

中央大学数学教室講究録 6

A b e l 函 数 論

大西 良博

2013 年 6 月

中央大学 大学院 理工学研究科

はじめに

この冊子は 2008 年 9 月 15 日から 19 日まで、中央大学理工学大学院で行なつた Abel 函数論についての講義を元に、この方面のことがらをまとめたものです。

貴重な講義の機会を与えて下さつた諏訪紀幸先生には感謝に堪へません。有難うございました。

執筆にあつては、この集中講義の前年夏に花巻市内で行なつた、第 15 回 整数論 summer school (種数の高い代数曲線と Abel 多様体) で様々、学んだことが大変有益でした。関係の諸氏に深く御礼を申し上げます。また、実際の講義に参加された学生諸君、お忙しい中を最後まで注意深く聴講して下さいました西来路文朗さん、岡野恵司さん、酒井祐貴子さんに篤く御礼申し上げます。

発刊がこの様に遅れてしまつたのは、すべて著者の私に原因があります。集中講義の当時は証明をあまり整理できていないままで説明した部分があり、その整理をできるだけしておきたかつたためです。この講義録をもう少し補充したいと思ひましたが、講義からすでに 4 年以上が経ちましたので、この辺りで一応の区切りを付けました。この間の関係のみなさまのご協力に深く感謝申し上げます。

2012 年 12 月 23 日
楕円函数の生誕日¹を記念して
大西 良博

¹西暦 1751 年 12 月 23 日

この講義録の内容について

三角関数はとても魅力的な関数であつて、古くから様々な一般化が試みられてきた。例へば、寺澤寛一氏の名著『自然科学者のための数学概論』を眺めると一般論をいくつかの章で解説した後、球関数、円柱関数、楕円関数についての3つの章が続いてゐるが、これらはどれも三角関数の拡張であるといへる。現在でも、三角関数の様々な拡張が試みられてゐる。楕円関数はその中でも一際美しく、多くの者を魅了してやまない。本講義録で扱ふ Abel 関数とは、三角関数から楕円関数といふ方向での、さらなる一般化を経たものである。その具体的な扱ひについて、最新の理論を踏まへて解説を試みたつもりである。

三角関数の周期の全体はいつも階数 1 の \mathbb{Z} 加群であるが、楕円関数の周期の全体は階数 2 の \mathbb{Z} 加群である。ここまでは複素 1 変数関数であるが、一般の Abel 関数は、さらに多重の周期を持つ複素多変数関数になる。そのため、理論はとても複雑になる。しかし、近年、これのかなり具体的な定式化ができてきたため、相当に整理した形で学ぶことができる様になつてきた。それを紹介するのが、この講義の目的である。

特に、Jacobi 多様体の構成や定義方程式、代数的加法公式、Weierstraß の sigma 関数の自然な拡張なども述べる。

本冊子は 2 つの部分に分かれてゐる。第 1 部では一般の compact な Riemann 面についての基本事項を説明した。第 2 部では、最近盛んに研究されてゐる、比較的扱い易いある種の代数曲線²を中心に解説した。数論にとって楕円関数が非常に強力な道具になつたのは、種々の具体的な関数が定式化されてゐたがために、様々な実験ができて、そこから新たな見地が見出されたからだと思ふ。この講義録の目標は、本質的には、高い種数の場合にも Abel 関数を (三角関数の様に) 使ひ易い形に定式化することである。それにより、種数の高い Abel 関数も楕円関数と同様に深い level で具体的な応用がなされると信じて疑はない。とはいへ、まだ一般の場合を書き切れるほどに著者の理解が進んでゐない部分も多くあり、超楕円曲線などいくつかの例に取つて述べた部分がある。また、できるだけ self contained なものにしたかつたのであるが、著者の力が及ばず、結局、例へば Mumford の本 [34] にある様な Abel 多様体の高度な一般論を援用せざるを得ない箇所がある。もつと親しみ易い著述に更めることは将来の課題としたい。

数学の研究では、既成の理論の類似を追求するとき、時に、求むる性質を断固として保たせることに腐心する余り、他の性質を犠牲に (あるいは無視) してしまふのであるが、筆者は、この「他の性質を犠牲」にするといふことにいつも躊躇して来た。現在、完成できてゐることは、楕円関数の理論に比べたら、微々たるものであるが、F. Klein, H. F. Baker, D. Leykin, V.Z. Enolskii 等による理論は「他の性質を犠牲」にしてゐないものになつてゐると思ふ。これらの成果を更めて眺めるとき、18 世紀に発見され、19 世紀に目覚しい進展を遂げたとはいへ、まだまだ汲み尽くせない深さを秘めてゐる Abel 関数を実感する。もしも読者が、この講義録で、そんな感覚を味はつていただけたら望外の幸せである。

