

秩序にもとづく都市圏における正方形の都市の構造

神 頭 広 好

- I はじめに
- II 秩序ある正方形都市の形成
 - 1. 北方向および東方向へ道路に沿って発展する正方形都市モデル
 - 2. 北方向, 東方向および北東（ここでは対角線）方向に沿って発展する正方形都市モデル
 - 3. 都市の建物の階数とランク・サイズの法則
- III おわりに

I はじめに

ジップの法則さらにはそれにもとづくランク・サイズの法則を都市に応用した研究は、Isard (1956) によって地域科学としての分野が創立された1960年ころから現在にかけて枚挙にいとまがないほど多数あり、ランク・サイズの法則を科学的な根拠から位置付けたものにSimon (1955) がある。これについてはKrugman (1996) でも触れられている。一方、Simonとは別のアプローチでkozu (2019) では格差係数の意味を説明している。幾何学とランク・サイズモデルを応用した研究はあまり見られず、円形の都市などにランク・サイズの法則を応用した幾何学的研究については神頭 (2008) がある。最近ではIshikawa (2019) によって都市のランク・サイズについて実証的な分析が試みられている。

ここでは、まず正方形の都市圏における正方形の都市は、原点を都心としてそこにはすべての企業が集中しており、都心から人口においてランク・サイズの法則にしたがって、北方向 (North) と東方向 (East) に都市が形成されていく場合¹⁾の秩序にもとづく都市化率について考察する。ついで北方向, 東方向およびその両方向の対角線上にも道路が有する場合の都市の秩序²⁾ある形成について分析する。さらに道路の効果および都市形成の秩序による都市圏の形状について考察する。最後に、建物の階数にランク・サイズモデルを応用することによってCBDの建物階数と都市数と

1) この場合については、東は西でも構わないし、北は南でも構わないが、図においてプラスの方向にある第1象限の方がイメージし易いからである。

2) ここでの秩序とは、ランク・サイズの法則に則っていることを示している。また同時に連続したランクで都市が形成されていることを意味する。

の関係を導く。

II 秩序ある正方形都市の形成

1. 北方向および東方向へ道路に沿って発展する正方形都市モデル

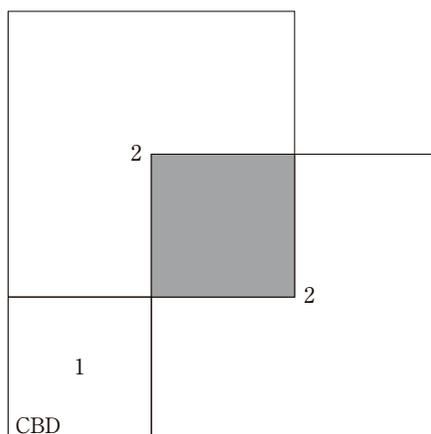
まずモデルの構築に当たり、つぎの諸仮定を設定する。

- (1) 正方形の都市圏における都心は原点にあり、都心部としての CBD (Central Business District の略称) には都市圏のすべての企業が集中している。
 - (2) 正方形の都市は、CBD からランク・サイズの法則にしたがって、北方向 (North) と東方向 (East) に正方形都市が形成されていく。その際、車を考慮して各都市において等間隔の碁盤の目の道路が建設される。(例えば、後掲図5を参照)
 - (3) 最終的には、空間が余ることから CBD から比較的近いところに最後のランクの都市が形成される。なお、ここでの CBD はランク1の都市を示すが、図1および図2から2つのランク2の都市の重複を避けるためにランク1の都市面積はランク2の都市面積と同等である³⁾。
- まず、上記の仮定のもとで、都市の人口は都市のランク・サイズの法則にもとづいているとすれば、

$$P_n = \frac{P_1}{n^2} \quad (1)$$

で表される。 P_1 はランク1の都市 (CBD) の人口、 P_n はランク n の都市の人口をそれぞれ示す。

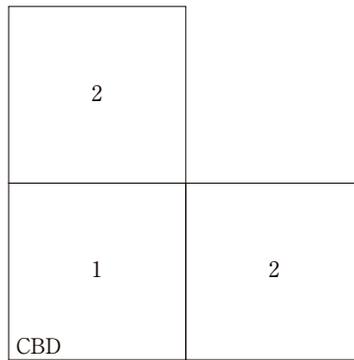
図1 ランク2の都市の重複



出所) 筆者作成 (図2から図13も同じ)

