

双曲幾何学入門

相馬 輝彦

首都大学東京大学院理工学研究科

まえがき

この小著は、中央大学大学院における幾何学特別講義第二（2010年5月10日～14日）の講義録である。内容は双曲幾何学の一般論であり、特定の研究課題を扱ったものではない。講義の主たる目標は、双曲幾何学の基礎的概念を紹介することにあつた。

第1節や、第2節の前半からは、双曲幾何学が緻密で隙のないものにみえるかもしれない。しかし、第2節後半から様子がちがってくる。そこでは、擬等長変換という緩い変換のもとでも双曲的性質のあるものは変質しないことがわかる。双曲幾何をもつこのような特質は、W. Thurston や M. Gromov によって明らかにされた。

この講義ノートは、中央大学大学院の相澤由貴さんによってまとめられたものを基にしている。現在の双曲的空間論が、古典的な双曲幾何からどのように抽出されたのか自然に理解できるように、講義のときは順序を入れ替え、第1節から双曲的空間の主要な手法である Gromov 積の概念を導入した。また、新たに第3.3節を加え、双曲群について簡単に説明した。最終節では、講義のとき詳しい説明ができなかった内容を補足した。

双曲幾何の重要な特長として、無限遠境界が利用可能なことがあげられる。双曲3次元多様体 M に関する有界な誤差をもつ情報を、普遍被覆空間 H^3 に関する同変な情報に持ち上げ、その情報を無限遠境界 ∂H^3 まで拡張する。 ∂H^3 上では誤差が収れんされ、情報は‘一意に決まる’ものとなる。このルートを逆にたどることにより、 M に関する誤差のない情報が得られる。その典型例として、 M が有限体積のときは Mostow の剛性定理（第2.5節）があり、 M が無限体積のときは Minsky 等によって解決されたエンディング・ラミネーション予想がある。

最後に、集中講義の機会を下さった中央大学の三好重明先生にお礼を申し上げます。また、迷走ぎみだった講義を忍耐強く受講して下さった中央大学大学院理工学研究科数学専攻の皆さんに感謝します。

目次

1	2次元双曲幾何学	1
1.1	双曲平面と等長変換	1
1.2	双曲平面と Fuchs 群	10
1.3	双曲3角形	12
1.4	Gromov 積と無限遠境界	14
1.5	Gauss-Bonnet の定理	18
1.6	双曲閉曲面の構成	20
2	3次元双曲幾何	24
2.1	双曲3次元多様体と Klein 群	24
2.2	双曲3次元閉多様体の性質と双曲化予想	31
2.3	双曲3-単体	34
2.4	擬等長写像と無限遠境界	38
2.5	Mostow の剛性定理	44
3	双曲性と Coarse 幾何学	55
3.1	Gromov 双曲的空間	55
3.2	双曲的空間の無限遠境界	57
3.3	双曲群	62
A	補足	66
A.1	Möbius 変換の等角性と円円対応性	66
A.2	均一分布サイクル	67

1 2次元双曲幾何学

第1節では、2次元双曲幾何学に関する基本的概念を紹介する。この節で扱う曲面 Σ はすべて向き付け可能であると仮定する。すなわち、 Σ は Möbius の帯と同様な部分空間を含まないとする。この分野の標準的な教科書として、深谷 [Fu], 谷口・奥村 [TO], Beardon [Be] 等がある。

1.1 双曲平面と等長変換

この講義録では、 \mathbf{R}^2 の点 (x, y) と複素平面 \mathbf{C} の点 $z = x + iy$ ($i = \sqrt{-1}$) を同一視することにより、 $\mathbf{R}^2 = \mathbf{C}$ とみなす。上半平面 $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2; y > 0\} = \{z \in \mathbf{C}; \text{Im } z > 0\}$ 上に計量

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} = \frac{|dz|^2}{(\text{Im } z)^2} \quad (1.1)$$

が定義された Riemann 多様体を、双曲平面 (hyperbolic plane) といい、 \mathbf{H}^2 とあらわす。 \mathbf{C} の実軸 \mathbf{R} を1点コンパクト化した $\mathbf{R} \cup \{\infty\}$ を \mathbf{H}^2 の無限遠境界 (boundary at infinity) といい、これを $\partial_\infty \mathbf{H}^2$ または S_∞^1 とあらわす。無限遠境界は円周と同相である。また、和集合 $\mathbf{H}^2 \cup S_\infty^1$ を $\overline{\mathbf{H}^2}$ とおく。 $\overline{\mathbf{H}^2}$ は2次元 (閉) 円板と同相である。

まず始めに、双曲計量 (1.1) の特徴をみる。 $z \in \mathbf{H}^2$ における接ベクトル $v \in T_z(\mathbf{H}^2)$ の双曲計量に関する長さを $\|v\|$ (またはより明確に $\|v\|_{\mathbf{H}^2}$) であらわし、Euclid 計量に関する長さを $|v|$ であらわす。また $v, w \in T_z(\mathbf{H}^2)$ の双曲計量に関する内積を $\langle v, w \rangle$, Euclid 計量に関する内積 (通常の内積) を $v \cdot w$ であらわす。式 (1.1) より、

$$\|v\| = \frac{|v|}{\text{Im } z}, \quad \langle v, w \rangle = \frac{v \cdot w}{(\text{Im } z)^2} \quad (1.2)$$

となる。 v と w のなす双曲角度を θ とすると、

$$\cos \theta = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|} = \frac{v \cdot w}{|v| |w|}$$

であるから、 θ は v と w のなす Euclid 角度 (通常角度) と一致する。すなわち、 \mathbf{H}^2 は Euclid 平面 \mathbf{E}^2 の上半部分と等角同値である。特に、双曲的な意味での「直交する」という概念は、通常の意味と同じである。

任意の $n \in \mathbf{N}$ に対し、 \mathbf{H}^2 内の曲線 $c_n : [1/n, 1] \rightarrow \mathbf{H}^2$ を $c_n(t) = (0, t)$ で定義する。このとき、 c_n の双曲的長さは、

$$\text{Len}(c_n) = \int_{1/n}^1 \|c'(t)\| dt = \int_{1/n}^1 \frac{1}{t} dt = \log n \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty)$$

をみだす。これは、 $(0, 1) \in \mathbf{H}^2$ から $(0, 0) \in S_\infty^1$ までの、 y 軸に沿った距離が無限であることを意味する。

$SL_2(\mathbf{R})$ を実成分の 2 次特殊線形群とする。すなわち、 $SL_2(\mathbf{R})$ の要素は、 2×2 -実行列で、その行列式が 1 のものである。 $SL_2(\mathbf{R})$ の中心 $\{\pm I\}$ による剰余群 $SL_2(\mathbf{R})/\{\pm I\}$ を $PSL_2(\mathbf{R})$ とおく。ただし、 I は単位行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ である。 $SL_2(\mathbf{R})$ の要素 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対応する $PSL_2(\mathbf{R})$ の要素を $A = \pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とあらわす。この A に同伴する Riemann 球面 $\widehat{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ 上の写像 $f = f_A : \widehat{\mathbf{C}} \rightarrow \widehat{\mathbf{C}}$ を次のように定義する。

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad (z \in \mathbf{C}, cz+d \neq 0) \quad f(z) = \infty \quad (z \in \mathbf{C}, cz+d = 0)$$

$$f(\infty) = \frac{a}{c} \quad (c \neq 0) \quad f(\infty) = \infty \quad (c = 0)$$

$A, B \in PSL_2(\mathbf{R})$ に対し、 $f_{A^{-1}} = (f_A)^{-1}$ 、 $f_{AB} = f_A \circ f_B$ が成り立つことは、 f_A の定義より容易に検証できる。

補題 1.1. $f_A(\mathbf{H}^2) = \mathbf{H}^2$.

証明. $f_A = f$ とおく。 $z \in \mathbf{H}^2$ (すなわち $\text{Im } z > 0$) のとき、

$$\text{Im } f(z) = \frac{1}{2i}(f(z) - \overline{f(z)}) = \frac{z - \bar{z}}{2i|cz+d|^2} = \frac{\text{Im } z}{|cz+d|^2} > 0. \quad (1.3)$$

したがって、 $f(\mathbf{H}^2) \subset \mathbf{H}^2$ が成り立つ。同様に $f^{-1}(\mathbf{H}^2) \subset \mathbf{H}^2$ が示せるので、 $f(\mathbf{H}^2) = \mathbf{H}^2$. \square

以下では、 $A \in PSL_2(\mathbf{R})$ と $f = f_A : \widehat{\mathbf{C}} \rightarrow \widehat{\mathbf{C}}$ を同一視し、 A 自身を $\widehat{\mathbf{C}}$ 上または $\overline{\mathbf{H}^2}$ 上の写像とみなすこともある。

注意 1.2. f_A は 1 次分数変換であるから円円対応性および等角性をもつ。円円対応性とは、 f_A が $\widehat{\mathbf{C}}$ 内の任意の円を、円に写すことを意味する。ただし、 \mathbf{C} 内の直線と無限遠点 ∞ との和集合も (半径無限大) の円とみなす。 f_A の等角性とは、 \mathbf{C} の通常の角度に関する等角性であるが、上で注意したように、 f_A の \mathbf{H}^2 への制限は双曲計量に関する等角写像でもある。

$\text{Isom}^+(\mathbf{H}^2)$ を向きを保存する \mathbf{H}^2 上の等長変換全体のつくる群とする。

補題 1.3. $PSL_2(\mathbf{R}) \subset \text{Isom}^+(\mathbf{H}^2)$.

証明. $f \in PSL_2(\mathbf{R})$ が向きを保存する \mathbf{H}^2 上の等長変換であることを示す。 f は正則な複素関数であるから向きを保存する。 \mathbf{H}^2 の任意の点 z における任意の接ベクトル $v \in T_z(\mathbf{H}^2)$ を考える。 $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ とおくと、 $f'(z) = \frac{1}{(cz+d)^2}$

であるから、 f の微分 $f_* : T_z(\mathbf{H}^2) \rightarrow T_{f(z)}(\mathbf{H}^2)$ は、 $|f_*(v)| = \frac{|v|}{|cz+d|^2}$ をみたす。このとき、

$$\|f_*(v)\| \stackrel{(1.2)}{=} \frac{|f_*(v)|}{\text{Im } f(z)} \stackrel{(1.3)}{=} \frac{|v|}{|cz+d|^2} \frac{|cz+d|^2}{\text{Im } z} = \frac{|v|}{\text{Im } z} \stackrel{(1.2)}{=} \|v\|.$$

したがって、 f は \mathbf{H}^2 上の等長変換である。 \square

命題 1.4. \mathbb{H}^2 の測地線は、実軸 \mathbb{R} に直交する半円かまたは半直線である。

証明. σ を \mathbb{H}^2 内の 2 点 z, w を結ぶ最短線分とする。また、 λ を z, w を通る \mathbb{H}^2 内の半円または半直線で \mathbb{R} に直交するものとする。 τ を λ 内の線分で σ と同じ端点をもつものとする。ここで $\sigma \not\subset \lambda$ と仮定して矛盾を導く (図 1.1 参照)。

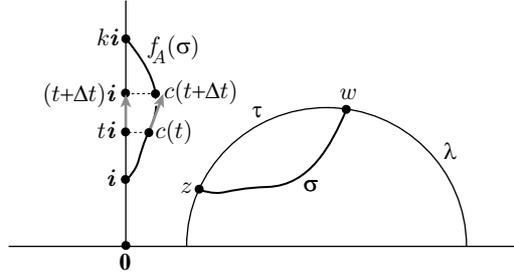


図 1.1

問題 1.1. $f_A(z) = i, f_A(w) = ki$ ($k > 1$) をみたす $A \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ が存在することを示せ。

(ヒント: 最初に、 λ の端点を 0 と ∞ に写す f_B ($B \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$) があることを示す。)

(命題 1.4 の証明の続き) 問題 1.1 の $f = f_A$ は、円円対応性と等角性をもつので $f(\lambda) = \{ti; t > 0\}$ となる。 $f(\sigma)$ が $c(t) = (\alpha(t), t)$ ($1 \leq t \leq k$) のように高さ t によってパラメータ表示ができる場合のみを考える¹⁾。 $c'(t) = (\alpha'(t), 1)$, $\text{Im} c(t) = t$ より,

$$\|c'(t)\| = \frac{|c'(t)|}{t} = \frac{\sqrt{\alpha'(t)^2 + 1}}{t} \geq \frac{1}{t}$$

である。しかし、 $f(\sigma) \not\subset f(\lambda)$ なので、 $\alpha'(t_0) \neq 0$, すなわち $\|c'(t_0)\| > \frac{1}{t_0}$ をみたす点 $t_0 \in [1, k]$ が存在する。したがって、 f の等長性 (補題 1.3) より,

$$\text{Len}(\sigma) = \text{Len}(f(\sigma)) = \int_1^k \|c'(t)\| dt > \int_1^k \frac{1}{t} dt = \text{Len}(f(\tau)) = \text{Len}(\tau).$$

これは σ の最短性に矛盾するので、 $\sigma = \tau \subset \lambda$ であることがわかる。よって、 λ は z と w を通る唯一の測地線である。 \square

問題 1.2. 命題 1.4 より、半直線 $l = \{ti; t > 0\}$ は測地線である。 l 上の点列 $\{z_n\}$ でその $\text{Im} z_n$ が上から有界なものを考える。このとき、 $\text{dist}_{\mathbb{H}^2}(z_n, i) = \infty$ と $\text{dist}_{\mathbb{R}^2}(z_n, \mathbf{0}) = 0$ は同値であることを示せ。

¹⁾このような表示ができないときは、 $f(\sigma)$ をいくつかの曲線に分割して考えればよい。

A を距離空間 (X, d) の閉集合とすると、 A の X における r -近傍 $\{x \in X; d(x, A) \leq r\}$ を $\mathcal{N}_r(A, X)$ または単に $\mathcal{N}_r(A)$ とあらわすことにする。ここで、 \mathbf{H}^2 における測地線 l の等距離近傍 $\mathcal{N}_r(l)$ の形をしらべる。

例 1.5 (測地線の等距離近傍). (1) まず、 l_0 が y -軸 $\{(0, y); 0 < y < \infty\}$ の場合を考える。 $p \in \mathbf{H}^2$ を、 $d(p, l_0) = r$ をみたす点とする。 p から l_0 におろした垂線の足を q とすると、 p と q をつなぐ測地線分 σ は、点 q で l_0 に直交する (図 1.2 (a) 参照)。したがって、 $q = (0, y_0)$ とおくと、命題 1.4 より、 σ は曲線 $c(t) = (y_0 \sin t, y_0 \cos t)$ ($-\pi/2 < t < \pi/2$) に含まれる。 $p = (y_0 \sin \theta, y_0 \cos \theta)$ とおくと、 $|c'(t)| = y_0$ であるから、 $\|c'(t)\| = \frac{y_0}{y_0 \cos t} = \frac{1}{\cos t}$ 。 よって $\theta > 0$ の場合、

$$r = \int_0^\theta \frac{1}{\cos t} dt = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta} \right).$$

これを θ について解くと、 $\theta = \sin^{-1}(\tanh r)$ となる。したがって、 $\mathcal{N}_r(l_0)$ は、原点を通る 2 つの半直線 $y = x/\tan \theta$, $y = -x/\tan \theta$ に挟まれた「くさび形」の図形である。特に、 $\mathcal{N}_r(l_0)$ の境界に直交する測地線は、 l_0 にも直交することがわかる。

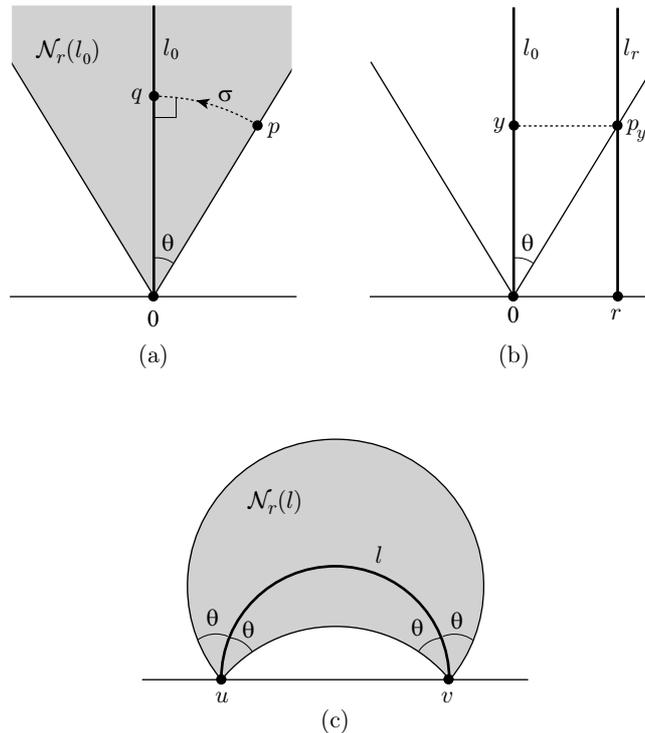


図 1.2

(2) $r > 0$ に対して、 l_0 に平行な半直線 $l_r = \{(r, y); y > 0\}$ を考える。 l_r は l_0 と共通の端点 ∞ をもつ \mathbf{H}^2 の測地線である (図 1.2 (b) 参照)。 l_r 上の

点 $p_y = (r, y)$ を考えると, $\sin \theta = \frac{r}{\sqrt{y^2 + r^2}}$ であるから, (1) の結果より,

$$d(p_y, l_0) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{\sqrt{y^2 + r^2} + r}{\sqrt{y^2 + r^2} - r} \right).$$

したがって, $\lim_{y \rightarrow \infty} d(p_y, l_0) = 0$.

(3) l が実軸上の 2 点 u, v を端点にもつ測地線の場合, 問題 1.1 と同様にして, $f(l_0) = l$ をみたく $f \in \text{PSL}_2(\mathbf{R})$ が存在する. 補題 1.3 より, f は \mathbf{H}^2 の等長変換であるから, $f(\mathcal{N}_r(l_0)) = \mathcal{N}_r(l)$ が成り立つ. f の等角性と円円対応性より, $\mathcal{N}_r(l)$ は, u, v で l と角度 $\theta = \sin^{-1}(\tanh r)$ で交わる 2 つの円弧で囲まれた「バナナ形」の図形である (図 1.2(c) 参照). $\mathcal{N}_r(l)$ の形より, \mathbf{H}^2 の測地線 l' が $\mathcal{N}_r(l)$ に含まれるならば, かならず $l' = l$ である.

命題 1.6. $\text{PSL}_2(\mathbf{R}) = \text{Isom}^+(\mathbf{H}^2)$.

証明. 補題 1.3 より, $\text{Isom}^+(\mathbf{H}^2) \subset \text{PSL}_2(\mathbf{R})$ を示せばよいことがわかる. $\text{Isom}^+(\mathbf{H}^2)$ の任意の要素 g をとる. また, $i \in \mathbf{H}^2$ における単位接ベクトル $v = (0, 1) \in T_i(\mathbf{H}^2)$ を考える.

問題 1.3. $f(i) = g(i)$, $f_*(v) = g_*(v)$ をみたく $f \in \text{PSL}_2(\mathbf{R})$ が存在することを示せ.

(命題 1.6 の証明の続き) i 以外の \mathbf{H}^2 の任意の点 z に対し, i と z を通る \mathbf{H}^2 の測地線 λ が存在する. λ には, 「 $i \rightarrow z$ 」が順路となるような向きがついているとする. f, g は等長変換であるから, $f(\lambda), g(\lambda)$ はともに \mathbf{H}^2 の測地線である. v と λ が i においてなす角度を θ とすると, f, g の等角性より, $f_*(v)$ と $f(\lambda)$ が点 $f(i)$ においてなす角度, $g_*(v)$ と $g(\lambda)$ が点 $g(i)$ においてなす角度はともに θ である (図 1.3 参照). これは, 向きをもつ測地線として $f(\lambda)$

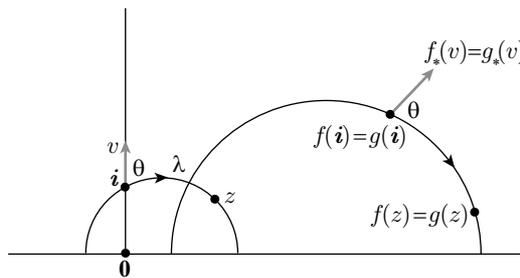


図 1.3

と $g(\lambda)$ が一致することを意味する. 一方,

$$\text{dist}(f(i), f(z)) = \text{dist}(i, z) = \text{dist}(g(i), g(z))$$

であるから, $f(z) = g(z)$ が成り立つ. したがって, $g = f \in \text{PSL}_2(\mathbf{R})$. \square

$f = f_A \in \mathrm{PSL}_2(\mathbf{R})$, $A = \pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対し,

$$D(f) = |\mathrm{trace}(A)| = |a + d|$$

とおく. $D(f)$ を使って, $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{R})$ の要素を分類する. 以下では, 写像 $g : X \rightarrow X$ の不動点集合を $\mathrm{Fix}(g)$, その濃度を $\#\mathrm{Fix}(g)$ であらわす.

定理 1.7. $f \neq \mathrm{Id}_{\mathbf{H}^2}$ とするとき, 次のいずれかが成り立つ.

- (1) $D(f) < 2$ のとき, $\#\mathrm{Fix}(f|_{\mathbf{H}^2}) = 1$, $\#\mathrm{Fix}(f|_{S_\infty^1}) = 0$. この f を楕円型変換 (elliptic transformation) という.
- (2) $D(f) > 2$ のとき, $\#\mathrm{Fix}(f|_{\mathbf{H}^2}) = 0$, $\#\mathrm{Fix}(f|_{S_\infty^1}) = 2$. この f を双曲型変換 (hyperbolic transformation) という.
- (3) $D(f) = 2$ のとき, $\#\mathrm{Fix}(f|_{\mathbf{H}^2}) = 0$, $\#\mathrm{Fix}(f|_{S_\infty^1}) = 1$. この f を放物型変換 (parabolic transformation) という.

証明. 必要ならば, A の $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{R})$ における共役をとることによって, $c \neq 0$ と仮定できる. このとき, $f = f_A$ の定義 (p.2) からわかるように, ∞ は f の不動点とはならない. したがって, $z \in \mathrm{Fix}(f|_{\mathbf{H}^2})$ であるための必要十分条件は, $\frac{az+b}{cz+d} = z$ である. すなわち, $cz^2 + (d-a)z + b = 0$. よって,

$$z = \frac{a-d \pm \sqrt{D(f)^2 - 4}}{2c}. \quad (1.4)$$

$z \in \mathbf{H}^2$ と $\mathrm{Im} z > 0$ が同値であり, $z \in S_\infty^1$ と $\mathrm{Im} z = 0$ が同値であることに注意せよ.

(1) $D(f) < 2$ のとき, (1.4) より $\mathrm{Im} z \neq 0$ である. さらに $z \in \overline{\mathbf{H}^2}$ より, $\mathrm{Im} z > 0$ であるから,

$$\mathrm{Fix}(f|_{\mathbf{H}^2}) = \left\{ \frac{a-d + \sqrt{4 - D(f)^2} i}{2c} \right\}, \quad \mathrm{Fix}(f|_{S_\infty^1}) = \emptyset.$$

(2) $D(f) > 2$ のとき, $\mathrm{Im} z = 0$ である. したがって,

$$\mathrm{Fix}(f|_{\mathbf{H}^2}) = \emptyset, \quad \mathrm{Fix}(f|_{S_\infty^1}) = \left\{ \frac{a-d \pm \sqrt{D(f)^2 - 4}}{2c} \right\}.$$

(3) $D(f) = 2$ のときは, (1.4) よりあきらかに,

$$\mathrm{Fix}(f|_{\mathbf{H}^2}) = \emptyset, \quad \mathrm{Fix}(f|_{S_\infty^1}) = \left\{ \frac{a-d}{2c} \right\}.$$

これで, 証明が完成した. □

定理 1.7 は、 \mathbb{H}^2 上の等長変換 f の不動点に関する情報しか与えていない。しかし、命題 1.6 より、 f は 1 次分数変換で与えられるので、円円対応性と等角性をもつ。これらの性質を組み合わせると、 \mathbb{H}^2 の等長変換の挙動がよくわかる。

(1) f が楕円型変換のとき、 $z \in \mathbb{H}^2$ を f の不動点とすると、 f は z から等距離円を不変にする。さらに、すべての等距離円に直交する測地線 λ の f による像 $f(\lambda)$ は、またすべての等距離円に直交する測地線である。(図 1.4 参照)。 λ と $f(\lambda)$ が z においてなす角度 θ を回転角という。 $\theta = 2\pi r$

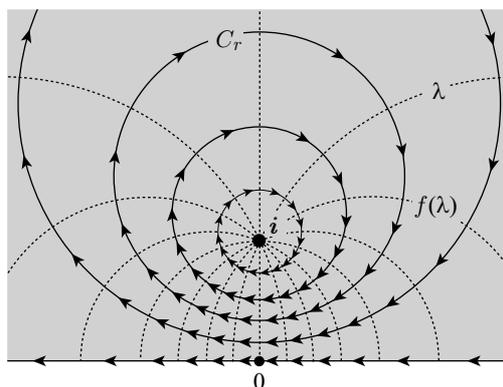


図 1.4 $\text{Fix}(f) = \{i\}$ の場合。 C_r は、 i を中心とする半径 r の等距離円。

($r = q/p; p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{Z}$) とあらわされるとき、 f を z を中心とする有理回転という。このとき、 $f^p = \text{Id}_{\mathbb{H}^2}$ であるから、 f は有限位数をもつ。 f が無理回転のとき、すなわち $\theta = 2\pi x$ ($x \notin \mathbb{Q}$) のとき、 f は無限位数をもつ。

(2) f が双曲型変換のとき、 $\text{Fix}(f|_{S^1_\infty}) = \{r, s\}$ とすると、 f は r, s を端点にもつ測地線 α_f を不変にする。この測地線を、 f の軸という(図 1.5(a) 参照)。さらに、 r, s を通る円弧 τ も不変にする。これは、 f が r, s を不変にするだけでなく、 τ と実軸 \mathbb{R} が r, s でなす角度 θ も保存するからである。 α_f に直交する測地線 λ の f による像 $f(\lambda)$ は、また α_f に直交する測地線である。 $s = \infty$ のとき、 f の軸 α は実軸 \mathbb{R} と r で直交する半直線であることに注意せよ(図 1.5(b) 参照)。 z を α_f 上の点とすると、 z の f -軌道 $\{f^n(z)\}_{n=-\infty}^\infty$ は α_f 上を r から s (または s から r) に向かう無限列である。特にこれから、 f が無限位数をもつことがわかる。

(3) f が放物型変換のとき、 $\text{Fix}(f_0|_{S^1_\infty}) = \{\infty\}$ のとき、定理 1.7 の証明でみたように、 $c = 0$ である。このとき、 $|a + d| = 2, ad = 1$ であるから、 $A = \pm \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ となる。すなわち、 $f_0(z) = z + b$ である。したがって、 f_0 は、水平線 $\eta = \{t + y_0 i; -\infty < t < \infty\}$ を不変にする。このような水平線を ∞ を基点にもつホロ円周 (horocircle) という(図 1.6(a) 参照)。 f_0 は η に直交する測地線 $\lambda = \{x_0 + ti; -\infty < t < \infty\}$ を、また η に直交する測地線に

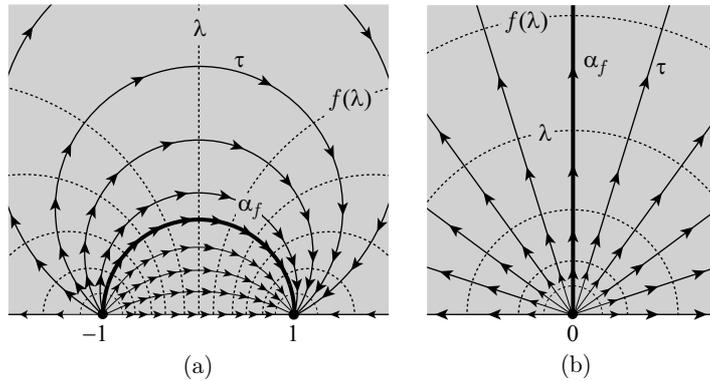


図 1.5 (a) $\text{Fix}(f) = \{-1, 1\}$ の場合 . (b) $\text{Fix}(f) = \{0, \infty\}$ の場合 .

写す . $\text{Fix}(f|_{S^1_\infty}) = \{r\} \subset \mathbf{R}$ のときの f は , ∞ を r に写す等長変換 h を使い , $f = h \circ f_0 \circ h^{-1}$ とあらわせる . したがって , f は点 r で \mathbf{R} に接する円周 $\eta = h(\eta_0)$ を不変にする (図 1.6 (b) 参照) . η を , r を基点にもつホ口円周という . (2) と同様に η 上にある点の f -軌道を考えると , f が無限位数をもつことがわかる .