²文献 [55] にちなんで、平面三浦曲線 (第 5.1 節) と呼ぶのが適切だと思ふ。

目次

1	Riemann 面の一般論から	3
1.1	Riemann 面	3
1.2	Dirichlet 問題, Dirichlet の原理	4
1.3	Abel 微分	11
1.4	正規化された Abel 微分とそれらの間の関係	21
2	Riemann-Roch の定理と Weierstraß の空隙値	25
2.1	Riemann-Roch の定理	25
2.2	交叉形式と一般 Riemann 関係式	31
2.3	Weierstraß 点	36
3	Abel-Jacobi の定理	38
3.1	Jacobi 多様体	38
3.2	Abel の定理	38
3.3	Jacobi の定理	43
4	Theta 函数	46
4.1	Theta 函数の定義と平行移動公式	46
4.2	Riemann の定理 (1)	46
4.3	Riemann の定理 (2) — Theta 函数の零因子	50
4.4	第 3 種微分形式と theta 函数との関係	53
5	平面三浦曲線	57
5.1	平面三浦曲線の定義	57
5.2	Schur-Weierstraß の空隙値	58
5.3	判別式	58
5.4	Weight	59
5.5	Hurwitz 整な級数	59
5.6	超楕円曲線	59
5.7	第 1 種微分形式, 周期行列	60
5.8	数論的局所径数による展開	61
5.9	標準的な第 1, 第 2, 第 3 種微分形式	63
5.10	超楕円曲線の場合	70
6	Sigma 函数	76
6.1	周期格子と Riemann 定数	76
6.2	Riemann 定数の計算 (超楕円曲線の場合)	76
6.3	標準 theta 輪体	80
6.4	Sigma 函数の積分による構成	80

6.5	Riemann 形式	86
6.6	Sigma 函数の解析的構成	87
6.7	Sigma 函数の展開の最初の部分	92
6.8	Schur-Weierstraß 多項式	92
7	Sigma 函数の性質	95
7.1	Schur-Weierstraß 多項式の導函数の零点	95
7.2	補足	96
7.3	Sigma 函数の冪級数展開	97
7.4	Sigma 函数の導函数の零点の位置	101
7.5	Hermite-Frobenius-Stickelberger 型の公式	106
7.6	第 3 種微分と sigma 函数の関係 (Riemann の基本関係式)	108
8	\wp 函数	109
8.1	\wp 函数の定義と基本性質	109
9	Jacobi 多様体の定義方程式系	112
9.1	\wp 函数を成分に持つ行列	112
9.2	\wp 函数のみたすその他の微分方程式	115
9.2.1	種数 3 以下の場合の準備	115
9.2.2	種数 2 の場合	116
9.2.3	種数 3 の場合	119
10	標準 Abel 函数の空間	121
10.1	一般論	121
10.2	基底	122
10.3	\wp 函数に関する代数的加法公式	125
11	触れられなかつた話題や残されてゐる問題等について	127
	参考文献	129
	索引	132

第 1 部

一 般 理 論

1 Riemann 面の一般論から

この講義録の内容を理解するための予備知識として, Ahlfors の著書 [1] に書かれてある内容程度を前提としたつもりであるが, 読者が [59], 第 3, 第 4 章を読まれてみれば, なお, 理解は容易になると思はれる. 但し厳密な理論を追ふためには [60] や [56] の最初の部分に頼る必要がある.

本講義では, 代数曲線とその Jacobi 多様体を述べて, Abel 函数についても解説をするのが目的なので, 閉 Riemann 面が代数曲線になるといふ事実 (Riemann の存在定理) は論理的には必要がない. しかし Riemann 面の一般論を代数曲線に対して使へれば, とても強力な道具になるので, このことをきちんと述べておくことは, 理解を深めるためには重要だと信じる. また, そのことで説明し易くなる部分もある.

ちなみに, Riemann 自身の Riemann 面の記述から現在の定式化に至るまでには, 興味深い歴史がある. それについては, [25] の第 IV 章, [22], [59] の緒言, 等を読まれることをお勧めする.

1.1 Riemann 面

始めに Riemann 面を定義する³.

定義 1.1 連結位相空間 S の各点 P に対し, 次の条件を満足する函数 φ_P が与へられた時, $\{\varphi_P; P \in S\}$ を S の 構造函数系 と呼ぶ:

- (1) φ_P は点 P の近傍 U_P で定義され, かつ U_P を複素平面上の単位円の内部 $|z| < 1$ に位相的に写像する函数であつて, 特に $\varphi_P(P) = 0$,
- (2) P, Q を S の任意の 2 点とする時 $V = U_P \cap U_Q$ が空集合でなければ $\varphi_Q \circ \varphi_P^{-1}$ は $\varphi_P(V)$ を $\varphi_Q(V)$ の上に 1 対 1 等角に写像する正則な複素函数である.

この様な構造函数系を単に $\mathfrak{X} = \{\varphi_P, U_P\}$ などと記す.