- 3) 他の解釈としては、CBD は原点を含む1単位の面積を含み、その他の3単位の面積は道路および公共サービスにのみ使われている。

図2 ランク2の都市の修正



また、都市の人口密度は（1）式から、

$$D_n = \frac{P_n}{n^2} = \frac{P_1}{n^4} \tag{2}$$

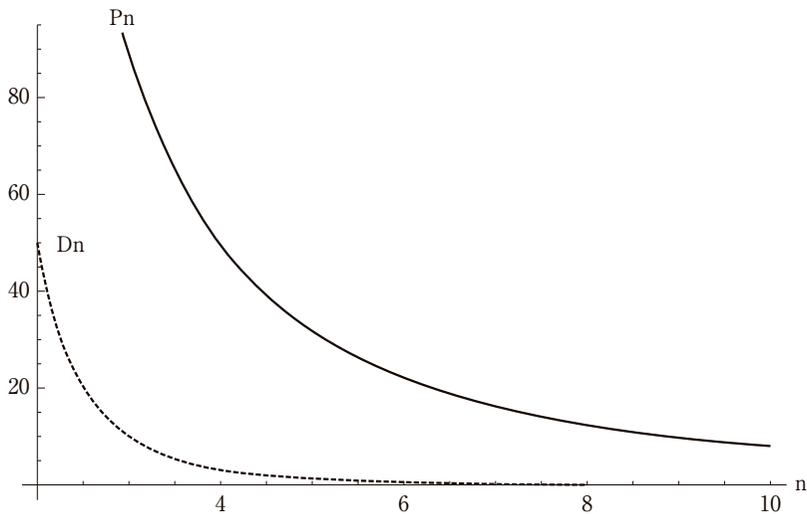
で示される。

なお（1）式および（2）式については、図3において実線は人口を点線は人口密度をそれぞれ示しており、 $P_1=800$ 、 $2 \leq n \leq 10$ の範囲で描かれている。図3から、人口および人口密度は都市が増加するにつれて徐々に減少していくが、人口よりも人口密度の方が急に減少する。

まず、モデルを説明するために、以下の4つの計算式が利用される。

(a) 北方向または東方向において形成される都市面積：

図3 人口と人口密度のランク・サイズ



$$\textcircled{1} + \textcircled{2} + \textcircled{3} + \cdots + \textcircled{n} = 1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(b) 正方形都市圏の一辺の長さ： $\frac{n(n+1)}{2} + 1$

(c) ランク $n + 1$ の都市面積は： $(n+1)^2$

(d) 最後のランクの最大の大きさを有する正方形の面積： $\left(\frac{n(n-1)}{2} + 1\right)^2$

ここで、都市が形成されることそれ自体が都市化していると仮定すれば、ランクがオーダーとしての都市化率 U は、

$$U = \frac{(a) + (c)}{(b)} = \frac{\left(\frac{2n(n+1)(2n+1)}{6}\right) + (n+1)^2}{\left(\frac{n(n+1)}{2} + 1\right)^2} \quad (3)$$

で表される。なお、(3)式に $n = 4$ を代入することによって図5の場合の都市化率を求めることができる。

(3)式は、図4において $2 \leq n \leq 10$ の範囲で描かれている。

この図4から、都市のランクが大きくなるにしたがって、大きな都市圏ほど都市化率が徐々に小さくなることを示している。

唯一、空き地が残らないケースは、ランク2の都市が存在するケースのみである。他の場合、正方形の都市圏は成立するが、都市のランクとしての秩序は最後のランクで失われることになる。