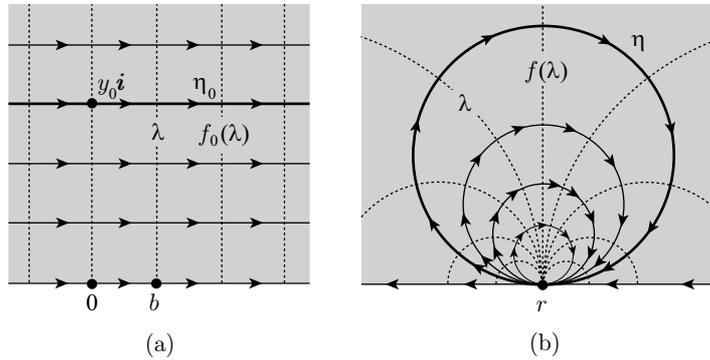


図 1.6

Poincaré 円板モデル . ここで \mathbf{H}^2 のもう一つの表現方法を与える . 単位開円板 $\mathbf{D}^2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 < 1\} = \{z \in \mathbf{C}; |z| < 1\}$ 上に計量

$$ds^2 = \frac{4(dx^2 + dy^2)}{(1 - x^2 - y^2)^2} = \frac{4|dz|^2}{(1 - |z|^2)^2} \quad (1.5)$$

が定義された Riemann 多様体を考える . $\partial_\infty \mathbf{D}^2 = \{z \in \mathbf{C}; |z| = 1\}$ を \mathbf{D}^2 の無限遠境界と考える . (1.5) より , 接ベクトル $v \in T_z(\mathbf{D}^2)$ のノルム $\|v\|_{\mathbf{D}^2}$ は

$$\|v\|_{\mathbf{D}^2} = \frac{2|v|}{1 - |z|^2} \quad (1.6)$$

で与えられることがわかる。

$\varphi: \widehat{\mathbf{C}} \rightarrow \widehat{\mathbf{C}}$ を, $\varphi(z) = \frac{z+i}{zi+1}$ で定義される 1 次分数変換とすると, 次の問いに答えよ。

問題 1.4. $\text{Im} \varphi(z) = \frac{1-|z|^2}{|zi+1|}$, $\varphi(\mathbf{D}^2) = \mathbf{H}^2$, $\varphi(\partial_\infty \mathbf{D}^2) = S_\infty^1$, $\varphi'(z) = \frac{2}{(zi+1)^2}$ が成り立つことを示せ (図 1.7 参照)。

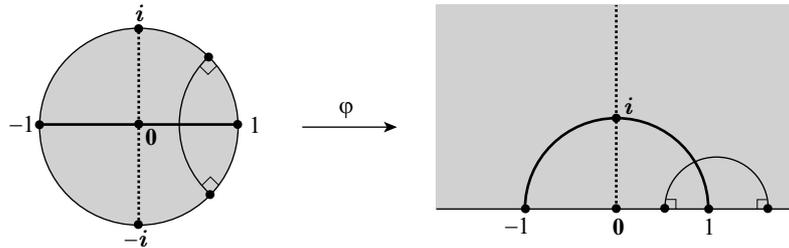


図 1.7

命題 1.8. $\varphi|_{\mathbf{D}^2}: \mathbf{D}^2 \rightarrow \mathbf{H}^2$ は等長写像である。

証明. 問題 1.4 より, 任意の $z \in \mathbf{D}^2$, $v \in T_z(\mathbf{D}^2)$ に対して,

$$\|\varphi_*(v)\|_{\mathbf{H}^2} \stackrel{(1.2)}{=} \frac{|\varphi_*(v)|}{\text{Im} \varphi(z)} = \frac{2|v|}{|zi+1|^2} \frac{|zi+1|^2}{1-|z|^2} = \frac{2|v|}{1-|z|^2} \stackrel{(1.6)}{=} \|v\|_{\mathbf{D}^2}.$$

したがって, φ は等長写像である。□

命題 1.8 より, \mathbf{H}^2 と \mathbf{D}^2 は φ を媒介にして同一視できることがわかった。 \mathbf{D}^2 を双曲平面の Poincaré 円板モデル (Poincaré disk model) という。

系 1.9. \mathbf{D}^2 の測地線は, $\partial_\infty \mathbf{D}^2$ に直交する円弧または直径である。

証明. 命題 1.8 より, φ は等長写像であるから, \mathbf{D}^2 の任意の測地線 α に対し, $\varphi(\alpha)$ は \mathbf{H}^2 の測地線である。命題 1.4 より, $\varphi(\alpha)$ は実軸 \mathbf{R} に直交する半直線または半円である。 φ の逆写像 φ^{-1} は $\varphi^{-1}(z) = \frac{z-i}{-zi+1}$ で定義される 1 次分数変換であるから, 等角性と円円対応性をもつ。したがって, $\alpha = \varphi^{-1}(\varphi(\alpha))$ は, $\partial_\infty \mathbf{D}^2$ に直交する円弧または直径である。□

Poincaré 円板モデルの長所は, 閉包 $\overline{\mathbf{D}^2} = \mathbf{D}^2 \cup \partial_\infty \mathbf{D}^2$ が単位円板なので, 双曲平面全体を見渡すことができることにある。一方, 上半空間モデル \mathbf{H}^2 の長所は, 計量 (1.1) が単純な形なので, 弧長や面積を計算するのが容易であり, $\text{Isom}^+(\mathbf{H}^2) = \text{PSL}_2(\mathbf{R})$ となるので等長変換がわかりやすいことにある。以下では, \mathbf{D}^2 の無限遠境界 $\partial_\infty \mathbf{D}^2$ も S_∞^1 とあらわす。

1.2 双曲平面と Fuchs 群

群 G が位相空間 X に連続的に作用しているとする．これを $G \curvearrowright X$ とあらわす．作用 (action) $G \curvearrowright X$ とは, 各要素 $g \in G$ に, 次の条件 (1), (2) をみたすような連続変換 $\hat{g}: X \rightarrow X$ を対応させる操作である．

- (1) 単位元 $1 \in G$ に対して, $\hat{1} = \text{Id}_X$.
 (2) 任意の $g, h \in G$ に対して, $\widehat{gh} = \hat{g} \circ \hat{h}$.

(1), (2) より, $\widehat{g^{-1}} = \hat{g}^{-1}$ がいえるので, \hat{g} は X の同相変換である．以下では, G の要素 g と \hat{g} を同一視し, g 自身が X の同相変換であると考え, $\hat{g}(x) = gx$ とあらわす．任意の $g \in G \setminus \{1\}$, 任意の $x \in X$ に対して, $gx \neq x$ であるとき, 作用 $G \curvearrowright X$ は自由 (free) であるという．作用 $G \curvearrowright X$ が真性不連続 (properly discontinuous) であるとは, X の任意のコンパクト集合 K に対し, $gK \cap K \neq \emptyset$ をみたす $g \in G$ が高々有限個であることを意味する．

命題 1.10. X を n 次元 (位相) 多様体とする． G が X に自由かつ真性不連続に作用しているとき, 商写像 $p: X \rightarrow M = X/G$ は被覆射影であり, 商空間 M は n 次元 (位相) 多様体である．

証明. X の任意の点 x_0 を内点としてもつ n 次元球体 B を考える．作用 $G \curvearrowright X$ は真性不連続であるから, $gB \cap B \neq \emptyset$ となる $g \in G \setminus \{1\}$ は有限個である．これらを g_1, \dots, g_m とする．また, $g_i x_0 \neq x_0$ であるから, 必要ならば B をより小さい球体で置き換えることによって, $gB \cap B = \emptyset$ ($g \in G \setminus \{1\}$) と仮定できる．したがって, 商写像 p の制限 $p|_{\text{Int}B}: \text{Int}B \rightarrow p(\text{Int}B)$ は $p(x_0)$ を含む n 次元 Euclid 開球体 $U = p(\text{Int}B)$ 上への同相写像である．ここで, U が商空間 M の開集合であることは, $p^{-1}(U) = \bigcup_{g \in G} g(\text{Int}B)$ が X の開集合であることからいえる．これから, p が射影被覆であることも示される． M の各点は n 次元開球体と同相な開近傍をもつことがいえたので, 次の問題 1.5 と併せて, M が n 次元多様体であることが示される． \square

問題 1.5. 命題 1.10 の商空間 M はハウスドルフ空間であることを示せ．

命題 1.10 の証明からもわかるように, X が C^r -多様体であり $G \curvearrowright X$ が C^r -微分同相作用であるとき (すなわち各 $g \in G$ が, X の C^r -微分同相変換であるとき), M 上には p が局所 C^r -微分同相写像となるような C^r -可微分構造が矛盾なく定義できる．同様に, X が Riemann 多様体であり $G \curvearrowright X$ が等長作用であるとき (すなわち各 $g \in G$ が, X の等長変換であるとき), M 上には p が局所等長写像となるような Riemann 計量が一意的に定義できる．このような M 上の計量を (p を経由して) X から誘導された計量という．命題 1.6 より, 1 次分数変換が定義する作用 $\text{PSL}_2(\mathbf{R}) \curvearrowright \mathbf{H}^2$ は等長的である．

$\text{SL}_2(\mathbf{R})$ の要素は 4 つの実成分からなるので Euclid 空間 \mathbf{E}^4 の要素とみなせる．したがって, $\text{SL}_2(\mathbf{R})$ には \mathbf{E}^4 の部分空間としての位相が入る．また,

$\mathrm{PSL}_2(\mathbf{R})$ 上には $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$ の商位相が入る．すなわち， $A_n = \pm \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \in \mathrm{PSL}_2(\mathbf{R})$ の点列 $\{A_n\}$ が， $A = \pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{PSL}_2(\mathbf{R})$ に収束するとは， $\varepsilon_n = \pm 1$ を適当にとると， $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n a_n = a$ ， $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n b_n = b$ ， $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n c_n = c$ ， $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n d_n = d$ となることをいう．

定義 1.11. $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{R})$ の離散群を **Fuchs 群** (Fuchsian group) という．

命題 1.12. G を $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{R})$ の部分群とするととき，次の (1), (2) が成り立つ．

- (1) G が Fuchs 群であるための必要十分条件は，等長作用 $G \curvearrowright \mathbf{H}^2$ が真性不連続となることである．
- (2) G を Fuchs 群とするととき，等長作用 $G \curvearrowright \mathbf{H}^2$ が自由であるための必要十分条件は， G が楕円型要素を含まないことである．またこれは， G が有限位数の要素をもたない（すなわちねじれをもたない）ことと同値である．

証明. (1) G が Fuchs 群ではないと仮定する．このとき， G は $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{R})$ の離散集合ではないので， G の相異なる成分からなる無限列 $\{g_n\}$ で， $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{R})$ のある要素 h に収束するものが存在する． $f_n \in G$ を， $f_n = g_n \circ g_{n+1}^{-1}$ で定義すると， $f_n \neq \mathrm{Id}_{\mathbf{H}^2}$ ， $\{f_n\} \rightarrow h \circ h^{-1} = \mathrm{Id}_{\mathbf{H}^2}$ をみたく．したがって， \mathbf{H}^2 内の閉円板 B に対して，ある自然数 n_0 が存在して， $f_n B \cap B \neq \emptyset$ ($n \geq n_0$) が成り立つ．これは作用 $G \curvearrowright \mathbf{H}^2$ が真性不連続でないことを意味する．

逆に，作用 $G \curvearrowright \mathbf{H}^2$ が真性不連続ではないと仮定する．このとき， $g_n K \cap K \neq \emptyset$ をみたく \mathbf{H}^2 のコンパクト集合 K と， $G \setminus \{1\}$ の無限列 $\{g_n\}$ が存在する． $x_0 \in K$ を決めておく．各 g_n は等長変換であるから， $\mathrm{dist}(x_0, g_n(x_0)) \leq \mathrm{diam}(K) + \mathrm{diam}(g_n K) = 2\mathrm{diam}(K)$ ．したがって， $\{g_n\}$ の部分列 $\{g'_m\}$ で， $\{g'_m(x_0)\}$ が \mathbf{H}^2 の収束列となるものが存在する． $\lim_{m \rightarrow \infty} g'_m(x_0) = y_0$ とおく． e_1, e_2 を $T_{x_0}(\mathbf{H}^2)$ の正規直交基底とすると， $\{(g'_m)_*(e_1), (g'_m)_*(e_2)\}$ は $T_{g'_m(x_0)}(\mathbf{H}^2)$ の正規直交基底である．このとき $\{g'_m\}$ の部分列 $\{g''_k\}$ で， $\{(g''_k)_*(e_1), (g''_k)_*(e_2)\}$ が $T_{y_0}(\mathbf{H}^2)$ のある正規直交基底 e'_1, e'_2 に収束するものが存在する．問題 1.3 と同様に， $h(x_0) = y_0$ ， $h_*(e_j) = e'_j$ ($j = 1, 2$) をみたく $h \in \mathrm{PSL}_2(\mathbf{R})$ が存在する．こととき，命題 1.6 の証明と同様にして， $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{R})$ において $\{g''_k\} \rightarrow h$ が示せる．これは， G が $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{R})$ の離散群でないこと，すなわち G が Fuchs 群ではないことを意味する．

(2) 定理 1.7 でみたように， $g \in G \setminus \{1\}$ が \mathbf{H}^2 に不動点をもつための必要十分条件は， g が楕円型要素となることである．したがって，(2) の前半の主張が成り立つ．

p. 7 でみたように， $g \in G \setminus \{1\}$ が有限位数ならば， g は楕円型である．一方， g を無理回転をもつ楕円型要素とすると， g の生成する G の部分群が離

散的でないことは容易に示せる．したがって， g が Fuchs 群 G の楕円型要素のとき， g は有理回転をもつ．よって，その位数は有限である． \square

系 1.13. G がねじれをもたない Fuchs 群であるとき，商写像 $p: \mathbf{H}^2 \rightarrow \Sigma = \mathbf{H}^2/G$ は被覆射影であり， Σ は \mathbf{H}^2 から誘導された計量をもつ曲面である．さらに， Σ は向き付け可能である．

証明. 命題 1.12 より， G がねじれをもたない Fuchs 群のとき，等長作用 $G \curvearrowright \mathbf{H}^2$ は自由かつ真性不連続である．したがって，命題 1.10 より，前半の主張が証明される．

各要素 $g \in G$ が定義する \mathbf{H}^2 上の等長変換は， \mathbf{H}^2 の向きを保存する変換である．したがって， p が向きを保存する射影となるような Σ 上の向きが矛盾なく定義される． \square

定義 1.14. 系 1.13 で与えられた Σ 上の誘導計量を，双曲計量 (hyperbolic metric) といい，このような計量をもつ曲面を (向き付け可能な) 双曲曲面 (hyperbolic surface) または双曲 2 次元多様体という．

1.3 双曲 3 角形

\mathbf{H}^2 内の測地線分を辺にもつ 3 角形を，双曲 3 角形という．以下では，2 点 $x, y \in \mathbf{H}^2$ をつなぐ測地線分を $\overline{x, y}$ とあらわし，頂点 $x, y, z \in \mathbf{H}^2$ をもつ双曲 3 角形を $\Delta(x, y, z)$ とあらわすことにする．

最初に，双曲 3 角形に関する正弦定理と余弦定理を紹介する．証明は谷口-奥村 [TO, 定理 6.4], 深谷 [Fu, §3.2], Beardon [Be, §7.12] 等を参照せよ．これ以降，双曲 3 角形 Δ の 3 辺を a, b, c ，またそれらの対角を α, β, γ とする．簡単のため，これら 3 辺の長さも a, b, c であらわす (図 1.8 (a) 参照)．

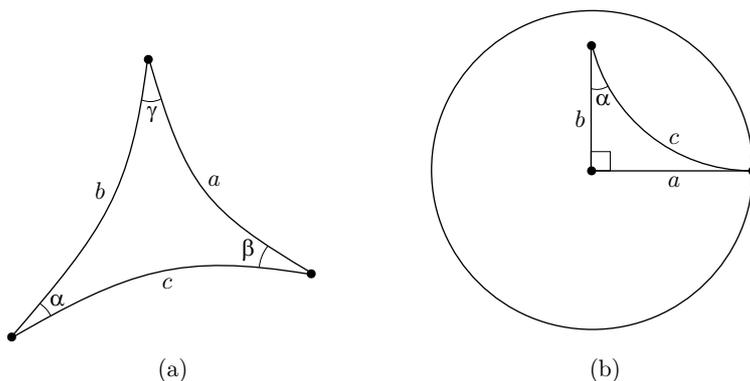


図 1.8

定理 1.15. 双曲 3 角形は次の等式をみたす .

(正弦定理)

$$\frac{\sinh a}{\sin \alpha} = \frac{\sinh b}{\sin \beta} = \frac{\sinh c}{\sin \gamma}.$$

(余弦定理)

$$\cosh c = \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \cos \gamma.$$

系 1.16 (双曲直角 3 角形). $\gamma = \pi/2$ のとき, 次の等式が成り立つ .

$$\sinh a = \sinh c \sin \alpha, \quad \sinh b = \sinh c \sin \beta, \quad \cosh c = \cosh a \cosh b.$$

双曲 3 角形を一般化し, 双曲 3 角形の頂点 v が S_∞^1 上にある場合も考える . このような頂点を理想頂点 (ideal vertex) という . 双曲 3 角形 Δ が少なくとも一つの理想頂点をもつとき, Δ を理想双曲 3 角形という . 理想頂点での Δ の内角は零であり, 理想頂点を端点にもつ Δ の 2 辺の長さは無限である .

系 1.17 (理想双曲直角 3 角形). $\gamma = \pi/2$ とする (図 1.8 (b) 参照) . $\beta = 0$ のとき (すなわち $a, c = \infty$ のとき), 次の等式が成り立つ .

$$\cos \alpha = \tanh b.$$

証明. $\beta > 0$ のとき, 角 α に関する余弦定理より,

$$\cos \alpha = \frac{\cosh b \cosh c - \cosh a}{\sinh b \sinh c} = \frac{\cosh b \cosh c}{\sinh b \sinh c} - \frac{1}{\sinh b \cosh b} \frac{\cosh c}{\sinh c}.$$

最後の項は, 系 1.16 の等式を利用して $\cosh a$ を $\frac{\cosh c}{\cosh b}$ に置き換えたものである . ここで, $\beta \rightarrow 0$ とすると, $c \rightarrow \infty$ である . $\lim_{c \rightarrow \infty} \frac{\cosh c}{\sinh c} = 1$ であるから, $\beta = 0$ のとき,

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\cosh b}{\sinh b} - \frac{1}{\sinh b \cosh b} = \frac{1}{\sinh b} \left(\frac{\cosh^2 b - 1}{\cosh b} \right) \\ &= \frac{1}{\sinh b} \left(\frac{\sinh^2 b}{\cosh b} \right) = \tanh b. \end{aligned}$$

これが求める等式である . □

系 1.18. $\delta = \log 3$ とおく . このとき, 任意の (理想) 双曲 3 角形 Δ の任意の 1 辺 c は, $a \cup b$ の δ -近傍 $\mathcal{N}_\delta(a \cup b, \mathbf{H}^2)$ に含まれる .

証明. Δ' を Δ を含み, すべての頂点が理想頂点である双曲 3 角形とする . ただし, Δ' は c を含む辺 c' をもつとする . Δ' は, その内心を頂点としてもつ 6 個の理想双曲直角 3 角形 T_i ($i = 1, \dots, 6$) に分割される . T_i は内角 $\pi, \pi/3, 0$ をもつ (図 1.9 参照) . 内角 0 に対応する T_i の辺を r とすると, 系 1.17 より, $\tanh r = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$. ゆえに, $r = \frac{1}{2} \log 3$. したがって, c の任意の点 x に対し, $\text{dist}(x, a' \cup b') \leq \log 3 = \delta$ が成り立つ . $\Delta \subset \Delta'$ より, $\text{dist}(x, a \cup b) \leq \log 3$. よって, $c \subset \mathcal{N}_\delta(a \cup b)$. □

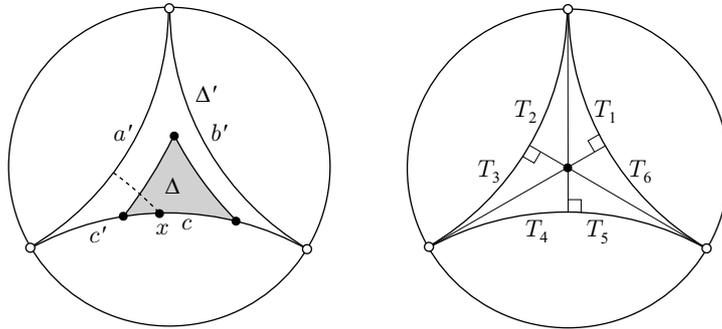


図 1.9

3 角形 Δ のどの 1 辺も、他の 2 辺の r -近傍に含まれるとき、 Δ は r -スリム (slim) であるという。したがって、系 1.18 の主張は、

「任意の双曲 3 角形は、 $\log 3$ -スリムである」

と言い換えることができる。実は 3 角形のスリム性こそが双曲性の本質であることが後でわかる。

1.4 Gromov 積と無限遠境界

以下の議論では、 $H^2 = D^2$ とする。また、閉包 $\overline{D^2} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$ 上には Euclid 計量が与えられているとし、それを B^2 とあらわす。2 点 $x, y \in B^2$ の Euclid 距離を、 $d_B(x, y)$ とあらわす。 B^2 の点列 $\{x_n\}$ が d_B -計量に関し $x \in B^2$ に収束するとき、すなわち $\lim_{n \rightarrow \infty} d_B(x_n, x) = 0$ のとき、これを $\{x_n\} \xrightarrow{B} x$ とあらわす。

本節の目標は、「無限遠点に収束する」という概念を、 d_B -計量を使わず、双曲距離のことばのみであらわすことにある。そのとき、重要な役割を果たすのが Gromov 積の概念である。

定義 1.19. (X, d) を基点 $x_0 \in X$ をもつ距離空間とする。

$$(x, y)_{x_0} = \frac{1}{2}(d(x, x_0) + d(y, x_0) - d(x, y))$$

を x_0 に関する $x, y \in X$ の Gromov 積 (Gromov product) という。

Gromov 積の幾何的意味を説明する。まずは、 (X, d) が木 (すなわち可縮なグラフ) の場合を考える。 T を基点 x_0 をもつ木とする。測地線分 $\overline{x, x_0}, \overline{y, x_0}$ の共通部分も測地線分である。 $\overline{x, x_0} \cap \overline{y, x_0}$ の x_0 以外の端点を z とおく。ただし、 $\overline{x, x_0} \cap \overline{y, x_0} = \{x_0\}$ ときは、 $z = x_0$ とおく。このとき、 $(x, y)_{x_0} = d(x_0, z)$ である。したがって、 $(x, y)_{x_0}$ は、 x_0 と $\overline{x, y}$ の間の距離 $d(x_0, \overline{x, y})$ に一致する (図 1.10 (a) 参照)。

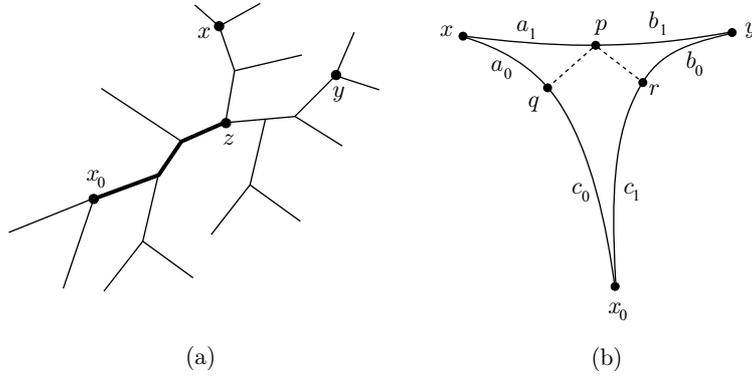


図 1.10

次に，双曲平面 \mathbf{H}^2 の場合を考える．以下では，実数 s, t に対し，関係式 $|s - t| \leq \varepsilon$ を $s \sim_\varepsilon t$ とあらわす．系 1.18 より， $\delta = \log 3$ とおくと，任意の双曲 3 角形は δ -スリムである． \mathbf{H}^2 内の双曲 3 角形 $\Delta(x, y, x_0)$ は δ -スリム性と $\overline{x, y}$ の連結性より，3 点 $p \in \overline{x, y}$ ， $q \in \overline{x, x_0}$ ， $r \in \overline{y, x_0}$ で， $d(p, q) \leq \delta$ ， $d(p, r) \leq \delta$ をみたすものがある（図 1.10 (b) 参照）．このとき， $d(x, q) = a_0$ ， $d(x, p) = a_1$ ， $d(y, r) = b_0$ ， $d(y, p) = b_1$ ， $d(x_0, q) = c_0$ ， $d(x_0, r) = c_1$ とおく．

$$\begin{aligned} 2c_0 &= c_0 + c_0 \sim_{2\delta} c_0 + c_1 = d(x, x_0) + d(y, x_0) - (a_0 + b_0) \\ &\sim_{2\delta} d(x, x_0) + d(y, x_0) - (a_1 + b_1) = 2(x, y)_{x_0}. \end{aligned}$$

ゆえに， $c_0 \sim_{2\delta} (x, y)_{x_0}$ が成り立つ．よって，

$$(x, y)_{x_0} \leq c_0 + 2\delta \leq d(x_0, x) + 2\delta, \quad (1.7)$$

$$d(x_0, \overline{x, y}) \leq d(x_0, p) \leq d(x_0, q) + d(q, p) \leq c_0 + \delta \leq (x, y)_{x_0} + 3\delta. \quad (1.8)$$

(1.8) とは逆向き不等式を証明するため， $\overline{x, y}$ の任意の点 s をとる． $s \in \overline{x, p}$ と仮定する． $\Delta(p, q, x)$ の δ -スリム性より， $\overline{q, x} \cup \overline{q, p}$ の点 t で， $d(t, s) \leq \delta$ をみたすものが存在する（図 1.11 参照）． $t \in \overline{q, x}$ のときは， $u = t$ とすると， $d(u, s) \leq \delta$ ． $t \in \overline{q, p}$ のときは， $u = q$ とすると， $d(u, s) \leq d(q, t) + d(t, s) \leq 2\delta$ ．よって，

$$d(x_0, s) \geq d(x_0, u) - d(u, s) \geq c_0 - 2\delta \stackrel{(1.7)}{\geq} (x, y)_{x_0} - 4\delta.$$

$s \in \overline{x, y}$ の任意性より， $d(x_0, \overline{x, y}) \geq (x, y)_{x_0} - 4\delta$ が成り立つ．この不等式と (1.8) を併せて，

$$d(x_0, \overline{x, y}) \sim_{4\delta} (x, y)_{x_0} \quad (1.9)$$

が得られる．すなわち， $d(x_0, \overline{x, y})$ と $(x, y)_{x_0}$ の誤差は 4δ 以内である．

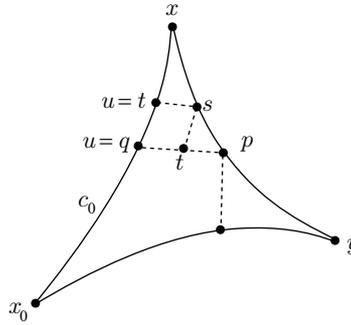


図 1.11

以下では、 H^2 の基点として B^2 の原点 0 をとり、 $(x, y)_0$ を単に (x, y) とあらわすことにする。

(X, d) を距離空間とすると、 X の点 x を中心とする半径 r の球体 $\{y \in X; d(x, y) \leq r\}$ を $B_r(x, X)$ または単に $B_r(x)$ とおく。すなわち、 $B_r(x, X) = \mathcal{N}_r(\{x\}, X)$ である。

命題 1.20. H^2 の点 $\{a_n\}$ が d_B -計量で S^1_∞ の点に収束するための必要十分条件は、 $\lim_{m, n \rightarrow \infty} (a_m, a_n) = \infty$ である。

証明. $\{a_n\} \xrightarrow{B} x \in S^1_\infty$ とすると、任意の $r > 0$ に対して、 $a_n \in B_r(x, B^3)$ ($n \geq n_0$) をみたま $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在する。したがって、 $\overline{a_m, a_n} \subset B_r(x, B^2)$ ($m, n \geq n_0$)。 (1.9) より、 $(a_m, a_n) \geq d(0, \overline{a_m, a_n}) - 4\delta$ が成り立つ。 $r \searrow 0$ のとき、 $d(0, \overline{a_m, a_n}) \nearrow \infty$ であるから、 $\lim_{m, n \rightarrow \infty} (a_m, a_n) = \infty$ (図 1.12 参照)。

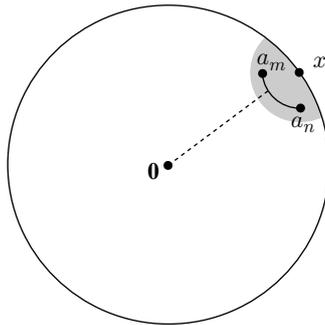


図 1.12 部分は $B_r(x, B^2)$ をあらわす。

逆に $\lim_{m, n \rightarrow \infty} (a_m, a_n) = \infty$ のとき、(1.9) より、 $\lim_{m, n \rightarrow \infty} d(0, \overline{a_m, a_n}) = \infty$ がいえる。これから、 $\{a_n\}$ が B^2 における Cauchy 列 (したがって収束列) であることがわかる。 $\lim_{n \rightarrow \infty} d(0, a_n) = \infty$ より、 $\{a_n\}$ の収束点は S^1_∞ に含まれる。 \square

補題 1.21. $\{a_n\}, \{b_n\}$ を, \mathbf{B}^2 において, $x \in S_\infty^1, y \in \mathbf{B}^2$ に収束する点列とする. $x = y$ のとき, $\liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n, b_n) = \infty$. $x \neq y$ のとき, 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n, b_n)$ が存在する. さらに, この極限値は x, y に収束する点列の取りかたによらず一定である. 以下, この極限値を (x, y) とあらわす.

証明. $x = y \in \partial X$ の場合, 命題 1.20 の証明と同様な議論で $\liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n, b_n) = \infty$ がいえる.

次に, $x \neq y$ の場合を考える. ここでは, $y \in S_\infty^1$ と仮定する²⁾. $r > 0$ が十分小さいとき, $B_r(x, \mathbf{B}^2) \cap \overline{0, y} = \emptyset, B_r(y, \mathbf{B}^2) \cap \overline{0, x} = \emptyset$ となる. $\overline{0, x}$ と $B_r(x, \mathbf{B}^2)$ の境界との交点を $x_r, \overline{0, y}$ と $B_r(y, \mathbf{B}^2)$ の境界との交点を y_r とする. また, x_r, y_r から最短にある $\overline{x, y}$ 上の点を x'_r, y'_r とする (図 1.13 参照). 例

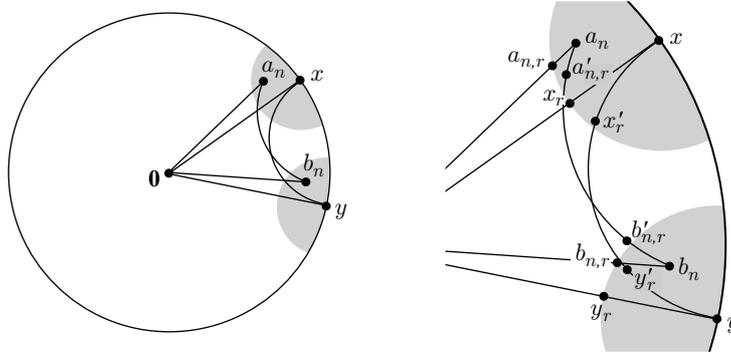


図 1.13 点線部分は $B_r(x, \mathbf{B}^2), B_r(y, \mathbf{B}^2)$ をあらわす.

1.5(2) より, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $d(x_r, x'_r) < \varepsilon/2, d(y_r, y'_r) < \varepsilon/2$ をみたすように $r > 0$ がとれる. x_r, y_r と同様に $\overline{0, a_n}, \overline{0, b_n}$ と $B_r(x, \mathbf{B}^2), B_r(y, \mathbf{B}^2)$ の境界との交点 $a_{n,r}, b_{n,r}$ が定義される. また, $a'_{n,r}, b'_{n,r}$ を $a_{n,r}, b_{n,r}$ から最短にある $\overline{a_n, b_n}$ 上の点とする. 双曲 3 角形 $\Delta(0, a_n, b_n)$ は, $\Delta(0, x, y)$ に Hausdorff 収束するので, $d(a_{n,r}, x_r) < \varepsilon/2, d(a'_{n,r}, x'_r) < \varepsilon/2, d(b_{n,r}, y_r) < \varepsilon/2, d(b'_{n,r}, y'_r) < \varepsilon/2$ ($n \geq n_0$) をみたす $n_0 \in \mathbf{N}$ が存在する. このとき, $d(x_r, a'_{n,r}) < \varepsilon, d(y_r, b'_{n,r}) < \varepsilon, d(a_{n,r}, a'_{n,r}) < 3\varepsilon/2, d(b_{n,r}, b'_{n,r}) < 3\varepsilon/2$. し

²⁾ $y \in \mathbf{H}^2$ の場合の証明も同様である

たがって, $n \geq n_0$ のとき,

$$\begin{aligned} (a_n, b_n) &= \frac{1}{2}(d(\mathbf{0}, a_n) + d(\mathbf{0}, b_n) - d(a_n, b_n)) \\ &= \frac{1}{2}(d(\mathbf{0}, a_{n,r}) + d(a_{n,r}, a_n) + d(\mathbf{0}, b_{n,r}) + d(b_{n,r}, b_n) \\ &\quad - d(a_n, a'_{n,r}) - d(a'_{n,r}, b'_{n,r}) - d(b'_{n,r}, b_n)) \\ &\sim_{3\varepsilon/2} \frac{1}{2}(d(\mathbf{0}, a_{n,r}) + d(\mathbf{0}, b_{n,r}) - d(a'_{n,r}, b'_{n,r})) \\ &\sim_{3\varepsilon/2} \frac{1}{2}(d(\mathbf{0}, x_r) + d(\mathbf{0}, y_r) - d(x_r, y_r)) = (x_r, y_r). \end{aligned}$$

ゆえに, $(a_n, b_n) \sim_{3\varepsilon} (x_r, y_r)$. このとき,

$$|(a_m, b_m) - (a_n, b_n)| \leq 6\varepsilon \quad (m, n \geq n_0)$$

より, $\{(a_n, b_n)\}$ は Cauchy 列. したがって収束列であることがわかる. (x_r, y_r) は, $\{a_n\}, \{b_n\}$ の選び方によらないので, 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n, b_n)$ もその選び方によらない. \square

問題 1.6. $\{a_n\}, \{b_n\}$ を無限遠点に収束する \mathbf{H}^2 の点列とする. ある定数 $C > 0$ と任意の n に対し, $d(a_n, b_n) < C$ が成り立つとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ となることを示せ.

