると、その効果は a と同程度のサイズにわたって内部に染み入る、からである。これより、歪領域の体積は次元的には、(i) $W_c \cong a^3$ となる。また、この領域での歪の典型値は、(ii) $\varepsilon_c \cong Y/a$ である。唯一の長さスケール a で特徴付けられる歪み領域が Y だけの変形（凹み）を被るからである。また、 Y が十分小さい場合、接触部の形状は、2 次曲面で近似できるので、(iii) $Y \cong a^2/R_0$ である。これら条件を式 (1.1) に代入すると、歪エネルギー U のスケーリング形は、

$$U(Y) \cong ER_0^{1/2} Y^{5/2} \quad (1.2)$$

となる。これを Y で微分することで、接触力 F と凹み Y との関係がえられる。

$$F(Y) \cong ER_0^{1/2} Y^{3/2}. \quad (1.3)$$

この関係式で特徴的な点の一つは、力 F と凹み Y が、 $3/2$ 乗という非自明な冪で関係付けられることである。即ち、弾性体球を一つの力学的な素子とみると、それは圧縮に対しては非線形バネとして振舞う。この非線形性は、弾性球の圧縮では歪領域が接触部付近に局在し、かつ、その大きさ W_c が Y に依存することによる。（も

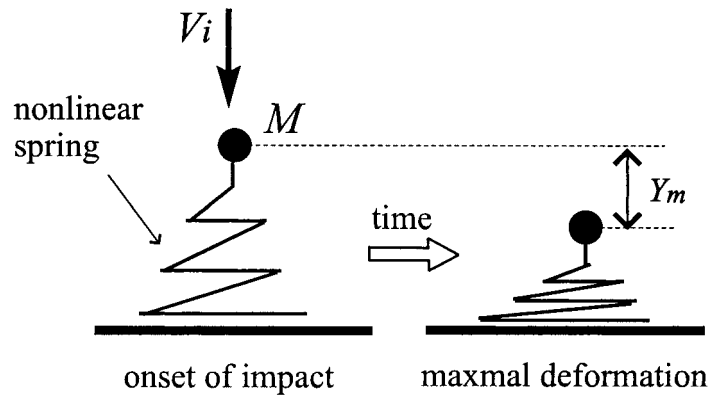


図 1.2 ヘルツ衝突のアイデアを模式的に表現する等価モデル。

し、球ではなく立方体を押し付けたら歪は常に系全体に分布し、その値は Y に比例する。その結果 F と Y は比例する。)

次に弾性球と剛体基板との衝突を論じる。議論の前提として、弾性球と基板との相互作用は、上で述べた静的なヘルツ接触に従うと仮定する。即ち、弾性球の中心と基板との距離が $(R_0 - Y)$ であるとき、基板から弾性球に及ぼされる力は、上の式 (1.3) に従うものとする。この仮定の下では、弾性球は図 1.2 に示すような、非線形バネ 質点系と等価である。ただし、この質点は元の弾性球と同じ質量 M をもち、非線形バネは、それ自体の質量は無視でき、かつ、ヘルツコンタクトと同じ変位 力関係に従うとする。以降では、この等価モデルを念頭において議論を進める。このバネ 質点系に、(基板に向けて) 初速度 V_i を与えたとき、基板との接触過程は以下のように進展する：接触開始後、質点は、速度を減じながら沈み込み、最大変形 Y_m に達する(ここでは、質点の速度は 0 である)；続いてその全く逆の過程をたどって質点が上昇し、バネが自然長まで回復した時点で飛び立つ(跳ね返る)。接触開始から最大変形までの時間を τ_m とし(以降「最大変形時間」と呼ぶことにする)、接触時間を τ_f とすると、この 1 自由度モデルでは、後者は厳密に前者の 2 倍である。

$$\tau_f = 2 \times \tau_m. \quad (1.4)$$

それゆえ、 τ_m の振舞い (V_i 依存性) を議論すればよい。

まず次元的には、

$$\tau_m \cong Y_m / V_i \quad (1.5)$$

が成立する。 Y_m は、エネルギー保存則によって決めることができる；

$$\rho R_0^3 V_i^2 \cong E R_0^{1/2} Y_m^{5/2}. \quad (1.6)$$

左辺は衝突前の運動エネルギーであり (ρ は弾性球の密度をあらわす) 右辺は最大変形時にヘルツ型のポテンシャルに貯えられる弾性エネルギーである。(τ_f ではなく τ_m を扱ったのは、このエネルギー保存の条件を議論に用いることができるからである。) この式から、

$$Y_m \cong (\rho/E)^{2/5} R_0 V_i^{4/5} \quad (1.7)$$

が得られ、これを式 (1.5) に代入すると

$$\tau_m \cong (\rho/E)^{2/5} R_0 V_i^{-1/5} \quad (1.8)$$

という τ_m - V_i 関係が得られる。この結果を簡潔に表すため、特徴的な速度スケールと時間スケールを以下のように導入する：

$$V_c \equiv \sqrt{E/\rho}, \quad (1.9)$$

$$\tau_c \equiv R_0/V_c. \quad (1.10)$$

数係数の違いを無視するスケーリングの立場からは、 V_c は音速、 τ_c は、音波が試料のサイズ程度伝播するのに要する時間と意味づけることができる。これより、上の結果は、

$$(\tau_m/\tau_c) \cong (V_i/V_c)^{-1/5} \quad (1.11)$$

と無次元化された量の関係として記述される。スケーリング的には、 τ_f と τ_m は、完全に同一視できる。それゆえ、 τ_f および τ_f/τ_c についても、同様なスケーリング関係式が成り立つ：

$$\tau_f \cong (\rho/E)^{2/5} R_0 V_i^{-1/5}, \quad (1.12)$$

$$(\tau_f/\tau_c) \cong (V_i/V_c)^{-1/5}. \quad (1.13)$$

最後に、上に述べた静的圧縮と接触時間に対する解析的取り扱いの結果について簡単にまとめておく。まず、弾性球と剛体基板との静的な接触において以下の結果が導かれている [11]。

$$F(Y) = \frac{4E}{3(1-\nu^2)} R_0^{1/2} Y^{3/2}, \quad (1.14)$$

$$U(Y) = \frac{8E}{15(1-\nu^2)} R_0^{1/2} Y^{5/2}. \quad (1.15)$$

ここで、 ν は弾性球の Poisson 比である。

次に、ヘルツ理論における τ_m または接触時間 τ_f の表式を導く。それには、いわゆるエネルギー積分を行う。即ち、エネルギー保存の条件 $\frac{1}{2} M V_i^2 = \frac{1}{2} M \left(\frac{dY}{dt}\right)^2 + U(Y)$ (この $U(Y)$ は、上の式 (1.15) である) を $dt = dY/\sqrt{2U(Y)/M - V_i^2}$ と書き換え、これを接触開始から最大変形まで積分する：

$$\tau_m = \int_0^{Y_m} \frac{dY}{\sqrt{2U(Y)/M - V_i^2}}, \quad (1.16)$$

ただし、 Y_m は最大変形時におけるエネルギー保存の条件 $(1/2) \times M V_i^2 = U(Y_m)$ より決まる。ゲルではほぼ厳密に成り立つ非圧縮条件 $\nu = 1/2$ を採用し、積分を数値的に評価すると、上の式 (1.11)、(1.13) に対応して次が得られる。

