

線形計画法を用いたあるクラスの非線形2点境界値問題の全解探索法

Finding All Solutions of a Class of Nonlinear Two-Point Boundary Value Problems Using Linear Programming

山村清隆*, 高橋朋弘*, 小林一哉*

Kiyotaka Yamamura, Tomohiro Takahashi and Kazuya Kobayashi

Abstract

Nonlinear boundary value problems often have several solutions. In such a case, it is important to find all solutions of the finite difference equations that describe the nonlinear boundary value problems. Various algorithms have been proposed for finding all solutions of nonlinear equations. However, since the computation time of most of these algorithms grows exponentially with the number of variables, it is difficult to apply them to finite difference equations that generally consist of many variables. Recently, an efficient algorithm has been proposed for finding all solutions of piecewise-linear resistive circuits using linear programming. In this paper, we apply this algorithm to a class of nonlinear two-point boundary value problems. By numerical examples, it is shown that the algorithm could find all solutions of systems of 300 finite difference equations (where the number of linear regions is 10^{300}) in practical computation time using a 360MHz computer.

1. はじめに

非線形境界値問題は理工学上の様々な分野で現われる基礎的な問題の一つである。特に次のような形の非線形境界値問題は、波動の伝搬・散乱問題など多くの分野で派生する重要な問題として知られている [1]～[3]。

$$\Delta x(t) = F(x(t), t) \text{ in } \Omega, \quad x \in B \text{ on } \Gamma \quad (1)$$

ただし、 Δ はラプラシアン、 $x: R^N \rightarrow R^1$ は未知関数、 F は非線形関数、 Ω は R^N における有界領域、 Γ はその境界、 $x \in B$ は境界条件を表すものとする。本論文では、 $N=1$ の場合、すなわち式(1)が次のような非線形2点境界値問題となる場合について考える。

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = F(x(t), t), \quad x(0) = x(1) = 0 \quad (2)$$

非線形2点境界値問題の数値解法としては差分法がよく用いられる。差分法は、差分近似により非線形境界値問題を有限次元の非線形方程式(差分方程式)に帰着させ、それを適当な数値解法を用いて解く方法である。

このような非線形2点境界値問題を記述する差分方程式は、しばしば複数個の解をもつ。したがって境界値問題の数値解析ではそれらすべての解を求めることが重要となるが、従来提案されている全解探索法のほとんどは変数の数 n の増加とともに計算時間が指数関数的に増大するため、差分方程式のような大規模方程式に適

* 中央大学理工学部電気電子情報通信工学科

用するのは困難であった¹。そのため著者らの知る限りでは、非線形境界値問題の全解探索法についてはほとんど議論されていないのが現状である。

最近、線形計画法を用いた区分的線形回路（あるいは非線形回路、あるいはより一般的な非線形方程式）のすべての解を求めるアルゴリズムに関する研究が進められている [4]～[19]。これらは LP テストと呼ばれる解の非存在判定テストを用いて解の存在領域を絞り込んでいくもので、従来の方法と比べて非常に効率よくすべての解を求めることができる。特に文献 [5] の LP テストは、与えられた領域の中で各方程式の解曲面が交わっているか否かを判定するもので、解曲面の存在だけを判定していた従来の符号テスト [20] と比べて遥かに強力な解の非存在判定法となる²。

本論文では、このような区分的線形回路の全解探索法の一つである文献 [5] のアルゴリズムを応用した、非線形 2 点境界値問題 (2) のすべての解（近似解）を求めるアルゴリズムについて検討を行う。また、数値実験によりその有効性を検証する。

2. 非線形 2 点境界値問題の全解探索法

式 (2) に対する差分法ではまず、 t の区間 $[0, 1]$ を n 個の分点で等間隔に分割する。ここで分点の間隔を $h = 1/(n+1)$ で表し、 $t_i = ih (0 \leq i \leq n+1)$ とおく。また $x(t_i)$ の差分近似を x_i で表す。ここで中心差分式