(ヒント: $(a_n, b_n) = \frac{1}{2}(d(a_n, \mathbf{0}) + d(b_n, \mathbf{0}) + d(a_n, b_n)) \sim_C d(a_n, \mathbf{0})$.)

命題 1.22. \mathbf{B}^2 の点列 $\{x_n\}$ が S_∞^1 の点 x に収束するための必要十分条件は, $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, x) = \infty$.

証明. $\{x_n\}$ が S_∞^1 の点列の場合のみを考える. $\{a_m\}, \{b_m^{(n)}\}$ を $\{a_m\} \xrightarrow{B} x$, $\{b_m^{(n)}\} \xrightarrow{B} x_n$ をみたす \mathbf{H}^2 内の点列とする. 補題 1.21 より,

$$(x_n, x) = \lim_{m \rightarrow \infty} (b_m^{(n)}, a_m) \stackrel{(1.9)}{\geq} \lim_{m \rightarrow \infty} d(\mathbf{0}, \overline{b_m^{(n)}, a_m}) - 4\delta = d(\mathbf{0}, \overline{x_n, x}) - 4\delta.$$

同様に, $(x_n, x) \leq d(\mathbf{0}, \overline{x_n, x}) + 4\delta$. したがって, $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, x) = \infty$ であるための必要十分条件は, $\lim_{n \rightarrow \infty} d(\mathbf{0}, \overline{x_n, x}) = \infty$. これは, $\{x_n\} \xrightarrow{B} x$ に同値である. \square

1.5 Gauss-Bonnet の定理

この節では, 双曲閉曲面に関する Gauss-Bonnet の定理を証明する.

補題 1.23. Δ は, $\gamma = 0$ となる理想双曲 3 角形とする. このとき,

$$\text{Area}(\Delta) = \pi - (\alpha + \beta).$$

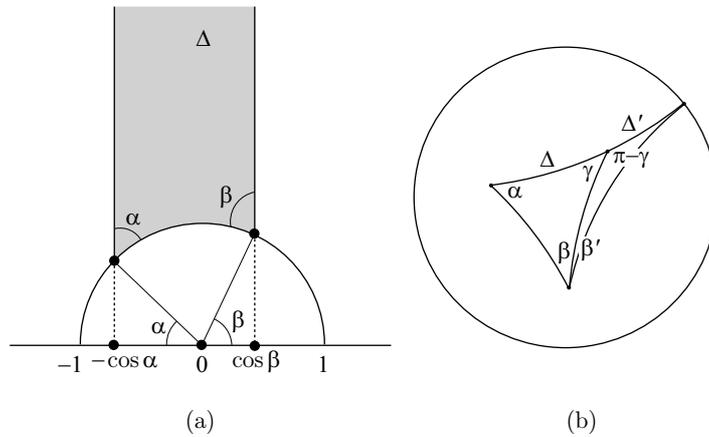


図 1.14

証明. 必要ならば, Δ を H^2 の等長変換で移動して, Δ の理想頂点は ∞ であり, 他の 2 頂点は原点を中心とする Euclid 半径 1 の半円上にあると仮定できる (図 1.14 (a) 参照). H^2 の計量 (1.1) の形より, 面積要素は $\frac{dx dy}{y^2}$ であるので,

$$\begin{aligned} \text{Area}(\Delta) &= \iint_{\Delta} \frac{dx dy}{y^2} = \int_{-\cos \alpha}^{\cos \beta} dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \frac{1}{y^2} dy = \int_{-\cos \alpha}^{\cos \beta} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &\stackrel{(1)}{=} \int_{\pi-\alpha}^{\beta} \frac{1}{\sin \theta} (-\sin \theta) d\theta = \pi - (\alpha + \beta). \end{aligned}$$

ただし, 上の等号 “ $\stackrel{(1)}{=}$ ” では, 変数変換 $x = \cos \theta$ をおこなった. □

定理 1.24. Δ を内角 α, β, γ をもつ双曲 3 角形とする. このとき,

$$\text{Area}(\Delta) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma).$$

$\text{Area}(\Delta) > 0$ であるから, 定理 1.24 より, 双曲 3 角形の内角の総和は π より小さいことがいえる. また, 双曲 3 角形の面積が最大になるのは, $\alpha = \beta = \gamma = 0$ のとき, すなわち, すべての頂点が理想的であるときに限ることがわかる.

証明. 図 1.14 (b) にあるような理想双曲 3 角形 Δ' を考える. このとき, $\Delta \cup \Delta'$ も理想双曲 3 角形である. Δ' の 2 つの内角は, $\pi - \gamma$ と 0 である. 残りの内角を β' とおく. このとき, $\Delta \cup \Delta'$ は内角 $\alpha, \beta + \beta', 0$ をもつ. 補題 1.23 より,

$$\begin{aligned} \text{Area}(\Delta \cup \Delta') &= \pi - (\alpha + (\beta + \beta')), \\ \text{Area}(\Delta') &= \pi - ((\pi - \gamma) + \beta') = \gamma - \beta'. \end{aligned}$$

したがって, $\text{Area}(\Delta) = \text{Area}(\Delta \cup \Delta') - \text{Area}(\Delta') = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$. □

ここで閉曲面の Euler 標数について簡単に復習しておく。 Σ を閉曲面（すなわちコンパクトで境界をもたない曲面）とし、 τ を Σ の位相的 3 角形分割とする。 τ は、頂点、辺、面（位相的 3 角形）からなる。 τ の頂点数、辺数、面数をそれぞれ $v(\tau), e(\tau), f(\tau)$ であらわす。このとき

$$\chi(\Sigma) = v(\tau) - e(\tau) + f(\tau)$$

を、 Σ の Euler 標数という。よく知られているように、閉曲面の Euler 標数は、その 3 角形分割のとりかたによらず、 Σ のみによって決まる。 $g: \Sigma \rightarrow \Sigma'$ を同相写像とすると、 g は Σ の 3 角形分割 τ を Σ' の 3 角形分割 τ' に写す。このとき、 $v(\tau) = v(\tau'), e(\tau) = e(\tau'), f(\tau) = f(\tau')$ であるから、 $\chi(\Sigma) = \chi(\Sigma')$ である。これから、 Euler 標数が閉曲面の位相不変量であることがわかる。 Σ が種数 g の閉曲面のとき、 $\chi(\Sigma) = 2(1 - g)$ が成り立つ。

定理 1.25 (Gauss-Bonnet の定理). 双曲閉曲面 Σ は次の等式をみたす。

$$\text{Area}(\Sigma) = -2\pi\chi(\Sigma).$$

この定理の重要性は、双曲閉曲面の面積という「幾何不変量」が、 Euler 標数という「位相不変量」で与えられることにある。また、閉曲面 Σ が双曲構造をもつとき、 $\chi(\Sigma) < 0$ であることもわかる。したがって特に、 Σ の種数 $g > 1$ である。

証明. Σ の双曲 3 角形による 3 角形分割 τ を考える。 $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ を τ の面（双曲 3 角形）とする。このとき、 $n = f(\tau)$ である。 τ の各面は 3 辺を持ち、各辺は 2 つの面で共有されるので、 $3f(\tau) = 2e(\tau)$ が成り立つ。よって、

$$n = f(\tau) = -2f(\tau) + 2e(\tau). \quad (1.10)$$

$\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ を Δ_i の内角とすると、定理 1.24 より $\text{Area}(\Delta_i) = \pi - (\alpha_i + \beta_i + \gamma_i)$ 。 τ の頂点を 1 つ決めたととき、その頂点に集まる $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ の内角の和は 2π なので、内角の総和 $\sum_{i=1}^n (\alpha_i + \beta_i + \gamma_i)$ は $2\pi v(\tau)$ に一致する。したがって、

$$\begin{aligned} \text{Area}(\Sigma) &= \sum_{i=1}^n \text{Area}(\Delta_i) = \sum_{i=1}^n (\pi - (\alpha_i + \beta_i + \gamma_i)) \\ &= n\pi - \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \beta_i + \gamma_i) \stackrel{(1.10)}{=} \pi(-2f(\tau) + 2e(\tau)) - 2\pi v(\tau) \\ &= -2\pi\chi(\Sigma). \end{aligned}$$

これで求める等式が得られた。 \square

1.6 双曲閉曲面の構成

Σ_g を種数 g の閉曲面とする。 Gauss-Bonnet の定理（定理 1.25）より、もし Σ_g が双曲構造をもつならば $g > 1$ である。こんどは逆に、種数 $g > 1$ のとき、閉曲面 Σ_g は必ず双曲構造をもつことを示す。

まずは特別な場合の構成法を考える .

例 1.26. $\mathbb{H}^2 = \mathbb{D}^2$ とする . Euclid 単位円周 $\partial\mathbb{B}^2$ に内接する Euclid 正 8 角形 P_{euc} の頂点を v_1, \dots, v_8 とする . 0 を中心とする双曲半径 $r > 0$ の円周 C_r と , 半測地線 $\overline{0, v_i}$ との交点を $v_i(r)$ とする . $v_1(r), \dots, v_8(r)$ を頂点にもつ双曲正 8 角形を $P(r)$ とする (図 1.15 (a) 参照) . $P(r)$ の頂点の内角を $\theta(r)$ とす

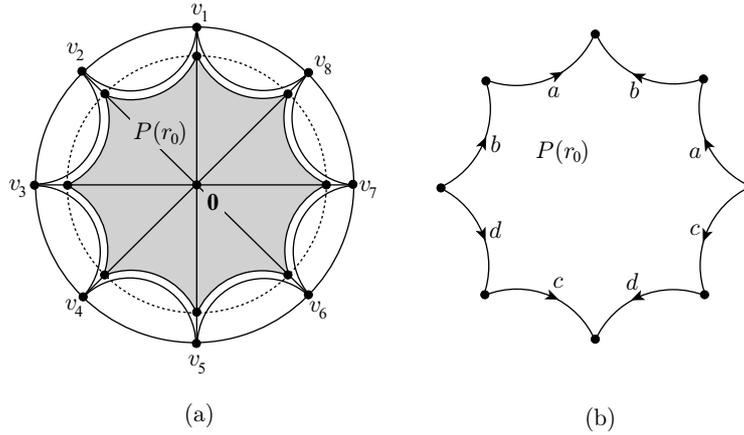


図 1.15 (a) 点線の円は C_{r_0} をあらわす .

る . $r > 0$ が小さいとき , $P(r)$ の各辺は Euclid 線分で近似されるので , $\theta(r)$ は P_{euc} の頂点の内角 $3\pi/8$ に近くなる . 一方 , $P(\infty)$ の各頂点は無限遠点であるので , $\theta(\infty) = 0$ である . $\theta(r)$ は単調減少連続写像であるから , 中間値の定理より , $\theta(r_0) = \pi/4$ となる $0 < r_0 < \infty$ が存在する .

図 1.15 (b) のように , $P(r_0)$ の各辺にラベルと向きを付け , 同じラベルついた辺を向きを保存したまま等長的に貼り付けると , 種数 2 の閉曲面 Σ_2 が得られる . $P(r_0)$ の 8 個の頂点は , Σ 上では 1 個の点 v となる . v に集まる $P(r_0)$ の内角の和は , $8\theta(r_0) = 2\pi$ である . よって , Σ_2 は v の近傍で , \mathbb{H}^2 と局所等長的である . したがって , Σ_2 上には双曲構造が定義できる . 厳密には , Σ_g の普遍被覆 $\tilde{\Sigma}_g$ が \mathbb{H}^2 に等長同値であることを示す必要がある³⁾ . このとき , 被覆変換 $\pi_1(\Sigma_g) \curvearrowright \tilde{\Sigma}_g$ は固有かつ等長的作用であるから , 同一視 $\tilde{\Sigma}_g = \mathbb{H}^2$ のもとで , Fuchs 群作用と見なせる .

同様に $g > 2$ のとき , 各頂点の内角が $\pi/2g$ の双曲正 $4g$ 角形を使って , 種数 g の閉曲面 Σ_g を構成することができる .

こんどは , より一般的な双曲閉曲面の構成法を紹介する .

球面から互いに素な 3 個の開円板を取りのぞいた曲面と同相なコンパクト曲面 P をズボン (pair of pants) (図 1.17 参照) という . 閉曲面 Σ_g ($g > 1$) は , 互いに素な単純閉曲線を使ってズボンに分解できる (図 1.18 参照) . この分解を Σ_g のズボン分解 (pants decomposition) という .

³⁾ 実際これは , $\tilde{\Sigma}_g$ から \mathbb{H}^2 への発展写像 (developing map) を使って証明することができる .

まず最初に、ズボン P 上の双曲構造で、境界 ∂P が閉測地線となるようものを構成する。 H を双曲直角 6 角形とし、その辺には 1 から 6 まで順に番号付けられているとする。第 1, 3, 5 番目の辺の長さを d_1, d_2, d_3 とする (図 1.16 (a) 参照)。

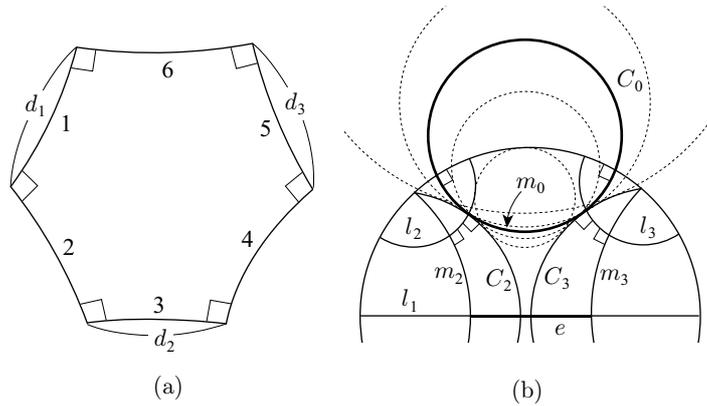


図 1.16

補題 1.27. 任意の $a_1, a_2, a_3 > 0$ に対して、 $d_i = a_i$ ($i = 1, 2, 3$) をみたす双曲直角 6 角形が等長同値を別にして一意的存在する。以下、このような 6 角形を $H(a_1, a_2, a_3)$ とおく。

証明. $\mathbf{H}^2 = \mathbf{D}^2$ とする。 \mathbf{H}^2 内の測地線 l_1 上に長さ a_1 の線分 e をとる。 e の両端点を通り、 l_1 に直交する測地線を m_2, m_3 とする (図 1.16 (b) 参照)。 $i = 2, 3$ に対して、 C_i を $\mathcal{N}_{a_i}(m_i, \mathbf{H}^2)$ の境界の内側成分とする。例 1.5 (3) より、 C_i は ∂m_i を通る \mathbf{R}^2 の円に含まれる。 C_0 を C_1, C_2 の両方に接し、かつ S_∞^1 と交わる円とする。 C_0 の Euclid 半径を大きくしていくと、 C_0 が \mathbf{H}^2 から切り取る 2 角形の内角は π から $\pi/2$ より小さい角度まで狭義単調に減少する。したがって、 S_∞^1 と直交するような C_0 は一意に決まる。このとき、 $m_0 = C_0 \cap \mathbf{H}^2$ は \mathbf{H}^2 の測地線である。例 1.5 (1) より、 m_0 と C_i ($i = 2, 3$) の接点で C_i と直交する測地線 l_i は、 m_2 とも直交する。 $l_1, l_2, l_3, m_0, m_2, m_3$ で囲まれる直角 6 角形は $d_j = a_j$ ($j = 1, 2, 3$) をみたす。このような双曲直角 6 角形の一意性は、 S_∞^1 に直交する C_0 の選び方の一意性からわかる。 \square

例 1.28. $H(a_1/2, a_2/2, a_3/2)$ とそのコピーをラベル 2, 4, 6 の付いた辺で等長的に貼り合わせると、双曲計量をもつズボン $P(a_1, a_2, a_3)$ が得られる (図 1.17 参照)。境界 $\partial P(a_1, a_2, a_3)$ は、長さ a_1, a_2, a_3 の閉測地線からなる。

種数 $g > 1$ の閉曲面 Σ_g は、互いに素な $3g - 3$ 個の単純閉曲線 l_1, \dots, l_{3g-3} によって、 $2g - 2$ 個のズボン P_1, \dots, P_{2g-2} に分解される (図 1.18 参照)。 $a_1, a_2, \dots, a_{3g-3} > 0$ を任意にとる。 l_k がズボン P_j の境界成分のとき、その長さが a_k となるような双曲計量を P_j 上に定義できる。 $\partial P_i \cap \partial P_j$ が l_k を含

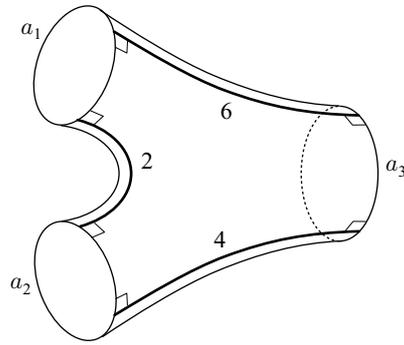


図 1.17

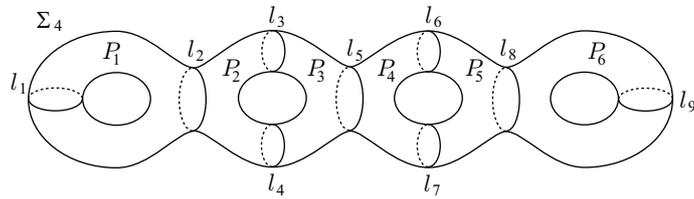


図 1.18 $g = 4$ の場合

むとき, P_i と P_j の双曲計量が l_k 上で一致するように貼り付ける⁴⁾. このとき, Σ_g 上に双曲計量が定義される.

例 1.28 より, $a_i > 0$ ($i = 1, \dots, 3g - 3$) の値を変えることによって, Σ_g 上には様々な双曲構造が入ることがわかった. しかしこれは, 2次元双曲幾何だけがもつ特徴であり, Mostow の剛性定理 (定理 2.28, p. 49) より, 3次元以上では成り立たないことがわかる.

⁴⁾長さが同じ閉測地線間の等長写像は一意的には決まらない「ねじり」の分だけの自由度がある.

2 3次元双曲幾何

この節では、3次元双曲幾何学に関する基本的概念を紹介する．以下で扱う3次元多様体はすべて向き付け可能であると仮定する．より専門的な内容については、谷口・松崎 [TM], Benedetti-Petronio [BP], Matsuzaki-Taniguchi [MT], Ratcliffe [Ra], Marden [Ma] 等を見てほしい．

2.1 双曲3次元多様体と Klein 群

まずは、一般次元の双曲空間の定義から始める． $\mathbf{R}_+^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n; x_n > 0\}$ とおく．このとき、 \mathbf{R}_+^n の無限遠境界 $S_\infty^{n-1} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n; x_n = 0\} \cup \{\infty\}$ は、 $n-1$ 次元球面に同相であり、 $\overline{\mathbf{R}_+^n} = \mathbf{R}_+^n \cup S_\infty^{n-1}$ は n 次元球体に同相である． \mathbf{R}_+^n に計量

$$ds^2 = \frac{dx_1^2 + \dots + dx_n^2}{x_n^2} \quad (2.1)$$

が定義された Riemann 多様体を、 n 次元双曲空間 (hyperbolic space) といひ、 \mathbf{H}^n とあらわす． $\text{Isom}(\mathbf{H}^n)$ を \mathbf{H}^n 上の等長変換全体のつくる群とし、 $\text{Isom}^+(\mathbf{H}^n)$ を向きを保存する等長変換からなる $\text{Isom}(\mathbf{H}^n)$ の部分群とする．このとき、 $\text{Isom}(\mathbf{H}^n)/\text{Isom}^+(\mathbf{H}^n) \cong \mathbf{Z}_2$ である．

C を \mathbf{R}^{n-1} に直交する $\overline{\mathbf{R}_+^n}$ 内の $n-1$ 次元半球面とし、その中心を $o(C)$ 、半径を $r(C)$ とおく． $x \in \overline{\mathbf{R}_+^n} \setminus \{o(C), \infty\}$ 対して、 $\alpha = \alpha(C, x)$ を $o(C)$ と始点とし x を通る $\overline{\mathbf{R}_+^n}$ 内の半直線とする．このとき、 $\gamma_C(x)$ を $|\gamma_C(x) - o(C)| = |x - o(C)| = r(C)^2$ みたす α 上の点とする． $x = o(C), \infty$ のときは、 $\gamma_C(o(C)) = \infty$ 、 $\gamma_C(\infty) = o(C)$ とする (図 2.1 参照)．このようにして定義される写像

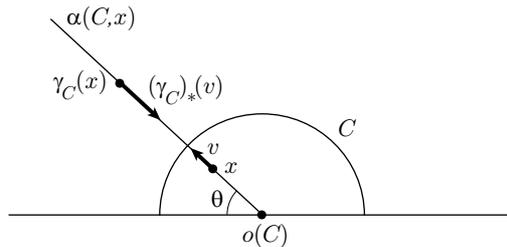


図 2.1

$\gamma_C : \overline{\mathbf{R}_+^n} \rightarrow \overline{\mathbf{R}_+^n}$ を、 C に関する $\overline{\mathbf{R}_+^n}$ の鏡映という．定義より、鏡映は $\overline{\mathbf{R}_+^n}$ の向きを逆にする変換であり、 $\text{Fix}(\gamma_C) = C$ をみたすことがわかる．偶数個の鏡映 $\gamma_{C_1}, \dots, \gamma_{C_{2n}}$ の合成写像 $\gamma_{C_1} \circ \dots \circ \gamma_{C_{2n}}$ を $\overline{\mathbf{R}_+^n}$ の Möbius 変換という． $\text{Möb}(\overline{\mathbf{R}_+^n})$ を $\overline{\mathbf{R}_+^n}$ 上の Möbius 変換のつくる群とする．Möbius 変換が、円円対応性と等角性をもつことはよく知られている．証明は、第 A.1 節にあ

る．ここで「円」とは， \mathbf{R}^n 内の $n-1$ 次元 Euclid 球面または $n-1$ 次元平面を意味する．

命題 2.1. $\text{Isom}^+(\mathbf{H}^n) = \text{Möb}(\overline{\mathbf{R}_+^n})$.

証明. 最初に， γ_C が \mathbf{H}^3 の等長変換であることを示す．簡単のため， $o(C) = \mathbf{0}$ の場合を考える． $r(C) = r$ とおくと，任意の $x \in \mathbf{H}^3$ と $v \in T_x(\mathbf{H}^3)$ に対して， $|(\gamma_C)_*(v)| = \frac{r^2}{|x|^2}|v|$ が成り立つ(式 (A.1), p. 66 参照)． \mathbf{R}^{n-1} と $\alpha(C, x)$ が原点でなす角を θ とすると， $x, \gamma_C(x)$ の第 n 座標は， $|x| \sin \theta, \frac{r^2}{|x|} \sin \theta$ である．したがって，

$$\|(\gamma_C)_*(v)\| \stackrel{(1.2)}{=} \frac{|(\gamma_C)_*(v)|}{\frac{r^2}{|x|} \sin \theta} = \frac{\frac{r^2}{|x|^2}|v|}{\frac{r^2}{|x|} \sin \theta} = \frac{|v|}{|x| \sin \theta} \stackrel{(1.2)}{=} \|v\|$$

となる．よって， γ_C は \mathbf{H}^n の等長変換である．メビウス変換は偶数個の鏡映の合成であるから，向きを保つ \mathbf{H}^n の等長変換である．したがって， $\text{Möb}(\overline{\mathbf{R}_+^n}) \subset \text{Isom}^+(\mathbf{H}^n)$.

逆の包含関係 $\text{Möb}(\overline{\mathbf{R}_+^n}) \supset \text{Isom}^+(\mathbf{H}^n)$ は，命題 1.6 と同様の議論を使って証明できる．ただし，命題 1.4 の代わりに，下の命題 2.2 (1) を使う．□

以下では 3 次元双曲空間 \mathbf{H}^3 のみ扱う． $\mathbf{H}^3 = \mathbf{R}_+^3 = \mathbf{C} \times \mathbf{R}_+$ ， $\overline{\mathbf{H}^3} = \overline{\mathbf{C} \times \mathbf{R}_+}$ であり，無限遠境界 S_∞^2 は，Riemann 球面 $\widehat{\mathbf{C}}$ と同一視される．(2.1) より， \mathbf{H}^3 上の計量は，

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dt^2}{t^2} = \frac{|dz|^2 + dt^2}{t^2} \quad (2.2)$$

で与えられる． $\text{Möb}(\widehat{\mathbf{C}})$ を $\widehat{\mathbf{C}}$ 上の Möbius 変換全体のつくる群とする．

$\text{Möb}(\overline{\mathbf{C} \times \mathbf{R}_+})$ の要素 f の制限写像 $f|_{\widehat{\mathbf{C}}}$ は， $\widehat{\mathbf{C}}$ 上の Möbius 変換であるから， $\text{Möb}(\widehat{\mathbf{C}})$ の要素を定義する．次の練習問題はその逆が成り立つという主張である．

問題 2.1. $\text{Möb}(\widehat{\mathbf{C}})$ の要素 γ に対して， $f|_{\widehat{\mathbf{C}}} = \gamma$ となる $f \in \text{Möb}(\overline{\mathbf{C} \times \mathbf{R}_+})$ が一意に存在することを示せ．

(ヒント: $\text{Möb}(\widehat{\mathbf{C}})$ の要素は，偶数個の $\widehat{\mathbf{C}}$ 上の鏡映の合成として表せる．これらの鏡映は， $\overline{\mathbf{C} \times \mathbf{R}_+}$ 上の鏡映に一意的に拡張される．)

問題 2.1 より， $\text{Möb}(\overline{\mathbf{C} \times \mathbf{R}_+}) = \text{Möb}(\widehat{\mathbf{C}})$ とみなすことができる．さらに， $\widehat{\mathbf{C}}$ 上の Möbius 変換であることは，1 次分数変換であることと同値であるので， $\text{Möb}(\widehat{\mathbf{C}})$ は $\text{SL}_2(\mathbf{C})$ の剰余群 $\text{PSL}_2(\mathbf{C}) = \text{SL}_2(\mathbf{C})/\{\pm I\}$ と同一視される． $A \in \text{PSL}_2(\mathbf{C})$ の要素は， $A = \pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ， $(a, b, c, d \in \mathbf{C}, ad - bc = 1)$ で与え

られる．このとき，1 次分数変換 $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ で与えられる $\text{Möb}(\widehat{\mathbf{C}})$ の要素を f_A とあらわす．命題 2.1 と上の結果より，次のような同一視ができる．

$$\text{Isom}^+(\mathbf{H}^3) = \text{Möb}(\overline{\mathbf{C} \times \mathbf{R}_+}) = \text{Möb}(\widehat{\mathbf{C}}) = \text{PSL}_2(\mathbf{C}).$$

命題 2.2. 次の (1), (2) が成り立つ．

- (1) \mathbf{H}^3 の測地線は， \mathbf{C} に直交する半円または半直線．
- (2) \mathbf{H}^3 の全測地面は， \mathbf{C} に直交する半球面または半平面（図 2.2 参照）．

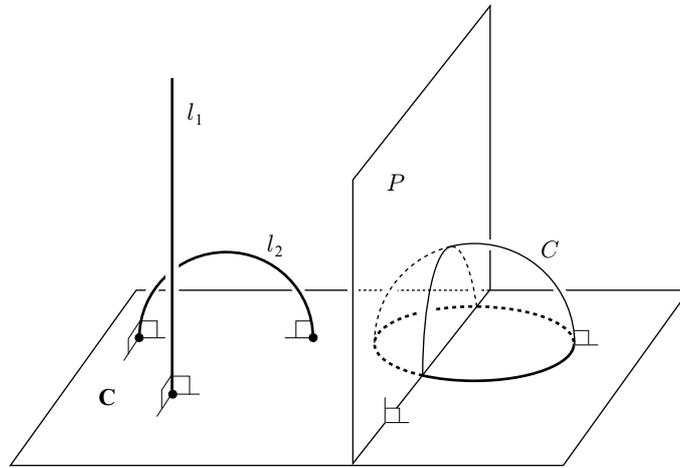


図 2.2 l_1, l_2 は測地線， C, P は全測地面．

\mathbf{H}^3 内の平面 C が全測地面 (totally geodesic) であるとは， C に接する任意の測地線が C に含まれることをいう．

証明. (1) の証明は，命題 1.4 (p.3) と同様である．命題 1.4 の証明では，補題 1.3 の関係式 $\text{Möb}(\mathbf{R}_+^2) \subset \text{Isom}^+(\mathbf{H}^2)$ を使ったが，ここでは，その代わりに命題 2.1 の前半の主張 $\text{Möb}(\overline{\mathbf{R}_+^n}) \subset \text{Isom}^+(\mathbf{H}^n)$ を使う．

(2) の主張は，(1) より明らかである．実際，全測地面 C に接する測地線は， C と C に直交する半平面 P の共通部分である． \square

線形代数の基本的な結果より，任意の $A \in \text{PSL}_2(\mathbf{C}) \setminus \{\text{Id}_{\mathbf{H}^3}\}$ に対して次がいえる．

(A.1) $\text{trace}(A) = \pm 2$ とのとき， A は $\text{PSL}_2(\mathbf{C})$ において， $A_0 = \pm \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ に共役である．

(A.2) $\text{trace}(A) \notin \mathbf{R}$ または $\text{trace}(A) \in \mathbf{R}$ かつ $|\text{trace}(A)| > 2$ とのとき， A は $\text{PSL}_2(\mathbf{C})$ において， $A_0 = \pm \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$ ($|\lambda| > 1$) に共役である．

(A.3) $\text{trace}(A) \in \mathbf{R}$ かつ $|\text{trace}(A)| < 2$ のとき, A は $\text{PSL}_2(\mathbf{C})$ において,

$$A_0 = \pm \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \quad (\theta \in \mathbf{R}, 0 < \theta < \pi) \text{ に共役である.}$$

問題 2.2. (A.1), (A.2), (A.3) を証明せよ.

(ヒント: A_0 を A の Jordan 標準形とすると, $\text{trace}(A_0) = \text{trace}(A)$ である.)

定義 2.3 (等長変換の分類). $A \in \text{PSL}_2(\mathbf{C})$ に対応する \mathbf{H}^3 の等長変換を f_A とおく.

(A.1) の場合, f_A を放物型変換 (parabolic transformation) という.

(A.2) の場合, f_A を斜航型変換 (loxodromic transformation) という. 特に, $\lambda \in \mathbf{R}$ のときは, f_A を双曲型変換 (hyperbolic transformation) ともいう.

(A.3) の場合, f_A を楕円型変換 (elliptic transformation) という.