$$(\tau_m/\tau_c) = 2.26 \times (V_i/V_c)^{-1/5}, \quad (1.17)$$

$$(\tau_f/\tau_c) = 4.52 \times (V_i/V_c)^{-1/5}. \quad (1.18)$$

この結果は、後でゲル球の実験データとの比較に用いる。

1.3 以下の構成

この後は、以下のような構成にしたがって進む。第2章では、実験法を述べる。まず、試料ゲルの調製法とその基本的な力学特性を要約した後、球状ゲルの衝突実験について説明する。さらに、衝突実験に対して補助的な目的で行った球状ゲルの静的圧縮実験について説明する。第3章では、実験結果を述べる。衝突実験については、 τ_m や τ_f 、あるいは、衝突中の変形の大きさや跳ね返り係数と、衝突速度との関係を示すデータを提示する。次に静的圧縮実験の結果を示し、ヘルツの解析解と比較する。第4章では、第3章の結果を解釈するための現象論を展開する。まず、図1.2に示した非線形バネ 質点系の描像はそのままにして、バネのポテンシャルを純粋なヘルツ型から、球状ゲルの圧縮実験の結果から決まるものに変更したモデルを考察する。次に、ヘルツ理論とは逆に変形が大きな極限を考察し、そこで成り立つべきスケーリング則を提示する。さらに、このスケーリング則のアイデアに基き非常にシンプルな現象論を与える。これらの取り扱いによって、Hertz 理論の適用範囲を超えた大変形領域における最大変形時間の振舞いが、定量的に説明される。特に、ここではフィッティングパラメータがまったく存在しないことを予め強調しておきたい。第5章では、第3、4章の結果を考察し、この研究を総括する。

2 実験

2.1 試料ゲル

本研究では、水を溶媒（膨潤媒）とするアクリルアミドゲルを用いた。蒸留水にモノマー状態のアクリルアミド (acrylamid:AA) と架橋分子メチレンビスアクリルアミド (N, N'-methylenebisacrylamide: BIS) を溶解させ、ラジカル形成剤であるアンモニウムペルオキシジサルフェート (ammonium peroxodisul-phate: ASP) と反応促進剤であるテトラメチルエチレンジアミン (tetramethylethylenediamine: TEMD) を加えることでゲルを合成する。この AA と BIS の濃度を変化させる（主には BIS 濃度）ことでゲルの Young 率 E をコントロールする。表 1 に、本実験で用いたゲルの組成を示した。（またこの表において、ゲルを区別するために A10B4 等の略称を導入した。）

球状ゲルを作成する具体的な手順は以下の通りである。全ての試薬を溶解させたゲル化前の溶液を球形の型に流しこみ、十分に反応させた後（30 時間）型から取り出す。ゲルの組成についてはそれ以上（例えば蒸留水に浸して平衡膨潤を待つ等）の処理をせずに、表面の粘着性を無くすため、アルミナ粉末で球状ゲルの表面をコートし、衝突および圧縮実験の試料とした。

また、この研究に先立って、同じゲルの粘弾性測定を行った。ここで用いられるゲル試料は、0.1Hz から 100Hz 程度までの振動数に対して力学応答はほとんど変化しなかった。表 1 には、50Hz の振動数における複素 Young 率の実部 E' と $\tan \delta$ の値を示した。詳細は後で述べるが（第 3 章及び第 4 章）衝突を特徴づけるような時間スケールは、丁度上の 50Hz 程度に相当すると考えられ、そこでは粘性的な散逸は非常に小さいことが期待できる。また、ゲルからの溶媒の染み出し もう少し正確には、ゲルにおける溶媒成分と高分子成分の相対運動-に関わる時間スケール（これは共同拡散定数とゲルのサイズから決まる）は、50Hz に比べ非常に遅く、そのような効果は衝突中には生じ得ない。この意味で、本実験におけるゲル試料は、非圧縮性の弾性体と見なすことができる。また、第 3 章以下では、上の E' を、通常の Young 率 E と同一視する。

さらに表 1 には E' とゲルと密度 ρ から決まる特徴的速度スケール $V_c = \sqrt{E'/\rho}$ の値も合わせて示した。

2.2 衝突実験

衝突実験には、半径 25mm の球状ゲルを用いた。まず、吸引チューブによってゲル球を基板（厚さ 10mm のアルミ板）の上方に固定する。吸引を止めることでゲルの落下が開始し、基板と衝突する。衝突速度 V_i は、 h を吸引状態でのゲルの底部と衝突を受ける基板の表面との距離として、 $V_i = \sqrt{2gh}$ によって決定した。この衝突過程を、高速 CCD ビデオカメラ（Motion Coder Analyzer: Kodak 社製）によって記録した（記録速度は、1000FPS）。これらの記録画像上で、接触時間 τ_f や最大変形時間 τ_m 、あるいは、衝突中のゲルのサイズ変化を計測した。（最大変形時間 τ_m は、接触開始から衝突中にゲルの横方向のサイズが最大になる時までの時間間隔として定義した。）

さらに、この研究では、ゲル球の跳ね返り係数の衝突速度依存性についても評価した。そのために、一度基板から跳ね返ったゲルが再び基板と衝突をするまでを高速ビデオカメラで記録し、1 回目の衝突と 2 回目の衝

表 2.1 試料として用いたアクリルアミドゲルの組成、50Hz の振動数における複素 Young 率の実部 E' と $\tan \delta$ 、及び $V_c \equiv \sqrt{E'/\rho}$ (ρ はゲルの密度) で定義される特徴的速度スケール。

code	water[g]	AA[g]	BIS[g]	E' [10 ⁴ Pa]	$\tan \delta$	V_c [m/s]
A6B6	100	6	0.06	0.61	0.07	2.40
A10B4	100	10	0.04	1.24	0.08	3.42
A10B7.5	100	10	0.075	2.09	0.03	4.45
A10B10	100	10	0.1	2.71	0.02	5.04
A10B15	100	10	0.15	3.88	< 0.01	6.05
A10B30	100	10	0.3	6.46	< 0.01	7.81

突の時間間隔（正確には、2回の衝突における接触開始時刻の差）から、1度目の衝突での跳ね返り速度を評価し、 V_i との比を取ることで、跳ね返り係数を決めた。

2.3 静的圧縮実験

静的圧縮実験には半径 15mm の球状ゲルを用いた。実験では、電子天秤（ARC120：メトラー・トレド社製）の上に球状ゲルを置き、上からガラス板で圧縮した。このガラス板の変位は、z 軸ステージ（LV-112WS：中央精機社製）によってコントロールした。接触力は、（元々のゲル球の重さを差し引いた上で）電子天秤の表示から決定した。

3 結果

3.1 衝突実験

図 3.1 はゲル球の衝突過程の高速度ビデオカメラによる記録画像である。(a) は、本研究において最も変形が小さい条件、(b) は比較的変形の大きい条件での衝突過程である。(a) においてさえ、変形はゲル球全体に及んでいることがわかる。また、(b) のような速い衝突では、最大変形時のゲルは、薄いパンケーキ状である。一方、跳ね返りの瞬間には、鉛直方向に大きく引き伸ばされており、かつ、そのときの形状は、底部は尖っているのに対して頭部は丸みを帯びており、基板と平行な面に関して非対称なものとなっている。