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = \frac{x(t_{i+1}) - 2x(t_i) + x(t_{i-1}))}{h^2} + O(h^2) \quad (3)$$

を導入すると、式 (2) は次のような差分方程式で表現される。

$$\begin{aligned} x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1} - h^2 F(x_i, t_i) &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \\ \text{ただし } x_0 = x_{n+1} &= 0, \quad h = 1/(n+1) \end{aligned} \quad (4)$$

式 (4) を解くことにより境界値問題 (2) の近似解を求める方法を差分法と呼ぶ。差分法では分点の数を増やすほど近似解の精度は良くなるが、その分方程式の規模は大きくなり、計算時間は増大する。

本手法ではまず、差分近似の精度に合わせて非線形関数 F を区分的線形近似する。すなわち、差分法により得られる解は差分近似の誤差を含む近似解であるから、非線形関数を区分的線形近似しても実用上問題ない³と考える。その結果得られる区分的線形方程式系を

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

あるいはベクトル表示により

$$f(x) = 0 \quad (6)$$

¹ 実際、非線形方程式の全解探索法に関する論文の多くは、アルゴリズムを高々 10 変数程度の方程式にしか適用していない。

² 線形計画法を用いて解の非存在を判定するテストを総称して LP テストと呼んでいるが、LP テストにはいくつかのバリエーションがあり、アルゴリズムによって適用範囲や計算効率が異なる。文献 [5] のアルゴリズムは適用範囲は比較的狭いが、線形領域数 10^{200} の大規模問題の全解探索を実用時間内で行うことに成功するなど、計算効率の点で非常に優れている [15]。

³ 差分近似の精度と区分的線形近似の精度は同じオーダーであることに注意する。

で表すことにする.

ここで, 非線形関数 F は K 本の線分からなる区分的線形関数で近似されるものとする. 以下, f が線形となるような領域を線形領域と呼ぶ. f は分離可能であるから, 線形領域は n 次元直方体の形状をとり, また線形領域の総数は K^n となる. 本論文では, 初期領域 $D \subset R^n$ 内に存在する式 (5) のすべての解を求める問題を考える. ただし, D は K^n 個の線形領域からなる直方体領域とする.

式 (5) のすべての解を求めるには, すべての線形領域上で対応する線形方程式を解けばよいが, この方法では n の増加とともに計算時間は爆発的に増大する. そこで, 複数の線形領域からなる直方体領域 (これを超領域と呼ぶことにする) を考え, 解の存在しない超領域を LP テストにより除去することを考える.

式 (5) では, 関数 f_i は変数 x_i だけに関して区分的線形で, 他の変数に関しては線形となる⁴. したがってもし初期領域 D を $x_i (i=1, 2, \dots, k)$ 方向に線分レベルまで (すなわち対応する区分的線形関数が線形関数になるまで) 分割すれば, $f_i (i=1, 2, \dots, k)$ はそれぞれの超領域上で線形となる. そのような超領域の一つを

$$X = \{x \in R^n \mid a_i \leq x_i \leq b_i, i=1, 2, \dots, n\} \quad (7)$$

とする. LP テストでは, 領域 X 内で方程式 $f_i(x) = 0 (i=1, 2, \dots, k)$ の解曲面 [実際には $(n-1)$ 次元の超