\mathbf{H}^3 の等長変換 f_A は, $\overline{\mathbf{C} \times \mathbf{R}_+}$ 上の Möbius 変換なので, 円円対応性と等角性をもつ. f_A の挙動は, これらの性質と制限写像 $f_A|_{\widehat{\mathbf{C}}}$ の挙動から理解できる. 以下では, $f_{A_0} = f_0$, $f_A = f$ とおく. また h を, $A = BA_0B^{-1}$ をみたす要素 $B \in \text{PSL}_2(\mathbf{C})$ に対応する \mathbf{H}^3 の等長変換とする. このとき, $f = h \circ f_0 \circ h^{-1}$ となる. $z \in \mathbf{C}$, $s > 0$ に対し, $C_s(z)$ を, 円周 $\partial B_s(z, \mathbf{C})$ を無限遠境界とする \mathbf{H}^3 の全測地面とする. また, z と ∞ を端点にもつ \mathbf{H}^3 の測地線を $l(z)$ とおく.

(A.1) の場合. $A_0 = \pm \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ より, $f_0(z) = z + 1$ ($z \in \mathbf{C}$). よって, $\text{Fix}(f_0|_{\widehat{\mathbf{C}}}) = \{\infty\}$. 任意の点 $(z, t) \in \mathbf{H}^3$ は, $C_t(z)$ と $l(z)$ の交点である. $f_0(C_t(z)) = C_t(z+1)$, $f_0(l(z)) = l(z+1)$ であるから, $f(z, t)$ は $C_t(z+1)$ と $l(z+1)$ の交点である. したがって, $f(z, t) = (z+1, t)$. 特に, $\text{Fix}(f_0|_{\mathbf{H}^3}) = \emptyset$ がいえる. 任意の $t_0 > 0$ に対し, 水平面 $H_{t_0} = \{(z, t) \in \mathbf{H}^3; t = t_0\}$ を ∞ を基点にもつホロ球面 (horosphere) という. f_0 は H_{t_0} を不変にする. すなわち, $f_0(H_{t_0}) = H_{t_0}$ (図 2.3(a) 参照). 一般の放物型変換 f は, $H = h(H_{t_0})$ を不変にする. H は \mathbf{C} と $z_f = h(\infty)$ で接する Euclid 球面である. この H を z_f を基点にもつホロ球面という (図 2.3(b) 参照). このとき,

$$\text{Fix}(f|_{\widehat{\mathbf{C}}}) = h(\text{Fix}(f_0|_{\widehat{\mathbf{C}}})) = \{z_f\}, \quad \text{Fix}(f|_{\mathbf{H}^3}) = h(\text{Fix}(f_0|_{\mathbf{H}^3})) = \emptyset$$

が成り立つ.

(A.2) の場合. $A_0 = \pm \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$ より, $f_0(z) = \lambda^2 z$ ($z \in \mathbf{C}$). すなわち, $f_0|_{\widehat{\mathbf{C}}}$ は原点を中心とした回転と拡大の合成であり, $\text{Fix}(f_0|_{\widehat{\mathbf{C}}}) = \{0, \infty\}$ が成り立つ. したがって, $f_0|_{\mathbf{H}^3}$ は, \mathbf{R}_+ -軸 $l(0)$ を不変にする. $l(0)$ を f_0 の斜航軸または単に軸といい, α_{f_0} とあらわす. $|\lambda| > 1$ より, $\lambda^2 = re^{i\varphi}$ ($r, \varphi \in \mathbf{R}, r > 1$)

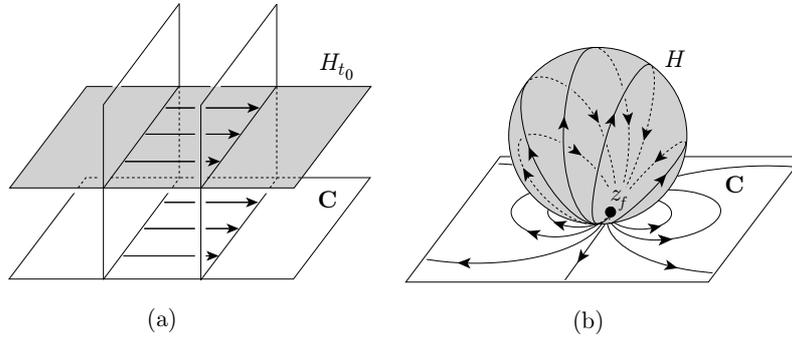


図 2.3

とおける. 任意の点 $(z, t) \in \mathbf{H}^3$ に対して, $s = \sqrt{|z|^2 + t^2}$ とおくと, $C_s(0)$ は (z, t) を含む. よって, (z, t) は $C_s(0)$ と $l(z)$ の交点である. $f_0(C_s(0)) = C_{rs}(0)$, $f_0(l(z)) = l(re^{i\varphi}z)$ であるから, $f_0(z, t) = (re^{i\varphi}z, rt)$ となる (図 2.4 参照). 特に, $\text{Fix}(f_0|_{\mathbf{H}^3}) = \emptyset$ であることがわかる. $p = (0, t) \in \alpha_{f_0}$ に対しては,

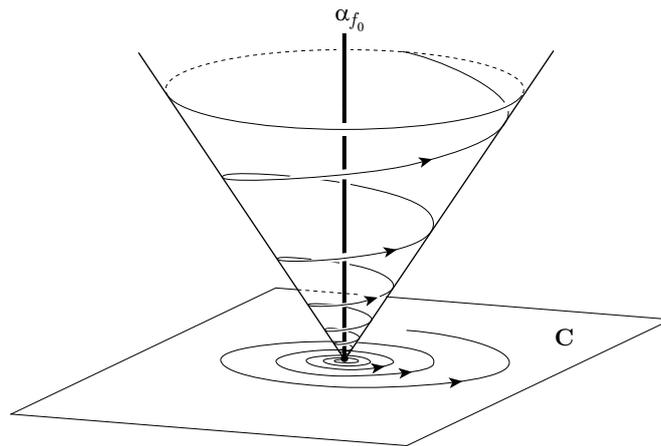


図 2.4

$f_0(p) = (0, rt)$ である. したがって, $d(p, f_0(p)) = \log r = 2 \log |\lambda|$. 一般の斜航型変換 f は, $h(0), h(\infty)$ を端点にもつ測地線 α_f を不変にする. この α_f を, f の斜航軸または軸という. α_f の端点が $f|_{\widehat{\mathbb{C}}}$ の不動点である (図 2.5 参照). また, 任意の $q \in \alpha_f$ に対し, $d(q, f(q)) = d(h^{-1}(q), f_0(h^{-1}(q))) = 2 \log |\lambda|$ である. この値を, f の推移距離 (translation length) という. $\lambda \in \mathbf{R}$ のとき, すなわち f が双曲型変換のときは, f は軸 α_f に沿った移動のみであり, スパイラルは起こらない (図 2.6 (a), (b) 参照).

(A.3) の場合. $A_0 = \pm \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$ より, $f_0(z) = e^{2i\theta}z$ ($z \in \mathbb{C}$). したがって, $\text{Fix}(f_0|_{\widehat{\mathbb{C}}}) = \{0, \infty\}$ となる. 点 $(z, t) \in \mathbf{H}^3$ は, $C_s(0)$ ($s = \sqrt{|z|^2 + t^2}$)

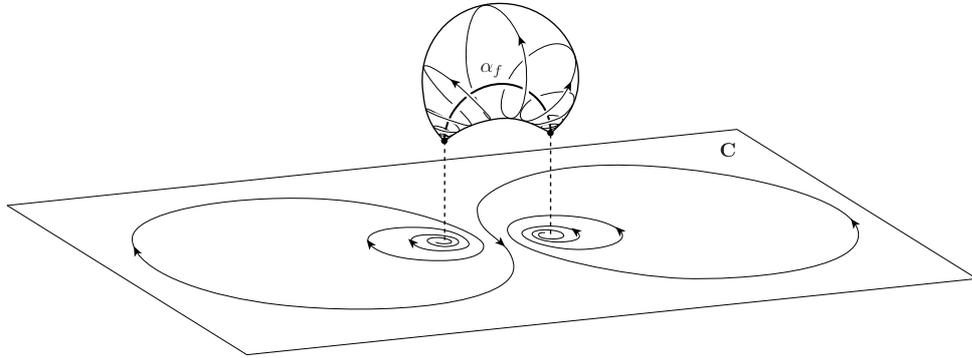


図 2.5 点線に沿って上下の図を貼り付けたものが実際の状況である． f の 2 つの不動点が互いに接近し 1 点になったとき， f は放物型変換に変わる．状況も，図 2.3 (b) のように変化する．

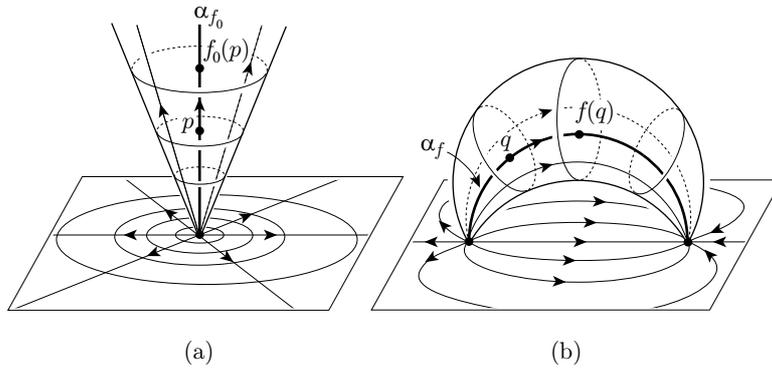


図 2.6

と $l(z)$ の交点であるから， $f(x, t)$ は $f(C_s(0)) = C_s(0)$ と $f(l(z)) = l(e^{2i\theta}z)$ の交点である．これから， $f(z, t) = (e^{2i\theta}z, t)$ であることがわかる．よって， $\text{Fix}(f_0|_{\mathbb{H}^3})$ は \mathbb{R}_+ -軸 $l(0)$ であり， f_0 は $l(0)$ を中心とした 2θ 回転である． $l(0)$ を f_0 の回転軸といい， α_{f_0} とあらわす（図 2.7 (a) 参照）．一般の楕円型変換 f は， $h(0), h(\infty)$ を端点にもつ測地線 α_f を不動点集合としてもつ．この α_f を f の回転軸という（図 2.7 (b) 参照）．

以上をまとめると次の命題が成り立つ．

命題 2.4. f を $\text{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$ の恒等写像以外の要素とする．

- (1) f が放物型変換のとき， f は $\widehat{\mathbb{C}}$ において唯一の不動点 z_f をもち， z_f を基点とするホ口球面を不変にする．
- (2) f が斜航型変換のとき， f は $\widehat{\mathbb{C}}$ において 2 つの不動点をもち，それらの点を端点にもつ測地線 α_f を不変にする．

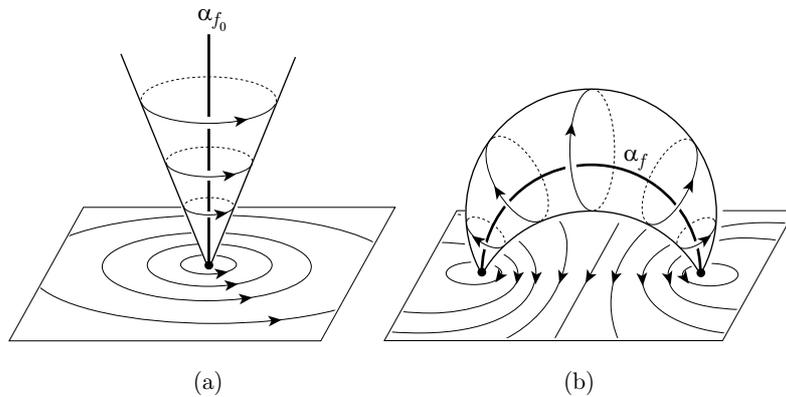


図 2.7

- (3) f が \mathbf{H}^3 内に不動点をもてば, f は楕円型変換であり, その不動点集合は測地線 α_f である.
- (4) f が有限位数をもつとき, f は有理回転の楕円型変換である.

問題 2.3. \mathbf{H}^3 の任意の全測地面 C は, 双曲平面 \mathbf{H}^2 に等長的であることを示せ.

(ヒント: 全測地面 $H = \{(x, y, t) \in \mathbf{H}^3; y = 0\}$ は, 計量 $ds^2 = \frac{dx^2 + dt^2}{t^2}$ をもつので, \mathbf{H}^2 と等長的である. また, \mathbf{H}^3 の等長変換 f で, $f(C) = H$ をみたすものがある.)

$\text{Isom}^+(\mathbf{H}^3) = \text{PSL}_2(\mathbf{C})$ の離散部分群を, Klein 群 (Kleinian group) という. 次の命題は, 命題 1.12 (p. 11) と同様に証明できる.

命題 2.5. G を $\text{PSL}_2(\mathbf{C})$ の部分群とすると, 次の (1), (2) が成り立つ.

- (1) G が Klein 群であるための必要十分条件は, 等長作用 $G \curvearrowright \mathbf{H}^3$ が真性不連続となることである.
- (2) G を Klein 群とすると, 作用 $G \curvearrowright \mathbf{H}^3$ が自由であるための必要十分条件は, G が楕円型要素を含まないことである. またこれは, G がねじれをもたないことと同値である.

系 2.6 (cf. 系 1.13). G がねじれをもたない Klein 群であるとき, 商写像 $p: \mathbf{H}^3 \rightarrow M = \mathbf{H}^3/G$ は被覆射影である. さらに, M は \mathbf{H}^3 から誘導された計量をもつ向き付け可能な 3 次元多様体である.

定義 2.7. 系 2.6 で与えられた M 上の誘導計量を, 双曲計量 (hyperbolic metric) といい, この計量をもつ多様体を双曲 3 次元多様体 (hyperbolic 3-manifold) という.

2.2 双曲 3 次元閉多様体の性質と双曲化予想

代表的な双曲 3 次元閉多様体の例をあげる．このとき，双曲 3 次元空間 \mathbf{H}^3 の Poincaré 円板モデル (Poincaré disk model)

$$\mathbf{D}^3 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 < 1\}, \quad ds_{\mathbf{D}^3}^2 = \frac{4(dx^2 + dy^2 + dz^2)}{(1 - x^2 - y^2 - z^2)^2}$$

を使うと便利である． $\overline{\mathbf{R}^3}$ 上の Möbius 変換で， \mathbf{D}^3 を \mathbf{H}^3 上に等長的に写すものが存在することは，命題 1.8 (p. 9) と同様に証明できる．

次に紹介する双曲多様体の構成法は，例 1.26 (p. 21) の 3 次元版といえる．

例 2.8 (Seifert-Weber 多様体). $\mathbf{H}^3 = \mathbf{D}^3$ とする．Euclid 単位球面 $\partial\mathbf{B}^3$ に内接する正 12 面体を P とする． v_1, \dots, v_{20} を P の頂点とする． 0 を中心とする双曲半径 $r > 0$ の球面と，半測地線 $\overline{0, v_i}$ との交点を $v_i(r)$ とする． $v_1(r), \dots, v_{20}(r)$ を頂点にもち，すべての面が全測地的な双曲正 12 面体を $P(r)$ とおく．また， $P(r)$ の各辺に沿っての面角を $\theta(r)$ とする． P_{euc} を Euclid 正 12 面体とすると，その各面 F_j は Euclid 正 5 角形である． F_j の内角は $3\pi/5$ であるから， P_{euc} の各辺に沿っての面角 θ_{euc} は，1 辺の長さが $3\pi/5$ の球面正 3 角形 $Y_{3\pi/5}$ の内角に一致する (図 2.8 参照)． $c = \cos(3\pi/5)$, $s = \sin(3\pi/5)$ とおくと，球面

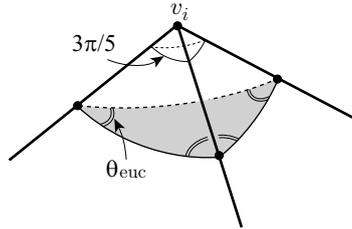


図 2.8 P_{euc} の頂点 v_i の近傍 $\cdot\cdot\cdot$ は， $Y_{3\pi/5}$ に相似な 3 角形．

3 角形の余弦定理より， $c = c^2 + s^2 \cos(\theta_{\text{euc}})$ ，すなわち $\cos(\theta_{\text{euc}}) = c/(1 + c)$ が成り立つ． $-1 < c < 0$ であるから， $\lim_{r \rightarrow 0} \theta(r) = \theta_{\text{euc}} > \pi/2$ がいえる．一方， $r = \infty$ のとき， $P(\infty)$ の各頂点は S_∞^2 上にある．各頂点を基点とする充分小さなホロ球面と $P(\infty)$ との交点は Euclid 正 3 角形である．これは， $\lim_{r \rightarrow \infty} \theta(r) = \pi/3$ を意味する．中間値の定理より， $\theta(r_0) = 2\pi/5$ となる $r = r_0$ が存在する． $P_0 := P(r_0)$ の 6 組の対面を $3\pi/5$ の回転をもつ斜航的変換で同一視することによって得られる商空間を M とする (図 2.9 (a) 参照)． P_0 の面の対応は図 2.9 (b) の番号付けに関して，

$$\begin{aligned} \langle 1, 2, 3, 4, 5 \rangle &\leftrightarrow \langle 17, 18, 19, 20, 16 \rangle & \langle 4, 14, 9, 15, 5 \rangle &\leftrightarrow \langle 17, 16, 6, 12, 7 \rangle \\ \langle 2, 12, 7, 13, 3 \rangle &\leftrightarrow \langle 20, 19, 9, 15, 10 \rangle & \langle 1, 5, 15, 10, 11 \rangle &\leftrightarrow \langle 8, 18, 17, 7, 13 \rangle \\ \langle 3, 13, 8, 14, 4 \rangle &\leftrightarrow \langle 16, 20, 10, 11, 6 \rangle & \langle 1, 11, 6, 12, 2 \rangle &\leftrightarrow \langle 19, 18, 8, 14, 9 \rangle \end{aligned}$$

であらわされる．このとき， P_0 の 20 個の頂点は， M 上では 1 点になる．また，

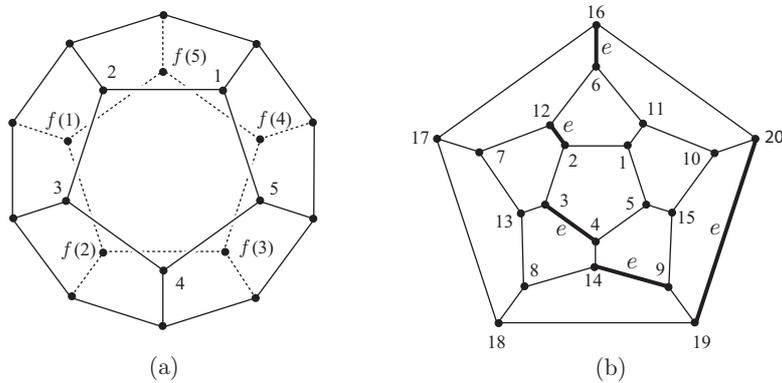


図 2.9 番号 i ($i = 1, \dots, 20$) の付随した頂点を v_i とする. (a) f は P_0 の最前面を最底面に移す斜航的変換である.

M 内では, P のちょうど 5 辺が同じ像をもつ. 例えば, 図 2.9 (b) において, ラベル e のついた P_0 の 5 辺が M 内の 1 本の測地線分に対応する. P_0 の任意の辺における面角は $2\pi/5$ であるから, P_0 上の双曲構造から誘導される M 上の構造は通常の変曲構造である. この双曲閉多様体 M を Seifert-Weber 多様体という.

$p : \mathbf{H}^3 \rightarrow M$ を双曲 3 次元多様体の普遍被覆とする. $x \in M$ に対し, $p(\tilde{x}) = x$ をみたく点 $\tilde{x} \in \mathbf{H}^3$ をとる. 任意の $0 < r \leq s$ に対し, 制限写像 $p|_{B_r(\tilde{x}, \mathbf{H}^3)} : B_r(\tilde{x}, \mathbf{H}^3) \rightarrow M$ が埋め込みとなるような $s > 0$ が存在する. このような s の上限を, M の x における単射半径といい, $\text{inj}_x(M)$ とあらわす. $\text{inj}_x(M) = \infty$ ならば, 明らかに $M = \mathbf{H}^3$ である.

問題 2.4. $x \in M$ に対し, $r(x) = \text{inj}_x(M)$ とおく. このとき, 任意の $y \in B_{r(x)/2}(x)$ に対して, $\text{inj}_y(M) \geq r(x)/2$ であることを示せ.

命題 2.9 (双曲 3 次元閉多様体の特徴). 双曲 3 次元閉多様体 M は次の性質をみたす.

(H.1) M の基本群 $\pi_1(M)$ は無限群であり, 高次ホモトピー群 $\pi_n(M)$ ($n = 2, 3, \dots$) はすべて自明な群である. すなわち, M は $K(\pi, 1)$ 空間である.

(H.2) $\pi_1(M)$ は $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ に同型な部分群をもたない. このような多様体は, 非トーラス的 (atoroidal) であるという.

証明. $p : \mathbf{H}^3 \rightarrow M = \mathbf{H}^3/G$ を系 2.6 で与えられた, 局所等長的な被覆射影とする. \mathbf{H}^3 は単連結であるから, $\pi_1(M)$ は G と同型である.

(H.1) M はコンパクトであるから有限体積 V をもつ. もし G が有限群 (位数 d) であったならば, \mathbf{H}^3 は有限体積 Vd をもつ. これは, 明らかに矛盾で

ある．したがって， $\pi_1(M) \cong G$ は無限群である． \mathbf{H}^3 は \mathbf{R}^3 に同相であるから可縮である．よって， $n \geq 2$ のとき， $\pi_n(M) \cong \pi_n(\mathbf{H}^3) = \{0\}$ ．

(H.2) G はねじれをもたないので，命題 2.5 より， G は楕円型要素を含まない．問題 2.4 と M のコンパクト性より， $\text{inj}(M) = \inf\{\text{inj}_x(M); x \in M\} > 0$ である．これは， G が放物型要素を含まないことを意味する．実際， G が放物型要素 f を含むならば，(A.1) (p. 27) で与えた変換 f_{A_0} に共役である． $\mathbf{H}^3 = \mathbf{C} \times \mathbf{R}_+$ の点 $x_t = (0, t)$ に対し， $f_{A_0}(x_t) = (1, t)$ である．(2.2) より， x_t と $f_{A_0}(x_t)$ をつなぐ線分 $[0, 1] \times \{t\}$ の双曲長は $1/t$ であるから， $\text{dist}_{\mathbf{H}^3}(x_t, f_{A_0}(x_t)) \leq 1/t$ ．よって， $\text{dist}_{\mathbf{H}^3}(y_t, f(y_t)) \leq 1/t$ をみたく \mathbf{H}^3 の点 y_t が存在する．これは， $\text{inj}_{p(y_t)}(M) \leq 1/2t$ を意味するので， $\text{inj}(M) > 0$ に矛盾する．したがって， G の 1 以外の要素はすべて斜航的であることがわかった．

f, g を $fg = gf$ をみたく $G \setminus \{1\}$ の要素とする．必要ならば f, g に同じ共役をとることによって，

$$f = \pm \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \quad (|\lambda| > 1), \quad g = \pm \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

とおける．ただし， g は斜航的なので， $\alpha + \delta \notin \mathbf{R}$ であるか，または $\alpha + \delta \in \mathbf{R}$ かつ $|\alpha + \delta| > 2$ をみたく． $fg = gf$ より， $\varepsilon = 1$ または $\varepsilon = -1$ に対して，

$$\begin{pmatrix} \lambda\alpha & \lambda\beta \\ \lambda^{-1}\gamma & \lambda^{-1}\delta \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} \lambda\alpha & \lambda^{-1}\beta \\ \lambda\gamma & \lambda^{-1}\delta \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

が成り立つ． $\alpha = \delta = 0$ とはならないので，等式 (2.3) の両辺の (1,1) 成分，(2,2) 成分を比較することにより， $\varepsilon = 1$ であることがわかる．さらに， $|\lambda| > 1$ であるから，両辺の (1,2) 成分，(2,1) 成分を比較することにより， $\beta = \gamma = 0$ である．よって， $g = \pm \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}$ となる． $\text{Fix}(f|_{\widehat{\mathbf{C}}}) = \text{Fix}(g|_{\widehat{\mathbf{C}}}) = \{0, \infty\}$ であるから， f, g は \mathbf{R}_+ -軸 l を不変にする． f, g の生成する G の部分群 H は， l に自由かつ真性不連続に作用する．命題 1.10 より，商写像 $q: l \rightarrow l/H$ は被覆射影であり， l/H は 1 次元多様体である． l は単連結であるから， H は $\pi_1(l/H)$ に同型である．1 次元多様体の基本群は， $\{1\}$ または \mathbf{Z} に同型であるので， $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ とは同型でない．これから，(H.2) が成り立つことがわかる．□

注意 2.10. 双曲 3 次元多様体 M がコンパクトでないとき， $\pi_1(M)$ は， $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ に同型な部分群 H を含む場合もある．このとき H は，2 つの放物型要素によって生成される．

例 2.8 は，2 次元版の例 1.26 と比べ構成が複雑になっている．このような状況から，かなり限定された 3 次元閉多様体のみが双曲構造をもつように思える．しかし現在では，広い範囲の 3 次元閉多様体が双曲構造をもつことがわかっている．

Thurston [Th2] によって提案された幾何化予想は, G. Perelman によって証明された. この予想は, Poincaré 予想「単連結な 3 次元閉多様体は 3 次元球面 S^3 に同相である」の肯定解も含んでいるので, 非常に注目度の高いものであった. それだけでなく, 幾何化予想は, 次の双曲化予想 (命題 2.9 の逆) も含んでいる.

定理 2.11 (双曲化予想: Perelman). 命題 2.9 の性質 (H.1), (H.2) をみたす 3 次元閉多様体 M は, 双曲構造をもつ. すなわち, ねじれをもたない Klein 群 G で, \mathbb{H}^3/G が M と同相になるものが存在する.

注意 2.12. Perelman による幾何化予想の証明法は, 3 次元閉多様体上に任意に与えられた Riemann 計量 g_{ij} を Ricci フローとよばれる一種の熱方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} g_{ij} = -2R_{ij}$$

を使って変形し, 可能な限り幾何計量に近づけていくというものである. その証明は, 微分幾何的・解析的なものであり, 著者の理解できる範囲をはるかに超えている. 3 次元閉多様体の幾何化予想に関する詳細は, 戸田 [Td] およびその文献を参考にしてほしい.

一方, 基本群が有限生成の双曲 3 次元閉多様体の場合, 双曲構造をもつための必要十分条件を, 双曲幾何的手法のみを使って与えることができる. そこで, 中心的な役割を担うのが, Thurston の一意化定理 (Uniformization Theorem) である. この定理の詳細は, Morgan [Mo], Kapovich [Ka], Otal [Ot] 等を参照せよ.

2.3 双曲 3-単体

\mathbb{H}^3 内の任意の全測地面 C は \mathbb{H}^2 に等長であった (問題 2.3). C 内の任意の双曲 3 角形を \mathbb{H}^3 の測地 3 角形という. \mathbb{H}^3 内の 3-単体 Δ で, 各辺が測地線であり, 各面が測地 3 角形であるものを双曲 3-単体 (hyperbolic 3-simplex) または双曲 4 面体という. Δ の頂点は, 無限遠球面 \hat{C} 上にあってもよいとする. このような頂点を理想頂点という.

Δ を 4 頂点 v_0, v_1, v_2, v_3 がすべて \hat{C} 上にあるような双曲 3-単体とする. \mathbb{H}^3 の測地線 $\overline{v_i, v_j}$ を α_{ij} とおく (図 2.10 (a) 参照). α_{01} と α_{23} をつなぐ最短測地線分 σ は α_{01}, α_{23} に直交する. σ を含む測地線を回転軸とする, 回転角 π の楕円型変換 ρ_1 は, α_{01}, α_{23} を不変にする. したがって, $\rho_1(\Delta) = \Delta$. 同様に, α_{02}, α_{13} を π -回転する楕円型変換 ρ_2 と, α_{03}, α_{12} を π -回転する楕円型変換 ρ_3 も定義できる. ρ_1, ρ_2, ρ_3 が生成する $\text{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$ の部分群 Γ_Δ は, Δ を不変にする. 代数的には, Γ_Δ は $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ に同型である.

等長変換で Δ を移動し, v_1, v_2, v_3 が C の単位円周上にあり, $v_0 = \infty$ となるようにする. このとき, 高さ $t = t_0 > 1$ の (水平) ホル球面と Δ との共通

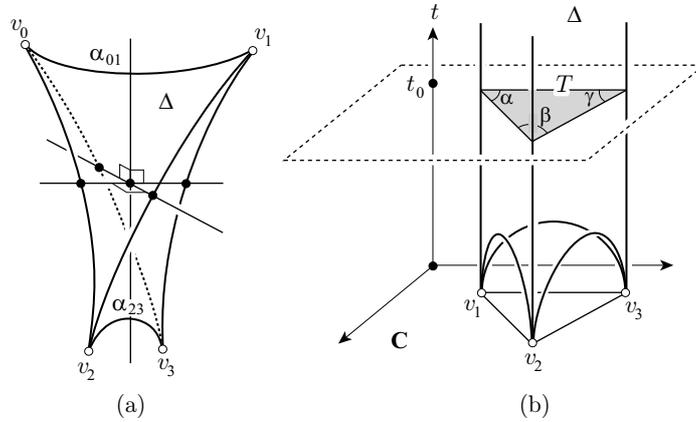


図 2.10

部分は Euclid 3 角形 T になる (図 2.10 (b) 参照) . したがって , T の内角を α, β, γ とすると , $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ である . T は , Γ_Δ によって , v_1, v_2, v_3 に基点をもつホリ球面上に等角に写されるので , どの頂点のまわりでも , 3 つの面がつくる面角は α, β, γ である . これは , すべての頂点が理想的である双曲 3-単体の著しい特徴である . 以下では , このような双曲 3-単体を $\Delta_{\alpha, \beta, \gamma}$ とおく .

次に $\Delta_{\alpha, \beta, \gamma}$ の体積を求める . そのため , 次の Lobachevsky 関数を考える .

$$L(\theta) = - \int_0^\theta \log |2 \sin u| du \quad (-\infty < \theta < \infty)$$

問題 2.5. 次を示せ .

- (1) $\int_0^{\pi/2} \log(\sin u) du = -\frac{\pi}{2} \log 2$.
- (2) $L(\pi/2) = L(\pi) = 0$.
- (3) 任意の $n \in \mathbf{Z}$ に対し , $L(\theta + n\pi) = L(\theta)$.
- (4) $L(2\theta) = 2L(\theta) + 2L(\theta + \pi/2)$.

(ヒント : (1) は , 広義積分の演習問題としてよくみかける . (3) では , $|\sin u|$ の π -周期性を使う . (4) では , $2u = t$ の変数変換を使う .)

次の定理を証明しよう .

定理 2.13. $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$, $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ をみたす任意の α, β, γ に対して , 次が成り立つ .

- (1) $\text{Vol}(\Delta_{\alpha, \beta, \gamma}) = L(\alpha) + L(\beta) + L(\gamma)$.
- (2) $\text{Vol}(\Delta_{\alpha, \beta, \gamma}) \leq \text{Vol}(\Delta_{\pi/3, \pi/3, \pi/3})$. 等号成立条件は $\alpha = \beta = \gamma = \pi/3$.

