

2つの政策ラグを持つマクロ経済体系の安定性分析

都 築 栄 司

1. 序 論
2. モ デ ル
3. 政策ラグの存在しないケース
4. 2つの政策ラグが存在するケース
5. 結 論

1. 序 論

本稿では、金融政策と財政政策の両方に政策ラグ（固定ラグ）が存在するニューケインジアン（NK）モデルの安定性分析を行う。2つの固定ラグを持つ記述的な（ミクロ経済学的基礎を持たない）マクロ経済モデルは、Zhou and Li (2009) や Sportelli et al. (2014), Matsumoto and Szidarovszky (2015) などによって展開されているが、NKモデルではまだ少ない。

Tsuzuki (2014, 2015, 2016) による一連の研究では、遅れをただ1つだけ持つNKモデルの安定性分析が行われている¹⁾。もし他の遅れが小さく安定性にとって重要でないのであれば、そのような想定も正当化されるだろう。しかし、Gu et al. (2005), Lin and Wang (2012) など、応用数学の結果によれば、たとえ無視された遅れが小さくても、安定性変化が起きるような体系では、そうした想定は適切なものとはならない。

Gu et al. (2005) で分析された特性関数は次のような形をしている。

$$D(\lambda; \tau_1, \tau_2) = P_0(\lambda) + P_1(\lambda)e^{-\lambda\tau_1} + P_2(\lambda)e^{-\lambda\tau_2}$$

ここで $\tau_1, \tau_2 > 0$ は遅れ、 $P_l(\lambda)$ ($l=0, 1, 2$) は実係数を持つ多項式である。このような特性関数は、しばしば遅れに依存しない係数を持つスカラーモデルから導かれる。

一方、Lin and Wang (2012) は次のような特性関数について分析している。

$$D(\lambda; \tau_1, \tau_2) = P_0(\lambda) + P_1(\lambda)e^{-\lambda\tau_1} + P_2(\lambda)e^{-\lambda\tau_2} + P_3(\lambda)e^{-\lambda(\tau_1 + \tau_2)}$$

1) 固定ラグではなく、分布ラグを仮定したNKモデルとしては、Benhabib et al. (2003) などがある。

$P_l(\lambda)$ ($l=0, 1, 2, 3$)は実係数を持つ多項式である。この関数の特徴は、遅れが混在している第4項の存在にある。もし $P_3(\lambda)=0$ ならば、Gu et al. (2005) で分析されたものへと退化する。したがって、Lin and Wang (2012) の研究は、Gu et al. (2005) の研究をより一般的なケースへと拡張したものと言える。このような形の特性関数は、複数の変数を持つ遅延体系から導かれることが多い。本稿のモデルもこのタイプの特性関数を導く。

本稿と類似の研究として、Tsuzuki et al. (2016) がある。彼らの研究でも、2つの政策ラグを含むNKモデルが分析されている。ただし、彼らのモデルが Money in the production function (MIPF) の想定の下に構築されているのに対し、本稿では Money in the utility function (MIUF) の想定を採用する。両モデルの主要な相違点は、一般に MIPF モデルではラグが存在しないとき定常状態は局所的に安定（正の実部を持つ特性根が存在しない、すなわち均衡は不決定）となり得るが、MIUF モデルでは政策によらずそのようなケースは現れない、ということにある。この違いにより、導かれる政策的含意も異なってくる。本稿ではまた、安定性スイッチを引き起こすような金融政策ラグと財政政策ラグが、政策パラメータの交換について対称であることも示す。

第2節では、基本的な連続時間NKモデルを提示する。次に、第3節では、政策ラグが存在しない場合の安定性について分析する。第4節では、Lin and Wang (2012) の理論に従い、安定性スイッチが起きるラグ (τ_1, τ_2) の明示的な表現を導出する。その後、パラメータ値を特定化し、2つの具体的なケースについて安定性スイッチング曲線を (τ_1, τ_2) 平面に描く。最後に、分析結果の経済学的解釈を行う。

2. モデル

シンプルな連続時間NKモデルを提示する。モデル経済は、家計—企業ユニット j ($j \in [0, 1]$)、中央銀行と政府によって構成される。家計—企業ユニット j を構成する企業 j は、労働を用いて異質的な財 j を生産する。生産された異質財は一度、すべての企業から成る小売業者によって集計され、家計などに供給される。

2.1. 異質財の集計

小売業者は毎時点、異質的な財を CES (Constant elasticity of substitution) 型関数によって集計する。

$$y = \left[\int_0^1 y_j^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} dj \right]^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \quad (1)$$

ここで、 y は集計財の数量、 y_j は財 j の数量、 $\alpha (> 1)$ は異質的な財の間の代替の弾力性を表すパラメータである。

小売業者は、財 j の価格 p_j と集計財の数量 y を所与とし、式(1)を制約条件として、総費用

$$py = \int_0^1 p_j y_j dj \quad (2)$$

を最小化するように y_j を選択する。ただし p は集計財の価格 (物価水準) である。費用最小化のための1階条件から、

$$y_j = \left(\frac{p_j}{p}\right)^{-\alpha} y \quad (3)$$

を得る (Blanchard and Kiyotaki 1987を参照)。ここで、

$$p = \left[\int_0^1 p_j^{1-\alpha} dj \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad (4)$$

が成立する。式(3)は財 j に対する需要関数である。

2.2. 集計財の消費と異質財の価格改定

企業 j の生産関数を、

$$y_j(t) = z l_j(t) \quad (5)$$

と想定する。ただし、 l_j は家計 j の労働供給量、 $z (> 0)$ はその経済の技術水準、 $t \in [0, \infty)$ は時間を表す。

家計—企業ユニット j は、集計財の消費 c_j と実質貨幣保有 m_j から効用を、労働 l_j と価格の改定

$$\pi_j(t) = \dot{p}_j(t) / p_j(t) \quad (6)$$

から不効用を得るとする²⁾。時点効用関数を、

$$u_j(t) = \log c_j(t) + \varepsilon \log m_j(t) - \frac{l_j(t)^{1+\gamma}}{1+\gamma} - \frac{\eta}{2} \pi_j(t)^2$$

と表す³⁾。ここで、 $\varepsilon (> 0)$ は貨幣保有から得られる効用の重み、 $\gamma (> 0)$ は労働の限界不効用の弾力性、 $\eta (> 0)$ は価格改定コストの大きさを表すパラメータである。

家計—企業ユニット j の名目資産 S_j は貨幣 M_j と債券 V_j から成るとする。

$$S_j(t) = M_j(t) + V_j(t)$$

2) 価格改定の不効用は、それによってもたらされる家計—企業ユニットの心理的負担を表すものと理解できる。

3) Rotemberg (1982) に従い、価格改定コストを2次式に特定化している。

資産は所得及び利子の受け取りによって増大し、消費と所得税によって減少する。よって、

$$\dot{S}_j(t) = p_j(t)[1 - \theta(t)]y_j(t) + R(t)V_j(t) - p(t)c_j(t) + p(t)T_j(t) \quad (7)$$

が成り立つ。ここで、 θ は所得税率、 R は債券の名目利子率、 T_j は家計 j の実質移転所得である。式(7)を実質値に書き換えると、

$$\dot{s}_j(t) = \frac{p_j(t)}{p(t)}[1 - \theta(t)]y_j(t) + r(t)s_j(t) - c_j(t) + T_j(t) - R(t)m_j(t) \quad (8)$$