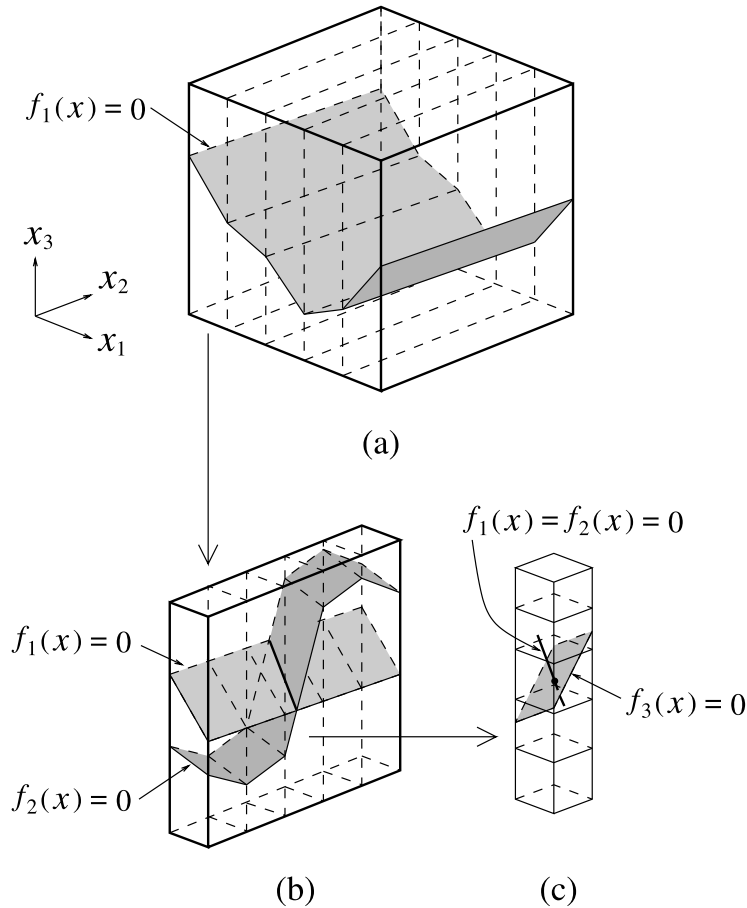


Fig. 1 Illustration of the algorithm.

⁴ 文献 [5] のアルゴリズムはこのような方程式に対して適用可能となる. 本論文では, 差分方程式がこのような性質をもつ非線形境界値問題を対象としている.

平面となる] が交わっているか否かを, 線形計画問題

最大化: $f_k(x)$

制約条件:

$$f_i(x) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, k-1$$

$$a_i \leq x_i \leq b_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (8)$$

または

最小化: $f_k(x)$

制約条件:

$$f_i(x) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, k-1$$

$$a_i \leq x_i \leq b_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (9)$$

を単体法で解くことにより確認する⁵. すなわち, まずフェーズ I により実行可能領域の存在・非存在を調べ, 存在する場合 (実行可能領域の端点の一つを見つけた場合) は, その端点における目的関数の値が負なら最大化問題 (8) を, 正なら最小化問題 (9) をフェーズ II で解く. もしその領域内で実行可能領域と $f_k(x) = 0$ の

Table 1: Comparison of comutation time (Example 1, $K=10$)

n	L	S	T (秒)
10	10^{10}	2	0.03
20	10^{20}	2	0.27
30	10^{30}	2	1
40	10^{40}	2	4
50	10^{50}	2	10
60	10^{60}	2	20
70	10^{70}	2	38
80	10^{80}	2	67
90	10^{90}	2	107
100	10^{100}	2	163
110	10^{110}	2	240
120	10^{120}	2	340
130	10^{130}	2	481
140	10^{140}	2	635
150	10^{150}	2	870
160	10^{160}	2	1,127
170	10^{170}	2	1,496
180	10^{180}	2	1,791
190	10^{190}	2	2,368
200	10^{200}	2	2,813
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
300	10^{300}	2	15,716

⁵ 単体法は線形計画法の代表的手法の一つで, フェーズ I とフェーズ II により構成される. フェーズ I では, 人為変数を用いて実行可能領域の端点を求める. フェーズ II では, その端点から出発して隣接する端点を次々と探索し, 最適解を求める. もし実行可能領域が存在しなければ, 単体法のフェーズ I はその情報とともに終了する.