定義 1.2 $\mathfrak{X} = \{\varphi_P, U_P\}$, $\mathfrak{X}' = \{\varphi'_P, U'_P\}$ を S における 2 組の構造函数系, P を S の任意の点とする時, $\varphi_P(U_P \cap U'_P)$ で定義された函数 $\varphi'_P \circ \varphi_P^{-1}$ が常に原点において正則ならば, \mathfrak{X} と \mathfrak{X}' とは 同値 な構造函数系であるといふ. これが実際, 同値律を満すことは容易にわかる.

定義 1.3 連結位相空間 S とその構造函数系の 1 つの同値類 $\{\mathfrak{X}\}$ の組み合わせを

$$\mathcal{R} = \{S, \{\mathfrak{X}\}\}$$

を Riemann 面 と呼び, S を \mathcal{R} の 基底空間, $\{\mathfrak{X}\}$ に属する任意の構造函数系 $\{\mathfrak{X}\}$ を, \mathcal{R} を定義する構造函数系, あるいは \mathcal{R} 上の構造函数系と呼ぶ. Riemann 面は基底空間と構造函数系の代表を 1 つ与へれば決まるから, 以後は

$$\mathcal{R} = \{S, \{\varphi_P, U_P\}\}$$

³岩澤 [59], 第 3 章から引用. 但し用語を少し変更してゐる.

の様に記すことが多い. 各 $P \in \mathcal{X}$ に対して U_P 上の函数 $Q \mapsto \varphi_P(Q)$ を P における 局所径数 (local parameter) と呼ぶ. これは単に $\varphi_P(U_P)$ 上の座標を用いて z や t などの文字で示すことが多い. 基底空間 S の点, S の開集合, 閉集合等を Riemann 面 \mathcal{X} の点, 開集合, 閉集合等と呼ぶ. その他の S に関する位相的用語についても同様である. 定義より, Riemann 面の基底空間 S は 2 次元の向き付け可能な多様体である⁴.

定義 1.4 Riemann 面 $\mathcal{X} = \{S, \{\varphi_P, U_P\}\}$ 上の $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ または $\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ への函数, 即ち, 実または複素数値函数 ψ が C^∞ 級, 調和, 正則, あるいは 有理型函数 であるとは, ψ が S 上の函数であつて, 各点 P の近傍 U_P 上の函数

$$z \mapsto \psi \circ \varphi_P^{-1}(z)$$

が C^∞ 級, 調和, 正則, あるいは有理型函数であることとする. 以後, 有理型函数を単に 函数 と呼ぶ.

1.2 Dirichlet 問題, Dirichlet の原理

この節は全面的に楠の著書 [60] から引用してゐる⁵. Riemann 面 \mathcal{X} 内の 1 つの領域 (= 連結開集合) U が $\partial U \neq \emptyset$ であるとする. ∂U 上に \mathbb{R} 値函数 f を与へて, それを境界値に持つ U 上の調和函数を求める問題を Dirichlet 問題 と呼ぶ.

例 1.5 $U = \{z; |z| < 1\}$ で f が $\partial U = \{z; |z| = 1\}$ 上の Lebesgue 可積分な函数とする. いま $z = re^{i\theta}$ と書くと⁶, U 上で調和な ∂U 上で f に一致する函数は

$$\begin{aligned} u(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - \bar{z}^{-1}} \right) f(\zeta) d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\varphi}) \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\theta - \varphi) + r^2} d\varphi \end{aligned}$$

で与へられる. (最大値の原理より解は一意的である.)

定理 1.6 Riemann 面 \mathcal{X} 上の有限個の, 互ひに共通点を持たない, 局所円板 D_1, D_2, \dots, D_m について $Y = \bigcup_{j=1}^m \overline{D_j}$ とおく. 但し $\overline{}$ は集合の閉包を示す. このとき, 領域 Y 上の ∂Y に関する連続函数についての Dirichlet 問題は一意的な解を有する.

証明 証明は略す. [1], Chapter 6, Theorem 9 を見られたい. そこでの主張は \mathbb{C} 内の領域について述べられてゐるが, 証明はそのまま Riemann 面上の領域に通用する. また, [60], p.79 の 定理 3.17 と 定理 3.18 を合せて用いても良い. \square

⁴[60], pp.85-88 または [56], p.14 または [59], p.229 を参照されたい.

⁵[60] が絶版で入手困難だと思ひ, それに書かれてゐる方法をここに詳しく引用したが, 同書はつい最近, 再版された.

⁶この講義録では虚数単位を一貫して bold face で i と記す.