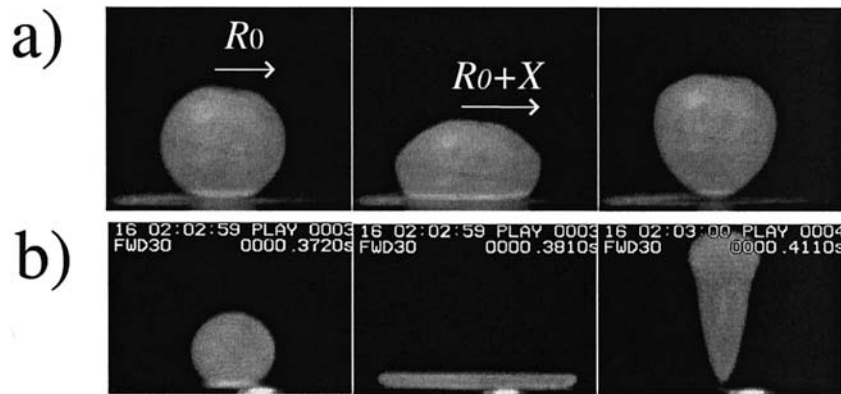


図 3.1 衝突過程の例。(a)A10B30 ゲル、 $V_i/V_c = 0.31$ ($V_i = 2.4\text{m/s}$) での衝突過程、左から接触開始直後 ($t = 0\text{ms}$)、最大変形 ($t = 9\text{ms}$)、跳ね返り直後 ($t = 21\text{ms}$) でのスナップショットである。(b)A10B4 ゲル、 $V_i/V_c = 1.77$ ($V_i = 6.1\text{m/s}$) での衝突過程。左から接触開始直後 ($t = 0\text{ms}$)、最大変形 ($t = 9\text{ms}$)、跳ね返り直後 ($t = 39\text{ms}$) でのスナップショットである。最大変形は、接触中にゲルの横方向のサイズ変化が最大となる状態として定義した。また、そのときのサイズ変化を X とする。

図 3.2 は、各試料における τ_m と V_i との関係を示す。 τ_m は、衝突後ゲル球の横方向のサイズが最大になる時刻（接触開始を時刻 $t=0$ として、そこから計って）として定義し、衝突過程の記録画像から決めた。（最も Young 率 E の大きい、A10B30 試料におけるデータが $V_i=4\text{m/s}$ までしかないのは、これ以上の衝突速度では試料の破壊が非常に高い頻度で生じるからである。）また、図 3.3 は、 τ_f と V_i との関係である。

この実験で得られた τ_m と τ_f のデータを整理するため、 V_i を特徴的速度スケール $V_c = \sqrt{E/\rho}$ で、 τ_m 及び τ_f を特徴的時間スケール $\tau_c = R_0/V_c$ で割って無次元化した量の間関係として示したのが、図 3.4 と図 3.5 である。この無次元化によって、それぞれのデータは、概ねよく一本のマスターカーブに乗ることがわかる（ただし、図 3.5 の高速側ではデータ点の散乱が大きい、これについては下に述べる）。また、それぞれのデータの全体的な傾向として以下の点を指摘することが出来る。 τ_m の実験結果を示すデータ点（列）は、ヘルツ理論が予測する曲線（図 3.4 中で ‘Hertz’ と記されている）より下側にある、即ち、ある V_i/V_c の値に対して、ヘルツ理論の予想より小さな τ_m/τ_c を与えている。一方、 τ_f の実験結果を示すデータ点列は、すくなくとも、データの乱れが始まる $V_i/V_c = 1.5$ 程度までは、ヘルツ理論が予測する曲線より上側に存在する。このこと（もっと端的には、 τ_m と τ_f は比が $1/2$ から大きくずれていること）は、本研究におけるような変形の大小

ゲルの衝突と接触時間

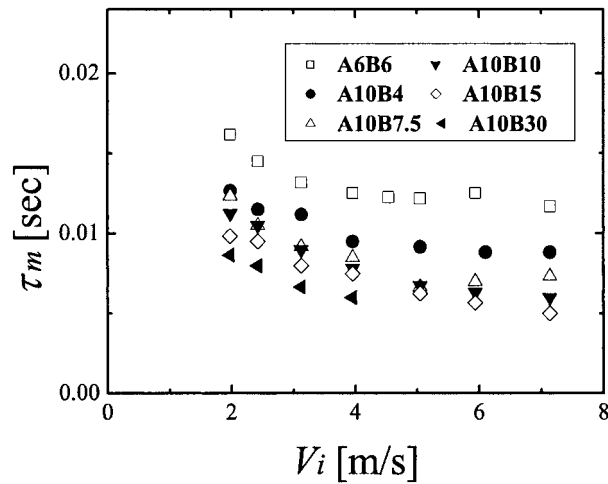


図 3.2 衝突速度 V_i と最大変形時間 τ_m の関係。 τ_m は、衝突後ゲル球の横方向のサイズが最大になる時刻（接触開始を時刻 $t = 0$ として）として定義し、衝突過程の記録画像から決めた。

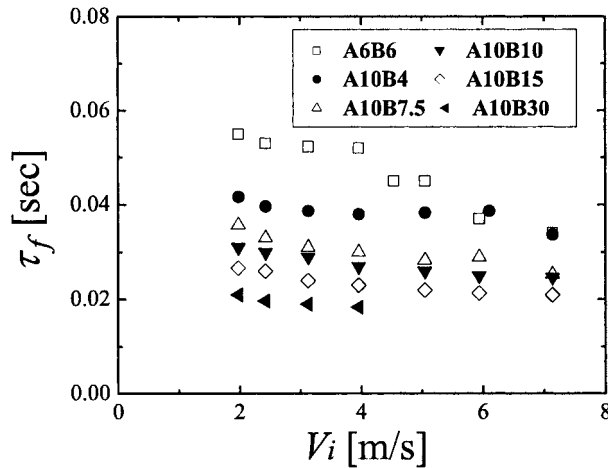


図 3.3 衝突速度 V_i と接触時間 τ_f の関係。

きな条件下では、衝突の前半（接触開始から最大変形まで）と、後半（最大変形から跳ね返りまで）が、非常に非対称であることに由来している。

さらにグラフを詳細に観察すると、以下の点が明らかになる。最大変形時間 τ_m については、 V_i/V_c が小さな領域（ ≈ 0.3 ）では、実験値はヘルツの予想に近いが、 V_i/V_c が増加するにしたがってヘルツ理論の予測より早く減少し、（ $V_i/V_c = 1$ 程度まで）さらに V_i/V_c が大きい領域では、ほぼ一定値となる（高衝突速度側におけるプラトー域の存在）。