解曲面が交わっているなら、目的関数 $f_k(x)$ の最大値は正、最小値は負となる。そうでない超領域には解は存在しないので、それを除去する⁶。

文献 [5] の LP テストアルゴリズムは、与えられた初期領域 D を Fig. 1 に示すように各変数方向に線分レベルまで分割し、各超領域内で解曲面どうしが交わっているか否かを LP テストにより確認しながら、解の存在領域を絞り込んでいく方法である。すなわち、まず第 1 ステップでは Fig. 1 (a) に示すように初期領域を x_1 方向に分割し、各超領域上で文献 [20] の符号テストを行う。これにより、 $f_i(x) = 0$ ($i=1, 2, \dots, n$) の解曲面が存在しない超領域は除去される。次に第 2 ステップでは、Fig. 1 (b) に示すように残った超領域を x_2 方向に分割し、各超領域上で $f_1(x) = 0$ の解曲面と $f_2(x) = 0$ の解曲面が交わっているかどうかを LP テストにより確認する。その結果、実行可能領域が存在しない（すなわち $f_1(x) = 0$ を満たす x が存在しない）超領域や最大値が負（あるいは最小値が正）となる超領域を除去する。以下、同様の手順を第 3 ステップから第 $(n-1)$ ステップまで繰り返す。第 k ステップ ($3 \leq k \leq n-1$) では、式 (8) または式 (9)⁷ を解くことにより $f_i(x) = 0$ ($i=1, 2, \dots, k$) を同時に満たす x が存在するか否かを確認し、もし存在しなければその超領域を除去する。最後に第 n ステップで、残った超領域を x_n 方向に分割し、各線形領域上で対応する線形方程式を解く。これにより、式 (5) のすべての解を求めることができる。

なおこのアルゴリズムに対しては、LP テストにおけるピボット演算回数を激減させるいくつかの手法が提案されている [5]。これらの手法の導入により、1 領域当たりの平均ピボット演算回数を 1 ～ 2 回程度におさえることができるため、LP テストは強力であると同時に極めて効率的となる [15]。

3. 計算例

本章では、数値実験結果をいくつか示し、提案したアルゴリズムの有効性を検証する。なお、使用計算機は Sun Ultra 10 (UltraSPARC-III 360MHz, 1GB RAM)、プログラミング言語は C である。

例 1 Bratu 問題の名で知られる次のような非線形 2 点境界値問題を考える [2], [3]。

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \exp(x(t)) = 0, \quad x(0) = x(1) = 0$$

この問題を記述する差分方程式は次のようになる。

$$x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1} + h^2 \exp(x_i) = 0, \quad i=1, 2, \dots, n$$

ただし、 $x_0 = x_{n+1} = 0$ 、 $h=1/(n+1)$ とする。

この方程式に現われる指数関数を区間 $[0, 5]$ 上で K 本の線分からなる区分的線形関数で近似し、その結果得られる区分的線形方程式に対して、初期領域を $D = ([0, 5], \dots, [0, 5])^T$ とし、 n と K の値をいろいろ変えながら本手法を適用したときの結果を示す。

Table 1 は、 K の値を 10 に固定し、 n の値を 10 から 300 まで変えたときの結果である。ただし、 L は初期領域 D に含まれる線形領域の総数、 S は得られた解の個数、 T は本手法の計算時間を表す。この表より、 $n=300$ 、 $L=10^{300}$ という大規模問題のすべての解を約 4 時間で求めていることがわかる。なお著者らの知る限りでは、300 変数方程式の全解探索を実用時間内で行うことに成功したのは本研究が初めてである。

⁶ 実際には目的関数が正・負両方の値をとりうることを確認すればよいので、最大化問題 (8) では目的関数の値が正、最小化問題 (9) では目的関数の値が負になった時点で単体法を終了することに注意されたい。すなわちこの LP テストでは、フェーズ II は一般にわずかな回数のピボット演算しか必要としない。

⁷ ただし不等式制約 $a_i \leq x_i \leq b_i$ 、 $i=1, 2, \dots, n$ はそのときどきの超領域を表すものとする。

Table 2: Comparison of comutation time (Example 1, $n=100$)