さて, $f(x, y), g(x, y)$ が $z = x + iy$ の複素数値関数であるとき, 微分形式

$$\omega = f(x, y)dx + g(x, y)dy$$

の共役微分 ${}^*\omega$ とは

$${}^*\omega = -g(x, y)dx + f(x, y)dy$$

のことである. Riemann 面上においても, 局所径数 $z = x + iy$ について, 同様に定義する. この定義は局所径数の取り方に依らない. 実際 2 種類の座標 $z = x + iy$ と $z' = x' + iy'$ で

$$\omega = f(x, y)dx + g(x, y)dy = f'(x', y')dx' + g'(x', y')dy'$$

と書けるとき, この式から

$$f = f' \frac{\partial x'}{\partial x} + g' \frac{\partial y'}{\partial x}, \quad g = f' \frac{\partial x'}{\partial y} + g' \frac{\partial y'}{\partial y}$$

であるから Cauchy-Riemann の関係式 $\frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{\partial y'}{\partial y}, \frac{\partial y'}{\partial x} = -\frac{\partial x'}{\partial y}$ を用いれば

$${}^*\omega = -gdx + fdy = (f' \frac{\partial x'}{\partial x} + g' \frac{\partial y'}{\partial x})dx + (f' \frac{\partial x'}{\partial y} + g' \frac{\partial y'}{\partial y})dy = f'dx' + g'dy'$$

を得る. この定義から

$${}^*(df) = -f_y dx + f_x dy$$

である.

いま, Riemann 面 \mathcal{X} 上の 1 つの Jordan 閉曲線で囲まれた領域 D を考へ, f は D の閉包を含むある領域で C^2 級であるとする. 境界 ∂D に沿つての正方向に進む線素を ds 外側の法線方向をへの方向微分を $\frac{\partial}{\partial n}$ で表すとき,

$$(1.7) \quad {}^*df = \frac{\partial f}{\partial n} ds \quad (\partial D \text{ 上})$$

となる⁷. 実際, 局所座標 $z = x + yi$ において単位接線 vector は $(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds})$ であるので, 単位外法線 vector は $(\frac{dy}{ds}, -\frac{dx}{ds})$. よつて, $\frac{\partial f}{\partial n} = f_x \frac{dy}{ds} - f_y \frac{dx}{ds} = {}^*df$ となる.

微分形式 ω が実調和微分なら局所的には $\omega = du$ (u は調和函数) と書ける⁸. このとき, u の共役調和函数を ${}^*u = v$ とすると ${}^*\omega = {}^*(u_x dx + u_y dy) = -u_y dx + u_x dy = v_x dx + v_y dy = dv$ なので

$${}^*(du) = dv = d({}^*u)$$

である.

定義 1.8 D_1, \dots, D_m は Riemann 面 \mathcal{X} 上の, 互ひに共通部分を持たない有限個の局所円板とし, $P_1, \dots, P_k \in \bigcup_{j=1}^m D_j$ とする. 各閉包 $\overline{D_j}$ の近傍上の P_1, \dots, P_k を除いた所で, 次の様な (多価性も許した) 実数値関数 s_j が定義されてあるとする:

- (i) s_j は D_j の有限個の点 P_1, \dots, P_k を除いて $\overline{D_j}$ の近傍で (多価性も許す) 調和であり,

⁷[1], p.163, §6.1 または [56], p.46

⁸後の (2.20) と関連する.

(ii) s_j は境界 ∂D_j の近傍で一価である.

このとき \mathcal{X} 上の実数値函数 U で

(a) U は $\mathcal{X} - \bigcup_{j=1}^m D_j$ で一価調和であり,

(b) $U - s_j$ は各 $\overline{D_j}$ で一価調和

である様なものが存在するとき, U を, 与へられた 特異性 $\{(D_j, s_j)\}_{j=1}^m$ を持つ 調和函数 (あるいは potential) といふ. ([60], pp.116–117)

次の補題が基本的である.

補題 1.9 (存在定理) \mathcal{X} 上に与へられた特異性 $\{(D_j, s_j)\}_{j=1}^m$ を持つ調和函数が存在するための必要十分条件は

$$(1.10) \quad \sum_{j=0}^m \int_{\partial D_j} *(ds_j) = 0$$

が成立することである. そして, もし存在すれば, 定数の差を除いて一意的である. ここに $*$ は共役微分を取ることを示す.

証明 [必要性] U を特異性 $\{(D_j, s_j)\}_{j=1}^m$ を持つ函数とすると U は $\mathcal{X} - \bigcup_{j=1}^m D_j$ で一価調和ゆゑ, Stokes の公式により

$$\sum_{j=1}^m \int_{\partial D_j} *(dU) = - \int_{\mathcal{X} - \bigcup_{j=1}^m D_j} d(*(dU)) = - \int_{\mathcal{X} - \bigcup_{j=1}^m D_j} \Delta U dx dy = 0.$$

但し, $z = x + iy$ を D_j 上の局所変数として

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

である. さらに D_j 上で $U = s_j + v_j$ (v_j は調和) と書けるので $\int_{\partial D_j} *(dv_j) = 0$ となり (1.10) が成り立つ. 一意性: もし U_1, U_2 が特異性 $\{(D_j, s_j)\}_{j=1}^m$ を持てば $U_1 - U_2$ は \mathcal{X} 全体の上で一価調和なので, $U_1 - U_2$ は定数函数でなければならない.