一方、接触時間 τ_f に関しては、 V_i/V_c が小さな領域（ ≈ 0.3 ）においてヘルツ理論の予測値と近いことは、 τ_m と同様だが、 $V_i/V_c \approx 1$ 程度で、実験データは一度プラトー域に達し、その後さらに V_i/V_c が大きい条件において、データの乱れが生じているように見える。図 3.5 において乱れたデータ点に対応する衝突過程では全て、跳ね返り直前にゲルと基板の界面付近に特徴的な現象が生じる。例えば図 3.5 の右側の挿入画像と、その図の真ん中、あるいは、図 3.1(b) の右側の画像とを比較すると、図 3.5 の右側の画像では、その底部に‘脚’が形成されていることがわかる。乱れたデータに対応する衝突では、いつもこのような構造が生じる。今の所、この脚の形成は、ゲル球の底部と基板との接着が原因であり、 τ_f の乱れについては、脚と基板との接着が、最大変形後上向きに運動しているゲル本体に引張られ、一気に剥がれる（丁度脆性破壊のように）ことによると

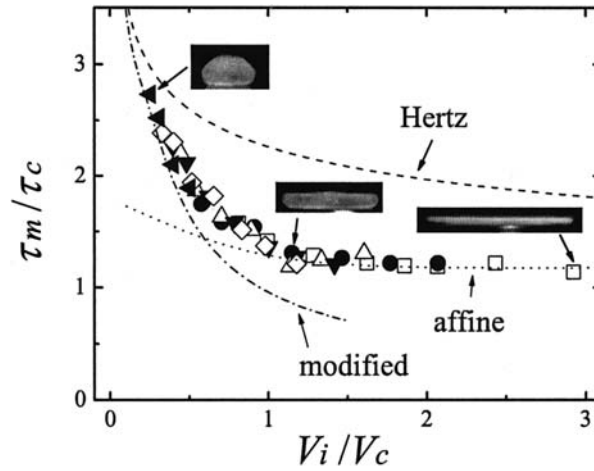


図 3.4 V_i/V_c と τ_m/τ_c の関係、また、ヘルツ理論から定まる曲線、及び、第 4 章で導入する 2 種のモデルが予想する曲線も合わせて示した。プロットに用いたシンボルは図 3.2 におけるものと同じである。挿入した 3 枚の写真は、それらが指すデータ点に対応する最大変形時のゲルの形状である。 V_c と τ_c によってスケールすることにより、図 3.2 の全てのデータは一つのマスターカーブに重なる。 V_i/V_c が大きな領域では、 τ_m/τ_c は殆ど一定値である。

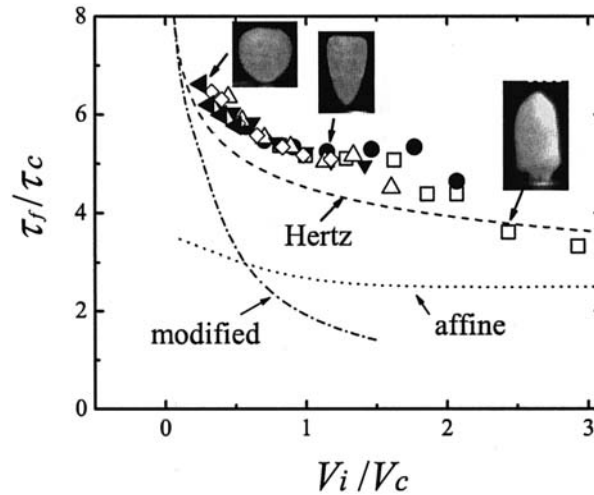


図 3.5 V_i/V_c と τ_f/τ_c の関係、プロットに用いたシンボルは図 3.3 におけるものと同じである。また、ヘルツ理論から定まる曲線、及び、第 4 章で導入する 2 種のモデルが予想する曲線も合わせて示した。挿入した 3 枚の写真は、それらが指すデータ点に対応する跳ね返りの瞬間におけるゲルの形状である。 V_i/V_c が大きい領域において、データの重なりが著しく悪くなっている。これは、大変形において、ゲル球と基板との接着が起き、これが跳ね返り過程において一気に剥がれることによる。

考えている。

図 3.6 は、図 3.1 において示されている水平方向で最大変位 X と衝突速度との関係を示している。(ただし、それぞれ R_0 と V_c でスケールされている。)異なる試料からデータが全て一本の直線上に重なっている。図 3.7 は、跳ね返り係数 e と無次元化衝突速度の関係を示す。この e についても、全ての試料からのデータは、一本のマスターカーブ上に重なっている。また、 V_i/V_c が 2 程度以上の領域では、 e は一定値に漸近しているように見える。

3.2 静的圧縮

図 3.8(a) は、静的圧縮実験の結果である。ただし、変形及び接触力は、各々、特徴的な量によって無次元化して、 $F/(ER_0^2)$ と Y/R_0 の関係として示した。ゲルの力-変形関係は、一つの曲線上に重ねられることがわかる。

ゲルの衝突と接触時間

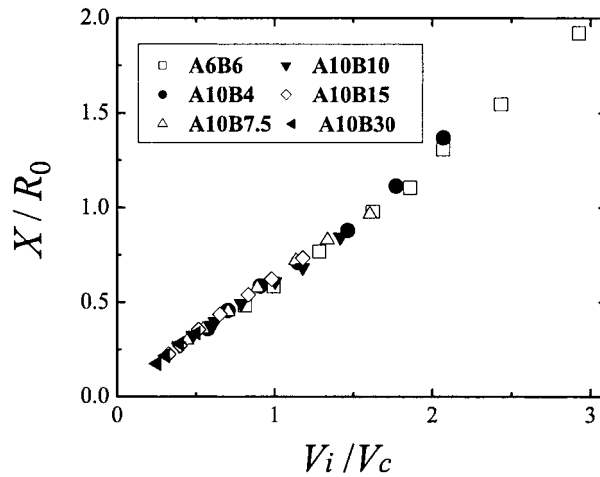


図 3.6 図 3.1 に示された変形量 X と衝突速度の無次元化プロット。異なる試料ゲルからのデータは非常によく一本の直線に重なる。

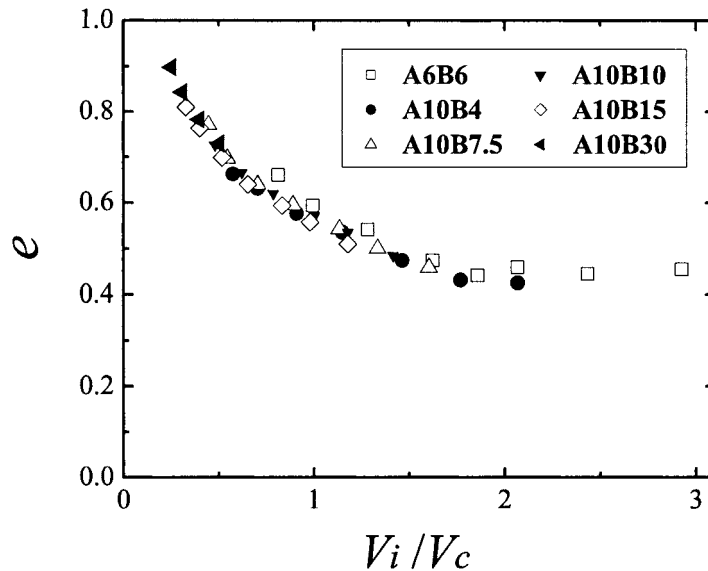


図 3.7 跳ね返り係数 e と無次元化衝突速度 V_i/V_c の関係。この e についても、各試料ゲルのデータが、非常によく一本のマスターカーブに乗る。また、 e は、 V_i/V_c が大きな領域において一定値に漸近するように見える。