K	L	S	T (秒)
10	10^{100}	2	163
20	20^{100}	2	355
30	30^{100}	2	536
40	40^{100}	2	719
50	50^{100}	2	905
60	60^{100}	2	1,061
70	70^{100}	2	1,275
80	80^{100}	2	1,440
90	90^{100}	2	1,626
100	100^{100}	2	1,783
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
200	200^{100}	2	3,620
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
300	300^{100}	2	5,456

Table 3: Comparison of comutation time (Example 1, $n=K$)

n	K	L	S	T (秒)
10	10	10^{10}	2	0.03
20	20	20^{20}	2	0.55
30	30	30^{30}	2	3
40	40	40^{40}	2	18
50	50	50^{50}	2	56
60	60	60^{60}	2	138
70	70	70^{70}	2	306
80	80	80^{80}	2	603
90	90	90^{90}	2	1,048
100	100	100^{100}	2	1,783
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
150	150	150^{150}	2	14,197
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
200	200	200^{200}	2	61,163

また Table 2 は, n の値を 100 に固定し, K の値を 10 から 300 まで変えたときの結果である. この表より, 計算時間は K に大体比例している (すなわち, 差分近似の精度を高くしても計算時間は指数関数的には増大しない) ことがわかる.

また Table 3 は, 差分近似の精度と区分的線形近似の精度が同じオーダーであることから, $n=K$ としてその値を 10 から 200 まで変えたときの結果である. この表より, 線形領域数 $200^{200} \simeq 1.6 \times 10^{460}$ という大規模問題の全解探索にも成功していることがわかる.

得られた二つの解を Fig. 2 に図示する. いずれも, $n=K=100$ の時の解をプロットし補間して得られた曲線である.

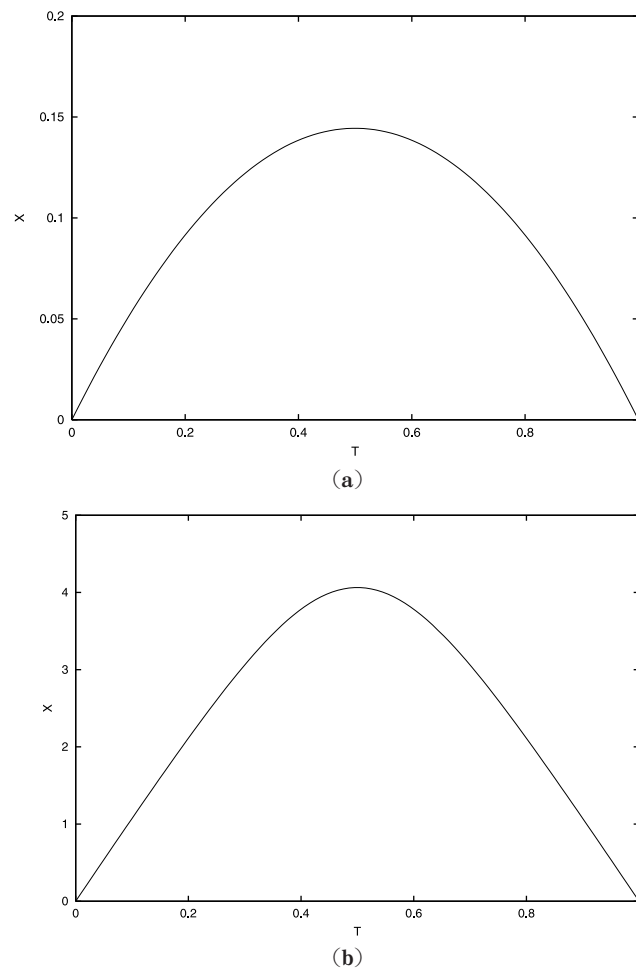


Fig. 2 Solutions of Example 1.