[充分性] A. Schwarz-C. Neumann による交代法 (alternating method) によつて示す. まづ

$$D_j' \subset \overline{D_j'} \subset D_j$$

なる局所円板 D_j' を取り, s_j は $\overline{D_j - D_j'}$ の近傍で一価調和とする. また s は各 $\overline{D_j}$ の近傍で $s = s_j$ ($j = 1, \dots, m$) を表す函数とする. さて,

$$D = \bigcup_{j=1}^m D_j, \quad \partial D = \bigcup_{j=1}^m \partial D_j,$$

$$Y = \mathcal{X} - \bigcup_{j=1}^m D_j', \quad \partial D' = -\partial Y = \bigcup_{j=1}^m \partial D_j'$$

を考へて, D および Y で Dirichlet 問題を解く. (D での解とは各 D_j での解のことである.) それは 1.6 により可能である. まづ, ∂D 上で境界値は連続ゆゑ, その解 u_1 が存在し (補題 1.6), u_1 は D で調和で

$$u_1 = -s \quad (\partial D \text{ 上})$$

である. 次に $\partial D'$ 上で $u_1 + s$ を境界値とする Y 上の Dirichlet 問題の解を v_1 とすると v_1 は Y 上で調和で

$$v_1 = u_1 + s \quad (\partial D' \text{ 上})$$

となる. 以上順次この様にして D, Y 上でそれぞれ調和な函数 u_n, v_n ($n = 1, 2, \dots$) で境界値が

$$(1.11) \quad \begin{cases} u_n = v_{n-1} - s & (n = 1, 2, \dots), \quad (\partial D \text{ 上}) \\ v_n = u_n + s & (n = 1, 2, \dots), \quad (\partial D' \text{ 上}) \\ v_0 = 0 & (\partial D \text{ 上}) \end{cases}$$

を満たすものを取りることができる. この $\{u_n\}, \{v_n\}$ がそれぞれ D, Y 上で一様収束することを示さう. まづ, $v_n - v_{n-1}$ が ∂D 上で定符号でないことに注意する. 実際 $D'_j = \{z_j; |z_j| < \rho\}$ ($0 < \rho < 1$), $D_j = \{z_j; |z_j| < 1\}$ となる様に局所径数 z_j を選べば, $\rho < r < 1$ なる r に対して

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j=1}^m \int_{|z_j|=r}^* (ds_j) \\ &= \sum_{j=1}^m \int_0^{2\pi} \frac{\partial s_j}{\partial r} r d\varphi \quad (\because (1.7)) \\ &= r \frac{d}{dr} \sum_{j=1}^m \int_0^{2\pi} s_j d\varphi \end{aligned}$$

なので

$$\sum_{j=1}^m \int_0^{2\pi} s_j (r e^{i\varphi}) d\varphi \quad \left(= \int_{|z|=r} s d\varphi \text{ と書く} \right)$$

は r に無関係である. 従つて

$$(1.12) \quad \int_{\partial D} s d\varphi = \int_{\partial D'} s d\varphi$$

である. また調和函数の平均値の定理 ([1], p.165, Theorem 20) により

$$\int_{\partial D} u_n d\varphi = \int_{\partial D'} u_n d\varphi$$

である. v_n 一価調和ゆゑ

$$\int_{\partial D'}^* (dv_n) = 0$$

(\because 必要性の所と同様に示される.) よつて (1.12) の様にして

$$(1.13) \quad \int_{\partial D} v_n d\varphi = \int_{\partial D'} v_n d\varphi$$

を得る. (1.11) から (1.13) により

$$\begin{aligned}\int_{\partial D} (v_n - v_{n-1})d\varphi &= \int_{\partial D'} v_n d\varphi - \int_{\partial D} (u_n + s)d\varphi \\ &= \int_{\partial D'} (u_n + s)d\varphi - \int_{\partial D} (u_n + s)d\varphi = 0\end{aligned}$$

従つて $v_n - v_{n-1}$ は ∂D 上で恒等的に 0 ではない限り, 定符号ではない. ∂D 上で $v_n - v_{n-1} = 0$ ならば最大値の原理で \bar{D} 上で恒等的に $v_n = v_{n-1}$ となる. さて $v_n - v_{n-1}$ が ∂D 上で定符号でなければ, 以下の補題 1.16 によつて n に無関係な正数 $q (< 1)$ が存在して

$$(1.14) \quad \max_{\partial D} |v_n - v_{n-1}| \leq q \max_{\partial D'} |v_n - v_{n-1}|$$