となる。ただし、 $s_j = S_j/p$ は家計—企業ユニット j の実質資産残高、 $r = R - \pi$ は実質利子率、 $\pi = \dot{p}/p$ はインフレ率である。

家計—企業ユニット j は、初期状態 $s_j(0)$ と $p_j(0)$ を所与とし、式(3)、(5)、(6)及び(8)を制約条件として、無限期間にわたる効用の累積値 $U_j[c_j, m_j, \pi_j, t] = \int_0^\infty u_j(t)e^{-\rho t} dt$ を最大化するように、 c_j 、 m_j 及び π_j の経路を選択する。ここで、 $\rho (> 0)$ は家計—企業ユニットの主観的割引率である。最適性のための1階条件から、

$$\dot{c}_j(t) = [R(t) - \pi(t) - \rho]c_j(t) \quad (9)$$

$$\dot{\pi}_j(t) = \rho\pi_j(t) - \frac{\alpha}{\eta}z^{-(1+\eta)}y_j(t)^{1+\eta} + \frac{(\alpha-1)[1-\theta(t)]}{\eta} \frac{p_j(t)}{p(t)} \frac{y_j(t)}{c_j(t)} \quad (10)$$

を得る (Tsuzuki 2016を参照)。

2.3. 金融政策

中央銀行はインフレ率の変動に応じて名目利子率を操作するものとする (いわゆるテイラールール的一种)。ただし、インフレ率の変動に対する中央銀行の反応には一定の遅れ $\tau_1 (\geq 0)$ が存在するとする。このとき、金融政策ルールは

$$R(t) = R(\pi(t - \tau_1)); R' > 0; R(\pi^*) = \bar{R} \quad (11)$$

と表される。ここで π^* はインフレ率の定常値、 $\bar{R} (0 < \bar{R} < 1)$ はそれに対応した名目利子率である。Leeper (1991) の用語法に従い、 $R' > 1$ をアクティブな金融政策、 $R' < 1$ をパッシブな金融政策とすることにする。

2.4. 財政政策

政府は、消費量 $c = \int_0^1 c_j dj$ の変動に応じて所得税率を操作するものとする。ただし、消費量の変動に対する政府の反応には一定の遅れ $\tau_2 (\geq 0)$ が存在するとする。この場合、財政政策ルールは

$$\theta(t) = \theta(c(t - \tau_2)); \theta(c^*) = \bar{\theta} \quad (12)$$

と表される。ここで、 $\bar{\theta}$ ($0 < \bar{\theta} < 1$) は消費量の定常値 c^* に対応した所得税率である。 $\theta' > 0$ はプログレッシブ（累進的）な課税方式を、 $\theta' < 0$ はリグレッシブ（逆累進的）な課税方式を表す。

実質政府支出を g とする。それは家計—企業ユニットの生産や効用に影響を与えない支出であり、例えば、政府自身のための消費などと考えられる⁴⁾。また、政府は每期、均衡財政の下でその運営を行うものとする。さらに単純化のために、 V_j は公債ではなく、家計—企業ユニット間の貸借を表すものとする⁵⁾。このとき、公的部門（統合政府）の予算制約式は、 $\theta(t)y(t) + \dot{m}(t) + m(t) - \pi(t) = g(t) + T(t)$ によって与えられる。ただし、 $m(t) = \int_0^1 m_j(t) dj$ 、 $T(t) = \int_0^1 T_j(t) dj$ である。均衡財政の下では、政府は支出 g にシニョレッジを利用しないため、

$$g(t) = \theta(t)y(t) \quad (13)$$

が成り立つ。結果として、シニョレッジはすべて移転支出に向けられることになり、 $\dot{m}(t) + m(t) - \pi(t) = T(t)$ が成立する。この式は移転支出 $T(t)$ の決定式としての役割を担う。

2.5. 均衡条件

財市場の均衡条件は、次の式によって与えられる。

$$y(t) = c(t) + g(t) \quad (14)$$

すべての家計—企業ユニットの行動は対称的であり、また $j \in [0, 1]$ であることから、 $c = c_j$ 、 $y = y_j$ 、 $p = p_j$ などとみなすことができる。このとき、式(9)–(14)は、次の2式にまとめられる。

$$\begin{aligned} \dot{c}(t) &= [R(\pi(t - \tau_1)) - \pi(t) - \rho]c(t) \\ \dot{\pi}(t) &= \rho\pi(t) - \frac{\alpha}{\eta} z^{-(1+\gamma)} c(t)^{1+\gamma} [1 - \theta(c(t - \tau_2))]^{-(1+\gamma)} + \frac{\alpha - 1}{\eta} \end{aligned} \quad (15)$$

2.6. 定常状態

体系(15)の非自明な定常値は、

$$c^* = \left(\frac{\eta \rho \pi^* + \alpha - 1}{\alpha} \right)^{\frac{1}{1+\gamma}} (1 - \bar{\theta}) z, \quad \pi^* = \bar{R} - \rho \quad (16)$$

4) あるいは、生産や効用に外部性として加法分離可能な形で影響を与えると考えてもよい。その場合、政府支出は家計や企業の選択に影響を与えないため、ここでの議論には影響しない。

5) 同様の仮定は Carlstrom and Fuerst (2007) のモデルにも見られる。なお、均衡では $V(t) = \int_0^1 V_j(t) dj = 0$ が成立する。

によって与えられる。

次節ではまず、金融政策ラグと財政政策ラグが存在しない基本的なケースについて、定常状態の局所的安定性を分析する。

3. 政策ラグの存在しないケース

体系(15)において $\tau_1 = \tau_2 = 0$ とし、定常点(16)の近傍で線形化する。

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{c}}(t) \\ \dot{\hat{\pi}}(t) \end{bmatrix} = J_1 \begin{bmatrix} \hat{c}(t) \\ \hat{\pi}(t) \end{bmatrix}, \quad J_1 = \begin{bmatrix} 0 & (R'-1)c^* \\ -h(\theta' + \theta_0) & \rho \end{bmatrix}$$

ここで、 $\hat{c}(t) = c(t) - c^*$ 、 $\hat{\pi}(t) = \pi(t) - \pi^*$ 、 $h = (\alpha/\eta)z^{-(1+\gamma)}(1+\gamma)c^{*1+\gamma}(1-\bar{\theta})^{-(2+\gamma)} > 0$ 、 $\theta_0 = (1-\bar{\theta})/c^* > 0$ である。

以下では、行列 J_1 が正則であることを仮定する。

仮定 3.1 $R'(\pi^*) \neq 1$ 及び $\theta'(c^*) \neq -\theta_0$.