任意の双曲 3-単体は、すべての頂点が理想的であるような双曲 3-単体に含まれる。したがって定理 2.13 より、 $\Delta_{\pi/3, \pi/3, \pi/3}$ は、等長同値を別にして、体積が最大となるただ一つの双曲 3-単体である。 $\Delta_{\pi/3, \pi/3, \pi/3}$ を正則理想 3-単体 (regular ideal 3-simplex) といい、その体積を

$$v_3 = \text{Vol}(\Delta_{\pi/3, \pi/3, \pi/3}) = 1.014916 \dots \quad (2.4)$$

とおく。

$0 \leq \alpha < \pi/2$ に対し、 $\mathbf{C} = \mathbf{R}^2$ 内の、Euclid 3 角形 $T_\alpha = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; 0 \leq x \leq \cos \alpha, 0 \leq y \leq x \tan \alpha\}$ を考える。このとき、

$$\Delta_\alpha = \{(x, y, t) \in \mathbf{H}^3; (x, y) \in T_\alpha, x^2 + y^2 + t^2 \geq 1\}$$

は、2 つの頂点 $(0, 0, 1)$, $(\cos \alpha, 0, \sin \alpha)$ と 2 つの理想頂点 $(\cos \alpha, \sin \alpha, 0)$, ∞ をもつ双曲 3-単体である (図 2.11 参照)。定理 2.13 を証明する上で次の補題

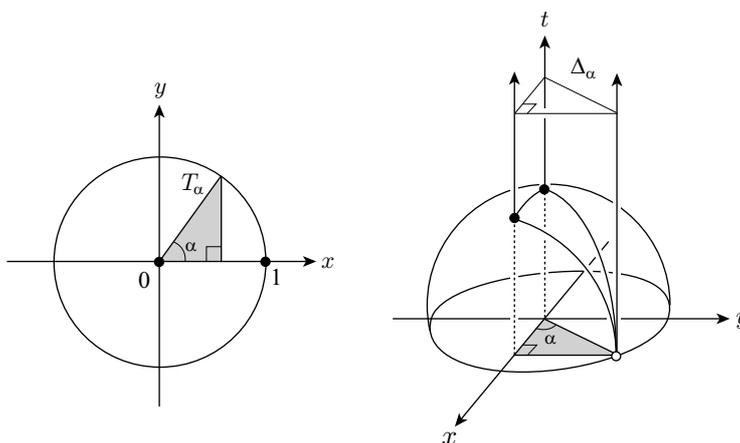


図 2.11

が重要である。

補題 2.14. $\text{Vol}(\Delta_\alpha) = \frac{1}{2}L(\alpha)$.

証明. (2.2) より, \mathbf{H}^3 の体積要素は $\frac{dx dy dt}{t^3}$ である. したがって,

$$\begin{aligned} \text{Vol}(\Delta_\alpha) &= \iiint_{\Delta_\alpha} \frac{dx dy dt}{t^3} = \iint_{T_\alpha} dx dy \int_{\sqrt{1-x^2-y^2}}^\infty \frac{dt}{t^3} \\ &= \iint_{T_\alpha} \frac{dx dy}{2(1-x^2-y^2)} = \frac{1}{2} \int_0^{\cos \alpha} dx \int_0^{x \tan \alpha} \frac{dy}{(\sqrt{1-x^2})^2 - y^2} \\ &\stackrel{(1)}{=} \frac{1}{4} \int_0^{\cos \alpha} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \log \left| \frac{\sqrt{1-x^2} + x \tan \alpha}{\sqrt{1-x^2} - x \tan \alpha} \right| dx \\ &\stackrel{(2)}{=} \frac{1}{4} \int_{\pi/2}^\alpha \frac{1}{\sin \theta} \log \left| \frac{\sin \theta \cos \alpha + \cos \theta \sin \alpha}{\sin \theta \cos \alpha - \cos \theta \sin \alpha} \right| (-\sin \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{4} \int_\alpha^{\pi/2} (\log |2 \sin(\theta + \alpha)| - \log |2 \sin(\theta - \alpha)|) d\theta \\ &= \frac{1}{4} (-L(\pi/2 + \alpha) + L(\pi/2 - \alpha) + L(2\alpha)) \stackrel{(3)}{=} \frac{1}{4} \cdot 2L(\alpha) = \frac{1}{2}L(\alpha) \end{aligned}$$

となる. ただし, 上の等号 “ $\stackrel{(1)}{=}$ ” では, よくある不定積分の公式を使った. “ $\stackrel{(2)}{=}$ ” では, 変数変換 $x = \cos \theta$ をおこなった. また, “ $\stackrel{(3)}{=}$ ” では, 問題 2.5(4) と Lobachevsky 関数の性質 $L(-\theta) = -L(\theta)$ を使った. \square

定理 2.13 の証明. (1) \hat{T} を, v_1, v_2, v_3 を頂点にもつ \mathbf{C} 内の Euclid 3 角形とする. このとき, \hat{T} の内角は α, β, γ である. 必要ならば \hat{T} を平行移動することにより, \mathbf{C} の原点 0 が \hat{T} の垂心になると仮定できる.

まず, \hat{T} が鋭角 3 角形の場合, すなわち $\alpha, \beta, \gamma < \pi/2$ の場合を考える. こ

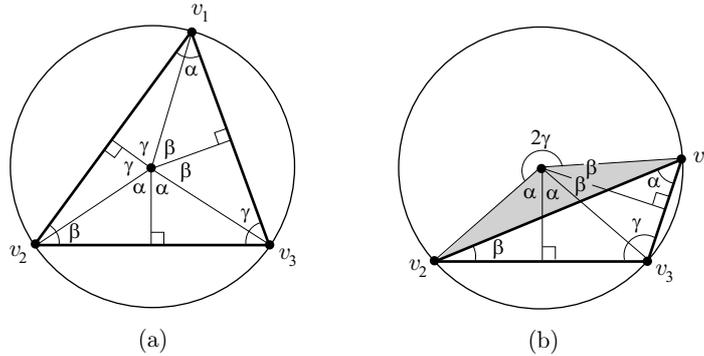


図 2.12 (b) の 3 角形は $T_{\pi-\gamma}$ に等長同値な 2 個の直角 3 角形に分割される.

のとき, \hat{T} は図 2.12 (a) のように 0 を共通頂点としてもつ 6 個の直角 3 角形に分割される. したがって補題 2.14 より,

$$\text{Vol}(\Delta_{\alpha,\beta,\gamma}) = 2(\text{Vol}(\Delta_\alpha) + \text{Vol}(\Delta_\beta) + \text{Vol}(\Delta_\gamma)) = L(\alpha) + L(\beta) + L(\gamma).$$

次に, $\gamma \geq \pi/2$ の場合を考える. 図 2.12 (b) からわかるように, \hat{T} は T_α , T_β に合同な 3 角形 2 個ずつからなる 4 角形から, $T_{\pi-\gamma}$ に合同な 3 角形 2 個からなる 3 角形を取りのぞいてできる. したがって,

$$\begin{aligned}\text{Vol}(\Delta_{\alpha,\beta,\gamma}) &= 2(\text{Vol}(\Delta_\alpha) + \text{Vol}(\Delta_\beta) - \text{Vol}(\Delta_{\pi-\gamma})) \\ &= L(\alpha) + L(\beta) - L(\pi - \gamma) = L(\alpha) + L(\beta) + L(\gamma).\end{aligned}$$

(2) の証明は練習問題とする. □

問題 2.6. 定理 2.13 (2) を証明せよ.

(ヒント: $f(\alpha, \beta) = \text{Vol}(\Delta_{\alpha,\beta,\gamma}) = L(\alpha) + L(\beta) - L(\alpha + \beta)$ は, コンパクト集合 $K = \{(\alpha, \beta); \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha + \beta \leq \pi\}$ 上で定義された連続関数であり, K の内部では偏微分可能である. K の境界上で $f = 0$, K の内部で $f > 0$ なので, f が K の内部でとる極値の中に最大値がある.)

2.4 擬等長写像と無限遠境界

定義 2.15. 距離空間 (X, d_X) , (Y, d_Y) の間の写像 $h: X \rightarrow Y$ は, 次の条件 (1), (2) をみたす定数 $\lambda \geq 1$, $C \geq 0$ が存在するとき, 擬等長写像 (quasi-isometry) (より正確には, (λ, C) -擬等長写像) という.

(1) 任意の $x, x' \in X$ に対して,

$$\lambda^{-1}d_X(x, x') - C \leq d_Y(h(x), h(x')) \leq \lambda d_X(x, x') + C.$$

(2) 任意の $y \in Y$ に対して, $d_Y(h(x), y) \leq C$ をみたす $x \in X$ が存在する.

擬等長写像は, 必ずしも連続写像とは限らないことに注意せよ.

命題 2.16. 定義 2.15 の h に対して,

$$d_Y(h(j(y)), y) \leq C \quad (y \in Y), \quad d_X(j(h(x)), x) \leq 2\lambda C \quad (x \in X)$$

をみたす $(\lambda, 3\lambda C)$ -擬等長写像 $j: Y \rightarrow X$ が存在する.

証明. 定義 2.15 (2) より, 任意の $y \in Y$ に対し, $d_Y(h(x), y) < C$ をみたす $x \in X$ を対応させる写像 $j: Y \rightarrow X$ がつくれる. $x = j(y)$ より, $d_Y(h(j(y)), y) < C$ である. 一方, 任意の $x \in X$ に対し, $h(x) = y$ とおくと,

$$\begin{aligned}d_X(j(h(x)), x) &\leq \lambda(d_Y(h(j(h(x))), h(x)) + C) = \lambda(d_Y(h(j(y)), y) + C) \\ &\leq \lambda(C + C) = 2\lambda C\end{aligned}$$

が成り立つ. また, 任意の $y, y' \in Y$ に対し,

$$d_Y(y, y') \leq d_Y(h(j(y)), h(j(y'))) + 2C \leq \lambda d_X(j(y), j(y')) + 3C.$$

ゆえに, $\lambda^{-1}d_Y(y, y') - 3\lambda^{-1}C \leq d_X(j(y), j(y'))$. 同様にして, $d_X(j(y), j(y')) \leq \lambda d_Y(y, y') + 3\lambda C$. したがって, j は $(\lambda, 3\lambda C)$ -擬等長的である. □

例 2.17. M, N を n 次元 Riemann 閉多様体とし, $f: M \rightarrow N$ を可微分ホモトピー同値写像, $g: Y \rightarrow X$ を f の可微分ホモトピー逆写像とする. すなわち, $H(x, 0) = g \circ f(x), H(x, 1) = x$ ($x \in X$) をみたす可微分写像 $H: M \times [0, 1] \rightarrow M$ と, $J(y, 0) = f \circ g(y), J(y, 1) = y$ ($y \in Y$) をみたす可微分写像 $J: N \times [0, 1] \rightarrow N$ が存在する. この条件を, $g \circ f \simeq_H \text{Id}_M, f \circ g \simeq_J \text{Id}_N$ とあらわす. 任意の $x \in M$ に対して, N 内の曲線 $c_x: [0, 1] \rightarrow N$ ($c_x(t) = H(x, t)$) の長さを $\text{Len}(c_x)$ であらわす. $\text{Len}(H) = \sup\{x \in M; \text{Len}(c_x)\}$ をホモトピー H の移動距離と考える. M, N はコンパクトであるから,

$$\text{Len}(H) \leq C_0, \quad \text{Len}(J) \leq C_0 \quad (2.5)$$

をみたす定数 $C_0 > 0$ が存在する. また,

$$\begin{aligned} \|df\| &= \sup\{\|df(v)\|; v \in T(M), \|v\| = 1\} \leq \lambda, \\ \|dg\| &= \sup\{\|dg(w)\|; w \in T(N), \|w\| = 1\} \leq \lambda \end{aligned} \quad (2.6)$$

をみたす定数 $\lambda \geq 1$ も存在する.

\tilde{M}, \tilde{N} を M, N の普遍被覆, $\tilde{H}: \tilde{M} \times [0, 1] \rightarrow \tilde{M}, \tilde{J}: \tilde{N} \times [0, 1] \rightarrow \tilde{N}, \tilde{f}: \tilde{M} \rightarrow \tilde{N}, \tilde{g}: \tilde{N} \rightarrow \tilde{M}$ を, それぞれ H, J, f, g の普遍被覆へのリフトで, $\tilde{g} \circ \tilde{f} \simeq_{\tilde{H}} \text{Id}_{\tilde{M}}, \tilde{f} \circ \tilde{g} \simeq_{\tilde{J}} \text{Id}_{\tilde{N}}$ をみたすものとする⁵⁾. (2.5) より, $\text{Len}(\tilde{H}) \leq C_0, \text{Len}(\tilde{J}) \leq C_0$ であるから, 任意の $x \in \tilde{M}, y \in \tilde{N}$ に対して,

$$d_{\tilde{M}}(x, \tilde{g} \circ \tilde{f}(x)) \leq C_0, \quad d_{\tilde{N}}(y, \tilde{f} \circ \tilde{g}(y)) \leq C_0 \quad (2.7)$$

が成り立つ. (2.6) より, $\|\tilde{d}\tilde{f}\| \leq \lambda$ であるから, 任意の $x, x' \in \tilde{M}$ に対して,

$$d_{\tilde{N}}(\tilde{f}(x), \tilde{f}(x')) \leq \lambda d_{\tilde{M}}(x, x')$$

となる. 一方, $\|\tilde{d}\tilde{g}\| \leq \lambda$ より,

$$\begin{aligned} d_{\tilde{N}}(\tilde{f}(x), \tilde{f}(x')) &\geq \lambda^{-1} d_{\tilde{M}}(\tilde{g} \circ \tilde{f}(x), \tilde{g} \circ \tilde{f}(x')) \\ &\geq \lambda^{-1} (d_{\tilde{M}}(x, x') - d_{\tilde{M}}(x, \tilde{g} \circ \tilde{f}(x)) - d_{\tilde{M}}(x', \tilde{g} \circ \tilde{f}(x'))) \\ &\geq \lambda^{-1} d_{\tilde{M}}(x, x') - C \end{aligned}$$

が成り立つ. ただし, $C = 2\lambda^{-1}C_0$ とする. また (2.7) の第 2 式より, 任意の $y \in Y$ に対し, $\tilde{g}(y) = x$ とおくと, $d_{\tilde{N}}(y, \tilde{f}(x)) \leq C_0$ となる⁶⁾. 以上の結果により, f のリフト $\tilde{f}: \tilde{M} \rightarrow \tilde{N}$ が擬等長写像であることがわかった.

以下では, 距離空間が双曲空間 \mathbb{H}^3 の場合を考える. 系 1.18 より, $\delta = \log 3$ とおくと, \mathbb{H}^3 内の任意の測地 3 角形は δ -スリムである. ここでは, 測地 3 角形のスリム性に頼って議論を進める.

⁵⁾ 厳密には, このようなリフトの存在は, ホモトピー・リフト定理によって保証される.

⁶⁾ f がホモトピー同値写像であることを使って, \tilde{f} が全射であることを示すこともできる.

補題 2.18. j を \mathbf{H}^3 内の測地線分とし, r を $r \geq 6\delta$ をみたす定数とする. $p, q \in \mathbf{H}^3 \setminus \mathcal{N}_r(j)$ に対し, p_0, q_0 を p, q から最短にある j 上の点とする. $d(p, q) \leq r - 4\delta$ ならば, $d(p_0, q_0) \leq 8\delta$ が成り立つ.

この補題の重要な点は, 上界 8δ が, r の大きさによらないことにある.

証明. $\overline{q, q_0}$ 上に, $d(q_0, q_1) = 2\delta$ をみたす点 q_1 をとる. $\Delta(q, q_0, p_0)$ は δ -スリムであるから, $\overline{q, p_0}$ 上に $d(s, q_1) \leq \delta$ をみたす点 s が存在する (図 2.13 (a) 参照). また, $\Delta(p, p_0, q)$ は δ -スリムであるから, $\overline{p, p_0} \cup \overline{p, q}$ に $d(s, p_1) \leq \delta$ を

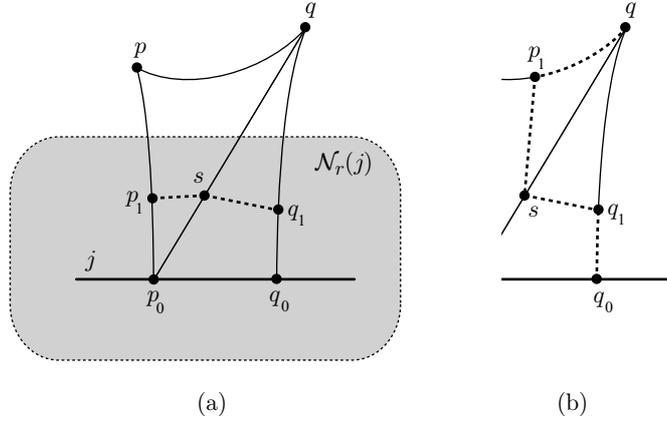


図 2.13 (b) $p_1 \in \overline{p, q}$ の場合.

みたす点 p_1 が存在する. もし $p_1 \in \overline{p, q}$ であったならば,

$$\begin{aligned} d(q_0, q) &\leq d(q_0, q_1) + d(q_1, s) + d(s, p_1) + d(p_1, q) \\ &< 2\delta + \delta + \delta + (r - 4\delta) < r \end{aligned}$$

となる (図 2.13 (b) 参照). これは, $q \notin \mathcal{N}_r(j)$ であることに矛盾する. したがって, $p_1 \in \overline{p, p_0}$. このとき,

$$d(p_1, p_0) = d(p_1, j) \leq d(p_1, s) + d(s, q_1) + d(q_1, q_0) \leq \delta + \delta + 2\delta = 4\delta.$$

よって, 求める不等式

$$d(p_0, q_0) \leq d(p_0, p_1) + d(p_1, s) + d(s, q_1) + d(q_1, q_0) \leq 8\delta$$

が得られた. □

\mathbf{R} の区間 I から, \mathbf{H}^3 への連続写像 $c: I \rightarrow \mathbf{H}^3$ を道という. $I = [a, b]$ を閉区間とし, $a = x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \dots, x_{2^n}^{(n)} = b$ を, I の 2^n 等分点とする.

$$l_n = \sum_{i=1}^{2^n} d(c(x_{i-1}^{(n)}), c(x_i^{(n)}))$$

とおくと, $\{l_n\}$ は単調増加数列である. $\sup_n \{l_n\} < \infty$ のとき, c を長さの定まる道 (rectifiable path) といひ, $\lim_{n \rightarrow \infty} l_n = \text{Len}(c[a, b])$ とおく.

定義 2.19. $\alpha : [u, v] \rightarrow \mathbf{H}^3$ を長さの定まる道 (のパラメータ) とする. 定数 $K \geq 1, C \geq 0$ に対して, α が (K, C) -擬測地線分 (quasi-geodesic arc) であるとは, $u \leq s < t \leq v$ をみたま任意の s, t に対して,

$$\text{Len}(\alpha([s, t])) \leq Kd(\alpha(s), \alpha(t)) + C \quad (2.8)$$

が成り立つことをいう.

命題 2.20. $\alpha : [u, v] \rightarrow \mathbf{H}^3$ を (K, C) -擬測地線分とする. このとき, 定数 $r = r(\delta, K, C) > 0$ で, $\alpha([u, v]) \subset \mathcal{N}_r(\overline{\alpha(u), \alpha(v)})$ をみたまものが存在する.

ただし, $r = r(\delta, K, C)$ は, r が δ, K, C のみに依存して決まる定数であることを意味する. この命題の重要な点は, 定数 r が α の長さによらないことにある.

証明. α のパラメータとして弧長パラメータをとる. すなわち, 任意の $u \leq s < t \leq v$ に対して, $\text{Len}(\alpha([s, t])) = t - s$ をみたまとする. $j = \overline{\alpha(u), \alpha(v)}$ とおく. $r_0 \geq 6\delta$, $\tau(r_0) := K^{-1}(r_0 - 4\delta - C_0) > 0$ みたま r_0 を考える. ただし, $C_0 = KC$ とする, r_0 の具体的な値は, 後で決める. $\alpha([s, t])$ を,

$$\alpha(s), \alpha(t) \in \mathcal{N}_{r_0}(j), \quad \alpha([s, t]) \subset \mathbf{H}^3 \setminus \mathcal{N}_{r_0}(j)$$

をみたま α の部分線分とし, p, q を $\alpha(s), \alpha(t)$ から最短にある j 内の点とする. ここで, $n\tau(r_0) \leq t - s < (n+1)\tau(r_0)$ をみたま $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ を上から評価する. $\alpha([s, t])$ は, $n+1$ 個の長さが $\tau(r_0)$ 以下の線分に分割できる.

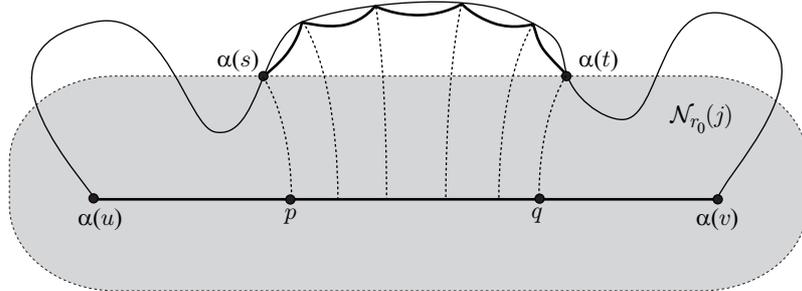


図 2.14

$\tau(r_0) \leq K\tau(r_0) < r_0 - 4\delta$ と $r_0 \geq 6\delta$ より, 各小線分に補題 2.18 の結果が適用できる. したがって, $d(p, q) \leq 8(n+1)\delta$ が成り立つ. 一方,

$$\begin{aligned} d(p, q) &\geq d(\alpha(s), \alpha(t)) - d(p, \alpha(s)) - d(\alpha(t), q) = d(\alpha(s), \alpha(t)) - 2r_0 \\ &\stackrel{(2.8)}{\geq} K^{-1}(\text{Len}(\alpha([s, t])) - C) - 2r_0 = K^{-1}(t - s - C) - 2r_0 \\ &\geq K^{-2}n(r_0 - 4\delta - 2C_0) - 2r_0 \end{aligned}$$

となる．ゆえに，

$$n(r_0 - 4\delta - 2C_0 - 8K^2\delta) \leq K^2(8\delta + 2r_0).$$

ここで $r_0 = 4\delta + 2C_0 + 8K^2\delta + 1$ とおくと， $n \leq K^2(8\delta + 2r_0)$ である．ゆえに， $\text{Len}(\alpha([s, t])) < K^2(8\delta + 2r_0)\tau(r_0)$ ．よって， $r = r_0 + K^2(8\delta + 2r_0)\tau(r_0)$ とおくと， $\alpha([u, v]) \subset \mathcal{N}_r(j)$ が成り立つ． \square

系 2.21. a, b を同じ端点をもつ \mathbf{H}^3 内の (K, C) -擬測地線分とする．このとき， $a \subset \mathcal{N}_r(b)$ ， $b \subset \mathcal{N}_r(a)$ をみたす定数 $r = r(\delta, K, C) > 0$ が存在する．

証明. x, y を a, b の端点とする．命題 2.20 より， $a \subset \mathcal{N}_{r_1}(\overline{x, y})$ ， $b \subset \mathcal{N}_{r_1}(\overline{x, y})$ をみたす定数 $r_1 = r_1(\delta, K, C) > 0$ が存在する． a 上の任意の点 z_0 に対して， $d(z_0, z_1) \leq r_1$ をみたす $\overline{x, y}$ 上の点 z_1 が存在する． b の連結性より， $d(\overline{x, z_1}, z_2) \leq r_1$ ， $d(\overline{z_1, y}, z_2) \leq r_1$ をみたす b 上の点 z_2 が存在する（図 2.15 参照）．したがって， z_1 を含む $\overline{x, y}$ の部分線分 $\overline{x', y'}$ で， $d(x', z_2) \leq r_1$ ， $d(y', z_2) \leq$

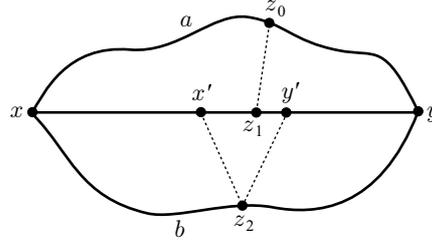


図 2.15

r_1 をみたすものがある． $\text{Len}(\overline{x', y'}) = d(x', y') \leq d(x', z_2) + d(z_2, y') \leq 2r_1$ であるから，

$$\begin{aligned} d(z_0, z_2) &\leq d(z_0, z_1) + \min\{d(z_1, x') + d(x', z_2), d(z_1, y') + d(y', z_2)\} \\ &\leq r_1 + (r_1 + r_1) = 3r_1 (=: r). \end{aligned}$$

したがって， $a \subset \mathcal{N}_r(b)$. \square

命題 2.22. $h : \mathbf{H}^3 \rightarrow \mathbf{H}^3$ を (λ, C) -擬等長写像とする．このとき，定数 $r = r(\delta, \lambda, C) > 0$ で，次の条件をみたすものがある． \mathbf{H}^3 の任意の測地線分 $\overline{x, y}$ に対して，

$$h(\overline{x, y}) \subset \mathcal{N}_r(\overline{h(x), h(y)}), \quad \overline{h(x), h(y)} \subset \mathcal{N}_r(h(\overline{x, y}))$$

が成り立つ．

証明. $d(x, y) \geq 1$ の場合だけ考えれば十分である．一般に h は連続写像ではないので， $h(\overline{x, y})$ は \mathbf{H}^3 内の道とは限らない．そこで， $h(\overline{x, y})$ を扱いが容易

な擬測地線で近似することにする． $x = x_0, x_1, \dots, x_n = y$ を $\overline{x, y}$ の分割点で， $1 \leq d(x_{i-1}, x_i) < 2$ をみたすものとする． $\sigma_i = \overline{h(x_{i-1}), h(x_i)}$ は，長さ $2\lambda + C$ 以下の測地線分である（図 2.16 (a) 参照）． $i, j \in \mathbf{N}$ ($0 \leq i < j \leq n$) に対し

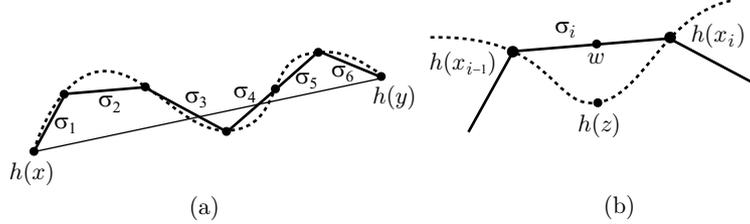


図 2.16 点線は， $h(\overline{x, y})$ をあらわす．

て， \mathbf{H}^3 内の折れ線 $\tau_{i,j} = \bigcup_{k=i+1}^j \sigma_k$ を考えると， $\text{Len}(\tau_{i,j}) \leq (j-i)(2\lambda + C)$ である．一方， $d(x_i, x_j) \geq j-i$ より， $d(h(x_i), h(x_j)) \geq \lambda^{-1}(j-i) - C$ であるから，

$$\text{Len}(\tau_{i,j}) \leq \lambda(2\lambda + C)d(h(x_i), h(x_j)) + C\lambda(2\lambda + C)$$

が成り立つ．これから， $\tau = \tau_{0,n}$ が δ, λ, C のみに依存する定数をもつ擬測地線分であることが示せる．系 2.21 より， $\tau \subset \mathcal{N}_{r_1}(\overline{h(x), h(y)})$ ， $\overline{h(x), h(y)} \subset \mathcal{N}_{r_1}(\tau)$ をみたす $r_1 = r_1(\lambda, C, \delta) > 0$ が存在する． $\overline{x_{i-1}, x_i}$ の任意の点 z は， $\min\{d(x_{i-1}, z), d(x_i, z)\} \leq 1$ をみたす．したがって， $h(z)$ は $h(x_{i-1})$ または $h(x_i)$ から $\lambda + C$ 以下の距離にある（図 2.16 (b) 参照）．一方， $\text{Len}(\sigma_i) \leq 2\lambda + C$ より， σ_i の任意の点 w に対し，

$$\min\{d(h(x_{i-1}), w), d(h(x_i), w)\} \leq \frac{2\lambda + C}{2} < \lambda + C$$

が成り立つ．よって， $r = r_1 + \lambda + C$ とおくと， $h(\overline{x, y}) \subset \mathcal{N}_r(\overline{h(x), h(y)})$ ， $\overline{h(x), h(y)} \subset \mathcal{N}_r(h(\overline{x, y}))$ をみたす．□

定理 2.23. $f : \mathbf{H}^3 \rightarrow \mathbf{H}^3$ を擬等長写像とする． $\mathbf{H}^3 = \mathbf{D}^3$ の同一視のもとで，次が成り立つ．

- (1) f は， S_∞^2 の任意の点で連続となる写像 $\widehat{f} : \mathbf{B}^3 \rightarrow \mathbf{B}^3$ に拡張される．特に， f が連続写像のときは， \widehat{f} も連続写像である．
- (2) 制限写像 $\bar{f} = \widehat{f}|_{S_\infty^2} : S_\infty^2 \rightarrow S_\infty^2$ は同相写像である．

証明. (1) 必要ならば， f の後に $\text{Isom}^+(\mathbf{D}^3)$ の要素を合成することによって， $f(0) = 0$ と仮定できる． $x \in S_\infty^2$ に \mathbf{B}^3 で収束する \mathbf{H}^3 の点列 $\{a_n\}$ をとる．

命題 1.20 より, $\lim_{m,n \rightarrow \infty} (a_m, a_n) = \infty^7$. 一方,

$$\begin{aligned} (f(a_m), f(a_n)) &\stackrel{(1.9)}{\geq} d(\mathbf{0}, \overline{f(a_m), f(a_n)}) - 4\delta \stackrel{\text{命題 2.20}}{\geq} d(\mathbf{0}, \overline{f(a_m, a_n)}) - 4\delta - r \\ &\geq \lambda^{-1} d(\mathbf{0}, \overline{a_m, a_n}) - C - 4\delta - r \\ &\stackrel{(1.9)}{\geq} \lambda^{-1} ((a_m, a_n) - 4\delta) - C - 4\delta - r \end{aligned}$$

であるから, $\lim_{m,n \rightarrow \infty} (f(a_m), f(a_n)) = \infty$. 命題 1.20 より, $\{f(a_n)\}$ は, B^3 における収束列である. $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \bar{f}(x)$ とおく. $\{b_n\}$ を, B^3 において x に収束する H^3 の任意の点列とする. 補題 1.21 より, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n, b_n) = \infty$. このとき上と同様の議論により, $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(a_n), f(b_n)) = \infty$. よって, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n)$. したがって, 写像 $\bar{f}: S_\infty^2 \rightarrow S_\infty^2$ は矛盾なく定義できる.

S_∞^2 の点 x に収束する B^3 の点列 $\{x_n\}$ をとる. 命題 1.22 より, $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, x) = \infty$. 上と同様な議論により, $\lim_{n \rightarrow \infty} (\hat{f}(x_n), \bar{f}(x)) = \infty$. ゆえに, $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{f}(x_n) = \bar{f}(x)$. したがって, \hat{f} は S_∞^2 の任意の点 x において連続である.