となる. この式は $v_n = v_{n-1}$ のときも明らかに成り立つ. ところで (1.11) と最大値の原理から

$$\begin{aligned}\max_{\partial D'} |v_{n+1} - v_n| &= \max_{\partial D'} |u_{n+1} - u_n| \quad (\because (1.11) \text{ の下}) \\ &\leq \max_{\partial D} |u_{n+1} - u_n| \quad (\because \text{最大値の原理}) \\ &= \max_{\partial D} |v_n - v_{n-1}| \quad (\because (1.11) \text{ の上})\end{aligned}$$

ゆゑに $O_n = \max_{\partial D'} |v_n - v_{n-1}|$ とおくと (1.14) により

$$O_{n+1} \leq qO_n \leq q^n O_1.$$

さらに, 最大値の原理により Y 上で $|v_n - v_{n-1}| \leq O_n$. 従つて

$$\sum_n |v_n - v_{n-1}| \leq O_1 \cdot \sum_n q^n < \infty.$$

即ち

$$v = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} (v_n - v_{n-1})$$

は Y 上で一様収束し, 従つて v は Y で調和である. $\{u_n\}$ については (1.11) と (1.14) により, D 上で

$$\begin{aligned}|u_{n+1} - u_n| &\leq \max_{\partial D} |u_{n+1} - u_n| = \max_{\partial D} |v_n - v_{n-1}| \\ &\leq qO_n \leq q^n O_1\end{aligned}$$

であるから $u = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ も D で一様収束し, そこで調和である. 最後に $D \cap Y$ では (1.11) において $n \rightarrow \infty$ とすると ∂D および $\partial D'$ 上で $u = v - s$. ゆゑに最大値の原理により $D \cap Y$ 上で $u + s = v$. そこで

$$(1.15) \quad U = \begin{cases} s + u & (D \text{ 上で}) \\ v & (Y \text{ 上で}) \end{cases}$$

とおけば U が求める函数である. □

補題 1.16 Y を Riemann 面 S に含まれる compact 部分集合とする. 定数 $0 < q < 1$ が存在して, Y 上で定符号ではない任意の調和函数 u に対して,

$$\max_Y |u| \leq q \sup_S |u|$$

となる. 特に S 全体で調和な函数は定符号でなければならない.

証明 $M = \sup_S |u|$ とおく. $M = \infty$ ならば q は正数ならなんでもよく, 成り立つ. $M < \infty$ ならば $\frac{1}{M}u$ を考えることで, 最初から S 上で $|u| < 1$ としてよい. もし, 結論が正しくないとすれば $|u_n| < 1$ で

$$\max_Y |u_n| \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty)$$

となる Y 上で定符号でない S 上の調和函数 u_n が存在する. $\{u_n\}$ は一様有界ゆゑ, 正規族⁹をなす. よつて S 上で広義一様収束する部分列 $\{u_{n_\nu}\}$ が取れる. その極限函数を v とすれば, v は S で調和で $|v| \leq 1$ かつ

$$\max_Y |v| = 1.$$

従つて, 最大値の原理により, 恒等的に $v = c$ ($c = \pm 1$). 一方 $\{u_{n_\nu}\}$ は Y で一様に v に収束するから v が十分大ならば

$$|u_{n_\nu}(P) - c| < \varepsilon < 1, \quad (P \in Y)$$

となり, $\{u_{n_\nu}\}$ は Y で定符号を持つ. これは矛盾である¹⁰. □

注意 1.17 定理 1.9 により, \mathcal{X} 全体で調和な実函数は定数に限ることがわかる. このことから, \mathcal{X} 全体で正則な函数も定数に限る.

例 1.18 Riemann 面 \mathcal{X} 上の局所円板 $D = \{t; |t| < 1\}$ を考へて, P, Q を D 内の 2 点とする. D から P, Q を除いた部分で定義された函数

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \arg \frac{t - t(P)}{t - t(Q)}$$

について, 特異性 $\{(D, s)\}$ を持つ \mathcal{X} 上の調和函数 $U_{P,Q}$ が存在定理 1.9 より存在する. 実際¹¹

$$\int_{\partial D} *(ds) = -\frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} d \log \left| \frac{t - t(P)}{t - t(Q)} \right| = 0.$$

このとき, D 内で P と Q を単純に結ぶ曲線を α とするとき, \mathcal{X} 上の任意の閉曲線 γ に対して

$$(1.19) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} dU_{P,Q} = \gamma \circ \alpha$$

となる. (練習: $U_{P,Q}$ を $X = \mathbb{P}^1$ の場合に具体的に書け.)

⁹正規族とは, 一様収束の位相で相対 compact な函数族のこと.

¹⁰[60], p.121 の注意には別証も述べてある.

¹¹∴ 一般に $\log f(z) = \log |f(z)| + i \arg f(z)$ より $-i \log f(z) = \arg f(z) - i \log |f(z)|$. よつて $s = \arg f(z)$ の共役は $*s = -\log |f(z)|$. これと $*(ds) = d(*s)$ による.