中央銀行と政府の政策態度を表す値 R' と θ' に注目しよう。行列 J_1 の2つの固有値の実部の符号は、表1のように特徴付けられる。 c と π は共にジャンプ変数であるため、正の実部を持つ根の数が2である場合にのみ均衡は局所的に決定となる⁶⁾。

金融政策がアクティブ($R' > 1$)かつ財政政策がプログレッシブないし軽度にリグレッシブ($\theta' > -\theta_0$)な場合と、金融政策がパッシブ($R' < 1$)かつ財政政策が強度にリグレッシブ($\theta' < -\theta_0$)な場合に、均衡の局所的決定性が達成される。

この結果はLeeper (1991)のそれと似ている。Leeper (1991)は、一括税を総政府債務に反応させるような財政政策ルール(s を実質総政府債務、 θ を一括税として $\theta(s)$)を想定し、 $\theta' > 0$ をパッシブ

表1 固有値の実部の符号

	$R' > 1$	$R' < 1$
$\theta' > -\theta_0$	++	+-
$\theta' < -\theta_0$	+-	++

6) 均衡が決定であるとは、横断性条件を満たすような経路の選択($c(0)$ 、 $\pi(0)$ の選択)が一意であることを指す。その選択が複数存在する場合には均衡は不決定であると言う。ジャンプ変数の数を m 、正の実部を持つ固有値の数を n としたとき、 $m = n$ ならば均衡は決定、 $m > n$ ならば均衡は不決定となる($m < n$ ならば均衡は不安定)。均衡が決定ならば期待の変化による景気変動が生じ得ないため、経済は安定的であるとみなされる(Azariadis 1981)。

ブな財政政策, $\theta' < 0$ をアクティブな財政政策と呼んだ⁷⁾. 彼は, 局所的決定性のためには, アクティブな金融政策はパッシブな財政政策を必要とし, パッシブな金融政策はアクティブな財政政策を必要とすることを示している.

4. 2つの政策ラグが存在するケース

体系(15)を定常状態(16)の近傍で線形化すると, 次の式を得る.

$$\begin{aligned}\dot{\hat{c}}(t) &= [R' \hat{\pi}(t - \tau_1) - \hat{\pi}(t)] c^* \\ \dot{\hat{\pi}}(t) &= \rho \hat{\pi}(t) - h \theta_0 \hat{c}(t) - h \theta' \hat{c}(t - \tau_2)\end{aligned}$$

この系の解として, 指数関数 $(\hat{c}(t), \hat{\pi}(t)) = (C_1, C_2) e^{\lambda t}$ (C_1 と C_2 は任意定数, λ は特性根) を仮定し, 右辺に代入して整理すると,

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{c}}(t) \\ \dot{\hat{\pi}}(t) \end{bmatrix} = J_2 \begin{bmatrix} \hat{c}(t) \\ \hat{\pi}(t) \end{bmatrix}, \quad J_2 = \begin{bmatrix} 0 & (R' e^{-\lambda \tau_1} - 1) c^* \\ -h(\theta' e^{-\lambda \tau_2} + \theta_0) & \rho \end{bmatrix}$$

を得る.

よって, 特性関数は,

$$\Delta(\lambda; \tau_1, \tau_2) := |J_2 - \lambda I| = P_0(\lambda) + P_1(\lambda) e^{-\lambda \tau_1} + P_2(\lambda) e^{-\lambda \tau_2} + P_3(\lambda) e^{-\lambda(\tau_1 + \tau_2)} \quad (17)$$

となる. ここで, I は単位行列,

$$\begin{aligned}P_0(\lambda) &= \lambda^2 - \rho \lambda - h \theta_0 c^* \\ P_1(\lambda) &= h \theta_0 c^* R' \\ P_2(\lambda) &= -h c^* \theta' \\ P_3(\lambda) &= h c^* R' \theta'\end{aligned}$$

である. 一般的なケースでは, $P_l (l=0, 1, 2, 3)$ は実係数を持つ多項式になるが, 本稿のモデルでは $P_1(\lambda) - P_3(\lambda)$ は定数である.

7) パッシブな財政政策とは, 政府が総政府債務を発散させないように税額を操作する政策スタンスのことであり, アクティブな財政政策とは逆に財政規律に縛られずに税額を操作するスタンスのことである. なお, Leeper (1991) のような財政政策ルールを仮定した場合, 単純な均衡財政を表す式(13)ではなく, 政府の通時的な予算制約式 (増発された国債の償還資金を将来の増税やシニョレッジによって賄う財政レジーム) を表す, (8) と同等の式が方程式体系に明示的に組み込まれることになる. つまり体系は3次元になる. Tsuzuki et al. (2016) はこの種のモデルに金融・財政政策ラグを導入し, 本稿と同様の安定性分析を行っている.

このような、2つの遅れと遅れに依存しない実係数を持つ遅延体系についての一般的な理論が、Lin and Wang (2012)によって展開されている。以降の分析は、彼らの方法に基づいて行われる。

4.1. 準備

まず、式(17)が遅延体系の「適正な」特性関数であることを保証する4つの基本的な条件を検証する⁸⁾。

$$(i) \deg(P_0(\lambda)) \geq \max\{\deg(P_1(\lambda)), \deg(P_2(\lambda)), \deg(P_3(\lambda))\}$$

$$(ii) \Delta(0; \tau_1, \tau_2) \neq 0$$

(iii) P_0, P_1, P_2 及び P_3 は互いに素な多項式である。

$$(iv) \lim_{\lambda \rightarrow \infty} (|P_1(\lambda)/P_0(\lambda)| + |P_2(\lambda)/P_0(\lambda)| + |P_3(\lambda)/P_0(\lambda)|) < 1$$

条件(i)は、 $2 > \max\{0, 0, 0\}$ により満たされる。条件(ii)も、仮定3.1の下では $\Delta(0; \tau_1, \tau_2) = hc^*(R' - 1)(\theta' + \theta_0) \neq 0$ となるから満たされる。条件(iii)が満たされることは明らかである。最後に、条件(iv)も、 $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} (|P_1(\lambda)/P_0(\lambda)| + |P_2(\lambda)/P_0(\lambda)| + |P_3(\lambda)/P_0(\lambda)|) = 0$ により満たされる⁹⁾。

4.2. 安定性スイッチング曲線

Lin and Wang (2012) の議論は、次の補題を基礎にして展開される。

補題 4.1 (τ_1, τ_2) が \mathbb{R}_+^2 を連続的に変化するとき、 \mathbb{C}_+ 上にある $\Delta(\lambda; \tau_1, \tau_2) = 0$ の特性根の数(重複も数える)は、特性根が虚軸上に現れるかそれを横切るときにのみ変化し得る¹⁰⁾。

以降の分析の手順を次の通りとする。

8) もし条件(i)が成立しなければ、無限個の正の実部を持つ根が存在し、体系は決して安定にならない(Bellman and Cooke 1963)。もし条件(ii)が成立しなければ、すべての $(\tau_1, \tau_2) \in \mathbb{R}_+^2$ に対して $\Delta(0; \tau_1, \tau_2) = 0$ となり、体系は常に不安定である。ただしこの条件は、安定・不安定ではなく、決定・不決定を問う本稿の議論では必須ではない。条件(iii)は、特性方程式が既約であることを保証する。条件(iv)は、大きい振動を排除するためのものである。つまり、この条件によって特性根の実現可能な虚部が有界であることが保証される。

9) 本稿のモデルのように、状態の変化率がシステムの過去と現在の状態のみに依存する場合、関数微分方程式は遅れ型(retarded type)と呼ばれる。一方、状態の変化率が過去と現在の状態に加え、その変化率の過去の値にも依存する場合、関数微分方程式は中立型(neutral type)と呼ばれる。遅れ型ならば、条件(iv)は自動的に満たされることが知られている。

10) この補題の証明は、例えばKuang (1993), Smith (2011)に示されている。

- (1) 虚軸上に特性根が現れる, すなわち特性根が純虚数になるような (τ_1, τ_2) の閉形式 (安定性スイッチング曲線) を提示する¹¹⁾.
- (2) 安定性スイッチの方向 (安定化 or 不安定化) に関する基準を示す.
- (3) パラメータ値を特定化して, (τ_1, τ_2) 平面に安定性スイッチング曲線を描く.