また、グラフにおいて、‘Hertz’ と記された曲線は、ヘルツ理論の解析解の結果 $(F/ER_0^2) = (16/9)(Y/R_0)^{3/2}$; 式 (1.14) において $\nu = 1/2$ としたものである。 Y/R_0 が小さい時には、ゲルの圧縮挙動がヘルツ理論の結果とよく合致することがわかる。図中で ‘Fitting’ と記した点線は、 $(F/(ER_0^2) = f, Y/R_0 = y$ という表記を用いることにして) フッティング関数として $f(y) = (16/9)y^{3/2}(a_0 + a_1y + a_2y^2 + a_3y^3 + a_4y^4)$ を仮定し、静的圧縮実験に用いた全ての試料からのデータに対して、多項式フィットを行うことで a_0 から a_4 の係数を決めたものである。このときの値は、 $a_0 = 1.22, a_1 = -7.66, a_2 = 62.08, a_3 = -169.84, a_4 = 162.70$ であった。

(b) は同じデータの log-log プロットである。このグラフに示したように、変形 Y/R_0 が小さい時は、 $F/(ER_0^2) - Y/R_0$ 関係は、ヘルツ理論が予測する $3/2$ 乗に近い冪 (フィッティングの結果、冪は 1.41 であった。) によって関係付けられる。また、さらに大きな Y/R_0 では、より大きな冪が得られた。この入れ替わりは、図 3.8(b) 中に下向きの矢印で示したように、 $Y/R_0 \approx 0.3$ 程度のところでおきている。即ち、ヘルツ理論

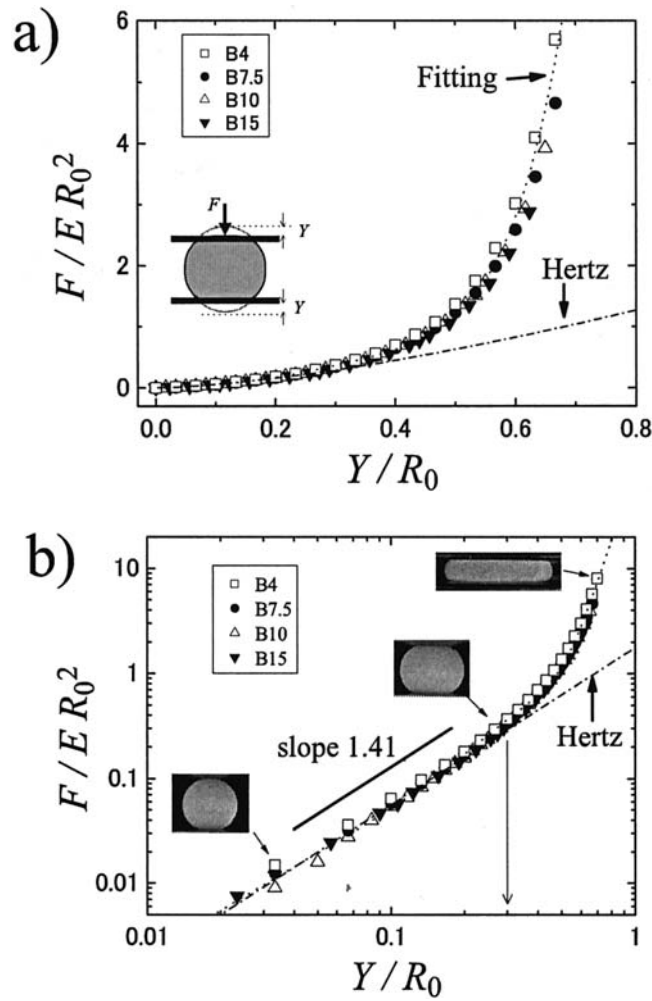


図 3.8 (a)：静的な圧縮実験の結果。 Y の定義は、イラストに示されている。(b)：(a) のデータの log-log スケールでのプロット。挿入の写真はそれが指すデータ点对應する変形。特に真ん中の写真は、ヘルツ的な挙動がみられる限界の変形でのゲルの形状である。下向の矢印で示したように、静的圧縮実験において、ヘルツ的な振舞いは Y が半径 R_0 の $1/3$ 程度という比較的大きな変形まで成立する。

は、凹み Y が半径 R_0 の $1/3$ 程度という比較的大きな変形までよく成り立つ。

3.3 要約

この章において、球状ゲルの衝突に関する実験結果を説明した。特に特徴的だと思われる点を列挙すると、E0) 線形弾性論の前提から逸脱する大きな変形が生じているにもかかわらず、接触時間や変形の大きさ、あるいは跳ね返り係数など衝突を特徴付ける量が、弾性率 E 、系のサイズ R_0 及び密度 ρ という 3 個の物理量でよくスケールされる、E1) 最大変形時間 τ_m を衝突速度を増加させながら観察すると、中間的な衝突速度域においてヘルツ理論の予測より急激に減少し、さらに衝突速度が大きくなると τ_m がほぼ一定となるプラトー域に入る、E2) 接触時間 τ_f の実験値は、ヘルツ理論の結果を外挿した場合より大きな値を持つ、E3) 衝突中における水平方向のサイズ変化 X は、衝突速度と比例する。E4) 跳ね返り係数 e は、衝突速度の減少関数であるが、変形の大きな条件では、 e が衝突速度にほとんど依存しないプラトー的な領域が存在する。また、球状ゲルの静的な圧縮において、E5) 凹みが半径の $1/3$ 程度までは、ヘルツ (の静的接触) 理論が正確な予測を与える、E6) さらに大きな凹みでは、接触力の急激な増加がおきる。

4 モデル

図 3.1(a) における最大変形時の写真と、図 3.8(b) におけるヘルツ則の限界に対応する挿入写真を見比べると、図 3.1(a) のほうが、少し変形が大きいことがわかる（縦横のサイズ比から）。すなわち、本研究における実験条件では、衝突速度 V_i/V_c が最も小さい衝突においてさえ、最大変形時の形状は、静的圧縮実験において Hertz 則が成り立つ限界と同程度だと考えられる。それゆえ、本実験の結果はヘルツ理論の前提を超えた、“弾性的大変形衝突” におけるものと見なさなければならない。

このような場合の取り扱いとしては、まず、図 1.2 に示した考え方はそのままにして、非線形バネのポテンシャルを、純粋なヘルツ理論によるものから、静的圧縮実験の結果より定めたものに取り替える、ことが考えられる（修正ヘルツモデル）。さらに V_i/V_c が大きく、扁平に変形したゲルに関しては、ヘルツ理論におけるような‘球体の底部の凹み’ではなく、‘球全体の水平方向の広がり’を第一義的な変形のモードとみることが適切であろう。以下では、この二つの視点に基づき、3 章の実験結果を現象論的に取り扱う。特に、後者の大変形領域に関しては、まず変形の大きな極限を考察し、そこにおいて成り立つスケーリング則を提示することによって、大変形衝突の本質的な特徴を明らかにする。さらに、このスケーリング則導出のアイデアを具現化した、簡単な解析モデルを提案し、その振舞いを論じる。