図4 都市化率とランク

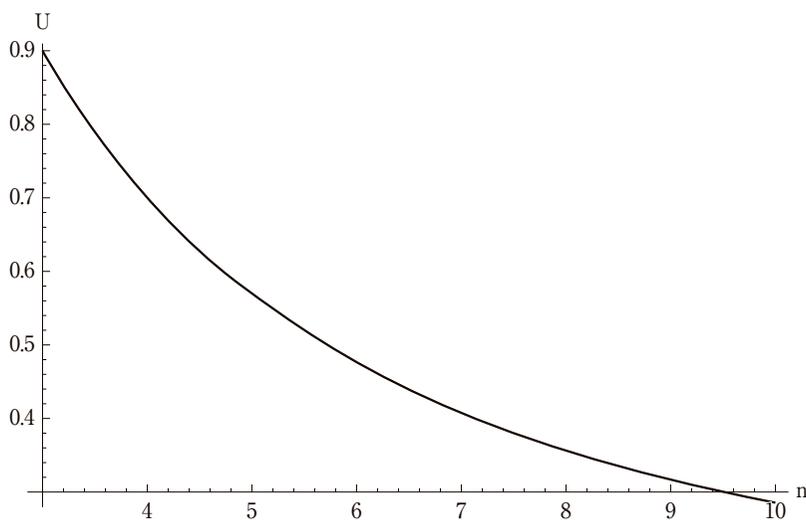
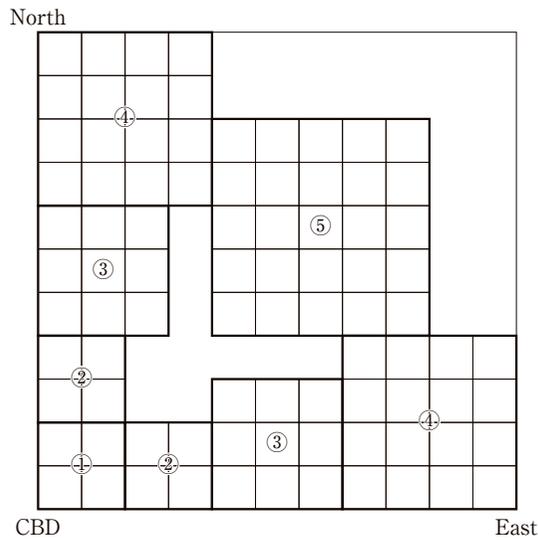


図5 ランク4 + 1の正方形都市圏



注) 上図は2方向のランク4までの都市とランク5の1つの都市が描かれている。

(これを「準秩序」と呼ぼう) ($n = 4$ の場合の都市の形状については、後掲図7を参照)

この証明については、ランクの都市の一辺よりも大きい最後のランクの都市一辺の条件から導かれる。

$$\left(\frac{n(n+1)}{2} + 1\right) - n > n \quad (4)$$

(4)式から、

$$\frac{1}{2}(n-2)(n-1) > 0 \quad (5)$$

を得る。それゆえ (5)式を満たすためには n が自然数であることから、 $2 < n$ でなければならない。

これより都市の秩序が変化する可能性は、ランク3の都市からであることを示唆している。さらに、ランク3の都市はランク4の都市が形成されることによって周辺隙間なく、正方形の都市圏がそのまま成立する。

この証明については、連続している自然数で二乗和の条件から導かれる。

$$n^2 + (n+1)^2 = (n+2)^2 \quad (6)$$

から、

$$(n-3)(n+1) = 0 \quad (7)$$

を得る。(7)式から n は自然数であることから $n = 3$ であり、(5)式からランク 3 の都市のつぎにランク 4 の都市が必ず形成されることになる。

大きな都市圏ほど準秩序、すなわち最後の番狂わせが存在する可能性を有しているが、それによって周辺隙間ない正方形の都市圏が形成される。これについては、対角線上に交通の整備がなされるならば話は別である。