純虚数根を $\lambda = i\omega$ ($i = \sqrt{-1}$, $\omega = \text{虚部} > 0$) と表す¹²⁾. まず, $\Delta(i\omega; \tau_1, \tau_2) = 0$ を満たすような ω を特徴付ける. 以下に定義される関数 $F_1(\omega)$ が非正の実数値をとるとき, またそのときにのみ, $\lambda = i\omega$ は $(\tau_1, \tau_2) \in \mathbb{R}_+^2$ に対して $\Delta(\lambda; \tau_1, \tau_2) = 0$ の解になる.

$$F_1(\omega) := (|P_0|^2 + |P_1|^2 - |P_2|^2 - |P_3|^2)^2 - 4(A_1^2 + B_1^2)$$

ただし,

$$\begin{aligned} A_1(\omega) &= \text{Re}(P_2 \bar{P}_3) - \text{Re}(P_0 \bar{P}_1) \\ &= hc^* \theta_0 R' \omega^2 + (hc^*)^2 (\theta_0^2 - \theta'^2) R' \\ B_1(\omega) &= \text{Im}(P_2 \bar{P}_3) - \text{Im}(P_0 \bar{P}_1) \\ &= \rho hc^* \theta_0 R' \omega \end{aligned}$$

である (Lin and Wang 2012, Section 3).

なお, ω に関するこの条件は,

$$F_2(\omega) := (|P_0|^2 - |P_1|^2 + |P_2|^2 - |P_3|^2)^2 - 4(A_2^2 + B_2^2) \leq 0$$

と同値であることも示されている. ここで,

$$\begin{aligned} A_2(\omega) &= \text{Re}(P_1 \bar{P}_3) - \text{Re}(P_0 \bar{P}_2) \\ &= -hc^* \theta' \omega^2 - (hc^*)^2 (1 - R'^2) \theta_0 \theta' \\ B_2(\omega) &= \text{Im}(P_1 \bar{P}_3) - \text{Im}(P_0 \bar{P}_2) \\ &= -\rho hc^* \theta' \omega \end{aligned}$$

である.

$F_1(\omega) \leq 0$ を満たす $\omega \in \mathbb{R}_+$ を交差集合 (crossing set) と呼び, Ω で表す. Ω は有限の長さを持つ有限個の区間から成る¹³⁾ (Lin and Wang 2012, Lemma 3.2).

11) 実数根 $\lambda = 0$ は上記条件 (ii) によって排除されている.

12) 実関数の虚数根は必ず共役の組になるため, 一般性を損なうことなく $\omega > 0$ と仮定できる.

13) 条件 (ii) により $F_1(0) \neq 0$, 条件 (i) と (iv) により $F_1(+\infty) = +\infty$ であるから.

- (a) もし $F_1(0) > 0$ ならば, F_1 の根は, $0 < a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 < \dots \leq a_N < b_N < +\infty$ のように現れる.
よって, $\Omega = \bigcup_{k=1}^N \Omega_k$, $\Omega_k = [a_k, b_k]$ と表せる.
- (b) もし $F_1(0) < 0$ ならば, F_1 の根は, $0 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq a_3 < b_3 < \dots \leq a_N < b_N < +\infty$ のように現れる.
よって, $\Omega = \bigcup_{k=1}^N \Omega_k$, $\Omega_1 = (0, b_1]$, $\Omega_k = [a_k, b_k]$ ($k \geq 2$) となる.

本稿のモデルでは, $F_1(0) = (hc^*)^4(R^2 - 1)^2(\theta^2 - \theta_0^2)^2 > 0$ が成り立つので, Ω は必ずケース (a) である. $\omega \in \Omega$ に対して, $\Delta(i\omega; \tau_1, \tau_2) = 0$ を満たす $\tau_1(\omega)$ と $\tau_2(\omega)$ は次の式によって与えられる (Lin and Wang 2012, Equations 11 and 14).

$$\tau_{1,n_1}^{\pm}(\omega) = \frac{\pm \psi_1(\omega) - \phi_1(\omega) + 2n_1\pi}{\omega}, \quad n_1 \in \mathbb{Z} \quad (18)$$

$$\tau_{2,n_2}^{\mp}(\omega) = \frac{\mp \psi_2(\omega) - \phi_2(\omega) + 2n_2\pi}{\omega}, \quad n_2 \in \mathbb{Z} \quad (19)$$

ここで,

$$\begin{aligned} \psi_1(\omega) &= \cos^{-1} \left(\frac{|P_0|^2 + |P_1|^2 - |P_2|^2 - |P_3|^2}{2\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} \right) \\ &= \cos^{-1} \left(\frac{\omega^4 + (2hc^*\theta_0 + \rho^2)\omega^2 + (hc^*)^2(\theta_0^2 - \theta'^2)(1 + R^2)}{2\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} \right) \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \phi_1(\omega) &= \arg\{P_2\bar{P}_3 - P_0\bar{P}_1\} \\ &= \tan^{-1} \left(\frac{\rho\theta_0\omega}{\theta_0\omega^2 + hc^*(\theta_0^2 - \theta'^2)} \right) \\ \psi_2(\omega) &= \cos^{-1} \left(\frac{|P_0|^2 - |P_1|^2 + |P_2|^2 - |P_3|^2}{2\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \right) \\ &= \cos^{-1} \left(\frac{\omega^4 + (2hc^*\theta_0 + \rho^2)\omega^2 + (hc^*)^2(1 - R^2)(\theta_0^2 + \theta'^2)}{2\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \right) \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \phi_2(\omega) &= \arg\{P_1\bar{P}_3 - P_0\bar{P}_2\} \\ &= \tan^{-1} \left(\frac{\rho\omega}{\omega^2 + hc^*\theta_0(1 - R^2)} \right) \end{aligned}$$

である.

ψ_1 と ψ_2 は, $(1, R')$ と (θ_0, θ') の入れ替えに対して対称であることが分かる. ϕ_1 と ϕ_2 についても同様である. したがって, 次の命題を得る.

命題 4.1 安定性スイッチを引き起こすラグ $\tau_{1,n_1}^{\pm}(\omega)$ と $\tau_{2,n_2}^{\mp}(\omega)$ の構造は, $(1, R')$ と (θ_0, θ') の入れ替えに対して対称である.

1と θ_0 はそれぞれ、ラグがない場合に安定性を特徴付ける政策態度 R と θ' の基準として使われていた値である（表1を参照）。したがって、命題4.1は、金融政策ラグと財政政策ラグが、政策態度によって、安定性に対するその役割を入れ替える可能性がある、ということを含意している。

すべての $\Omega_k(k=1, 2, \dots, N)$ に対して、 n_1, n_2 は、 $\tau_{1,n_1}^{\pm}(\omega), \tau_{2,n_2}^{\mp}(\omega)$ が非負になるような下限を持つ¹⁴⁾。それらを $L_{1,k}, L_{2,k}$ と表す。このとき、安定性スイッチング曲線は

$$\mathcal{J} = \bigcup_{\substack{k=1, 2, \dots, N \\ n_1 \geq L_{1,k}, L_{1,k+1}, \dots \\ n_2 \geq L_{2,k}, L_{2,k+1}, \dots}} \mathcal{J}_{n_1, n_2}^{\pm k} \quad (22)$$

$$\mathcal{J}_{n_1, n_2}^{\pm k} = \{(\tau_{1,n_1}^{\pm}(\omega), \tau_{2,n_2}^{\mp}(\omega)) \mid \omega \in \Omega_k\}$$