(2) f が (λ, C) -擬等長写像のとき, 命題 2.16 より, $d(f(j(y)), y) \leq C$ をみたく $(\lambda, 3\lambda C)$ -擬等長写像 $j: H^3 \rightarrow H^3$ が存在する. 上と同様に $\bar{j}: S_\infty^2 \rightarrow S_\infty^2$ が定義される. 問題 1.6 (p. 18) より, $\bar{j} \circ \bar{f} = \text{Id}_{S_\infty^2}$, $\bar{f} \circ \bar{j} = \text{Id}_{S_\infty^2}$ が成り立つ⁸⁾. $\bar{f}: S_\infty^2 \rightarrow S_\infty^2$, $\bar{f}^{-1} = \bar{j}: S_\infty^2 \rightarrow S_\infty^2$ は連続写像であるから, \bar{f} は同相写像である. \square

2.5 Mostow の剛性定理

この節では, 双曲 3 次元閉多様体に関する Mostow の剛性定理を証明する. この定理は, 双曲 3 次元閉多様体の間のホモトピー同値写像 $f: M \rightarrow N$ が, 等長写像にホモトピックになるという主張である. 例 1.28 (p. 22) でみたように, 双曲閉曲面に対して, この定理は成り立たない. ここで紹介する証明では, 最大体積をもつ双曲 3-単体は正則理想 3-単体に限るという定理 2.13 (2) の主張が本質的に使われる. Haagerup-Munkholm [HM] により, 4 次元以上の双曲単体でもこれに対応する定理が証明されている. したがって, 4 次元以上の双曲閉多様体に関しても, 同様の議論により Mostow の剛性定理が証明できる.

本節における Mostow の剛性定理の証明は, Thurston [Th1, 第 6 章] で与えられたものである. 本質的に使われるのは Gromov よって定義された多様体の単体的体積である. Soma [So1] で, この議論は無限体積の双曲 3 次元多

⁷⁾ 命題 1.20 等は, H^2 に関する結果であるが, H^3 の場合も成り立つことは, 平行な議論により検証できる.

⁸⁾ 「 H^3 に関する有界な誤差をもつ情報を, 無限遠境界 S_∞^2 まで拡張すると, S_∞^2 上では誤差が収れんされて一意的に決まる情報となる」という双曲空間のもつ性質の典型的な例である.

様体の場合に一般化されている．無限体積の場合は，単体的体積の代わりに有界コホモロジーを使う．

この節では (コ) ホモロジーおよび微分形式に関する基本的な知識を仮定している．必要に応じて基本的な参考書 (例えばシンガー・ソープ [ST] 等) を参照せよ．

定義 2.24. X を位相空間とし, $\{C_k(X), \partial_k\}$ を \mathbf{R} -係数の特異鎖複体とする．したがって, $C_k(X)$ の要素は 1 次結合 $c = \sum_{i=1}^n r_i \sigma_i$ ($r_i \in \mathbf{R}$) の形をしている．ただし, Δ^k は各辺の長さが 1 の Euclid 単体であり, $\sigma_i: \Delta^k \rightarrow X$ は連続写像 (特異 k -単体) である． $\|c\| = \sum_{i=1}^n |r_i|$ を c の Gromov ノルムという． k 次元ホモロジー $H_k(X; \mathbf{R})$ の要素 α に対し, その擬ノルムを,

$$\|\alpha\| = \inf\{\|c\|; c \in Z_k(X) \text{ は } \alpha \text{ を代表するサイクル}\}$$

で定義する．ただし $Z_k(X) = \text{Ker}(\partial_k)$ は, X の k 次元輪体鎖群である．次の問題 2.7 (3) でもみるように, $\alpha \neq 0$ であっても $\|\alpha\| = 0$ となる場合もある．

M が向き付け可能な n 次元閉多様体のとき, 基本ホモロジー類 $[M] \in H_n(M; \mathbf{R})$ のノルム $\|[M]\|$ を, Gromov の単体的体積 (simplicial volume) といい, これを $\|M\|$ とあらわす．

問題 2.7. 次の問いに答えよ．

- (1) $f: M \rightarrow N$ を向き付け可能な n 次元閉多様体間の連続写像とする．このとき, $\deg(f)\|N\| \leq \|M\|$.
- (2) (1) の写像 $f: M \rightarrow N$ がホモトピー同値写像のとき, $\|M\| = \|N\|$.
- (3) $T^n = S^1 \times \cdots \times S^1$ を n 次元トーラスとすると, $\|T^n\| = 0$.

(ヒント: (1) $c = \sum_{i=1}^n r_i \sigma_i$ が $[M]$ を代表する n -サイクルとき, $f_*(c) = \sum_{i=1}^n r_i f \circ \sigma_i$ は $\deg(f)[N]$ を代表する n -サイクルである．(3) 2 重被覆射影 $f: T^n \rightarrow T^n$ が存在する.)

定理 2.25 (Thurston [Th2]). M を双曲 3 次元閉多様体とすると, 等式

$$\text{Vol}(M) = \frac{\|M\|}{v_3}$$

が成り立つ．ただし v_3 は, (2.4) で与えた理想双曲 3-単体 $\Delta_{\pi/3, \pi/3, \pi/3}$ の体積である．

この定理より, 任意の 3 次元双曲閉多様体 M に対して, $\|M\| > 0$ である⁹⁾．定理 2.25 を証明するために, いくつかの概念を準備をする．

\mathbf{H}^3 の特異単体 $\sigma: \Delta^k \rightarrow \mathbf{H}^3$ に対し, 次の性質をみたす C^∞ 級特異単体 $\text{straight}(\sigma): \Delta^k \rightarrow \mathbf{H}^3$ を σ の直伸化 (straightening) という．

⁹⁾これとは対照的に, 任意のザイフェルト閉多様体 N に対して, $\|N\| = 0$ である (Thurston [Th1, 第 6 章])．

- (1) σ と $\text{straight}(\sigma)$ は, Δ^k の頂点 v_0, v_1, \dots, v_k 上で一致する .
- (2) $\text{straight}(\sigma)$ の像は双曲 k -単体 . この単体は, 退化していてもよい .

ここでは, $\text{straight}(\sigma)$ の像の形のみを決め, これが具体的にどのような写像か決めてない . しかし, 今後の議論でそれが問題になることはない¹⁰⁾ . $p: \mathbf{H}^3 \rightarrow M$ を, 双曲 3 次元多様体 M の普遍被覆とする . 特異単体 $\sigma: \Delta^k \rightarrow M$ の持ち上げを $\tilde{\sigma}: \Delta^k \rightarrow \mathbf{H}^3$ とするとき, $\text{straight}(\sigma) = p \circ \text{straight}(\tilde{\sigma})$ を σ の直伸化という . あきらかに $\text{straight}(\sigma)$ は, リフト $\tilde{\sigma}$ のとりかたによらな

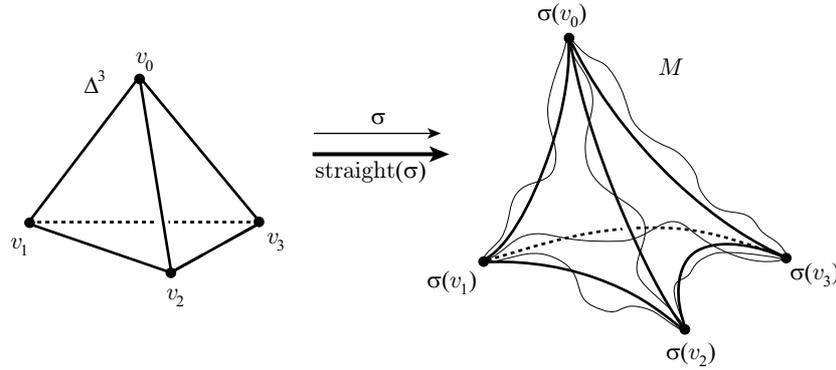


図 2.17 $k = 3$ の場合

い . また, $\sigma(v_i)$ ($i = 0, 1, \dots, k$) を不動にする σ から $\text{straight}(\sigma)$ へのホモトピーが存在することもいえる . $c = \sum_{i=1}^n r_i \sigma_i$ を M の k -鎖とするととき, $\text{straight}(c) = \sum_{i=1}^n r_i \text{straight}(\sigma_i)$ とおく . このとき, $\|c\| \geq \|\text{straight}(c)\|$ が成り立つ . ただし, 等号が成り立つとは限らない . 例えば, σ_1, σ_2 を M の異なる k -鎖で, $\text{straight}(\sigma_1) = \text{straight}(\sigma_2)$ をみたすものとする . $c = \sigma_1 - \sigma_2$ に対して, $\|c\| = 2$ であるが, $\|\text{straight}(c)\| = 0$ となる . c が k -サイクルのとき, σ_i から $\text{straight}(\sigma_i)$ へのホモトピーを同時に行うことにより, c の直伸化 $\text{straight}(c)$ も

$$[\text{straight}(c)] = [c] \in H_k(M; \mathbf{R}) \quad (2.9)$$

をみたす k -サイクルであることがわかる .

定理 2.25 の証明 (前半) c を基本ホモロジー類 $[M]$ を代表する任意の 3-サイクルとする . (2.9) より, $\text{straight}(c)$ も $[M]$ を代表する 3-サイクルである . $\text{straight}(c) = \sum_{i=1}^n r_i \sigma_i$ とおき, Ω_M を M の体積要素とする . σ_i は双曲 3-

¹⁰⁾最も自然なパラメータ化は, \mathbf{H}^3 を 4 次元ローレンツ空間 H^4 の双曲面として実現し, Δ^k から H^4 へのアフィン写像を考え, それを \mathbf{H}^3 へ射影するものである .

単体であるから，定理 2.13 より， $\text{Vol}(\sigma_i) := \int_{\Delta^3} \sigma_i^*(\Omega_M) < \mathbf{v}_3$. よって，

$$\begin{aligned} \text{Vol}(M) &= \langle [M], \Omega_M \rangle = \langle \text{straight}(c), \Omega_M \rangle = \int_M \text{straight}(c)^*(\Omega_M) \\ &= \sum_{i=1}^n r_i \text{Vol}(\sigma_i) < \sum_{i=1}^n |r_i| \mathbf{v}_3 = \|\text{straight}(c)\| \mathbf{v}_3 \leq \|c\| \mathbf{v}_3. \end{aligned}$$

したがって， $\|c\| \geq \frac{\text{Vol}(M)}{\mathbf{v}_3}$ となる． $\|M\| = \inf\{\|c\|; [c] = [M]\}$ であるから，

$$\|M\| \geq \frac{\text{Vol}(M)}{\mathbf{v}_3}$$

が成り立つ． □

逆向きの不等式の証明はもっと難しい．その証明では， M 上に均一に分布する 3-サイクルが必要である．

$C^1(\Delta^k, M)$ を Δ^k から M への C^1 -写像の集合に C^1 -位相を入れたものとする． $C^1(\Delta^k, M)$ 上の有限な Borel 測度 c を k -鎖とするホモロジーを使う． $\alpha_{k,i} : \Delta^{k-1} \rightarrow \Delta^k$ ($i = 0, 1, \dots, k$) を Δ^k の第 i 面上への等長写像とし，写像 $\partial_{k,i} : C^1(\Delta^k, M) \rightarrow C^1(\Delta^{k-1}, M)$ を $\partial_{k,i}(\tau) = \tau \circ \alpha_{k,i}$ で定義する．このとき，境界作用素 ∂_k は， $C^1(\Delta^k, M)$ 上の有限な Borel 測度 c を，

$$\partial_k(c) = \sum_{i=0}^k (-1)^i \partial_{k,i_*}(c) \quad (2.10)$$

に対応させる準同型写像とする．また， M 上の任意の k -形式 η に対して，双対関係を

$$\langle c, \eta \rangle = \int_{C^1(\Delta^k, M)} \left(\int_{\Delta^3} \tau^*(\eta) \right) dc(\tau) \quad (2.11)$$

で定義する．

非退化直伸 3-単体 $\sigma : \Delta^3 \rightarrow \mathbf{H}^3$ を固定する．簡単のため $G = \text{Isom}^+(\mathbf{H}^3)$ とおく． G の部分集合 H に対応する， $C^1(\Delta^3, \mathbf{H}^3)$ の部分集合 $\{g \circ \sigma; g \in H\}$ を $H\sigma$ とおく．普遍被覆 $p : \mathbf{H}^3 \rightarrow M$ が誘導する，射影 $\hat{p} : C^1(\Delta^3, \mathbf{H}^3) \rightarrow C^1(\Delta^3, M)$ を $\hat{p}(\tau) = p \circ \tau$ で定義する． $\hat{p}(H\sigma) = H_M\sigma$ とおく．

注意 2.26 (特異 3-鎖の極限としての測度 3-鎖)． $C^1(\Delta^3, M)$ 上の有限な Borel 測度 c で， $\text{supp}(c) = G_M\sigma$ をみたすものを考える．ここでは， c を通常の特異 3-鎖で近似する方法について説明する．任意の $\varepsilon > 0$ に対して， M の双曲単体分割 τ_ε で，各 3-単体の直径が ε 以下のものを考える． $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ を τ_ε の 3-単体とする． Δ_i の部分集合 Δ'_i による M の直和分解を考える．すなわち， Δ'_i を $M = \bigcup_{i=1}^n \Delta'_i$ かつ $\Delta'_i \cap \Delta'_j = \emptyset$ ($i \neq j$) となるようにとる．一般に， Δ'_i は開集合でも閉集合でもないが， Δ_i の内部 $\text{Int}\Delta_i$ を含む可縮な集合である． $\tau_1, \tau_2 \in G_M\sigma$ に対し次のような同値関係を考える．

- (1) $j = 0, 1, 2, 3$ に対し, $\tau_1(v_j)$ と $\tau_2(v_j)$ が同じ Δ'_i に含まれる .
 (2) (1) の条件を保存したままで, τ_1 は τ_2 にホモトピックである .

この同値関係による同値類 H_1, \dots, H_m ($G_M \sigma = H_1 \cup \dots \cup H_m$) に対し, $r_k = c(H_k)$ とおく . $\tau_k : \Delta^3 \rightarrow M$ を, H_k の要素 τ に上の条件 (1) を保存したままでホモトピックになる直伸 3-単体で, 各 $\tau_k(v_j)$ がそれを含む Δ'_i の内心となるものとする . 一般に, τ_k は H_k の要素ではないが, H_k の ‘代表’ とみなす (図 2.18 参照) . $r_k = c(H_k)$ より, $c_\varepsilon = \sum_{k=1}^m r_k \delta_{\tau_k}$ ($\varepsilon \searrow 0$) は,

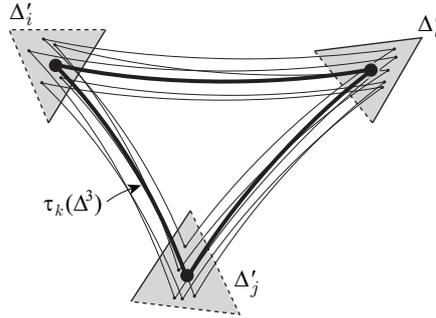


図 2.18

$C^1(\Delta^3, M)$ 上の Borel 測度として c に弱収束する . ただし δ_{τ_k} は, $\text{supp}(\delta_{\tau_k}) = \{\tau_k\}$ となる $C^1(\Delta^3, M)$ 上の Dirac 測度とする . すなわち, 任意の連続関数 $f : C^1(\Delta^3, M) \rightarrow \mathbf{R}$ に対して, $\int_{C^1(\Delta^3, M)} f(\tau) d\delta_{\tau_k}(\tau) = f(\tau_k)$ となる測度である .

Borel 測度 $c_\varepsilon = \sum_{k=1}^m r_k \delta_{\tau_k}$ を (通常の) 特異 3-鎖 $\sum_{k=1}^m r_k \tau_k$ と同一視する . c_ε と M 上の微分 3-形式 η との双対関係は,

$$\begin{aligned} \left\langle \sum_{k=1}^m r_k \delta_{\tau_k}, \eta \right\rangle &\stackrel{(2.11)}{=} \sum_{k=1}^m r_k \int_{C^1(\Delta^3, M)} \left(\int_{\Delta^3} \tau^*(\eta) \right) d\delta_{\tau_k}(\tau) \\ &= \sum_{k=1}^m r_k \int_{\Delta^3} \tau_k^*(\eta) \stackrel{(1)}{=} \left\langle \sum_{k=1}^m r_k \tau_k, \eta \right\rangle \end{aligned}$$

となる . ここで ‘(1)’ は, 通常の C^1 -特異鎖と微分形式の双対関係である . これから, (2.11) が従来の定義の自然な拡張であることがわかる . さらに c の全変位 (total variation) $\|c\|_{\text{t.v.}}$ も, Gromov ノルムの自然な拡張である . 実際, 測度 $c_\varepsilon = \sum_{k=1}^m r_k \delta_{\tau_k}$ の全変位は,

$$\|c_\varepsilon\|_{\text{t.v.}} = \sum_{k=1}^m |r_k| \|\delta_{\tau_k}\| = \sum_{k=1}^m |r_k|$$

であるから, c_ε の特異 3-鎖としての Gromov ノルム $\|c_\varepsilon\|$ と一致する . よって, $\{c_\varepsilon\} \xrightarrow{\text{弱収束}} c$ より, $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \|c_\varepsilon\| = \|c\|_{\text{t.v.}}$ が成り立つ . 以下では, $\|c\|_{\text{t.v.}} = \|c\|$ とおく .

向きを保つ非退化直伸 3-単体 $\sigma : \Delta^3 \rightarrow \mathbf{H}^3$ とその鏡映 σ_- を考える . σ_- が σ の鏡映とは , ある $h \in \text{Isom}(\mathbf{H}^3) \setminus G$ に対して , $\sigma_- = h \circ \sigma$ となることをいう (図 2.19 参照) . 次の性質をみたく $C^1(\Delta^3, \mathbf{H}^3)$ 上の局所有限 3-サイ

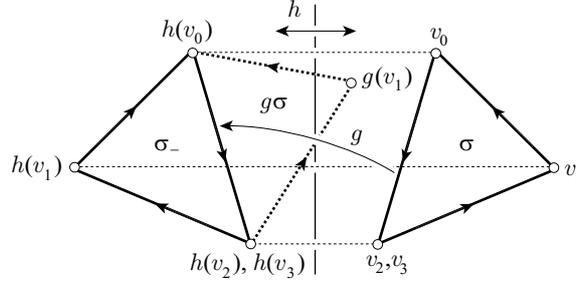


図 2.19 $h \in \text{Isom}(\mathbf{H}^3) \setminus G$, $g \in G$.

クル $z(\sigma)$ と $C^1(\Delta^3, M)$ 上の有限 3-サイクル $z_M(\sigma)$ が存在する (構成の詳細は , 第 A.2 節 (p. 67) を参照せよ) .

$$(z.1) \text{supp}(z(\sigma)) = G\sigma \cup G\sigma_-.$$

(z.2) H を , $\text{Int}H \neq \emptyset$ となる G の任意の Borel 部分集合とする . このとき , $z(\sigma)(H\sigma) = -z(\sigma)(H\sigma_-) > 0$. 以下では , $z(\sigma)(H\sigma) = \frac{1}{2}\mu(H)$ とおく .

(z.3) $z_M(\sigma)$ は $z(\sigma)$ と局所同値である . すなわち , $\text{supp}(z_M(\sigma)) = G_M\sigma \cup G_M\sigma_-$ であり , 制限写像 $\hat{p}|_{H\sigma} : H\sigma \rightarrow C^1(\Delta^3, M)$ が単射となるような Borel 集合 $H \subset G$ に対しては , $z(\sigma)(H\sigma) = z_M(\sigma)(H_M\sigma)$.

$$(z.4) \|z_M(\sigma)\| = \text{Vol}(M).$$

$$(z.5) [z_M(\sigma)] = \text{Vol}(\sigma)[M] \in H_3(M; \mathbf{R}).$$

定理 2.25 の証明 (後半) 定理 2.13 より , 任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して , $\text{Vol}(\sigma_n) > v_3 - 1/n$ をみたく直伸 3-単体 $\sigma_n : \Delta^3 \rightarrow \mathbf{H}^3$ が存在する . $[z_M(\sigma_n)] \stackrel{(z.5)}{=} \text{Vol}(\sigma_n)[M] \in H_3(M; \mathbf{R})$ より , $\text{Vol}(\sigma_n)\|M\| \leq \|z_M(\sigma_n)\| \stackrel{(z.4)}{=} \text{Vol}(M)$. ここで , $n \rightarrow \infty$ とすると ,

$$\|M\| \leq \frac{\text{Vol}(M)}{v_3}$$

が得られる . □

定理 2.25 と問題 2.7 (2) より , 次が成り立つ .

系 2.27. ホモトピー同値な双曲 3 次元閉多様体は同じ体積をもつ .

定理 2.28 (Mostow の剛性定理). $f : M \rightarrow N$ を 3 次元双曲閉多様体 M, N 間のホモトピー同値写像とする . このとき , f は等長写像 $\varphi : M \rightarrow N$ にホモトピックである .

$p : \mathbf{H}^3 \rightarrow M, q : \mathbf{H}^3 \rightarrow N$ を普遍被覆とする．例 2.17 より, f のリフト $\tilde{f} : \mathbf{H}^3 \rightarrow \mathbf{H}^3$ は連続な擬等長写像である． $\overline{\mathbf{H}^3}$ を \mathbf{B}^3 と同一視すると, 定理 2.23 より, \tilde{f} は $F|_{\widehat{\mathbf{C}}} : \widehat{\mathbf{C}} \rightarrow \widehat{\mathbf{C}}$ が同相写像となるような連続写像 $F : \overline{\mathbf{H}^3} \rightarrow \overline{\mathbf{H}^3}$ に拡張される．また, 等長作用 $\pi_1(M) \curvearrowright \mathbf{H}^3, \pi_1(N) \curvearrowright \mathbf{H}^3$ は $\overline{\mathbf{H}^3}$ 上の Möbius 作用に拡張される．任意の $\gamma \in \pi_1(M)$ に対し, \mathbf{H}^3 上で, $\gamma \circ \tilde{f} = \tilde{f} \circ f_*(\gamma)$ であるから, $\overline{\mathbf{H}^3}$ 上で, $\gamma \circ F = F \circ f_*(\gamma)$ が成り立つ．次の問題 2.8 より, $\alpha \circ F(\infty) = \infty, \alpha \circ F(0) = 0, \alpha \circ F(1) = 1$ となる $\alpha \in \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ が存在する．

問題 2.8. 相異なる 3 点 $z_1, z_2, z_3 \in \widehat{\mathbf{C}}$ に対して, $\alpha(z_1) = \infty, \alpha(z_2) = 0, \alpha(z_3) = 1$ となるような $\alpha \in \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ が存在する．

Mostow の剛性定理の証明には次の 2 つの補題が必要である．

補題 2.29. $\alpha \circ F(e^{i\pi/3}) = e^{i\pi/3}$.

証明. Δ を $\infty, 0, 1, e^{i\pi/3}$ を頂点にもち, \mathbf{H}^3 と同じ向きをもつ正則理想 3-単体とする． $\alpha \circ F = E$ とおく． $E(e^{i\pi/3}) \neq e^{i\pi/3}$ と仮定して矛盾を導くことにする．このとき, 直伸 3-単体 $\mathrm{straight}(E(\Delta))$ は, \mathbf{H}^3 と同じ向きをもつ正則理想 3-単体とはならない (図 2.20 参照)．定理 2.13 より, $\mathrm{straight}(E(\Delta)) < v_3 - 3c_0$ を

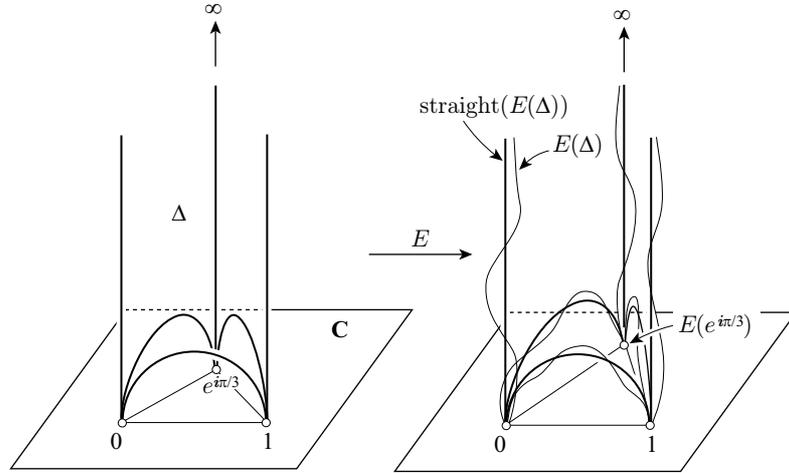


図 2.20

みたく定数 $c_0 > 0$ が存在する． E の連続性より, $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ における $\mathrm{Id}_{\overline{\mathbf{H}^3}}$ の十分小さい近傍 H で, 任意の $h \in H$ に対して, $\mathrm{Vol}(\mathrm{straight}(E(h\Delta))) < v_3 - 2c_0$ をみたくするようなものが存在する．さらに H は, Δ の内心 x_0 に対し,

$$\sup\{d(x_0, hx_0); h \in H\} < \mathrm{inj}_p(x_0)(M) \quad (2.12)$$

をみたくようにとれる．任意の $n \in \mathbf{N}$ に対し, 直伸 3-単体 $\sigma_n : \Delta^3 \rightarrow \mathbf{H}^3$ で次をみたくものがある (図 2.21 参照)．

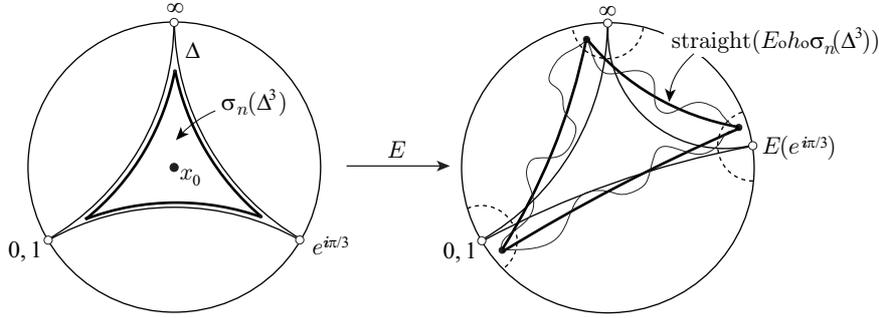


図 2.21

- (1) $\sigma_n(\Delta^3) \subset \text{Int}\Delta$ であり, $\sigma_n(\Delta^3)$ の内心は x_0 .
- (2) $\text{Vol}(\sigma_n) > v_3 - 1/n$.
- (3) $\text{Vol}(\text{straight}(E \circ h \circ \sigma_n)) < v_3 - c_0$ ($h \in H$).

(2.12) と (1) より, $\hat{p}|_{H\sigma_n} : H\sigma_n \rightarrow C^1(\Delta^3, M)$ は単射である. f はホモトピー同値写像であるから, $\deg(f) = 1$. よって, $f_*([M]) = [N] \in H_3(N; \mathbf{R})$. したがって,

$$[\text{straight}(f_*(z_M(\sigma_n)))] \stackrel{(2.9)}{=} [f_*(z_M(\sigma_n))] \stackrel{(z.5)}{=} f_*(\text{Vol}(\sigma_n)[M]) = \text{Vol}(\sigma_n)[N].$$

N の体積要素を Ω_N とすると,

$$\begin{aligned} \text{Vol}(\sigma_n)\text{Vol}(N) &= \langle \text{Vol}(\sigma_n)[N], \Omega_N \rangle = \langle \text{straight}(f_*(z_M(\sigma_n))), \Omega_N \rangle \\ &= \langle \text{straight}(f_*(z_M(\sigma_n))|_{H_M\sigma_n}), \Omega_N \rangle \\ &\quad + \langle \text{straight}(f_*(z_M(\sigma_n))|_{G_M\sigma_n \setminus H_M\sigma_n}), \Omega_N \rangle \\ &\leq (v_3 - c_0)\|z_M(\sigma_n)|_{H_M\sigma_n}\| + v_3(\|z_M(\sigma_n)\| - \|z_M(\sigma_n)|_{H_M\sigma_n}\|) \\ &\stackrel{(z.4)}{=} v_3\text{Vol}(M) - c_0\|z_M(\sigma_n)|_{H_M\sigma_n}\| \stackrel{(z.2), (z.3)}{=} v_3\text{Vol}(M) - \frac{c_0\mu(H)}{2}. \end{aligned}$$

$n \rightarrow \infty$ とすると, $\text{Vol}(N) \leq \text{Vol}(M) - \frac{c_0\mu(H)}{2v_3}$ が得られる. これは, 系 2.27 に矛盾する. よって, $E(e^{i\pi/3}) = e^{i\pi/3}$ が成り立つ. \square

注意 2.30 (損失と補填). 補題 2.29 の証明中の式は一見複雑に見えるが, アイデア自体は単純である. $z_M(\sigma_n)$ は, σ_n と局所的に等長な特異 3-単体を, M 上に一様に分布した 3-サイクルであるから, $\langle z_M(\sigma_n), \Omega_M \rangle$ は $\text{Vol}(M)$ の $\text{Vol}(\sigma_n)$ 倍となる. また, $f_*([M]) = [N]$ であるから, $\langle \text{straight}(f_*(z_M(\sigma_n))), \Omega_N \rangle$ も $\text{Vol}(N)$ の $\text{Vol}(\sigma_n)$ 倍である. そこで, $\text{Vol}(M)$ と $\text{Vol}(N)$ を比較するには, $\tau \in G_M\sigma_n$ の体積と, それを f で N に写し直伸化した $\text{straight}(f(\tau))$ の体積を比較すればよいことになる. $\tau \in H_M\sigma_n$ のとき, $\text{Vol}(\tau) > v_3 - 1/n$,

$\text{Vol}(\text{straight}(f(\tau))) < v_3 - c_0$ であるから、過小に見積もっても、1つの τ あたり $c_0 - 1/n$ の損失が出る。したがって、損失の総和が $(c_0 - \frac{1}{n}) \frac{\mu(H)}{2}$ を下回ることはない。一方、 $\tau' \in G\sigma_n \cup G\sigma_{n-} \setminus H\sigma_n$ に対し、 $\text{Vol}(\tau') > v_3 - 1/n$ 、 $\text{Vol}(\text{straight}(f(\tau'))) < v_3$ であるから、1つの τ' ができる補填は、過大に見積もっても $1/n$ である。よって、補填の総和が $\frac{1}{n} (\text{Vol}(M) - \frac{\mu(H)}{2})$ を上回ることはない。したがって、 n を十分大きくとれば、 $\text{Vol}(M) > \frac{1}{2} \text{Vol}(N)$ であることが示される。

補題 2.31. $\alpha \circ F|_{\hat{C}} = \text{Id}_{\hat{C}}$.