この場合、上記同様に都市化率は、

$$U = \frac{\left(\frac{2n(n+1)(2n+1)}{6}\right) + \left(\frac{n(n+1)}{2} + 1 - n\right)^2}{\left(\frac{n(n+1)}{2} + 1\right)^2} \quad (8)$$

で表される。なお、(8)式に $n = 4$ を代入することによって図 6 の場合の都市化率を求めることができる。

(8)式は $2 \leq n \leq 10$ の範囲で図 7 に描かれている。これについては、ランク 2 の都市からランク 4 の都市くらいまで都市化率が徐々にではあるが急に高く、それ以降極端ではないが急増傾向になることを示している。

ここで、ランクと時間が比例しているとすれば、すなわち 1 単位の正方形を創生するのに 1 単位時間がかかることを示している。これは、ランク n の都市を創生するのに n^2 単位時間かかること

図 6 ランク 4 + 1 の正方形都市圏

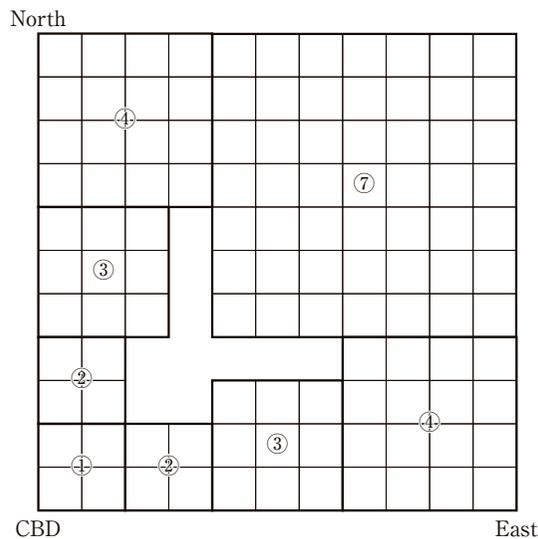
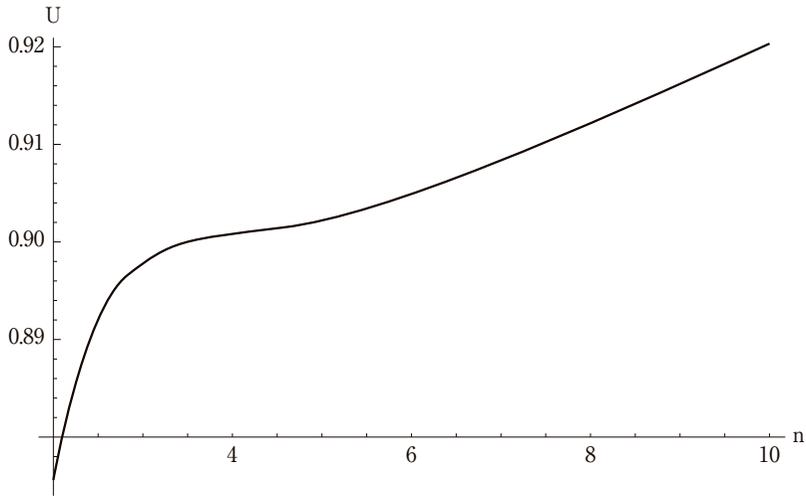


図7 都市化率とランク



を意味する。また都市の開発速度を一定とすれば、正方形の都市圏が形状として完成されるためには最後のランクの都市は n 単位時間において、 (n, n) 地点から開発する必要がある。ちなみに、秩序ある正方形の大都市圏が完成するのに要する都市の開発時間 T は、

$$T = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (9)$$

である。

準秩序のもとで限界地まで都市が創成されるための都市開発の平均速度 S （以下、都市開発速度）は、

$$S = \frac{\left(\frac{2n(n+1)(2n+1)}{6}\right) + \left(\frac{n(n+1)}{2} + 1 - n\right)^2}{\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)} \quad (10)$$