と表される。 $\mathcal{J}_{n_1, n_2}^{\pm k}$ は \mathbb{R}^2 において連続である。

ところで、 $\omega = a_k, b_k(k=1, 2, \dots, N)$ のとき、 $F_1(\omega) = 0$ となるので、式(20), (21)より、 $\cos(\psi_i(\omega)) = \pm 1 (i=1, 2)$ が成立する。すなわち、 $\omega = a_k, b_k$ のとき $\psi_i(\omega) = 0$ か π である。したがって、

$$\psi_i(a_k) = \delta_i^a \pi, \quad \psi_i(b_k) = \delta_i^b \pi$$

と表すことができる。ただし、 $\delta_i^a, \delta_i^b = 0, 1 (i=1, 2)$ である。このとき、式(18), (19)から、以下が成立することを容易に確認することができる。

$$\begin{aligned} (\tau_{1,n_1}^{+k}(a_k), \tau_{2,n_2}^{-k}(a_k)) &= (\tau_{1,n_1+\delta_1^a}^{-k}(a_k), \tau_{2,n_2-\delta_2^a}^{+k}(a_k)) \\ (\tau_{1,n_1}^{+k}(b_k), \tau_{2,n_2}^{-k}(b_k)) &= (\tau_{1,n_1+\delta_1^b}^{-k}(b_k), \tau_{2,n_2-\delta_2^b}^{+k}(b_k)) \end{aligned} \quad (23)$$

つまり、 $\mathcal{J}_{n_1, n_2}^{+k}$ は、 $\mathcal{J}_{n_1+\delta_1^a, n_2-\delta_2^a}^{-k}$ と $\mathcal{J}_{n_1+\delta_1^b, n_2-\delta_2^b}^{-k}$ にその両端で接続する。かくして \mathcal{J} は次のように分類される（Lin and Wang 2012, Theorem 3.1）。

- ・第Ⅰ類：もし $(\delta_1^a, \delta_2^a) = (\delta_1^b, \delta_2^b)$ ならば、 $\mathcal{J}_{n_1, n_2}^{+k}$ と $\mathcal{J}_{n_1+\delta_1^a, n_2-\delta_2^a}^{-k}$ は \mathbb{R}^2 上にループを形成する。この場合、 \mathcal{J} は連続的な閉曲線の集合となる。
- ・第Ⅱ類：もし $(\delta_1^a, \delta_2^a) \neq (\delta_1^b, \delta_2^b)$ ならば、 \mathcal{J} は、端の1つが軸上にあり、もう1つは \mathbb{R}_+^2 の無限遠にあるような連続曲線の集合となる。

4.3. 安定性スイッチの方向

すべての曲線 $\mathcal{J}_{n_1, n_2}^{\pm k}(k=1, 2, \dots, N)$ について、 $\omega \in \Omega_k$ の増大に対応した曲線の向きを正の方向（positive direction）と呼ぶ。また、曲線上を正の方向に向かって動いたとき、その右側にある領域

14) それらは負になるかもしれないし、 ω にも依存する。

を右側領域と呼ぶことにする．正の方向に平行な $\mathcal{J}_{n_1, n_2}^{\pm k}$ の接ベクトルは $\left(\frac{\partial \tau_1}{\partial \omega}, \frac{\partial \tau_2}{\partial \omega}\right)$ であるから， $\mathcal{J}_{n_1, n_2}^{\pm k}$ に対して垂直で右側領域を向いたベクトルは $\left(\frac{\partial \tau_2}{\partial \omega}, -\frac{\partial \tau_1}{\partial \omega}\right)$ である．また，複素根を $\lambda = \sigma + i\omega$ と表すと，実部 σ の変化に対して， (τ_1, τ_2) は $\left(\frac{\partial \tau_1}{\partial \sigma}, \frac{\partial \tau_2}{\partial \sigma}\right)$ という方向に向かって動く．ここで次のように定義しよう．

$$\begin{aligned} \zeta(\omega) &:= \left(\frac{\partial \tau_1}{\partial \sigma}, \frac{\partial \tau_2}{\partial \sigma}\right) \cdot \left(\frac{\partial \tau_2}{\partial \omega}, -\frac{\partial \tau_1}{\partial \omega}\right) \\ &= \frac{\partial \tau_1}{\partial \sigma} \frac{\partial \tau_2}{\partial \omega} - \frac{\partial \tau_2}{\partial \sigma} \frac{\partial \tau_1}{\partial \omega} \end{aligned}$$

もし $\zeta(\omega) > 0$ ならば， (τ_1, τ_2) が曲線 $\mathcal{J}_{n_1, n_2}^{\pm k}$ を右側領域に向かって横切るとき，1組の共役複素根が複素平面の虚軸を右に横切ることになる．よって，その場合， $\mathcal{J}_{n_1, n_2}^{\pm k}$ の右側領域に存在する正の実部を持つ特性根の数はその左側より2つだけ多い．逆にもし $\zeta(\omega) < 0$ ならば， $\mathcal{J}_{n_1, n_2}^{\pm k}$ の右側領域に存在する正の実部を持つ特性根の数は左側より2つだけ少ない．厄介な計算の後，次を示すことができる．

すべての $k = 1, 2, \dots, N$ に対して，

$$\text{sgn } \zeta(\omega \in \overset{\circ}{\Omega}_k) \equiv \pm 1 \quad \forall (\tau_1(\omega), \tau_2(\omega)) \in \mathcal{J}_{n_1, n_2}^{\pm k}$$

が成り立つ¹⁵⁾ (Lin and Wang 2012, Theorem 4.1)．したがって， $\mathcal{J}_{n_1, n_2}^{+k}$ ($\mathcal{J}_{n_1, n_2}^{-k}$) の右側領域に存在する正の実部を持つ根の数はその左側より2つだけ多い (少ない)．

なお，式(23)から分かるように，曲線 $\mathcal{J}_{n_1, n_2}^{+k}$ 上の点と $\mathcal{J}_{n_1 + \delta_1, n_2 - \delta_2}^{-k}$ 上の点は ω の増大とともに逆向きに動く．したがって，それらを1本の連続的な曲線として見たとき，安定性スイッチの方向は曲線全体として整合的となる．

以上の結果を踏まえ，次節では，モデルのパラメータ値を特定化し，式(22)によって与えられる安定性スイッチング曲線を描く．

4.4. 数値シミュレーション

各種パラメータを表2のように設定する¹⁶⁾．

表2 パラメータ値

α	η	ρ	γ	\bar{R}	$\bar{\theta}$	z
21	350	0.005	1	0.015	0.2	1

15) $\overset{\circ}{\Omega}_k$ は Ω_k の内部 (interior) の意味である．

16) NK モデルの基本的なパラメータは，Benhabib et al. (2003) の設定に従っている． $\bar{\theta} = 0.2$ は平均的に妥当と思われる値である．