4.1 修正ヘルツモデル

図 1.2 の非線形バネ 質点モデルに即して説明を行う。質点 M の運動式 $M \frac{d^2 Y}{dt^2} = F(Y)$ において、接触力 F を純粋なヘルツタイプではなく、静的圧縮実験の結果から実験的に定めたものとする。（ Y の原点は、バネがちょうど基板と接する位置にとり、正の方向を下向きに定めた。）これを無次元化された量のみで書き換えるため、 $F \rightarrow f \equiv F/ER_0^2$ 、 $Y \rightarrow y \equiv Y/R_0$ 、 $t \rightarrow s \equiv t/\tau_c$ で定義される変数変換を行うと

$$y'' = \frac{3}{4\pi} f(y) \quad (4.1)$$

を得る。ただし、この「 $'$ 」は無次元化された時間 s に関する微分を表すものとする。 $f(y)$ は先に述べたように

$$f(y) = (4/3)^2 y^{3/2} (1.22 - 7.66y + 62.08y^2 - 169.84y^3 + 162.7y^4) \quad (4.2)$$

と近似される。初期条件は以下である。

$$y(0) = 0 \quad \text{and} \quad y'(t=0) = y'_0. \quad (4.3)$$

ここで、初速度 y'_0 は、 V_c によって規格化された衝突速度 V_i/V_c に一致する。図 4.1 に、異なる初速度において上式を数値的に解いた結果を示す。初速度 y'_0 が大きいほど、最大変形の y が大きくなり、また、接触時間は減少することがわかる。また、図 3.4、及び 3.5 に ‘modified’ と記した線は上のような数値解から決めた、最大変形時間と接触時間の振舞いである。（ y が原点に最初に回帰する（無次元化）時刻を接触時間とし、それを 2 で割ることで最大変形時間を求めた。） τ_m に関しては、中間領域での実験データの振舞いを再現していることがわかる。一方、 τ_f については、実験値をかなり下回る結果になる。

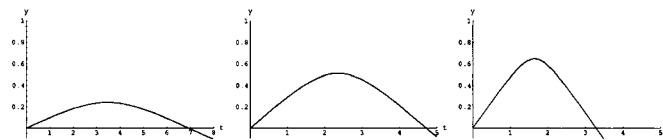


図 4.1 修正モデルでの変形の時間変化。各グラフの横軸が s 、縦軸が y である。左から、衝突速度が $y'_0 = 0.1$ 、 $y'_0 = 0.3$ 、 $y'_0 = 0.5$ である。

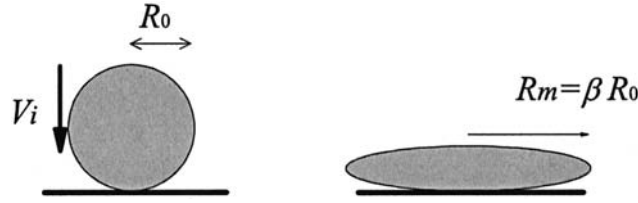


図 4.2 大変形衝突でのゲル球。最大変形時の横方向の伸長比を β とする。

4.2 大変形領域

4.2.1 スケーリング解析

大きな（無次元化）衝突速度 V_i/V_c では、最大変形時において、ゲル球は著しく扁平化する。ゲルの各部分の運動が鉛直方向から水平方向に転換した結果である。この場合、式 (1.5) の Y_m に代わって、図 4.2 に示した横方向のサイズ変化 $R_m \equiv R_0 + X \equiv \beta R_0$ を特徴的な長さスケールにとるのが適切だと考えられる。このような領域の衝突の本質的な点を議論するため、 V_i/V_c が大きな極限、即ち、変形 X が大きな（正確には $R_0 \ll X$ という意味で）極限を考察する。

この場合、 τ_m のスケーリング形としては、式 (1.5) に代わって、次式を要請する。

$$\tau_m \cong R_m/V_i. \quad (4.4)$$

この R_m を、ヘルツ理論の場合に倣って、エネルギー保存から決める。大変形の極限では、扁平化したゲル球の変形を、一様なものだと見なしてもいいだろう。ゆえに、この場合のエネルギー保存は、式 (1.6) にかわって以下ようになる。

$$\begin{aligned} \rho R_0^3 V_i^2 &\cong ER_0^3(2\beta^2 + 1/\beta^4 - 3) \\ &\approx ER_0^3\beta^2 = ER_0 R_m^2, \end{aligned} \quad (4.5)$$

ただし、ゲルの変形のエネルギーとして理想ゴムタイプのもの $U \cong ER_0^3(\alpha^2 + 2\beta^2 - 3)$ を用いた。これから、

$$R_m \cong \sqrt{\frac{\rho}{E}} R_0 V_i \quad (4.6)$$

が得られ、これを式 (4.4) に代入すると、

$$\tau_m \cong \sqrt{\frac{\rho}{E}} R_0 \quad (4.7)$$

となる。以上の議論から、最大変形時の横方向のサイズと衝突速度が比例すること、そして、大変形領域では、 τ_m は V_i によらない一定値になることが帰結される。このような振舞いは、この実験の衝突速度範囲において、すでに見出されている。

4.2.2 アフィン変形モデル

前節では、変形の大きな領域におけるゲル球の衝突挙動をスケーリングの観点から論じた。大変形の極限では、ゲルの変形を一様なものとして取り扱うことができ、それを利用して得られたスケーリング則は、変形が大きい領域での衝突挙動をよく説明した。ここでは、この変形の一様性をそれ自身の性質として持っているモデルを考察する。具体的な狙いは、大変形領域の衝突挙動、特に、 τ_m や τ_f の絶対値を説明することである。

このモデルでは、(i) 基板との接触後、ゲルが（鉛直軸に関する）軸対称性を保ったままアフィンの変形すると仮定する（図 4.3）。さらに、(ii) ゲルの非圧縮条件も課す。仮定 (i) によって、ゲルの変形や運動は鉛直方向の伸長率 $\alpha(t)$ と水平方向の伸長率 $\beta(t)$ によって特徴付けられる。ゲル球の中心（重心）の速度 $V(t)$ は $R_0\dot{\alpha}(t)$ で与えられる。また、図 4.3 に示したように、接触開始である時刻 $t = 0$ において、球の中心から

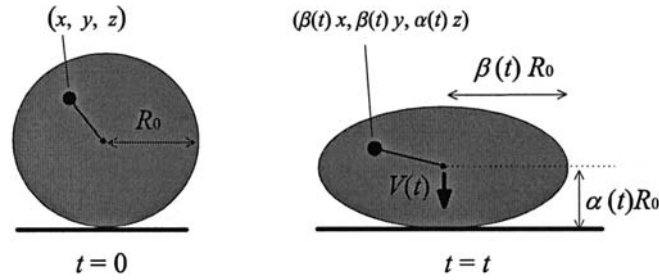


図 4.3 アフィン変形モデルの説明。衝突後、ゲル球の外形は伸長比 $\alpha(t)$ 、及び、 $\beta(t)$ で特徴付けられる回転楕円体になる。また、内部もそれと相似的に変形する。