証明. \mathbb{C} 上で、正 3 角形 $\Delta(0, 1, e^{i\pi/3})$ と隣接する任意の正 3 角形、たとえば、 $\Delta(0, e^{-i\pi/3}, 1)$ を考える。このとき、補題 2.29 と同じ証明により、 $\alpha \circ F(e^{-i\pi/3}) = e^{-i\pi/3}$ が示せる。辺の長さが 1 の正 3 角形による \mathbb{C} のタイル張り T_0 で、 $\Delta(0, 1, e^{i\pi/3})$ を一つのピースとしてもつものを考える。上と同様な議論を繰り返すことによって、 $\alpha \circ F$ は T_0 の頂点集合上で恒等写像であることが証明できる (図 2.22 参照)。今度は、 $\Delta(0, 1, e^{i\pi/3})$ の辺上に 2 等分

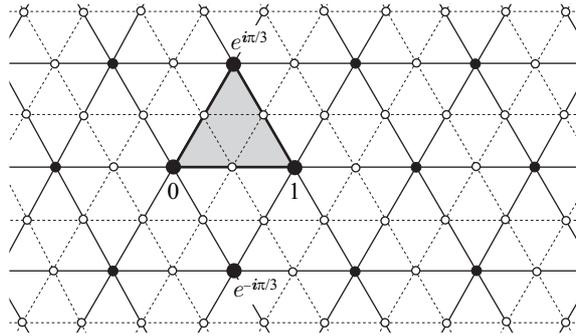


図 2.22 黒頂点は、 T_0 の点である。白頂点は、 $T_1 \setminus T_0$ の点である。

点 $1/2, e^{i\pi/3}/2, \sqrt{5}e^{i\pi/6}/2$ を加え、 $\Delta(0, 1, e^{i\pi/3})$ を辺の長さが $1/2$ の 4 つの正 3 角形 Δ_i ($i = 1, 2, 3, 4$) に分割する。このとき、各 $\alpha \circ F(\Delta_i)$ の直伸化 $\text{straight}(\alpha \circ F(\Delta_i))$ も Δ_i と同じ向きをもつ正 3 角形である。これから、 $\text{straight}(\alpha \circ F(\Delta_i)) = \Delta_i$ がいえる。特に、 $\alpha \circ F$ は $\{1/2, e^{i\pi/3}/2, \sqrt{5}e^{i\pi/6}/2\}$ 上で恒等写像である。同様な議論を繰り返すと、辺の長さが $1/2$ の正 3 角形による T_0 の細分 T_1 の頂点上で、 $\alpha \circ F$ は恒等写像であることがわかる。同様な結果は、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し、辺の長さが $1/2^n$ の正 3 角形による \mathbb{C} のタイル張り T_n の頂点上でも成り立つ。よって、 $\alpha \circ F$ は \hat{C} の稠密な集合上で恒等写像になる。 $\alpha \circ F|_{\hat{C}}$ の連続性より、 $\alpha \circ F|_{\hat{C}} = \text{Id}_{\hat{C}}$ となる。□

定理 2.28 (Mostow の剛性定理) の証明. 任意の $\gamma \in \pi_1(M)$ に対して、 $\gamma \circ F = F \circ f_*(\gamma)$ であった。 α を補題 2.31 で与えられた $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$ の要素とすると、 \hat{C} 上で、 $\gamma \circ \alpha^{-1} = \alpha^{-1} \circ f_*(\gamma)$ が成り立つ。 $\gamma, f_*(\gamma), \alpha$ はすべて Möbius

変換であるから， \mathbf{H}^3 上でも， $\gamma \circ \alpha^{-1} = \alpha^{-1} \circ f_*(\gamma)$ が成り立つ（問題 2.1, p. 25）．よって， \mathbf{H}^3 の等長写像 α^{-1} は，等長写像 $\varphi: M \rightarrow N$ を誘導する．

$$\begin{array}{ccccc}
 \widehat{\mathbf{C}} & \xrightarrow{F|\widehat{c}=\alpha^{-1}|\widehat{c}} & \widehat{\mathbf{C}} & & \mathbf{H}^3 & \xrightarrow{\alpha^{-1}} & \mathbf{H}^3 & & \mathbf{H}^3 & \xrightarrow{\alpha^{-1}} & \mathbf{H}^3 \\
 \gamma \downarrow & & \downarrow f_*(\gamma) & & \gamma \downarrow & & \downarrow f_*(\gamma) & & p \downarrow & & \downarrow q \\
 \widehat{\mathbf{C}} & \xrightarrow{F|\widehat{c}=\alpha^{-1}|\widehat{c}} & \widehat{\mathbf{C}} & & \mathbf{H}^3 & \xrightarrow{\alpha^{-1}} & \mathbf{H}^3 & & M & \xrightarrow{\varphi} & N
 \end{array}$$

x_0 を左側の \mathbf{H}^3 の基点とし， $y_0 = \alpha^{-1}(x_0)$ を右側の \mathbf{H}^3 の基点とする．必要ならば， f をホモトピーで変形して， $\tilde{f}(x_0) = y_0$ と仮定できる． $\bar{x}_0 = p(x_0)$ ， $\bar{y}_0 = q(y_0)$ とおく． $\pi_1(M, \bar{x}_0)$ の要素 γ に対して， $c: [0, 1] \rightarrow M$ ($c(0) = c(1) = \bar{x}_0$) を γ を代表する閉道とする． $\tilde{c}: [0, 1] \rightarrow \mathbf{H}^3$ を， $\tilde{c}(0) = x_0$ となる c のリフトとすると， $\tilde{c}(1) = \gamma x_0$ である．このとき，

$$\alpha^{-1}(\tilde{c}(0)) = y_0, \quad \alpha^{-1}(\tilde{c}(1)) = \alpha^{-1}(\gamma(x_0)) = f_*(\gamma)(\alpha^{-1}(x_0)) = f_*(\gamma)y_0.$$

したがって， $\alpha^{-1} \circ \tilde{c} = \widetilde{\varphi \circ c}$ は， y_0 と $f_*(\gamma)y_0$ をつなぐ道である．よって， $\varphi_* = f_*: \pi_1(M, \bar{x}_0) \rightarrow \pi_1(N, \bar{y}_0)$ が成り立つ．さらに，命題 2.9 (H.1) より， M, N はともに $K(\pi, 1)$ 空間であるから， φ は f にホモトピックである．□

この証明で使われた議論を一般化することによって，次の剛性定理が得られる．詳細は [Th1, 定理 6.4] を参照せよ．

定理 2.32 (Gromov-Thurston の剛性定理)． $f: M \rightarrow N$ を双曲 3 次元閉多様体間の $\deg(f) > 0$ をみたす写像とする．このとき， f が局所等長的な被覆射影にホモトピックになるための必要十分条件は， $\text{Vol}(M) = \deg(f)\text{Vol}(N)$ である．

注意 2.33 (剛性定理の一般化)．定理 2.32 より， $\deg(f) = 1$ の場合， f が等長写像とホモトピックになるための必要十分条件は， $\text{Vol}(M) = \text{Vol}(N)$ である．しかし， $\deg(f) = 1$ という条件だけ残し，体積に関する条件を外すと，剛性定理は成立しない．Soma [So2] により， M を固定したとき，次数 1 の写像 $f: M \rightarrow N$ を許容するような双曲 3 次元閉多様体 N の個数はたかだか有限個であることが証明されている．

双曲 3 次元閉多様体 M に対し，表現 $\rho: \pi_1(M) \rightarrow \text{PSL}_2(\mathbf{C})$ の体積 $\text{Vol}(\rho)$ が自然な形で定義できる．このとき，定理 2.32 の一般化である，Goldman の剛性定理がある．この定理の主張は「不等式 $\text{Vol}(M) \geq \text{Vol}(\rho)$ が成立すること」および「等号成立条件は， ρ が Klein 群の上への単射写像となること」である．証明は Dunfield [Du, 定理 6.1] 等を参照せよ．

微分幾何的な手法による Mostow の剛性定理のわかりやすい証明が Besson-Courtois-Gallot [BCG] によって与えられている．彼らの証明の解説が，井関 [Iz] にある．

Mostow の剛性定理の無限体積版ともいえる，エンディング・ラミネーション予想は，Y. Minsky 他 [Mi, BCM] によって解決された．相馬 [So3] に，こ

の予想の解説がある．Minsky の証明において，曲線複体が双曲的空間であるという事実 (Masur-Minsky [MM]) が重要な役割を果たす．双曲的空間は，次節で扱う主題である．

3 双曲性と Coarse 幾何学

この節では、双曲空間 \mathbf{H}^n の概念を一般化した Gromov 双曲的空間を考える。そこで、測地的 3 角形が一様にスリムであることが双曲性の本質であることをみる。この理論は、Gromov [Gr] を基にするものであるが、この論文は難解である。双曲的空間の解説書として、大鹿 [Oh], Alonso 他 [A-S], Coonaert 他 [CDP] 等がある。

3.1 Gromov 双曲的空間

定義 3.1. x, y を距離空間 (X, d) の任意の 2 点とし、 $c : [0, 1] \rightarrow X$ を $c(0) = x, c(1) = y$ をみたす長さの定まる道とする。 $c([0, 1])$ は、

$$\text{Len}(c([0, 1])) = d(x, y)$$

をみたすとき、 x, y を端点にもつ測地線分といい、これを $\overline{x, y}$ とあらわす。双曲空間 \mathbf{H}^n の場合と違い、測地線分 $\overline{x, y}$ は一意に決まるとは限らない。 X の任意の 2 点 x, y を端点にもつ測地線分が存在するとき、 (X, d) は測地的空間とよばれる。測地的空間 X の任意の 3 点 x, y, z に対し、和集合 $\Delta(x, y, z) = \overline{x, y} \cup \overline{y, z} \cup \overline{z, x}$ を頂点 x, y, z をもつ (X, d) の測地 3 角形という。

定義 3.2. (X, d) を測地的空間、 Δ を 3 辺 a, b, c をもつ測地 3 角形とする。定数 $\delta > 0$ に対して、

$$a \subset \mathcal{N}_\delta(b \cup c), b \subset \mathcal{N}_\delta(c \cup a), c \subset \mathcal{N}_\delta(a \cup b)$$

が成り立つとき、 Δ は δ -スリム (δ -slim) であるという。測地的空間 (X, d) の任意の測地 3 角形が δ -スリムであるとき、 (X, d) を Gromov 双曲的空間 (Gromov hyperbolic space) または δ -双曲的空間 (δ -hyperbolic space) という。

例 3.3. (1) (X, d) を有界な測地的空間とする。 $\text{diam}(X) \leq D$ であれば、 X は、 D -双曲的空間である。

(2) T を木とする。 T 上には、各辺が \mathbf{R} の単位区間 $[0, 1]$ と等長になるような距離が定義できる。このとき、 T は 0-双曲的空間である。

(3) 系 1.18 より、 \mathbf{H}^n ($n = 2, 3, \dots$) は $\log 3$ -双曲的空間である。

以下、 δ を明示する必要がないときは、 δ -双曲的空間を単に双曲的空間という。

問題 3.1. 2 次元 Euclid 空間 \mathbf{E}^2 は、どのような $\delta > 0$ に対しても双曲的でないことを示せ。

(ヒント: $n \in \mathbf{N}$ に対し、 $(0, 0), (n, 0), (0, n)$ を頂点にもつ測地 3 角形を考える。)

次の命題は、双曲性が移植性の高い概念であることを示している。

命題 3.4. $f : X \rightarrow Y$ を測地的空間 (X, d_X) , (Y, d_Y) の間の擬等長写像とする . このとき , (X, d_X) が双曲的であれば , (Y, d_Y) も双曲的である .

証明. (X, d_X) は δ -双曲的 , f は (λ, C) -擬等長的であるとする . 命題 2.16 より , $d_Y(f(j(y)), y) \leq C$ をみたく $(\lambda, 3\lambda C)$ -擬等長写像 $j : Y \rightarrow X$ が存在する . Y の測地的 3 角形 $\Delta(y_1, y_2, y_3)$ を考える . 命題 2.22 と同様に ,

$$\overline{j(y_i), j(y_{i+1})} \subset \mathcal{N}_r(\overline{j(y_i, y_{i+1})}), \quad \overline{j(y_i, y_{i+1})} \subset \mathcal{N}_r(\overline{j(y_i), j(y_{i+1})})$$

をみたく $r = r(\delta, \lambda, C) > 0$ が存在する¹¹⁾ . ただし , $y_4 = y_1$ とする (図 3.1 参照) . したがって , 任意の $w_0 \in \overline{y_1, y_2}$ に対し , $d_X(j(w_0), z_0) < r$ をみたく

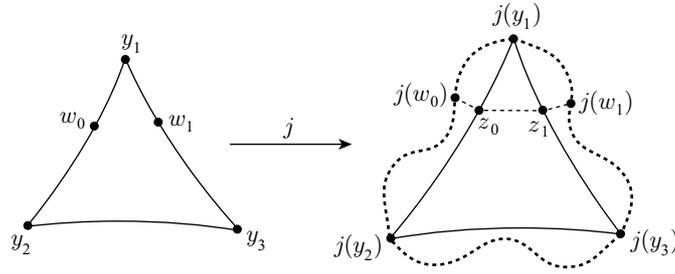


図 3.1 点線は $\bigcup_{i=1}^3 \overline{j(y_i, y_{i+1})}$ をあらわす .

点 $z_0 \in \overline{j(y_1), j(y_2)}$ がある . X の測地 3 角形 $\Delta(j(y_1), j(y_2), j(y_3))$ は δ -スリムであるから , $d_X(z_0, z_1) < \delta$ をみたく点 $z_1 \in \overline{j(y_1), j(y_3)} \cup \overline{j(y_2), j(y_3)}$ が存在する . $z_1 \in \overline{j(y_1), j(y_3)}$ とする . このとき , $\overline{y_1, y_3}$ のある点 w_1 に対して , $d_X(j(w_1), z_1) < r$ が成り立つ . したがって , $d_X(j(w_0), j(w_1)) < \delta + 2r$ である . さらに , $d_Y(f(j(w_k)), w_k) < C$ ($k = 0, 1$) であるから ,

$$\begin{aligned} d_Y(w_0, w_1) &\leq d_Y(w_0, f(j(w_0))) + d_Y(f(j(w_0)), f(j(w_1))) + d_Y(f(j(w_1)), w_1) \\ &\leq d_Y(f(j(w_0)), f(j(w_1))) + 2C \leq (\lambda d_X(j(w_0), j(w_1)) + C) + 2C \\ &\leq (\lambda(\delta + 2r) + C) + 2C (=:\delta_0). \end{aligned}$$

よって , $\Delta(y_1, y_2, y_3)$ は δ_0 -スリムである . δ_0 は , δ, λ, C のみによる定数であるから , (Y, d_Y) は δ_0 -双曲的である . \square

命題 3.5. (X, d) を基点 x_0 をもつ δ -双曲的空間とする . このとき , 任意の $x, y, z, w \in X$ に対して ,

$$(x, z)_{x_0} \geq \min\{(x, y)_{x_0}, (y, z)_{x_0}\} - 8\delta \quad (3.1)$$

$$(x, w)_{x_0} \geq \min\{(x, y)_{x_0}, (y, z)_{x_0}, (z, w)_{x_0}\} - 16\delta \quad (3.2)$$

が成り立つ .

¹¹⁾ 命題 2.22 の証明は , (X, d_X) の双曲性のみを必要とし , (Y, d_Y) の双曲性は必要としない .

(3.1) は, $(x, z)_{x_0}, (x, y)_{x_0}, (y, z)_{x_0}$ のうち, 小さい方の 2 つの差が 8δ 以下であることを示している.

証明. $(x, z)_{x_0} \leq \min\{(x, y)_{x_0}, (y, z)_{x_0}\}$ と仮定してよい. $\Delta(x, y, z)$ の δ -スリム性より, 任意の $u \in \overline{x, z}$ に対し, $d(u, v) \leq \delta$ をみたす $\overline{x, y} \cup \overline{y, z}$ の点 v が存在する. $v \in \overline{x, y}$ と仮定する. このとき,

$$\begin{aligned} d(x_0, u) &\geq d(x_0, v) - d(u, v) \geq d(x_0, \overline{x, y}) - \delta \stackrel{(1.9)}{\geq} (x, y)_{x_0} - 5\delta \\ &\geq \min\{(x, y)_{x_0}, (y, z)_{x_0}\} - 5\delta. \end{aligned}$$

よって, $d(x_0, \overline{x, z}) \geq \min\{(x, y)_{x_0}, (y, z)_{x_0}\} - 5\delta$. 不等式 (1.8) (p. 15) より, $d(x_0, \overline{x, z}) \leq (x, z)_{x_0} + 3\delta$ であるから, $(x, y)_{x_0} \geq \min\{(x, y)_{x_0}, (y, z)_{x_0}\} - 8\delta$ となる. よって, (3.1) が成り立つ. (3.2) は, (3.1) を 2 回使うことによって証明できる. \square

3.2 双曲的空間の無限遠境界

(X, d) を基点 x_0 をもつ距離空間とする. X の点列 $\{a_n\}$ は,

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} (a_n, a_m)_{x_0} = \infty$$

をみたすとき無限遠点に収束するという (cf. 命題 1.20, p. 16).

問題 3.2. この定義は, 基点 x_0 の取り方によらないことを示せ.

(ヒント: $|(a_n, a_m)_{x_0} - (a_n, a_m)_{x_1}| \leq d(x_0, x_1)$.)

以下簡単のため, $(x, y)_{x_0} = (x, y)$ とおく. $S_\infty(X)$ を, 無限遠点に収束する X の点列全体の集合とする. $S_\infty(X)$ 上の関係 R を, $\{a_n\}, \{b_n\} \in S_\infty(X)$ に対して,

$$\{a_n\}R\{b_n\} \iff \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n, b_n) = \infty$$

で定義する. (X, d) が δ -双曲的空間のときは,

$$(a_n, b_m) \stackrel{(3.1)}{\geq} \min\{(a_n, b_n), (b_n, b_m)\} - 8\delta$$

が成り立つ. よって, 条件 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n, b_n) = \infty$ は, $\lim_{n, m \rightarrow \infty} (a_n, b_m) = \infty$ と同値である.

補題 3.6. R は反射律と対称律をみたす. さらに, (X, d) が双曲的空間のときは, 推移律をみたす.

証明. 定義より, R が反射律と対称律をみたすことは容易に検証できる.

(X, d) を δ -双曲的空間とし, $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\} \in S_\infty(X)$ が, $\{a_n\}R\{b_n\}, \{b_n\}R\{c_n\}$ をみたすとする. このとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n, b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n, c_n) = \infty$.

$$(a_n, c_n) \stackrel{(3.1)}{\geq} \min\{(a_n, b_n), (b_n, c_n)\} - 8\delta \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty)$$

であるから, $\{a_n\}R\{c_n\}$ が成り立つ. よって, R は推移律をみたす. \square

$a_n = (0, n), b_n = (n, 0), c_n = (0, -n)$ で定義される Euclid 平面 \mathbb{E}^2 内の点列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\} \in S_\infty(\mathbb{E}^2)$ を考える. 原点を \mathbb{E}^2 の基点とすると, $(a_n, b_n) = (b_n, c_n) = \frac{n}{2}(2 - \sqrt{2}), (a_n, c_n) = 0$ である. よって, $\{a_n\}R\{b_n\}, \{b_n\}R\{c_n\}$ であるが, $\{a_n\}R\{c_n\}$ は成り立たない.

(X, d) が双曲的空間のとき, $S_\infty(X)$ の R -同値類の集合 $\partial X = S_\infty(X)/R$ を, X の無限遠境界という. $\bar{X} = X \cup \partial X$ とおく. $\{a_n\} \in S_\infty(X)$ が同値類 $x \in \partial X$ に属するとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x$ または $\{a_n\} \rightarrow x$ とあらわす. この定義より明らかなように, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x$ のとき, $\{a_n\}$ の任意の部分列 $\{a_{n_m}\}$ も x に収束する.

Gromov 積の \bar{X} への拡張を次で定義する. $x, y \in \bar{X}$ に対し,

$$(x, y) = \inf \left\{ \liminf_n (a_n, b_n); \{a_n\}, \{b_n\} \in S_\infty(X), \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = y \right\}$$

を x と y の Gromov 積という. (x, y) の $X \times X$ への制限は連続関数であるから, $x, y \in X$ に対して, この定義はもとの Gromov 積の定義と一致する. 双曲空間 \mathbb{H}^n の場合 (補題 1.21, p. 17) とは違い, 一般に $\liminf (a_n, b_n)$ の値は, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = y$ をみたす $\{a_n\}, \{b_n\} \in S_\infty(X)$ の取りかたに依存する. この弱点は次の命題 3.7 (2) によって補われる.

命題 3.7. (X, d) を δ -双曲的空間とするととき, 次が成り立つ.

- (1) \bar{X} 上の Gromov 積に関しても, 命題 3.5 の不等式 (3.1) が成立する.
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = y$ をみたす任意の点列 $\{a_n\}, \{b_n\} \in S_\infty(X)$ について, $(x, y) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n, b_n) - 16\delta$ が成り立つ.
- (3) $x, y \in \bar{X}$ に対し, $(x, y) = \infty$ であるための必要十分条件は, $x, y \in \partial X$ かつ $x = y$ が成り立つことである.
- (4) $\{a_n\} \in S_\infty(X)$ と $x \in \bar{X}$ に対し, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n, x) = \infty$ となるための必要十分条件は $x \in \partial X$ かつ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x$ が成り立つことである (cf. 命題 1.22, p. 18).

証明. (1) は練習問題とする.

(2) (x, y) の定義より, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $(x, y) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} (a'_n, b'_n) - \varepsilon$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a'_n = x, \lim_{n \rightarrow \infty} b'_n = y$ をみたす点列 $\{a'_n\}, \{b'_n\} \in S_\infty(X)$ が存在する. (3.2) より,

$$(a'_n, b'_n) \geq \min\{(a'_n, a_m), (a_m, b_m), (b_m, b'_n)\} - 16\delta.$$

$\{a'_n\}R\{a_n\}, \{b'_n\}R\{b_n\}$ より, $\lim_{n,m \rightarrow \infty} (a'_n, a_m) = \lim_{n,m \rightarrow \infty} (b'_n, b_m) = \infty$. よつて, $\liminf_{n \rightarrow \infty} (a'_n, b'_n) \geq \liminf_{m \rightarrow \infty} (a_m, b_m) - 16\delta$ となる. $\varepsilon > 0$ は任意に小さく取れるので, $(x, y) \geq \liminf_{m \rightarrow \infty} (a_m, b_m) - 16\delta$ が成り立つ.

(3) は (2) より明らかである.

(4) $\{a_n\} \in S_\infty(X)$ と $x \in \bar{X}$ に対し, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n, x) = \infty$ が成り立つと仮定する. $x \in X$ とすると, (1.7) より, $(a_n, x) \leq d(x_0, x) + 2\delta$ となり, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n, x) = \infty$ に矛盾する. よつて, $x \in \partial X$ である. $\lim_{n \rightarrow \infty} b_m = x$ となる $\{b_m\} \in S_\infty(X)$ をとると, \bar{X} 上での Gromov 積の定義より, $\liminf_{m \rightarrow \infty} (a_n, b_m) \geq (a_n, x)$. したがつて, \mathbb{N} の単調増加列 $\{m_n\}$ で, $(a_n, b_{m_n}) \geq (a_n, x) - 1$ をみたまものがある. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n, x) = \infty$ より, $\{a_n\}R\{b_{m_n}\}$ が成り立つ. $\lim_{n \rightarrow \infty} b_{m_n} = x$ であるから, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x$.

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x$ とする. (2) より, $(a_n, x) \geq \liminf_{m \rightarrow \infty} (a_n, a_m) - 16\delta$ である. したがつて, $\lim_{n,m \rightarrow \infty} (a_n, a_m) = \infty$ より, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n, x) = \infty$ となる. \square

問題 3.3. 命題 3.7(1) を証明せよ.

$x \in X$ に対し, 半径 r の開球体 $\{y \in X; d(x, y) < r\}$ を $O_r(x)$ とあらわす.

定義 3.8. \bar{X} 上の位相を次のように定義する.

- (1) $x \in X$ のとき, $\{O_r(x); r > 0\}$ を x の開近傍の基とする.
- (2) $x \in \partial X$ のとき, $\{U_s(x); s > 0\}$ を x の開近傍の基とする. ただし, $U_s(x) = \{y \in \bar{X}; (x, y) > s\}$ とする.

条件 (1) より, \bar{X} の部分空間としての X の位相は, (X, d) の距離位相と一致する. 条件 (2) は, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in \partial X$ が $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, x) = \infty$ と同値であることを意味する. これは, $X = \mathbb{H}^n$ のときの命題 1.22 (p. 18) の結果に対応している.

命題 3.9. 定義 3.8 の位相に関し, \bar{X} は Hausdorff 空間である.

証明. \bar{X} の相異なる 2 点 x, y が互いに素な近傍をもつことを示せばよい. (X, d) は距離空間であるから, $x, y \in X$ のときは明らか.

$x \in X, y \in \partial X$ のとき, $s = d(x_0, x) + 1 + 2\delta$ とおく. 任意の $z \in O_1(x)$ に対し, $(z, y) \stackrel{(1.7)}{\leq} d(x_0, z) + 2\delta < d(x_0, x) + 1 + 2\delta = s$. ゆえに, $z \notin U_s(y)$. これより, $O_1(x) \cap U_s(y) = \emptyset$.

$x, y \in \partial X$ のとき, 命題 3.7(2) より, $(x, y) < \infty$. $s = (x, y) + 8\delta$ とおく. もし $U_s(x) \cap U_s(y)$ が要素 z を含むならば,

$$(x, y) \geq \min\{(x, z), (z, y)\} - 8\delta > s - 8\delta = (x, y)$$

となる. これはあきらかに矛盾なので, $U_s(x) \cap U_s(y) = \emptyset$. \square

次の定理は、定理 2.23 (p. 43) と同様な議論により証明される。補題 1.21 より、 $X = \mathbb{H}^n$ の場合は、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = y$ をみたま任意の $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ に対し、 $(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n, b_n)$ であった。しかしこの事実は、一般の双曲的空間では必ずしも成立しない。定理 3.10 の証明では、この等式の代わりに命題 3.7(2) の不等式

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n, b_n) - 16\delta \leq (x, y) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n, b_n)$$

を使う。

定理 3.10. (X, d_X) , (Y, d_Y) を双曲的空間、 $f : X \rightarrow Y$ を擬等長写像とすると、次が成り立つ。

- (1) f は、 ∂X の任意の点で連続となる写像 $\hat{f} : \bar{X} \rightarrow \bar{Y}$ に拡張される。特に、 f が連続写像のときは、 \hat{f} も連続写像である。
- (2) 制限写像 $\bar{f} = \hat{f}|_{\partial X} : \partial X \rightarrow \partial Y$ は同相写像である。

距離空間 (X, d) は、任意の $x \in X$ と任意の $r > 0$ に対し、球体 $B_r(x)$ がコンパクトであるとき、固有である (proper) という。

定理 3.11. (X, d) を固有な双曲的空間とすると、次が成り立つ。

- (1) 任意の 2 点 $x, y \in \partial X$ に対し、 x, y を端点にもつ X の測地線が存在する。
- (2) 任意の $x \in X$ と $y \in \partial X$ に対し、 x を始点、 y を終点とする X の測地半直線が存在する。
- (3) ∂X はコンパクトである。

証明. (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = y$ をみたま点列 $\{a_n\}, \{b_n\} \in S_\infty(X)$ をとる。 $\overline{a_n, b_n} = j_n$ とおく。 $x \neq y$ より、 $K = \sup\{(a_n, b_n)\} < \infty$ である。実際そうでなければ、 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ は R -同値な部分列をもち、 $x = y$ となって、矛盾がおこる。(1.9) より、 $d(x_0, j_n) \leq (a_n, b_n) + 4\delta \leq K + 4\delta$ となる。よって、 $j_n \cap B_{K+4\delta}(x_0) \neq \emptyset$ 。また、任意の $r > 0$ に対して、 $B_r(x_0)$ はコンパクトであるから、Ascoli-Arzelà の定理より、 $\{j_n\}$ は x と y を端点にもつ測地線 j_∞ に Hausdorff 収束する部分列をもち、

(2) は、(1) と同様な議論を使って証明できる。

(3) $\{x_n\}$ を ∂X 内の任意の点列とする。任意の n に対し、始点 x_0 、終点 x_n をもつ測地半直線 r_n を考える。(1) と同様に、 $\{r_n\}$ の部分列 $\{r_{n_k}\}$ で、 x_0 を始点とする測地半直線 r_∞ に Hausdorff 収束するものが存在する。 $\{a_m\}$ を $d(x_0, a_m) = m$ をみたま r_∞ 上の点列とする。 r_{n_k} 上の点列 $\{b_m^{(k)}\}$ が同様に定義できる。 $x_0, a_m, a_{m'}$ は同一の測地半直線上にあるから、 $\lim_{m, m' \rightarrow \infty} (a_m, a_{m'}) = \lim_{m, m' \rightarrow \infty} \min\{m, m'\} = \infty$ 。よって、 $\{a_m\} \in S_\infty(X)$ 。 $\lim_{m \rightarrow \infty} a_m = x$ とおく。

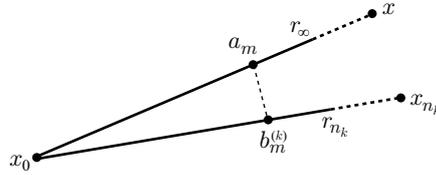


図 3.2

$\{r_{n_k}\} \rightarrow r_\infty$ より, 任意に固定した m に対して, $d(a_m, b_m^{(k)}) < 2$ ($k > k(m)$) をみたく自然数 $k(m)$ が存在する (図 3.2 参照). このとき, $d(x_0, a_m) = d(x_0, b_m^{(k)}) = m$ より, $(a_m, b_m^{(k)}) > m - 1$ ($k > k(m)$) が成り立つ. 命題 3.7 (2) と (3.2) より, $k > k(m)$ のとき,

$$\begin{aligned} (x, x_{n_k}) &\geq \liminf_{m' \rightarrow \infty} (a_{m'}, b_{m'}^{(k)}) - 16\delta \\ &\geq \liminf_{m' \rightarrow \infty} \min\{(a_{m'}, a_m), (a_m, b_m^{(k)}), (b_m^{(k)}, b_{m'}^{(k)})\} - 32\delta \\ &\geq \min\{m, m - 1, m\} - 32\delta = m - (32\delta + 1). \end{aligned}$$

m は任意に大きくとれるので, $\lim_{k \rightarrow \infty} (x, x_{n_k}) = \infty$. 定義 3.8 (2) より, $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x$ が成り立つ. ∂X の任意の点列は収束する部分列をもつことが示されたので, ∂X はコンパクトである. \square

問題 3.4. (X, d) を δ -双曲的空間とし, l_1, l_2 を ∂X の 2 点 x, y をつなぐ測地線とする. このとき, $l_1 \subset \mathcal{N}_{2\delta}(l_2)$ であることを示せ.

(ヒント: l_i 上の点列 $\{a_n^{(i)}\}, \{b_n^{(i)}\}$ で, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{(i)} = x, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n^{(i)} = y$ をみたくものを考える. 測地 3 角形 $\Delta(a_n^{(1)}, a_n^{(2)}, b_n^{(1)})$, $\Delta(a_n^{(2)}, b_n^{(1)}, b_n^{(2)})$ は δ -スリムである. ここで, $d(x_0, a_n^{(1)}, a_n^{(2)}) \geq (a_n^{(1)}, a_n^{(2)}) - 4\delta \rightarrow \infty$ を利用する (図 3.3 参照).)

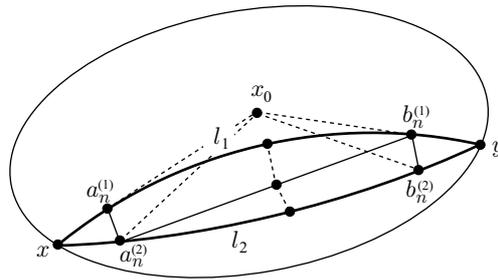


図 3.3

3.3 双曲群

G を有限生成群とし, S を G の対称 ($S = S^{-1}$) な有限生成系とする. S 上の語 $w = s_1 \cdots s_n$ ($s_i \in S$) の長さ n を $|w|$ であらわす. $g \in G$ に対し,

$$\|g\| = \min\{|w|; w \text{ は } G \text{ において } g \text{ をあらわす } S \text{ 上の語}\}$$

とおく. 生成系 S を明示したいときは, $\|g\|_S$ とかく. ただし, G の単位元 1 に対し, $\|1\| = 0$ とする. $g, h \in G$ に対し,

$$d_S(g, h) = \|g^{-1}h\|$$

とおく.

問題 3.5. 次を示せ.