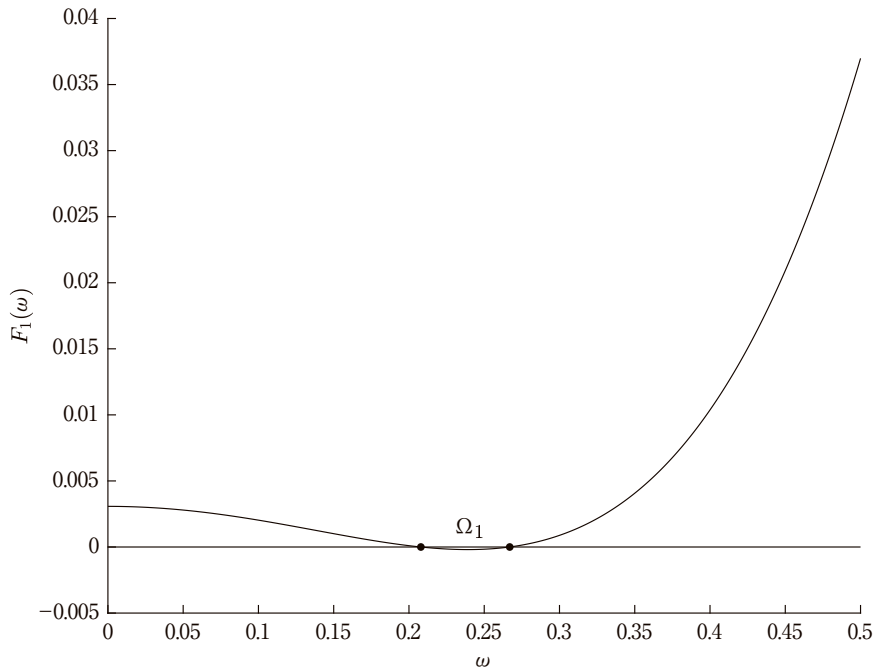
アクティブ&プログレッシブ

$R' = 1.5$, $\theta' = 0.25$ と仮定する¹⁷⁾. これは金融政策がアクティブ, 財政政策がプログレッシブに行われていることを意味する. したがってこの場合, 表1から, もし政策ラグがなければ ($\tau_1 = \tau_2 = 0$), 均衡は決定である. 政策ラグの存在が安定性にどのような影響を与えるかを見る.

$F_1(\omega)$ は根を2つだけ持ち, 交差集合は $\Omega = \Omega_1 = [a_1, b_1] = [0.2079, 0.2669]$ となる (図1を参照). また,

$$\delta_1^a = 0, \quad \delta_2^a = 1, \quad \delta_1^b = 0, \quad \delta_2^b = 0$$

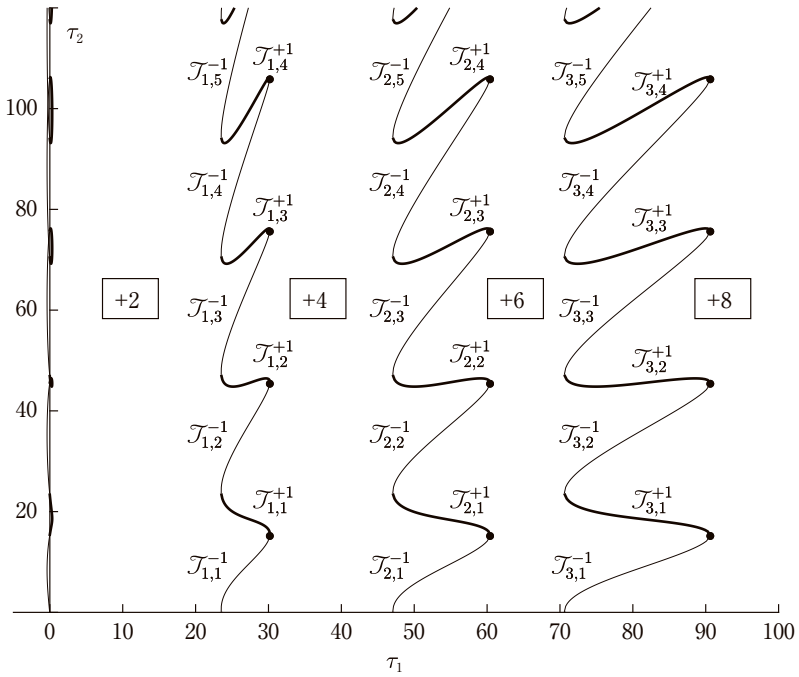
となる. したがって, 安定性スイッチング曲線は第II類である. 実際に, $\omega \in \Omega$ に対して \mathcal{J} を描くと, 図2(a)のようになる. τ_2 軸 (縦軸) の近傍を拡大したのが図2(b)である. これらの図の曲線上に示された点は, $\omega = a_1$ に対応する始点を表す. ω の増大とともに, 点はそこから逆向きに (正の方向へ) 進む. なお, 第2象限は連続的な曲線がどう動いているかを見せるために描かれている

図1 $F_1(\omega)$ のグラフ

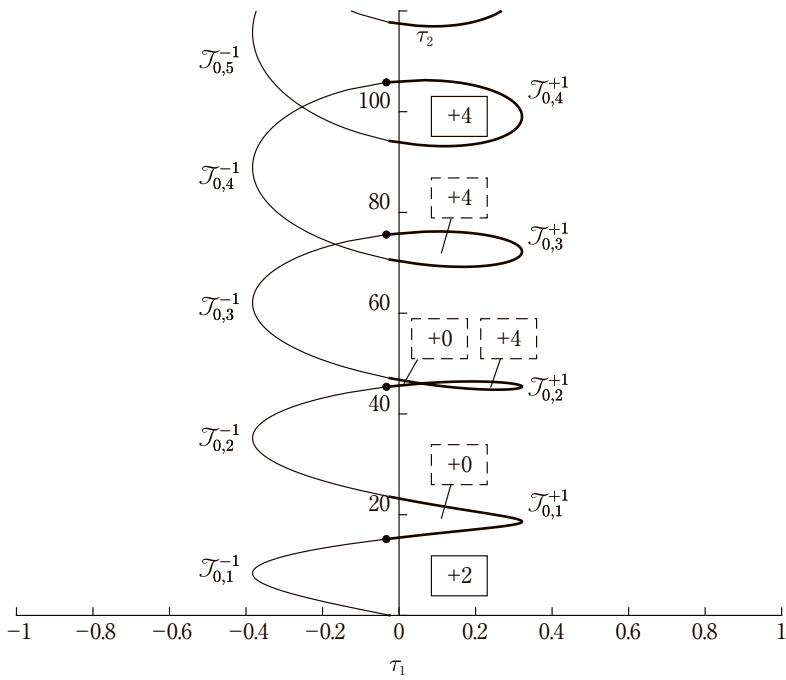
17) $R' = 1.5$ はNKモデルにおける最も標準的な想定である. $\theta' = 0.25$ は北村・宮崎 (2010) の推定結果 (限界税率の所得弾力性は0.2-0.28程度) に基づく.

図2 $R=1.5, \theta'=0.25$ のケース

(a) 安定性スイッチング曲線



(b) 曲線 $\mathcal{J}_{0, n_2}^{\pm 1}, n_2 = 1, 2, 3, 4, 5$



だけで、第1象限のみが意味を持つ。四角の中に示された数値は、各領域における正の実部を持つ特性根の数である。それらは、原点（正の実部を持つ根の数は2）から出発して、曲線を横切ったとき実部の符号がどう変化するかを前小節の結果に基づき調べることで完全に特定することができる。

原点の近傍から τ_2 軸に沿って縦に移動する（すなわち金融政策ラグが非常に短いケース）と、安定性スイッチング曲線を横切るたびに、特性根は複素平面の虚軸を左へ右へと交互に横切る。つまり、均衡の状態が決定(+2)と不決定(+0)の間を交互に切り替わるのである。さらに上昇が続けると、一度不安定化(+4)するが、すぐに決定性(+2)を取り戻す。しかしその後再び不安定化する。