(x, y, z) という相対位置にあった物質点は、時刻 t において、中心から見て $(\beta(t)x, \beta(t)y, \alpha(t)z)$ という位置に動く（ここで (x, y, z) は、変形前のゲル球の各部につけた（相対）Lagrange 座標である）よって、この物質点の（相対）速度 \vec{u} は、 $(\dot{\beta}(t)x, \dot{\beta}(t)y, \dot{\alpha}(t)z)$ で与えられる。

このモデルの支配方程式を得るために、この系のラグランジアン $L = K - U$ を構成する。運動エネルギー K は、重心の並進による部分 K_t と、重心に対して相対的な内部運動（歪）による部分 K_r の和である。 K_t は、以下で与えられる。

$$K_t = (1/2)MV(t)^2 = (1/2)M(R_0\dot{\alpha}(t))^2. \quad (4.8)$$

ここで、 M はゲル球の質量である。 K_r は以下のように求められる。

$$\begin{aligned} K_r &= \int_V \frac{\rho}{2} |\vec{u}|^2 dx dy dz \\ &= \frac{\rho}{2} \int (\dot{\alpha}^2 z^2 + \dot{\beta}^2 x^2 + \dot{\beta}^2 y^2) dx dy dz \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{M}{5} \right) R_0^2 \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{2M}{5} \right) R_0^2 \dot{\beta}^2 \end{aligned}$$

全運動エネルギー $K = K_t + K_r$ は、次のようになる。

$$K = \frac{1}{2}(m_\alpha)R_0\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}m_\beta R_0^2\dot{\beta}^2 \quad (4.9)$$

ここで、縦方向と横方向の“有効質量”を次のように導入した。

$$m_\alpha \equiv \frac{6M}{5}, \quad m_\beta \equiv \frac{2M}{5}. \quad (4.10)$$

ラグランジアン L のなかの、ポテンシャルエネルギー項 U については、理想ゴムタイプのものを用いる。

$$U = \frac{1}{2}kEW(\alpha^2 + 2\beta^2 - 3). \quad (4.11)$$

ここで、 W は球状ゲルの体積である。上式が、微少変形の極限において線形弾性論の歪エネルギーに一致することを要請すると、数係数 k は、 $2/3$ と定まる。

これで系のラグランジアンをあらわな形で書き下す準備ができた。(4.9) と (4.11) から、このモデルのラグランジアンは

$$L = \left(\frac{m_\alpha R_0^2}{2} \dot{\alpha}^2 + \frac{m_\beta R_0^2}{2} \dot{\beta}^2 \right) - \frac{kEW}{2} (\alpha^2 + 2\beta^2 - 3) \quad (4.12)$$

であり、これに仮定 (ii) の非圧縮条件が加わる。

$$\alpha(t)\beta(t)^2 = 1 \quad (4.13)$$

式の上からは、この系を次のように特徴づけることが出来る：各々異なった質量およびバネ係数をもつ調和振動子の自由度 α 、 β からなる系であり、かつ、それらの間には式 (4.13) で表される拘束が課せられている。

非圧縮条件から β 及び $\dot{\beta}$ を消去しオイラーラグランジュの式 $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \alpha} \right) = 0$ を適用すると、 α の発展方程式が得られる。

$$\left(1 + \frac{1}{12\alpha^3} \right) \ddot{\alpha} - \frac{\dot{\alpha}^2}{8\alpha^4} + \frac{5kE}{6\rho R_0^2} \left(\alpha - \frac{1}{\alpha^2} \right) = 0 \quad (4.14)$$

また、初期条件は以下である。

$$\alpha(t=0) = 1 \quad \text{and} \quad \dot{\alpha}(t=0) = \dot{\alpha}_0. \quad (4.15)$$

ここで、重要な点として、このモデルには衝突速度 V_i と発展方程式の初期条件 $\dot{\alpha}_0$ との対応づけに関して任意性があることを指摘しておかなければならない。例えば、ゲル球の重心の速度が $t=0$ (ゲル球と基板の接触がおきる時刻) で連続である、即ち、 $V_i = R_0 \dot{\alpha}_0$ を要請する。この場合、衝突直後 ($t=0$) の系のエネルギーは ($\dot{\beta} = (-1/2) \times \alpha^{-3/2} \dot{\alpha}$ を考慮すると)

$$K(t=0) = \frac{1}{2} \left(m_\alpha + m_\beta \frac{\alpha(0)^{-3}}{4} \right) R_0^2 \dot{\alpha}_0^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{13M}{10} V_i^2 \right) \quad (4.16)$$

となり、衝突前の値 $(1/2) M V_i^2$ から不連続に増加することになってしまう。一方、衝突前後でのエネルギーの保存を仮定すると、 $(1/2) \times M V_i^2 = (1/2) \times (13M/10) R_0^2 \dot{\alpha}_0^2$ あるいは

$$\dot{\alpha}_0(V_i) = \sqrt{\frac{10}{13}} \frac{V_i}{R} \quad (4.17)$$

となり、ゲル球の重心速度は、 $t=0$ で不連続に減少することになる。以下では、後者のエネルギー保存を満たす $\dot{\alpha}_0$ の選び方を採用して議論を進める。

先に導入した特徴的な速さスケール $V_c \equiv \sqrt{E/\rho}$ と時間スケール $\tau_c \equiv R_0/V_c$ を用いて、式 (4.17) と式 (4.15) を無次元化すると、発展方程式は以下ようになる。

$$\alpha'' - \frac{3}{2\alpha(12\alpha^3 + 1)} \alpha'^2 + \frac{10k(\alpha^4 - \alpha)}{12\alpha^3 + 1} = 0, \quad (4.18)$$

$$\alpha(0) = 1 \quad \text{and} \quad \alpha'_0 = \sqrt{\frac{10}{13}} \frac{V_i}{V_c} \quad (4.19)$$

ここでプライム記号「'」は、スケールされた時間 t/τ_c に関する微分を表す。

図 3.4、図 3.5 において、‘affine’ と記されている曲線がこのモデルの予想である。(このモデルにおける τ_f は、最大変形数 $\alpha'' = 0$ となる時刻として決定した。) τ_m において、(無次元化) 衝突速度が大きいときの振舞い (プラトーの存在とその絶対値) は、このモデルと実験値が非常によく合致している。一方 τ_f に関しては、修正ヘルツの場合と同じくモデルの予想は実験とかなり隔たっている。

4.3 要約

この章では、大変形領域を議論するため二つのアプローチを採用した。一つは、ゲル球の運動としてはもとのヘルツ理論と同じく重心の鉛直方向に関するもののみを考慮し、ゲル球と基板との相互作用の方を純粋なヘルツ接触型からゲル球の静的圧縮実験によって定めたものに変更する、というものである (修正ヘルツモデル)。もう一つのアプローチでは、接触開始後のゲル球について、水平方向への広がりを主要な変形モードだと捉え、ゲル全体が一様に变形しているとする単純化の下でスケールリング的な議論と、それを具現化した簡単な解析モデル (アフィン変形モデル) の提案を行った。3章の要約の E1) で述べた τ_m の挙動については修正ヘルツモデルの挙動からアフィン変形モデルの挙動へのクロスオーバーとして定量に理解することができた。一方、 τ_f に関しては、どちらのモデルも実験値を大きく下回る値を予想した。