- (1) d_S は G 上の距離を定義する.
- (2) d_S は G の左からの作用に関し不変である. すなわち $f, g, h \in G$ に対し, $d_S(fg, fh) = d_S(g, h)$.
- (3) T を G の対称な有限生成系とすると, 恒等写像 $\text{Id}_G : (G, d_S) \rightarrow (G, d_T)$ は擬等長写像である.

(ヒント: (3) $T = \{t_1, \dots, t_n\}$, $\|t_i\|_S = m_i$, $\lambda = \max\{m_1, \dots, m_n\}$ とすると, 任意の $g \in G$ に対して, $\|g\|_S \leq \lambda \|g\|_T$.)

命題 3.12. M を閉 Riemann 多様体とし, \widetilde{M} を基点 x_0 をもつ M の普遍被覆とする. また, $\pi_1(M) \curvearrowright \widetilde{M}$ を被覆変換が定義する等長作用とする. このとき, $\varphi(g) = gx_0$ によって定義される写像 $\varphi : \pi_1(M) \rightarrow \widetilde{M}$ は擬等長的である.

証明. $d_{\widetilde{M}}$ を, M の距離から誘導された \widetilde{M} 上の距離とする. $\text{diam}(M) = D$ とおくと, 任意の $y \in \widetilde{M}$ に対して,

$$d_{\widetilde{M}}(\varphi(g), y) = d_{\widetilde{M}}(gx_0, y) \leq D \quad (3.3)$$

をみたく $g \in \pi_1(M)$ が存在する. $S = \{s \in \pi_1(M); d_{\widetilde{M}}(x_0, sx_0) \leq 2D + 1\}$ とおく. 作用 $\pi_1(M) \curvearrowright \widetilde{M}$ は等長的であるから, 任意の $s \in S$ に対して, $d_{\widetilde{M}}(x_0, s^{-1}x_0) = d_{\widetilde{M}}(sx_0, x_0) \leq 2D + 1$. よって, $s^{-1} \in S$ となるので, S は対称である. さらに, $B_{2D+1}(x_0, \widetilde{M})$ に含まれる $\pi_1(M)x_0$ の要素は有限個なので, S は有限集合である.

$g \in \pi_1(M)$ に対し, m を $m \leq d_{\widetilde{M}}(x_0, gx_0) < m + 1$ をみたくす非負整数とする. $x_0 = a_0, a_1, \dots, a_{m+1} = gx_0$ を, $\overline{x_0, gx_0}$ の $m + 1$ 等分点とする. また, $h_i \in \pi_1(M)$ を, $d(a_i, h_i x_0) \leq D$ をみたくす要素とする. ただし, $h_0 = 1$, $h_{m+1} = g$ とする (図 3.4 参照). このとき,

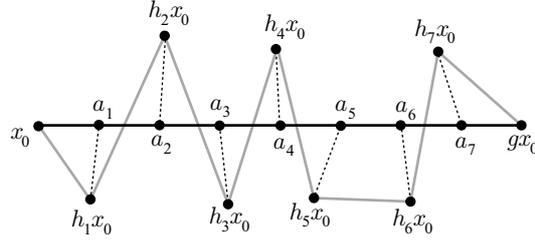


図 3.4

$$\begin{aligned}
 d_{\widetilde{M}}(x_0, h_{i-1}^{-1}h_i x_0) &= d_{\widetilde{M}}(h_{i-1}x_0, h_i x_0) \\
 &\leq d_{\widetilde{M}}(h_{i-1}x_0, a_{i-1}) + d_{\widetilde{M}}(a_{i-1}, a_i) + d_{\widetilde{M}}(a_i, h_i x_0) \\
 &\leq 2D + 1.
 \end{aligned}$$

したがって, $s_i := h_{i-1}^{-1}h_i \in S$.

$$g = h_{m+1} = h_1(h_1^{-1}h_2) \cdots (h_m^{-1}h_{m+1}) = s_1 s_2 \cdots s_{m+1}$$

であるから, S は $\pi_1(M)$ の生成系である. さらに,

$$\|g\|_S \leq m + 1 \leq d_{\widetilde{M}}(x_0, gx_0) + 1 = d_{\widetilde{M}}(\varphi(1), \varphi(g)) + 1$$

が成り立つ. よって, 任意の $g, h \in G$ に対して,

$$d_S(g, h) = \|g^{-1}h\| \leq d_{\widetilde{M}}(\varphi(1), \varphi(g^{-1}h)) + 1 = d_{\widetilde{M}}(\varphi(g), \varphi(h)) + 1. \quad (3.4)$$

一方, x_0 と gx_0 は, 長さが $2D + 1$ 以下の $\|g\|$ 個の辺からなる折れ線できなくことができるので, $d_{\widetilde{M}}(x_0, gx_0) \leq (2D + 1)\|g\|$ である. このとき,

$$\begin{aligned}
 d_{\widetilde{M}}(\varphi(g), \varphi(h)) &= d_{\widetilde{M}}(gx_0, hx_0) = d_{\widetilde{M}}(x_0, g^{-1}hx_0) \\
 &\leq (2D + 1)\|g^{-1}h\| = (2D + 1)d_S(g, h). \quad (3.5)
 \end{aligned}$$

(3.3)–(3.5) より, φ は $(2D + 1, D + 1)$ -擬等長写像である. \square

この命題が示すように, 擬等長の概念は「群」と「空間」のように, 種類が異なるように見えるもの間にも同値関係を与えることができる. このような概念は一見粗すぎて有用ではないように思えるが, 命題 3.4 からわかるように「双曲性」のような重要な概念を保存する.

有限生成群 G に計量を入れることができた. しかし, G 自身は離散空間であり測地的空間ではない. そこで, G を擬等長な包含写像で測地的空間に埋め込むことにする.

定義 3.13. G を対称な有限生成系 S をもつ群とすると, G の S に関する Cayley グラフ $\Gamma = \Gamma(G, S)$ が次で定義される.

- (1) Γ の頂点集合は, G に一致する .
- (2) $g, h \in G$ が, ある $s \in S$ に対し, $h = gs$ をみたすとき, またそのときにかぎり g と h を端点にもつ Γ の辺がある .

各辺が \mathbb{R} の単位区間 $[0, 1]$ と等長になるような計量を, Γ 上に定義する . このとき, Γ は測地的空間であり, 包含写像 $i: G \rightarrow \Gamma$ は $(1, \frac{1}{2})$ -擬等長的である . また, Γ の各頂点の次数は S の要素の個数 $|S|$ 以下である . これから, 任意の自然数 n に対し, $1 \in G$ を中心とする n -球体 $B_n(1, \Gamma)$ に含まれる辺の個数は $|S| + |S|^2 + \dots + |S|^n$ 以下である . 特に $B_n(1, \Gamma)$ はコンパクトであることがわかる . したがって, Γ は固有な空間である . 左からの作用 $G \curvearrowright G$ は, 自然に Γ 上の等長作用 $G \curvearrowright \Gamma$ に拡張される . 実際, e を端点 g, gs ($s \in S$) をもつ Γ の辺とするととき, $h \in G$ に対し, he は端点 $hg, (hg)s$ をもつ Γ の辺として定義される .

例 3.14. G_0 を生成系 $S_0 = \{g, h, g^{-1}, h^{-1}\}$ をもつ階数 2 の自由群 $\mathbb{Z} * \mathbb{Z} = \langle g, h | - \rangle$ とすると, $\Gamma_0 = \Gamma(G_0, S_0)$ は木である (図 3.5 (a) 参照) . G_1 を生成系 $S_1 = \{g, h, g^{-1}, h^{-1}\}$ をもつ階数 2 の自由アーベル群 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \langle g, h | ghg^{-1}h^{-1} = 1 \rangle$ とすると, $\Gamma_1 = \Gamma(G_1, S_1)$ は格子である (図 3.5 (b) 参照) .

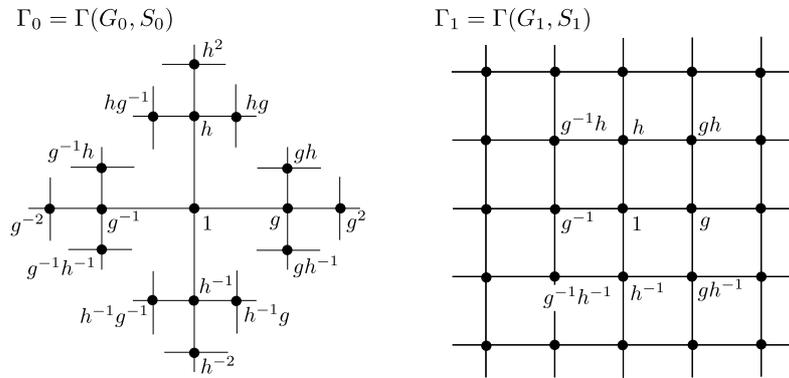


図 3.5

定義 3.15. Cayley グラフ $\Gamma(G, S)$ が双曲的空間のとき, G を (語) 双曲群 (word hyperbolic group) または Gromov 双曲群という .

命題 3.4 と問題 3.5 (3) より, 群の双曲性は, G の有限生成系の取りかたによらない . さらに, G の無限遠境界 $\partial G := \partial \Gamma(G, S)$ も一意的に決まる .

例 3.16. (1) 木は 0-双曲的である (例 3.3) から, 自由群 $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ は双曲群である .

- (2) 自由アーベル群 $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ の Cayley グラフは \mathbf{E}^2 に擬等長同値である．一方，問題 3.1 より， \mathbf{E}^2 は双曲的ではないので， $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ は双曲群ではない．
- (3) 命題 3.12 より，双曲閉曲面 $\Sigma = \mathbf{H}^2/G$ の普遍被覆 \mathbf{H}^2 は $\pi_1(\Sigma) = G$ に擬等長的である． \mathbf{H}^2 は，log 3-双曲的空間である（例 3.3）から， $\pi_1(\Sigma)$ は双曲群である．

次の命題の証明は，[A-S, 命題 3.2] 等を参照せよ．

命題 3.17. g を双曲群 G の無限位数の要素とする．また， x_0 を $\Gamma(G, S)$ の基点とする．このとき，折れ線 $\tau_g = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} \overline{g^n x_0, g^{n+1} x_0}$ は擬測地線であり， $\{g^n x_0\}, \{g^{-n} x_0\}$ は無限遠に異なる収束点をもつ．

系 3.18 (cf. 命題 2.9 (H.2), p. 32). 双曲群は $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ に同型な部分群を含まない．すなわち， G は非トーラス的である．

証明. G が，2つの要素 g, h で生成される階数 2 の自由アーベル群 A を含むとする．もし $\liminf_{n \rightarrow \infty} d(\tau_g, h^n(\tau_g)) < \infty$ ならば，定数 $K > 0$ ， $\{n\}$ の部分列 $\{n_i\}$ ， τ_g 上の点 $g^{k_i} x_0$ ， $h^{n_i}(\tau_g)$ 上の点 $h^{n_i} g^{m_i} x_0$ が存在して，

$$d(g^{k_i} x_0, h^{n_i} g^{m_i} x_0) = d(x_0, h^{n_i} g^{m_i - k_i} x_0) < K$$

となる．したがって， $h^{n_i} g^{m_i - k_i} x_0 \in B_K(x_0)$ ($n_1 < n_2 < \dots$)．これは， $B_K(x_0) \cap Gx_0$ が有限集合であることに矛盾する．よって， $\lim_{n \rightarrow \infty} d(\tau_g, h^n(\tau_g)) = \infty$ ． l_g を $\lim_{n \rightarrow \infty} g^n x_0, \lim_{n \rightarrow \infty} g^{-n} x_0$ を端点にもつ Γ の測地線とする． n を固定する．作用 $G \curvearrowright \Gamma$ は等長的であるから， $d(g^m x_0, g^m h^n x_0) = d(x_0, h^n x_0)$ となる．特に， $d(g^m x_0, g^m h^n x_0)$ ($m \in \mathbf{Z}$) は有界である．問題 1.6 (p. 18) より， $\{g^m x_0\} R \{g^m h^n x_0\}$ であるから，

$$\lim_{m \rightarrow \pm\infty} g^m x_0 = \lim_{m \rightarrow \pm\infty} g^m h^n x_0 = \lim_{m \rightarrow \pm\infty} h^n g^m x_0 = \widehat{h}^n \left(\lim_{m \rightarrow \pm\infty} g^m x_0 \right).$$

ただし最後の等式は，定理 3.10 (1) による．したがって， l_g と $h^n(l_g)$ は同じ端点をもつ．問題 3.4 より， $h^n(l_g) \subset \mathcal{N}_{2\delta}(l_g)$ ．これは $\lim_{n \rightarrow \infty} d(l_g, h^n(l_g)) = \infty$ に矛盾する．したがって， G は非トーラス的である． \square

次の予想は未解決である．

予想 3.19. 非トーラス的な有限生成群は双曲的である．

A 補足

A.1 Möbius 変換の等角性と円円対応性

$\overline{\mathbf{R}^n}$ 上の Möbius 変換が, 等角性と円円対応性をもつことを示す. Möbius 変換は偶数個の鏡映の合成であるから, 鏡映が等角性と円円対応性をもつことを示せばよい. ここでは簡単ため, $\overline{\mathbf{R}^2}$ 上の Möbius 変換のみを考えるが, 3次元以上でも同様の議論が成り立つ. γ を \mathbf{R}^2 内の中心 $o(C)$, 半径 r の円周に関する鏡映とする. η を $\eta(z) = z - o(C)$ で定義される \widehat{C} 上の平行移動とする. $\gamma_0 = \eta \circ \gamma \circ \eta^{-1}$ は, 原点を中心とする半径 r の円周に関する鏡映である. 平行移動はあきらかに等角性と円円対応性をもつので, γ_0 が等角性・円円対応性をもてば, $\gamma = \eta^{-1} \circ \gamma_0 \circ \eta$ についてもそれがいえる.

鏡映の定義より, $(x, y) \neq (0, 0)$ に対し, $\gamma_0(x, y) = (u, v)$ とおくと, $u = \frac{r^2 x}{x^2 + y^2}$, $v = \frac{r^2 y}{x^2 + y^2}$ である.

まず, γ_0 が等角変換であることを示す. γ_0 のヤコビ行列は,

$$\begin{aligned} D(\gamma_0) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = r^2 \begin{pmatrix} \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} & \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} & \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{r^2}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} \frac{-x^2 + y^2}{x^2 + y^2} & \frac{-2xy}{x^2 + y^2} \\ \frac{-2xy}{x^2 + y^2} & \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

であるから, $D(\gamma_0)$ は, 実直交行列を $\frac{r^2}{x^2 + y^2}$ 倍したものである. したがって, $D(\gamma_0)$ は等角変換である. 実際に, 2次の実直交行列 A を $s > 0$ 倍した行列 sA を考えてみる. 零でないベクトル $v, w \in \mathbf{R}^2$ のなす角を θ とし, $(sA)v, (sA)w$ のなす角を φ とすると, $(sA)u \cdot (sA)v = s^2(Au \cdot Av) = s^2(u \cdot {}^tAAv) = s^2 u \cdot v$ であるから,

$$\cos \varphi = \frac{(sA)u \cdot (sA)v}{|(sA)u| |(sA)v|} = \frac{s^2 u \cdot v}{s|u|s|v|} = \frac{u \cdot v}{|u||v|} = \cos \theta$$

が成り立つ. よって, $\theta = \varphi$ となる.

次に, γ_0 が円円対応性をもつことを示す. \mathbf{R}^2 内の円または直線 C_1 の方程式は,

$$a(x^2 + y^2) + 2bx + 2cy + d = 0 \quad (b^2 + c^2 > ad)$$

与えられる. ただし, $a \neq 0$ のときが円の方程式であり, $a = 0$ のときが直線の方程式である. $(x, y) = \left(\frac{r^2 u}{u^2 + v^2}, \frac{r^2 v}{u^2 + v^2} \right)$ であるから,

$$a \left(\frac{r^4 u^2}{(u^2 + v^2)^2} + \frac{r^4 v^2}{(u^2 + v^2)^2} \right) + 2b \frac{r^2 u}{u^2 + v^2} + 2c \frac{r^2 v}{u^2 + v^2} + d = 0.$$

したがって, $\gamma_0(C_1)$ は方程式

$$d(u^2 + v^2) + 2br^2u + 2cr^2v + ar^4 = 0 \quad ((br^2)^2 + (cr^2)^2 > d \cdot ar^4)$$

をみたす. よって, $\gamma_0(C_1)$ は \mathbf{R}^2 内の円または直線である.

A.2 均一分布サイクル

第 2.5 節で使用した性質 (z.1)–(z.5) (p. 49) をみたす 3-サイクル $z(\sigma)$, $z_M(\sigma)$ を構成する.

μ を $G = \text{Isom}^+(\mathbf{H}^3)$ 上の局所有限 Haar 測度とする. すなわち, μ は, 両側からの作用に関し不変な G 上の正值 Borel 測度である. 特に, G の任意の有界開集合 U に対し, $\mu(U) > 0$ となる. このような測度の存在は, 局所コンパクト群に関する基本的な結果である¹²⁾.

x_0 を \mathbf{H}^3 の基点とする. μ の G -不変性より, G の任意の Borel 集合 U に対して,

$$\mu(\{g \in G; gx_0 \in U\}) = \text{Vol}(U)$$

が成り立つように, μ を正規化することができる. 一方, 任意の $x_1 \in \mathbf{H}^3$ に対し, $hx_0 = x_1$ をみたす $h \in G$ が存在するので,

$$\begin{aligned} \mu(\{g \in G; gx_1 \in U\}) &= \mu(\{g \in G; gx_1 \in U\}h) \\ &= \mu(\{g' \in G; g'x_0 \in U\}) \quad (g' = gh) \\ &= \text{Vol}(U). \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

非退化直伸 3-単体 $\sigma: \Delta^3 \rightarrow \mathbf{H}^3$ を固定する. 集合 $G\sigma = \{g \circ \sigma; g \in G\}$ の要素は, Δ^3 から \mathbf{H}^3 への C^∞ -写像である. $G\sigma$ 上の Borel 測度 $\text{smear}(\sigma)$ を, G の任意の Borel 集合 A に対して,

$$\text{smear}(\sigma)(A\sigma) = \mu(A) \quad (\text{A.3})$$

で定義する. p. 47 で定義したとおり, $\tau \in G_M\sigma$ であるとは, ある $g \in G$ に対して $\tau = p \circ g \circ \sigma$ となることである. ただし, $p: \mathbf{H}^3 \rightarrow M$ は普遍被覆である. Haar 測度の G -不変性より, $\text{smear}(\sigma)$ は, $\pi_1(M)$ -不変である. したがって, $\text{smear}(\sigma)$ と局所同値な $G_M\sigma$ 上の測度 $\text{smear}_M(\sigma)$ が定義される. M 内の単連結開集合 O の \mathbf{H}^3 へのリフトを \tilde{O} とすると, $p|_{\tilde{O}}: \tilde{O} \rightarrow O$ は等長写像である. Δ^3 の内心を y_0 とすると,

$$\begin{aligned} \text{smear}_M(\sigma)(\{\tau \in G_M\sigma; \tau(y_0) \in O\}) \\ &= \text{smear}(\sigma)(\{\tilde{\tau} \in G\sigma; \tilde{\tau}(y_0) \in \tilde{O}\}) \\ &\stackrel{(\text{A.3})}{=} \mu(\{g \in G; gx_1 \in \tilde{O}\}) \stackrel{(\text{A.2})}{=} \text{Vol}(\tilde{O}) = \text{Vol}(O) \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

¹²⁾ G が \mathbf{H}^3 に等長的かつ推移的に作用するという事実を使い, Haar 測度を直接的に構成するのも困難ではない.

が成り立つ．ただし， $\sigma(y_0) = x_1$ とする．この $\text{smear}_M(\sigma)$ は， $C^1(\Delta^3, M)$ の 3-鎖であるが，3-サイクルではない．

$\sigma : \Delta^3 \rightarrow \mathbf{H}^3$ が，正の向きをもつ非退化直伸 3-単体の場合を考える． σ の鏡映を σ_- とおく．このとき，

$$\text{Vol}(\sigma_-) = \int_{\Delta^3} \sigma_-^*(\Omega_{\mathbf{H}^3}) = -\text{Vol}(\sigma) < 0$$

が成り立つ．ただし $\Omega_{\mathbf{H}^3}$ は， \mathbf{H}^3 の体積要素である．

$$z(\sigma) = \frac{1}{2}(\text{smear}(\sigma) - \text{smear}(\sigma_-)), \quad z_M(\sigma) = \frac{1}{2}(\text{smear}_M(\sigma) - \text{smear}_M(\sigma_-))$$

とおく． $\text{supp}(\text{smear}(\sigma_-)) = G\sigma_-$ より，(z.1) の性質：

$$\text{supp}(z(\sigma)) = G\sigma \cup G\sigma_-$$

が成り立つ． μ は正定値 Borel 測度であるから，空でない内部をもつ G の任意の Borel 部分集合 H に対し，

$$\begin{aligned} z(\sigma)(H\sigma) &= \frac{1}{2}\text{smear}(\sigma)(H\sigma) \stackrel{(A.3)}{=} \frac{1}{2}\mu(H) > 0, \\ z(\sigma)(H\sigma_-) &= -\frac{1}{2}\text{smear}(\sigma_-)(H\sigma_-) \stackrel{(A.3)}{=} -\frac{1}{2}\mu(H) < 0. \end{aligned}$$

よって，(z.2) が成り立つ． $\text{smear}(\sigma_-)$ と $\text{smear}_M(\sigma_-)$ は局所同値であるから， $z(\sigma)$ と $z_M(\sigma)$ も局所同値である．したがって，(z.3) が成り立つ．

$$\|z_M(\sigma)\| = \frac{1}{2}(\|\text{smear}_M(\sigma)\| + \|\text{smear}_M(\sigma_-)\|) \stackrel{(A.4)}{=} \text{Vol}(M).$$

より，(z.4) が成り立つ．

補題 A.1. $z(\sigma)$ は $C^1(\Delta^3, \mathbf{H}^3)$ 上の 3-サイクルである．

証明. $\alpha_{3,i} : \Delta^2 \rightarrow \Delta^3$ ($i = 0, 1, 2, 3$) を Δ^3 の第 i 面上への等長写像とする．直伸 2-単体 $\tau^{(i)} = \sigma \circ \alpha_{3,i}$, $\tau_-^{(i)} = \sigma_- \circ \alpha_{3,i}$ を考える．このとき， $g \circ \tau^{(i)} = \tau_-^{(i)}$ をみたす $g \in G$ が存在する (図 2.19, p. 49 参照)． G の任意の Borel 集合 A に対し，

$$\begin{aligned} \text{smear}(\tau_-^{(i)})(A\tau^{(i)}) &= \text{smear}(\tau_-^{(i)})(Ag^{-1}\tau_-^{(i)}) \stackrel{(A.3)}{=} \mu(Ag^{-1}) = \mu(A) \\ &\stackrel{(A.3)}{=} \text{smear}(\tau^{(i)})(A\tau^{(i)}). \end{aligned}$$

このとき，(2.10) (p. 47) より，

$$\partial_3(z(\sigma)) = \frac{1}{2}(\partial_3(\text{smear}(\sigma)) - \partial_3(\text{smear}(\sigma_-))) = 0.$$

すなわち， $z(\sigma)$ は 3-サイクルである． □

$z_M(\sigma)$ は $z(\sigma)$ と局所同値であるから，補題 A.1 より， $C^1(\Delta^3, M)$ 上の 3-サイクルである．このとき，

$$\begin{aligned} \langle z_M(\sigma), \Omega_M \rangle &\stackrel{(2.11)}{=} \frac{1}{2} (\text{Vol}(\sigma) \|\text{smear}_M(\sigma)\| - \text{Vol}(\sigma_-) \|\text{smear}_M(\sigma_-)\|) \\ &\stackrel{(A.4)}{=} \frac{1}{2} (\text{Vol}(\sigma) \text{Vol}(M) + \text{Vol}(\sigma) \text{Vol}(M)) \\ &= \text{Vol}(\sigma) \text{Vol}(M) = \langle \text{Vol}(\sigma)[M], \Omega_M \rangle \end{aligned}$$

であるから，

$$[z_M(\sigma)] = \text{Vol}(\sigma)[M] \in H_3(M; \mathbf{R})$$

となる．よって，(z.5) が成り立つ．

参考文献

- [A-S] J. Alonso, T. Brady, D. Cooper, V. Ferlini, M. Lustig, M. Mihalik, M. Shapiro and H. Short, Notes on word hyperbolic groups, Group theory from a geometrical viewpoint, Trieste, 1990, pp. 3-63, World Sci. Publ. (NJ, 1991).
- [Be] A. Beardon, The geometry of discrete groups, Graduate Texts in Math. **91**, Springer (1983).
- [BP] R. Benedetti and C. Petronio, Lectures on Hyperbolic Geometry, Universitext, Springer (1992).
- [BCG] G. Besson, G. Courtois and S. Gallot, A simple and constructive proof of Mostow's rigidity and the minimal entropy theorems, Ergod. Th. Dynam. Sys. **16** (1996) 623-649.
- [BCM] J. Brock, R. Canary and Y. Minsky, The classification of Kleinian surface groups, II: The Ending Lamination Conjecture, Ann. of Math. **176** (2012) 1-149.
- [CDP] M. Coornaert, T. Delzant and A. Papadopoulos, Géométrie et théorie des groupes: les groupes hyperboliques de Gromov, Lecture Notes in Math. **1441**, Springer (1990).
- [Du] N. Dunfield, Cyclic surgery, degrees of maps of character curves, and volume rigidity for hyperbolic manifolds, Invent. Math. **136** (1999) 623-657.
- [Fu] 深谷賢治, 双曲幾何 – 現代数学への入門 –, 岩波書店 (2004).
- [Gr] M. Gromov, Hyperbolic groups, Essays in group theory, (S.M. Gersten, ed.), pp. 75-263, MSRI. Publ. **8** Springer (1987).
- [HM] U. Haagerup and H. Munkholm, Simplices of maximal volume in hyperbolic n -space, Acta Math. **147** (1981) 1-11.
- [Iz] 井関裕靖, G. Besson, G. Courtois and S. Gallot による Mostow の剛性定理の新証明, 数学 **49** (1997) 200-211.
- [Ka] M. Kapovich, Hyperbolic manifolds and discrete groups, Progress in Mathematics Studies **183**, Birkhäuser (2000).
- [Ma] A. Marden, Outer Circles: An introduction to hyperbolic 3-manifolds, Cambridge Univ. Press (2007).
- [MM] H. Masur and Y. Minsky, Geometry of the complex of curves, I: Hyperbolicity, Invent. Math. **138** (1999) 103-149.
- [MT] K. Matsuzaki and M. Taniguchi, Hyperbolic manifolds and Kleinian groups, Oxford Mathematical Monographs, Oxford Science Publications, Oxford University Press (1998).
- [Mi] Y. Minsky, The classification of Kleinian surface groups I: models and bounds, Ann. of Math. **171** (2010) 1-107.
- [Mo] J. Morgan, On Thurston's uniformization theorem for three-dimensional manifolds, The Smith Conjecture (J. Morgan and H. Bass eds.), pp. 37-125, Academic Press, New York (1984).
- [Oh] 大鹿健一, 離散群, 岩波書店 (2008).
- [Ot] J.-P. Otal, The hyperbolization theorem for fibered 3-manifolds, SMF/AMS Monographs **7**, Amer. Math. Soc./Soc. Math. France (2001).
- [Ra] J. Ratcliffe, Foundations of hyperbolic manifolds, Graduate Texts in Mathematics **149**, Springer (1994).
- [ST] I. シンガー, J. ソープ, トポロジーと幾何学入門, 培風館 (1995).

- [So1] T. Soma, Bounded cohomology of closed surfaces, *Topology* **36** (1997) 1221-1246.
- [So2] T. Soma, Non-zero degree maps to hyperbolic 3-manifolds, *J. Diff. Geom.* **49** (1998) 517-546.
- [So3] 相馬輝彦, 位相的クライン群論の最近の話題, *数学 (論説)* **62** (2010) 18-39.
- [TO] 谷口雅彦, 奥村善英, 双曲幾何学への招待, 培風館 (1996).
- [TM] 谷口雅彦, 松崎克彦, 双曲的多様体とクライン群, 日本評論社 (1993).
- [Td] 戸田正人, 3次元トポロジーの新展開 – リッチフローとポアンカレ予想 –, 臨時別冊・数理科学, サイエンス社 (2007).
- [Th1] W. Thurston, The geometry and topology of 3-manifolds, *Lecture Notes*: on line at <http://www.msri.org/publications/books/gt3m/>.
- [Th2] W. Thurston, Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry, *Bull. Amer. Math. Soc.* **6** (1982) 357-381.

索引

$\{a_n\}R\{b_n\}$	57	$z(\sigma)$	49, 68
\xrightarrow{B}	14	回転角 (楕円型変換の)	7
$B_r(x, X), B_r(x)$	16	回転軸	29
\widehat{C}	2	Gauss-Bonnet の定理	20
$C^1(\Delta^k, M)$	47	擬測地線分	41
D^2	8	擬等長写像	38
D^3	31	鏡映	24
$\Delta_{\alpha, \beta, \gamma}$	35	Klein 群	30
∂X	58	Gromov ノルム	45
$\Delta(x, y, z)$	12, 55	Gromov 積	14, 58
H^2	1	Gromov 双曲的空間	55
H^n	24	Cayley グラフ	63
$i = \sqrt{-1}$	1	(語) 双曲群, Gromov 双曲群 ..	64
$\text{inj}_x(M)$	32	固有距離空間	60
$\text{Isom}^+(\mathbf{H}^2)$	2	Seifert-Weber 多様体	32
$\text{Isom}^+(\mathbf{H}^n)$	24	作用	10
$\text{Isom}(\mathbf{H}^n)$	24	軸 (双曲型変換の)	7
$\text{Len}(c)$	1	斜航型変換	27
$\ M\ $	45	斜航軸	27
$\text{Möb}(\widehat{C})$	25	自由作用	10
$\text{Möb}(\mathbf{R}_+^n)$	24	真性不連続作用	10
$\mathcal{N}_r(A, X), \mathcal{N}_r(A)$	4	推移距離	28
Ω_M	46	ズボン	21
$O_r(x)$	59	ズボン分解	21
S_∞^1	1	スリム 3 角形	14, 55
$s \sim_\varepsilon t$	15	正弦定理	13
$\text{smear}_M(\sigma)$	67	正則理想 3-単体	36
$\text{smear}(\sigma)$	67	全測地面	26
S_∞^{n-1}	24	双曲型変換	6, 27
$\text{straight}(\sigma)$	45	双曲化予想	34
$U_s(x)$	59	双曲曲面, 双曲 2 次元多様体 ..	12
v_3	36	双曲空間 (n 次元)	24
\overline{X}	58	双曲計量	12, 30
$\overline{x, y}$	12, 55	双曲 3 角形	12
(x, y)	17, 57, 58	双曲 3 次元多様体	30
$(x, y)_{x_0}$	14	双曲 3-単体, 双曲 4 面体	34
$z_M(\sigma)$	49, 68	双曲平面	1
		測地 3 角形	34, 55
		測地線分	55
		測地的空間	55
		楕円型変換	6, 27
		単射半径	32
		単体の体積 (Gromov の)	45
		直伸化	45
		δ -双曲的空間	55
		長さの定まる道	41

ねじれをもたない群	11
非トーラス的多様体	32
Fuchs 群	11
Poincaré 円板モデル	9, 31
放物型変換	6, 27
ホ口円周	7
ホ口球面	27
無限遠境界	1, 24, 58
無限遠点に収束	57
Möbius 変換	24
誘導計量	10
余弦定理	13
理想双曲 3 角形	13
理想頂点	13, 34
Lobachevsky 関数	35