このような変化はホップ分岐を引き起こし、リミットサイクルやカオスをもたらす可能性がある。そこで、金融政策ルールと財政政策ルールをそれぞれ

$$R(t) = \bar{R} + R'(\pi^*)[\pi(t - \tau_1) - \pi^*]$$

$$\theta(t) = \bar{\theta} + \theta'(c^*)[c(t - \tau_2) - c^*]$$

と特定化し、解の軌道を描く。金融政策ラグを $\tau_1 = 0.001$ に固定し、財政政策ラグ τ_2 の値を様々に変化させて、それぞれのケースで軌道 $(c(t), \pi(t))$ を描いたのが、図3である。 $\tau_2 = 10.0$ の場合、定常

図3 $c(t)$ と $\pi(t)$ の動態

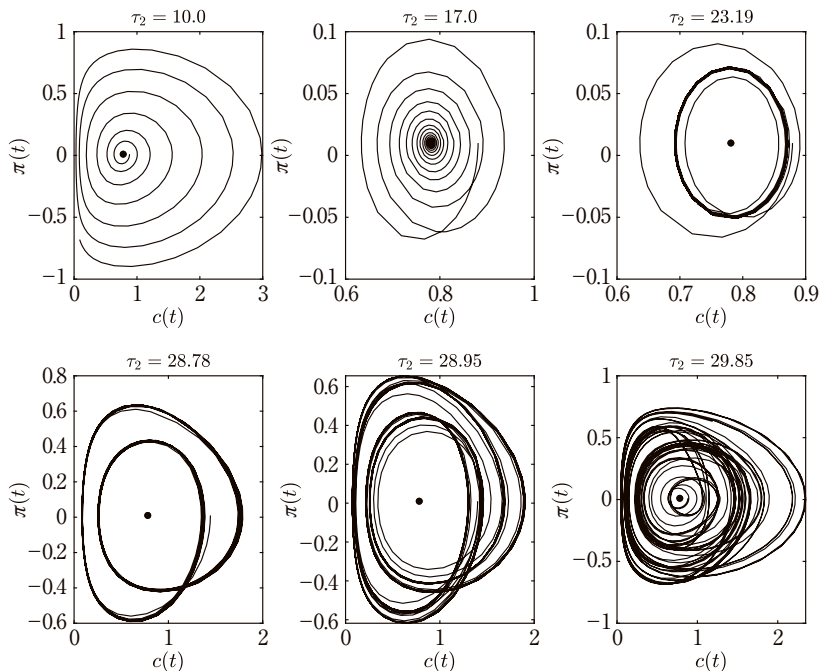
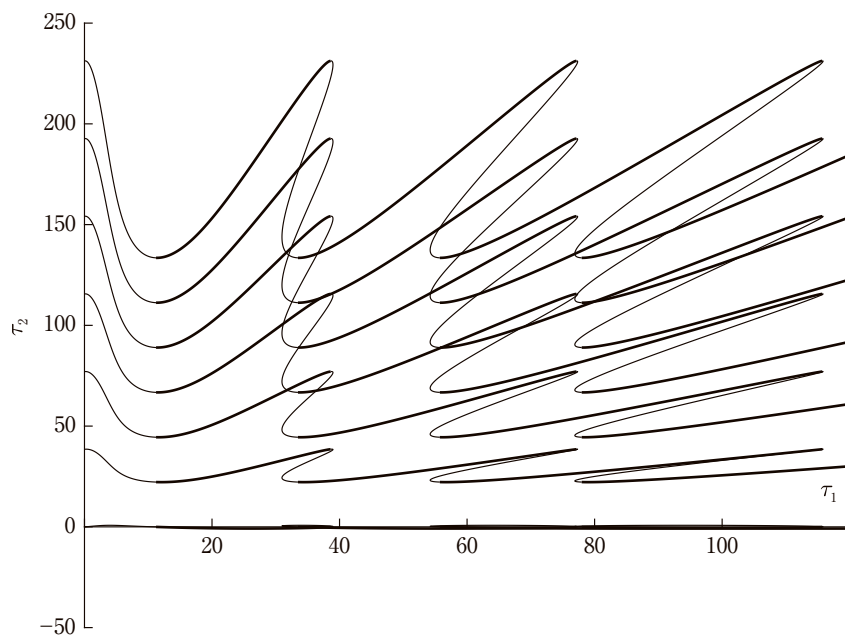
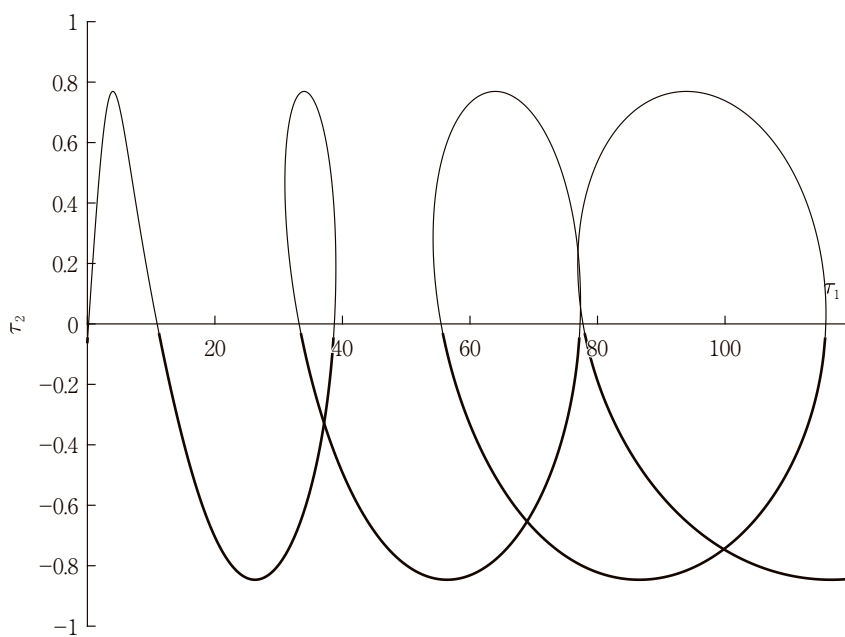


図4 $R=0.5, \theta'=-1.5$ のケース

(a) 安定性スイッチング曲線



(b) 曲線 $\mathcal{J}_{n_1,0}^{\pm 1}, n_1=0, 1, 2, 3, 4$



状態は不安定であり、家計—企業ユニットは横断性条件を満たす唯一の均衡である定常点上に初期値 $c(0)$ と $\pi(0)$ を置く（均衡は決定）。 $\tau_2=17.0$ の場合には、定常状態は漸近安定となる。この場合、家計—企業ユニットには、初期状態の選択が無数に存在する（均衡は不決定）。さらに τ_2 を上昇させると、体系はホップ分岐を起こし、安定なリミットサイクルが出現する。その後、周期倍化分岐によって多周期解からカオスへと至る^{18),19)}。このようなアトラクターの存在は、均衡が、局所的には決定であるが大域的には不決定となり得ることを含意する。

パッシブ&強度にリグレッシブ

次に、政策ラグがない場合に均衡が決定となるもう1つのケース ($R' < 1$ かつ $\theta' < -\theta_0$) を検討しよう。ここでは、 $R' = 0.5$, $\theta' = -1.5$ ($\theta_0 = 1.0242$) とする。この場合、

$$\delta_1^a = 1, \quad \delta_2^a = 0, \quad \delta_1^b = 0, \quad \delta_2^b = 0$$