例 1.20 $k \geq 1$ を与へられた自然数とする. $P \in \mathcal{X}$ の周りの局所変数 t を取り, P を含む局所円板 $D = \{t; |t| < 1\}$ 上, P を除いた点で定義される函数

$$s(t) = \operatorname{Re} \frac{1}{t^k}$$

を考えると, 存在定理 1.9 より, 特異性 $\{(D, s)\}$ を持つ \mathcal{X} 上の調和函数 $U_P^{(k)}$ が存在する. 実際

$$\int_{\partial D} {}^*(ds) = \operatorname{Im} \int_{|t|=1} \left(-\frac{k}{t^{k+1}} \right) dt$$

であるからである.

例 1.21 2 点 $P_1, P_2 \in \mathcal{X}$ についてそれぞれの周りの局所変数 t_1, t_2 が与へられ, 局所円板 $D_i = \{t_i; |t_i| < 1\}$ 上の P_i を除いた所で函数

$$s_i(t_i) = (-1)^i \log |t_i| \quad (t_i \neq 0)$$

を考へる. このとき

$$\int_{\partial D_1} {}^*(ds_1) + \int_{\partial D_2} {}^*(ds_2) = - \int_{\partial D_1} d \arg t_1 + \int_{\partial D_2} d \arg t_2 = -2\pi + 2\pi = 0$$

なので存在定理 1.9 より, 特異性 $\{(D_i, s_i)\}_{i=1}^2$ をもつ \mathcal{X} 上の調和函数 V_{P_1, P_2} が存在する. また, P_1 と P_2 が 1 つの局所円板 $D = \{t; |t| < 1\}$ に含まれてみて, $t_1 = t - t(P_1)$, $t_2 = t - t(P_2)$ であれば $V_{P_1, P_2} = -{}^*U_{P_1, P_2}$ である. ここに U_{P_1, P_2} は例 1.18 で定義した函数である.

詳細は略すが, Riemann 面 \mathcal{X} について, その基底空間は三角形分割可能であることが証明され¹² (Rado [48]), 第 2 可算公理を満す. そのことから, 基本群および $H_1(\mathcal{X}, \mathbb{Z})$ が有限生成であることが従ふ. さらに $H_1(\mathcal{X}, \mathbb{Z})$ は階数が偶数の自由 \mathbb{Z} 加群であることもわかり¹³

$$\operatorname{rank}_{\mathbb{Z}} H_1(\mathcal{X}, \mathbb{Z}) = 2g$$

と書いて, g を \mathcal{X} の種数と呼ぶ, Riemann 面 \mathcal{X} の基底空間の三角形分割により, その Euler 指標¹⁴ $\chi(\mathcal{X})$ が定まる. これも偶数であつて

$$\chi(\mathcal{X}) = 2 - 2g$$

となる¹⁵. 直観的には Riemann 面 \mathcal{X} が “ g 人乗りの浮輪” に位相同型であることに対応してゐる.

この講義録では触れないが, 一方が他方を被覆する 2 つの Riemann 面の Euler 指標に関して成り立つ Riemann-Hurwitz の公式 についても知つておく必要があるが割愛する¹⁶.

¹²先にも述べたが, Weyl の著書 [53] では, 三角形分割可能性を Riemann 面の定義自体に含めてゐた. [60], pp.85–88 または [56], p.62.

¹³[60], p.95.

¹⁴三角形分割における三角形の個数, 辺の本数, 頂点の個数をそれぞれ n_2, n_1, n_0 としたとき $n_0 - n_1 + n_2$ をその Riemann 面の Euler 指標といふ.

¹⁵[60], p.110 または [56], p.108.

¹⁶[60], p.46 を参照されたい.

1.3 Abel 微分

種数 g の compact な Riemann 面 \mathcal{X} を考へる. 1 点 I (基点, base point) を固定し, I を始点にして, 再び I に戻る $2g$ 本の向きのある閉曲線

$$\alpha_1, \dots, \alpha_g; \beta_1, \dots, \beta_g$$

でその交点数が

$$(1.22) \quad \alpha_i \cdot \alpha_j = \beta_i \cdot \beta_j = 0, \quad \alpha_i \cdot \beta_j = \delta_{ij}$$

となるもの (標準 homology 基底, canonical homology basis) を取り (図 1.23), これらに沿つて \mathcal{X} を “切り開いてできる多角形” (正規多角形¹⁷, regular polygon) を \mathcal{X}_0 とする (図 1.23).