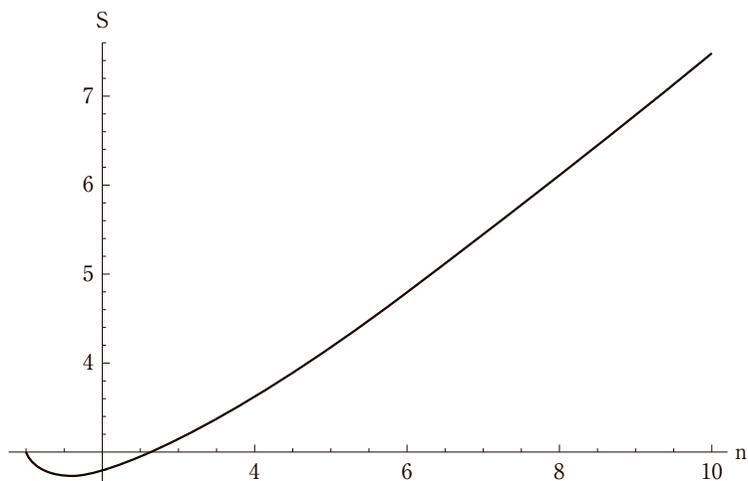
または

$$S = 2 + \frac{\left(\frac{n(n-1)}{2} + 1\right)^2}{\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)} \quad (11)$$

である。ちなみにランク 1 としての CBD の都市開発速度は 3 である。

(11)式は $2 \leq n \leq 10$ の範囲で図 8 に描かれている。図 8 から都市が増えるにつれて都市開発速度

図8 都市開発速度とランク



はやや急増しているように見える。

一方、秩序を乱すことなく、形成された正方形都市圏における都市開発速度は、

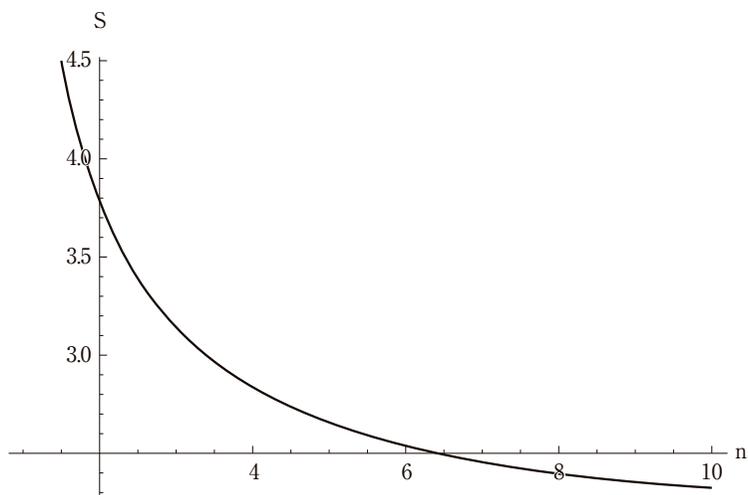
$$S = 2 + \frac{(n+1)^2}{\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)} \quad (12)$$

である。ちなみにランク1としてのCBDの開発速度は6である。

(12)式は $2 \leq n \leq 10$ の範囲で図9に描かれている。

総じて、完全に秩序がある都市形成の方が開発速度が2倍速いことが示されている。

図9 都市開発速度とランク



2. 北方向，東方向および北東（ここでは対角線）方向に沿って発展する正方形都市モデル

$n = 4$ の場合の都市の形状については，図10に描かれている。

対角線に道路が存在する場合の都市化率は，

$$U = \frac{\left(\frac{3n(n+1)(2n+1)}{6}\right)}{\left(\frac{n(n+1)}{2} + 1\right)^2} \tag{13}$$