例 2 次に境界値問題 [2]

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{1}{x(t)} \frac{dx(t)}{dt} + \exp(x(t)) = 0, \quad x(0) = x(1) = 0$$

に対して例 1 と同様の計算を行う。初期領域を $D = ([0, 5], \dots, [0, 5])^T$, K の値を 10 とし, n の値を 10 から 300 まで変えながら本手法を適用したときの結果を Table 4 に示す。ここでも, 300 変数方程式の全解探索に成功していることがわかる。

例 3 最後に境界値問題 [2]

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + x(t)^3 = 0, \quad x(0) = x(1) = 0$$

を考える。初期領域を $D = ([0, 5], \dots, [0, 5])^T$, K の値を 10 とし, n の値を 10 から 300 まで変えながら本手法を適用したときの結果を Table 5 に示す。ここでも本手法の有効性を確認することができる。

Table 4: Comparison of comutation time (Example 2, $K=10$)

n	L	S	T (秒)
10	10^{10}	2	0.02
20	10^{20}	2	0.26
30	10^{30}	2	1
40	10^{40}	2	3
50	10^{50}	2	9
60	10^{60}	2	19
70	10^{70}	2	36
80	10^{80}	2	63
90	10^{90}	2	101
100	10^{100}	2	155
110	10^{110}	2	227
120	10^{120}	2	321
130	10^{130}	2	450
140	10^{140}	2	593
150	10^{150}	2	796
160	10^{160}	2	1,006
170	10^{170}	2	1,289
180	10^{180}	2	1,613
190	10^{190}	2	2,042
200	10^{200}	2	2,682
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
300	10^{300}	2	14,074

4. むすび

本論文では、非線形 2 点境界値問題 (2) の全解探索法として、非線形関数を区分的線形近似し、その結果得られる区分的線形方程式系に「区分的線形回路の全解探索法」である文献 [5] のアルゴリズムを適用する方法を提案した。また数値実験により、300 変数クラスの方程式の全解探索が可能であることを示し、文献 [5] のアルゴリズムが境界値問題 (2) の全解探索法として有効であることを確認した。

今後の課題としては、本手法を偏微分方程式の境界値問題、すなわち式 (1) で $N=2$ または $N=3$ となる問題に適用し、その有効性を検証するとともに、波動の伝搬・散乱問題などの実際問題に適用することがあげられる。300 変数クラスの方程式の全解探索が可能であることから、 $N=2$ 、 $N=3$ の問題に対してもある程度の有効性を期待できると推測されるが、詳細な検討は今後の課題としたい。

謝辞

本研究の一部は中央大学理工学研究所共同研究「非線形システムの数値解析法の開発とその応用に関する研究」並びに文部省科学研究費補助金基盤研究 (C)「線形計画法を用いた非線形システムの解析手法の開発と LSI 設計への応用」の補助を受けました。ここに謝意を表します。

参考文献

- [1] Maeda, H. and Yasumoto, K.: *Numerical analysis of a symmetric nonlinear directional coupler*, IEICE Trans. Fundamentals, **E77-C**, 2, 298–302 (1994)

Table 5: Comparison of comutation time (Example 3, $K=10$)

n	L	S	T (秒)
10	10^{10}	2	0.02
20	10^{20}	2	0.24
30	10^{30}	2	1
40	10^{40}	2	3
50	10^{50}	2	9
60	10^{60}	2	19
70	10^{70}	2	35
80	10^{80}	2	62
90	10^{90}	2	99
100	10^{100}	2	152
110	10^{110}	2	223
120	10^{120}	2	317
130	10^{130}	2	445
140	10^{140}	2	587
150	10^{150}	2	792
160	10^{160}	2	1,000
170	10^{170}	2	1,287
180	10^{180}	2	1,670
190	10^{190}	2	2,216
200	10^{200}	2	2,740
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
300	10^{300}	2	14,591