5 考察

・粘性散逸の評価

本研究では、試料ゲルにおける粘性散逸の効果を考慮してこなかった。このことは、表 1 に示した $\tan \delta$ の値をもとに、以下のように正当化できる。 $\tan \delta$ は、系がある変形を受けたとき、弾性的に貯えられ得るエネルギーと

粘性的に散逸されるエネルギーの比を表す。例えばレオロジー測定におけるように、系に $x \cong \sin(\omega t)$ という周期的な変形が生じているとき、対応する力は δ だけ位相がずれ $f \cong \sin(\omega t + \delta) = \sin(\omega t) \cos \delta + \cos(\omega t) \sin \delta$ となり、 $x(t)$ と比例する弾性的な成分と、 $\dot{x}(t)$ と比例する粘性的な成分の和となる。系が自然長から最大変形になるまでに受ける弾性的および粘性的な仕事は、それぞれに $\int_0^{T/4} dt \dot{x}(t)$ を作用させる (T は周期 $2\pi/\omega$ とする) と求まり、それらの比は、 $\tan \delta$ に比例する。

一方、振動的な変形における周期 T と τ_m とを $T = 4 \times \tau_m$ で対応付けるのが合理的であろう。図 3.2 における τ_m の値は、0.005sec 程度 (以上) であり、これは周波数 50Hz 程度 (以下) に相当する。この周波数での試料ゲルの $\tan \delta$ は、0.01 以下から 0.08 程度であり、粘性散逸の割合は非常に小さいことがわかる。

・アフィン変形モデルの大変形極限

図 3.4 に示したように、アフィン変形モデルでは、大きな衝突速度において τ_m にプラトー域が存在する。(このプラトーでの τ_m の値は、実験値によく合致していた。) アフィン変形モデルのこの振舞い (プラトー域の存在とその値) は、式 (4.12) から以下のように直接知ることができる。衝突速度が大きい極限では、衝突後のゲル球は直ちに $\alpha \gg \beta$ を達成し、 τ_m の値は、それ以降の運動に支配される。このとき、 $\alpha = \beta^{-2} \ll \beta$ 及び $\dot{\alpha} = -2\beta^{-3}\dot{\beta} \ll \dot{\beta}$ に注意すると、近似的に (あるいは $V_i \rightarrow \infty$ に関する漸近則を得るという意味において) 式 (4.12) の中の α 及び $\dot{\alpha}$ に関する項を落とすことが出来る。結果として、式 (4.12) は普通の (1 自由度の) 調和振動子のラグランジアンに還元される。 τ_m はこの振動子の固有周期の 1/4 倍に対応する。実際にこれを ($k = 2/3$ として) 評価すると $\tau_m/\tau_c = (\pi/2) \times \sqrt{3/5}$ となる。この値は、図 3.4 におけるアフィン変形モデルのプラトーの値となっている。

・アフィン変形モデルの初速度の不定性について

第 4 章で述べたように、このモデルには初速度 $\dot{\alpha}$ の決め方 (実際の衝突速度との対応づけの仕方) に関して不定性が存在する。しかし、このことは、このモデルが修正ヘルツモデルと相まって τ_m の挙動を説明するという意味では、本質的な欠点ではない。なぜなら、このモデルは本来衝突速度が十分大きく、変形が系全体に及んでいる状況を想定して作られたものであり、そこでは、このモデルは初期速度に依らない τ_m を予想するからである。(初速度の選び方の影響は、 V_i/V_c が小さい領域において現れるが、ここでは、修正ヘルツモデルに役割を譲っている。)

・跳ね返り係数のデータの重ね合わせが意味すること

この研究において跳ね返り係数 e についても、組成の異なる試料に対する結果を、 V_c (あるいはその元になる弾性変形に関係した量 E 、 R_0 、 ρ) による無次元化によって、一本のマスターカーブの上に重ね合わせることが出来た。このことは、ゲルの衝突においては、試料サイズに比べ小さな波長のモードがほとんど励起されていないことを示唆する。なぜなら、そのようなモードは高振動数の運動に対応しており、そうした速い運動においては、各ゲル試料の粘性的性質の違いがより強く発現すると考えられるからである。一方、バネ 質点格子系における数値的研究によると [6]、そうした系では衝突時の短波長モードの励起は著しく、特に跳ね返り係数に大きな影響を与えている。また、そのようなモードの多くは粗密波に対応するものであると考えられる。以上のことから、衝突現象において系の圧縮性が重要な役割を果たすこと (これは以前に Gerl らによって指摘されている [5])、そして、ゲルやゴムなどの非圧縮性の固体の衝突挙動は、たとえ変形が微小に留まる条件であったとしても硬質の固体におけるものとは大きく異なっている可能性があることが示唆される。

・今後の展開に関して

跳ね返り係数のデータの重ね合わせが意味することの研究では、球状ゲルを用いて弾性的大变形を伴う条件での衝突現象について研究した。最大変形時間 (初期の運動エネルギーが全て変形エネルギーに変換するまでの時間) については、モデルと実験値が定量的によい一致を示した一方で、いわゆる接触時間については、ゲルの変形を一軸性のものとして取り扱う荒い近似では理解できないことが明らかになった。言い換えると、少なくとも 2 以上の内部自由度を持つモデルが必要であることが示された。この点は、跳ね返り係数に関する議

論とも関連しており、今後の課題としたい。

また、もう一つの興味あることとして、衝突における粘性散逸の効果がある。例えば注目する量を最大変形時間に限ったとして、ゲルの粘性が大きくなった時どのような振舞いが見られるか、といった問題である。それにはまず、粘弾性特性が制御されたゲルを用意することが、この方向に研究を展開する上で鍵となるものと思われる。

* * *

本研究は、中央大学理工学研究所の助成のもとに遂行されたものです。助成を認めてくださった関係各位に感謝いたします。

参考文献

- [1] Goldsmit W., *Impact*, Arnold, London, 1960.
- [2] ディシュ C. B., *ボール・ゲームの物理学*, 岡村浩訳、みすず書房、1978.
- [3] Hertz H., *J. Reine Angew. Math.* 92, 156 (1882).
- [4] Labous L., Rosato A. D. and Dave R. N., *Phys. Rev. E*, 56, 5717 (1997).
- [5] Gerl F. and Zippelius A., *Phys. Rev. E*, 59, 2361 (1999).
- [6] Hayakawa H. and Kuninaka H., *Chem. Eng. Sci.* 157, 239 (2002) and references therein.
- [7] Kuwabara G. and Kono K., *Jpn. J. Appl. Phys.*, 26, 1230 (1987).
- [8] Richard D., Clanet C. and Quéré D., *Nature* (London), 417 (2002) 811.
- [9] Okumura K., Clanet C., Richard D. and Quéré D., *Europhys. Lett.*, 62 (2003).
- [10] Love A. E. H., *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Dover, 1927.
- [11] Landau L. D. and Lifshitz E. M., *Theory of Elasticity*, Pengamon Press, 1960.