図10 ランク 4 の正方形都市圏

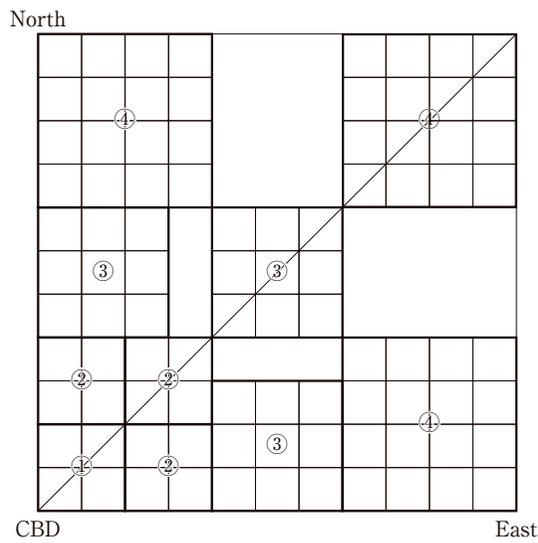
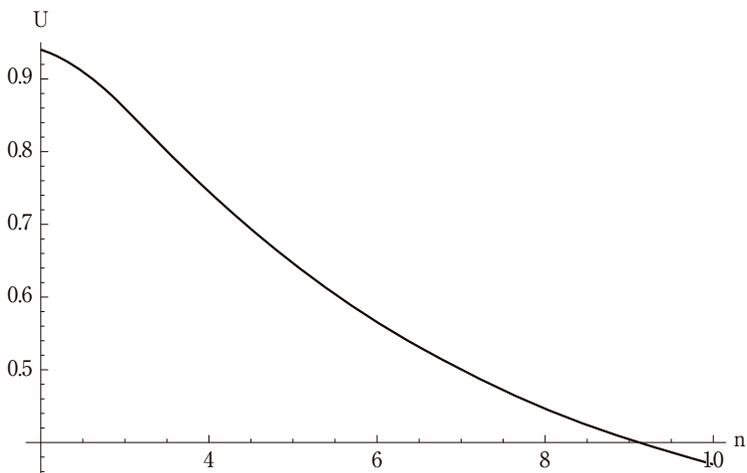


図11 都市化率とランク



で表される。なお、(13)式に $n=4$ を代入することによって図10の場合の都市化率を求めることができる。これは $U \approx 0.74$ である。

(13)式は $2 \leq n \leq 10$ の範囲で図11に描かれている。ランク 2 からランク 4 くらいまでは都市化率は急に減少するが、それ以降は徐々に減少する。

ちなみに、都市開発速度は、

$$S = \left(\frac{\frac{3n(n+1)(2n+1)}{6}}{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} \right) = 3 \quad (14)$$

である。この場合、都市開発速度は一定であることを意味する。

3. 都市の建物の階数とランク・サイズの法則

都市の建物の階数にランク・サイズの法則を応用すると、

$$h_n = \frac{h_1}{n^2} \quad (15)$$

で表される。ただし、 h_1 は CBD の建物の階数、 h_n はランク n の都市の建物の階数をそれぞれ示す⁴⁾。

ここで、最後のランク m の都市の建物の階数は、

$$h_m = \frac{h_1}{m^2} \quad (16)$$

で表される。最後の都市は、企業数や人口が少ないために平均的には1階が多いとすると、

$$h_m = 1 \quad (17)$$

であり、(17)式と(16)式から、

$$m^2 = h_1 \quad (18)$$

または

$$m = \sqrt{h_1} \quad (19)$$

4) ここでの建物の階数は、都市における平均階数を意味する。ただし、圏域の研究によっては企業ビル、マンションおよびホテルなどが分析の対象となる。ちなみに観光ホテルについては神頭(2019, 第2章)を参照せよ。