- [2] Allgower, E. L. and McCormick, S. F.: *Newton's method with mesh refinements for numerical solution of nonlinear two-point boundary value problems*, Numerische Mathematik, **29**, 237–260 (1978)
- [3] Moré, J. J.: *A collection of nonlinear model problems*, Allgower, E. L. and Georg, K. (eds) “Computational Solution of Nonlinear Systems of Equations” Lectures in Applied Mathematics, **26**, American Mathematical Society, Providence, RI, 723–762 (1990)
- [4] Yamamura, K., Kawata, H., and Tokue, A.: *Interval solution of nonlinear equations using linear programming*. BIT, **38**, 1, 186–199 (1998)
- [5] Yamamura, K. and Ohshima, T.: *Finding all solutions of piecewise-linear resistive circuits using linear programming*. IEEE Trans. Circuits & Syst.-I, **45**, 4, 434–445 (1998)
- [6] Yamamura, K., Kawata, H., and Tokue, A.: *Finding all solutions of transistor circuits using linear programming*. IEICE Trans. Fundamentals, **E81-A**, 6, 1310–1313 (1998)
- [7] Yamamura, K., Sekiguchi, T., and Inoue, Y.: *A fixed-point homotopy method for solving modified nodal equations*. IEEE Trans. Circuits & Syst.-I, **46**, 6, 654–665 (1999)
- [8] 山村清隆, 本田英之: 改良符号テストを用いた区分的線形回路の全解探索. 電子情報通信学会論文誌 (A), **J82-A**, 7, 997–1004 (1999)
- [9] Yamamura, K. and Nishizawa M.: *Finding all solutions of a class of nonlinear equations using an improved LP test*. The Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, **16**, 3, 349–368 (1999)
- [10] 山村清隆, 酒井健司: 線形計画法を用いた抵抗回路の変動解析. 電子情報通信学会論文誌 (A), **J82-A**, 10, 1672–1675 (1999)
- [11] Yamamura, K.: *Finding all solutions of nonlinear equations using linear combinations of functions*. Reliable Computing, **6**, 2, 105–113 (2000)

- [12] 山村清隆, フィトラグナワン, 蓬田幸二: 線形計画法を用いた非線形抵抗回路の特性曲線の探索. 電子情報通信学会論文誌 (A), **J83-A**, 6, 761-770 (2000)
- [13] Yamamura, K. and Yomogita, K.: *Finding all solutions of piecewise-linear resistive circuits using an LP test*. IEEE Trans. Circuits & Systems-I, **47**, 7, 1115-1120 (2000)
- [14] 山村清隆, 田中茂: 線形計画法を用いた区分的線形回路の全解探索法, 電子情報通信学会論文誌 (A), **J83-A**, 8, 965-975 (2000)
- [15] Yamamura, K. and Tanaka, S.: *Performance evaluation of the LP test algorithm for finding all solutions of piecewise-linear resistive circuits*. Int. J. Circuit Theory & Appl., **28**, 5, 501-506 (2000)
- [16] Yamamura, K. and Hata, Y.: *Finding all solutions of weakly nonlinear equations using linear programming*. IEICE Trans. Fundamentals, **E83-A**, 12, 2758-2761 (2000)
- [17] Yamamura, K. and Horiuchi, K.: *Research topics and results on nonlinear theory and its applications in Japan*. IEICE Trans. Fundamentals, **E84-A**, 1, 7-13 (2001)
- [18] 山村清隆, 島田雅之, 湯浅拓也: 集合値写像により記述される区分的台形回路のすべての解を求めるアルゴリズム, 電子情報通信学会論文誌 (A), **J84-A** (2001)
- [19] Yamamura, K. and Tanaka, S.: *Improvement of the contraction-type LP test algorithm for finding all solutions of piecewise-linear resistive circuits*. Int. J. Circuit Theory & Appl., **29** (2001)
- [20] Yamamura, K. and Mishina, M.: *An algorithm for finding all solutions of piecewise-linear resistive circuits*. Int. J. Circuit Theory & Appl., **24**, 2, 223-231 (1996)