となる。よって、ここでも安定性スイッチング曲線は第Ⅱ類である（図4）。命題4.1から期待される通り、 τ_1 と τ_2 の役割が入れ替わっていることが分かる。つまり、アクティブ&プログレッシブな政策の下では安定性スイッチング曲線は「縦波」であったのに対し、ここではそれは「横波」になっているのである。

注意 4.1 政策ラグがないときに均衡が不決定（固有値の実部が+-）であるような場合、政策ラグによって決定性を達成することはできない。なぜなら、安定性スイッチング曲線を横切るとき、正の実部を持つ根の数は2ずつしか変化しないからである。

5. 結 論

図2によって示されるように、現実妥当性を持つパラメータ設定の下で、 $R' = 1.5$, $\theta' = 0.25$ ($R' > 1$ かつ $\theta' > -\theta_0$) ならば、安定性スイッチング曲線は縦波となる。この場合、財政政策ラグ τ_2 の増大（上方への移動）が均衡の決定性に対して影響を与えない τ_1 の区間が存在する。一方、図4によって表される $R' = 0.5$, $\theta' = -1.5$ ($R' < 1$ かつ $\theta' < -\theta_0$) の場合には、曲線は横波になる。この場合には、金融政策ラグ τ_1 の増大（右方への移動）が決定性に影響しなくなるような τ_2 の区間が存在する。以上の結果は、命題4.1が示す金融政策ラグと財政政策ラグの対称性の1つの帰結である。そしてい

18) ただし多周期解やカオスのアトラクターには平時には現れ得ないインフレ率の数値も含まれている。

19) この変動が真にカオスであるかどうかについては議論の余地がある。例えば初期値鋭敏性の指標として最大リアプノフ指数が正であることを確かめなければ、断定することはできない。しかしそれはここでの主要な論点ではないため、割愛したい。

ずれのケースも、政策当局が意図的に政策の実施を遅らせることによって経済の安定性（均衡の局所的決定性）を実現できる可能性を示唆している点で興味深い²⁰⁾。しかしそれでも、大域的不決定性は避けられないかもしれない。

現実的には、財政政策がリグレッシブに行われるとは考えづらい。よって、安定性スイッチング曲線は、図4のケースより、図2のケースの方が現実妥当性を持つと思われる。また實際上、政策の必要性を認知するまでにかかる時間は中央銀行と政府で大差はないにしても、政策の決定と実施に要する時間は、金融政策に比べて財政政策の方が圧倒的に長いだろう。よって、図2(b)は特に重要である。

3つの遅れを持つ遅延体系に関する解析的な結果として、Almodaresi and Bozorg (2009) や Gu and Naghnaeian (2010) がある。これらの研究で考察された特性関数は

$$\Delta(\lambda; \tau_1, \tau_2, \tau_3) = P_0(\lambda) + P_1(\lambda)e^{-\lambda\tau_1} + P_2(\lambda)e^{-\lambda\tau_2} + P_3(\lambda)e^{-\lambda\tau_3}$$

である。財政政策ルールと金融政策ルールに3つの変数（例えば、インフレ率と消費量、資産価格）が含まれ、財政政策ルールにラグはないが、金融政策ルールにはそれぞれに異なる大きさのラグが存在するような場合には、特性関数はこの形になることが予想される。また、財政政策ルールにも同様のラグを想定した場合には、 $P_4(\lambda)e^{-\lambda(\tau_1+\tau_2+\tau_3)}$ のような、遅れが混在した項が現れるだろう。現在、そのような方程式を分析するための効率的な手法はまだない。加えて、遅れの数が3の場合、安定性スイッチング「曲面」の安定領域を特定することさえ難しくなるだろう。

参考文献

- 北村行伸・宮崎毅 (2010) 「日本における課税所得の弾力性と最適所得税率：全国消費実態調査の個票データによる分析」 Hi-Stat Discussion Paper Series 150.
- Almodaresi, E., M. Bozorg (2009) "Stability crossing surfaces for linear time-delay systems with three delays," *International Journal of Control*, vol. 82, pp. 2304-2310.
- Azariadis, C. (1981) "Self-fulfilling prophecies," *Journal of Economic Theory*, vol. 25, pp. 380-396.
- Bellman, R. E., K. L. Cooke (1963) *Differential-difference equations*, Academic Press, New York.
- Benhabib, J., S. Schmitt-Grohé, M. Uribe (2003) "Backward-looking interest-rate rules, interest-rate smoothing, and macroeconomic instability," *Journal of Money, Credit and Banking*, vol. 35, pp. 1379-1412.
- Blanchard, O. J., N. Kiyotaki (1987) "Monopolistic competition and the effects of aggregate demand," *American Economic Review*, vol. 77, pp. 647-666.
- Carlstrom, C. T., T. S. Fuerst (2007) "Asset prices, nominal rigidities, and monetary policy," *Review of Economic Dynamics*, vol. 10, pp. 256-275.
- Gu, K., M. Naghnaeian (2010) "Stability crossing set for systems with three delays," *IEEE Transactions*

20) パラメータはすべて四半期の値に設定されているが、ラグの数値を実際にどれくらいの期間として解釈すべきかは、本稿のモデルに限らず、遅延微分方程式の応用における共通の問題としてある。

- on *Automatic Control*, vol. 56, pp. 11–26.
- Gu, K., S.-I. Niculescu, J. Chen (2005) “On stability crossing curves for general systems with two delays,” *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 311, pp. 231–253.
- Kuang, Y. (1993) *Delay differential equations: with applications in population dynamics*, Academic press, Boston.
- Leeper, E. M. (1991) “Equilibria under ‘active’ and ‘passive’ monetary and fiscal policies,” *Journal of Monetary Economics*, vol. 27, pp. 129–147.
- Lin, X., H. Wang (2012) “Stability analysis of delay differential equations with two discrete delays,” *Canadian Applied Mathematics Quarterly*, vol. 20, pp. 519–533.
- Matsumoto, A., F. Szidarovszky (2015) “Nonlinear multiplier–accelerator model with investment and consumption delays,” *Structural Change and Economic Dynamics*, vol. 33, pp. 1–9.
- Rotemberg, J. J. (1982) “Sticky prices in the United States,” *Journal of Political Economy*, vol. 90, pp. 1187–1211.
- Smith, H. L. (2011) *An introduction to delay differential equations with applications to the life sciences*, Springer, New York.
- Sportelli, M., L. De Cesare, M. T. Binetti (2014) “A dynamic IS–LM model with two time delays in the public sector,” *Applied Mathematics and Computation*, vol. 243, pp. 728–739.
- Tsuzuki, E. (2014) “A new Keynesian model with delay: monetary policy lag and determinacy of equilibrium,” *Economic Analysis and Policy*, vol. 44, pp. 279–291.
- Tsuzuki, E. (2015) “Determinacy of equilibrium in a new Keynesian model with monetary policy lag,” *International Journal of Economic Behavior and Organization*, vol. 2, pp. 15–22.
- Tsuzuki, E. (2016) “Fiscal policy lag and equilibrium determinacy in a continuous–time new Keynesian model,” *International Review of Economics*, vol. 63, pp. 215–232.
- Tsuzuki, E., S. Shinagawa, T. Inoue (2016) “Numerical analysis of equilibrium determinacy in the new Keynesian model with monetary and fiscal policy lags,” *Journal of Economy and its Applications*, vol. 6, pp. 1–27.
- Zhou, L., Y. Li (2009) “A dynamic IS–LM business cycle model with two time delays in capital accumulation equation,” *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 228, pp. 182–187.

(南山大学経済学部教授 博士 (経済学))