で表される。

したがって、CBDの建物の階数が分かれば、都市圏の都市の数が分かることになる。

例えば、CBDの建物の階数を16とすると、直線上にある都市の数は4である。正方形の対角線が交わる場所にCBDが位置すれば、第1象限だけの総都市数は $4 * (3 * 4 - 2) = 40$ である。ただし、ここでのCBDの面積は4倍になる。

また、時間は平等に配分されるとすれば、正方形の1単位の長さを1単位時間に換算すると、言わば時間を遡ると、最後のランクの都市は都市圏の形状を決定するために、都市のランクとCBDの建物の階数との関係は、

$$h_1 = \left(\frac{m(m+1)}{2} + 1 \right)^2 \tag{20}$$

で表される。(20)式の m に1を代入すると、ランク1としてのCBDの建物の階数は $h_1 = 4$ であることから4階である。図12は(20)式について $1 \leq m \leq 4$ の範囲で描かれている。図12では都市の数が多い都市圏のCBDほど建物の階数が急になることを示唆している。

同様に、大都市圏を円形とすると、ランク・サイズの法則は、

$$h_n = \frac{h_1}{\pi n^2} \tag{21}$$

で表される。それゆえ総都市数は上記同様に計算すると、

$$m = \sqrt{\frac{h_1}{\pi}} \tag{22}$$

である。(22)式から、正方形の都市圏のCBDよりも円形の都市圏のCBDの方が建物の高さは π

図12 CBD建物階数とランク

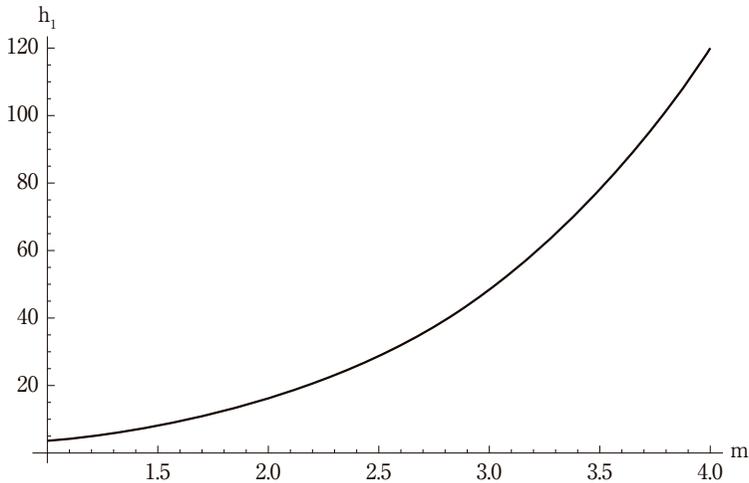
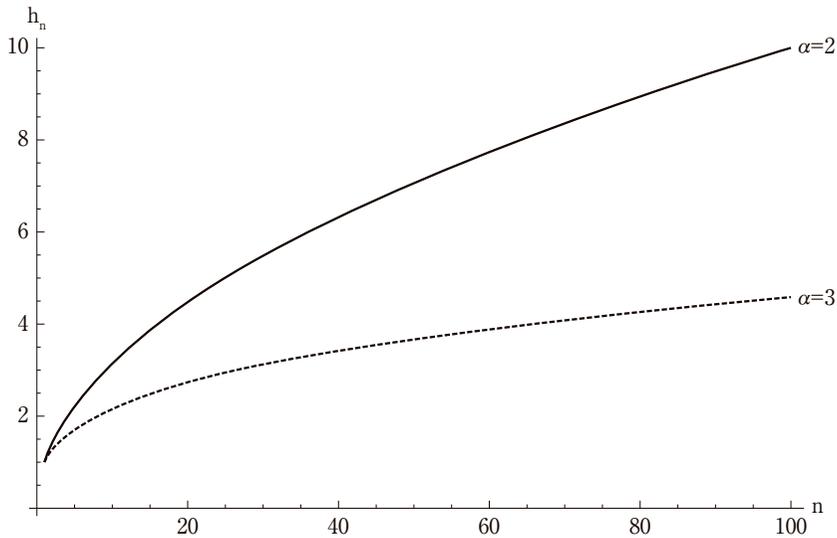


図13 格差係数による建物階数とランク



で除した分だけ低くなる。このことは、秩序が保たれているならば交通網が対称的に整備されていると集積の経済を代表する建物の階数が大きくなることを示唆している。

ちなみに、CBDの建物階数にもとづく一般のランク・サイズの法則は、

$$h_n = \frac{h_1}{n^\alpha} \quad (23)$$

で表される。都市圏における最後のランクの都市の建物階数を1階とすれば(23)式から、

$$m = h_1^{\frac{1}{\alpha}} \quad (24)$$

が導かれる。これは階数に格差 α が大きいほど都市圏における都市数が少ないことを示唆している。

図13は、(23)式について $h_1=100$ 、 $\alpha=3$ (点線)および $\alpha=2$ (実線)で描かれている。

これについては、日本における都市規模格差のない首都圏と都市規模格差のある地方都市圏の違いを説明しているように見える。

Ⅲ おわりに

正方形をベースにした秩序ある2方向発展ケースでは、大都市圏ほど都市化率が徐々に低くなり、都市の開発速度も徐々に小さくなる。ちなみにCBDの開発速度は3である。また準秩序ある2方向発展のケースでは、大都市圏ほどランク4の都市から都市化率は徐々に高くなり、都市の開

発達速度は急増する。ちなみに CBD の開発速度は 6 である。一方秩序ある 3 方向発展ケースでは、大都市圏ほどランク 3 の都市から都市化率は徐々に低くなり、都市開発速度は 3 である。ちなみに CBD の開発速度も 3 である。

これらのことから、CBD の開発速度は秩序があるケースでは 3 であるが、準秩序の CBD のそれは 6 であり、都市化率は最終的に高くなる都市圏の CBD ほど高いことを物語っている。また対称性を有する交通が整備されている空間において、都市開発速度が一定の 3 であることから、例えば道路の存在が開発を安定させる作用があると考察される。

最後に、ランク・サイズの法則を正方形の都市圏に応用すると、CBD の建物の階数が時間において 4 階になること、大きな都市圏ほど CBD の建物の階数がより大きくなることが分かった。

今後は幾何学を踏まえて、建物の高さを集積の経済の大きさとした場合、空間から計算される CBD の集積の経済と時間を遡ることによる集積の経済を比較することが可能なモデルを構築することが課題として残される。

参考文献

- 神頭広好（2008）『都市の立地と幾何学—新しい立地論の方向性—』愛知大学経営総合科学研究所叢書33，愛知大学経営総合科学研究所。
- 神頭広好（2019）『観光とホテルの立地』愛知大学経営総合科学研究所叢書52，愛知大学経営総合科学研究所。
- Isard, W. (1956) *Location and Space-Economy*, The M.I.T. Press（監訳—木内信藏『立地と空間経済』朝倉書店，1964）。
- Ishikawa, T. (2019) “An Analysis on Regularity of City Population Distribution in City System,” *Locational Analysis of Firms’ Activities from a Strategic Perspective*, edited by T. Ishikawa.
- Kozu, H. (2019) “City System Based on the Rank-Size rule,” *Locational Analysis of Firms’ Activities from a Strategic Perspective*, edited by T. Ishikawa.
- Krugman, P. (1996) *The Self-Organizing Economy*, Blackwell Publishers（共訳—北村行伸・妹尾美起『自己組織化の経済学』筑摩書房，2009）。
- Simon, H. (1955) “On a Class of Skew Distribution Functions,” *Biometrika*, Vol. 42, pp. 425-440.

（愛知大学経営学部教授）