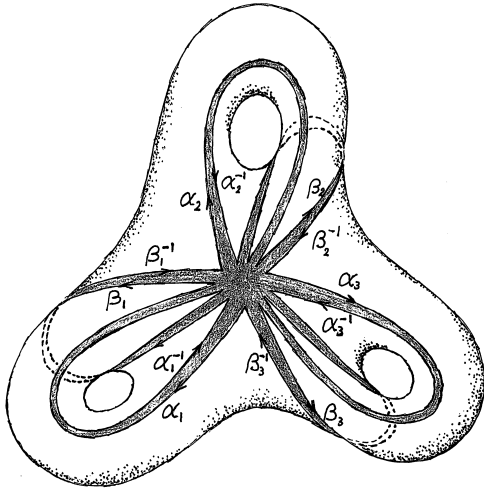


図 1.23

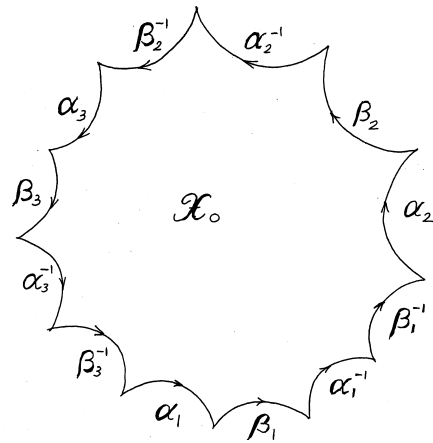


図 1.23

いま少し詳しく説明する. 一般に \mathcal{X} 上の向きのある曲線 γ の向きを逆にしたものを γ^{-1} と記す. \mathcal{X} 上の任意の閉曲線はいくつかの $\alpha_i, \beta_j, \alpha_i^{-1}, \beta_j^{-1}$ を繋いだものと homotope であり, \mathcal{X} の基本群 $\pi^1(\mathcal{X})$ は $\alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g$ から生成される自由群の

$$\alpha_1 \beta_1 \alpha_1^{-1} \beta_1^{-1} \dots \alpha_g \beta_g \alpha_g^{-1} \beta_g^{-1}$$

を含む最小の正規部分群による剰余群である. つまり, 演算 \circ を持ち, $\{\alpha_j\}, \{\beta_j\}$ で生成されて,

$$\alpha_1 \circ \beta_1 \circ \alpha_1^{-1} \circ \beta_1^{-1} \circ \dots \circ \alpha_g \circ \beta_g \circ \alpha_g^{-1} \circ \beta_g^{-1} = 1$$

なる関係式のみを持つ群である. ここで \circ は曲線を繋ぐことによる演算を意味し, 右辺の 1 は自明な (1 点に潰せる) 閉曲線を意味する. 正規多角形 \mathcal{X}_0 は, その “辺” が, 順に

$$\alpha_1, \beta_1, \alpha_1^{-1}, \beta_1^{-1}, \dots, \alpha_g, \beta_g, \alpha_g^{-1}, \beta_g^{-1}$$

となつてゐる訳である.

¹⁷[56](p.115) では 位相標準形 と呼んでゐる.

定義 1.24 Riemann 面上の有理型微分形式のことを Abel 微分, または単に 微分, 微分形式 などと呼ぶ. Abel 微分の \mathcal{X} 上での線積分を Abel 積分 と呼ぶ. Riemann 面 \mathcal{X} 上の Abel 微分は, それが, 至る所で正則であるとき, 第 1 種微分形式 であるといはれ至るところで 1 位の極を持たないとき, 第 2 種微分形式 といはれる. これ以外, 即ち, 1 位の極を持つことを許す場合を 第 3 種微分形式 と呼ぶ. 第 1 種積分, 第 1 種積分, 第 3 種積分 はそれらの積分として定義される.

命題 1.25 Riemann 面上の微分の留数の和は 0 である.

証明 任意の微分 ω について

$$\begin{aligned} \text{“留数の和”} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathcal{X}_0} \omega \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^g \left(\int_{\alpha_j} \omega + \int_{\beta_j} \omega + \int_{\alpha_j^{-1}} \omega + \int_{\beta_j^{-1}} \omega \right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^g \left(\int_{\alpha_j} \omega + \int_{\beta_j} \omega - \int_{\alpha_j} \omega - \int_{\beta_j} \omega \right) = 0 \end{aligned}$$

となるからである. □

例 1.26 (1) いま例 1.18 の記号を用いて

$$(1.27) \quad \omega_{P,Q} = dU_{P,Q} + \mathbf{i}^*(dU_{P,Q})$$

とおくと $\omega_{P,Q}$ は P, Q の近傍 ($\subset D$) でそれぞれ

$$(1.28) \quad \frac{-\mathbf{i}}{z - z(P)} dz, \quad \frac{\mathbf{i}}{z - z(Q)} dz$$

なる主要部を持ち, それ以外の点で正則な Abel 微分である.

(2) 今度は 1.20 の記号を用いて

$$\eta_P^{(k+1)} = dU_P^{(k)} + \mathbf{i}^*(dU_P^{(k)})$$

と書くことにすると $\eta_P^{(k+1)}$ は P において主要部

$$-\frac{k}{t^{k+1}} dt$$

を有する展開を持ちそれ以外の点では正則な, \mathcal{X} 上の, Abel 微分である. もちろん, 微分 $\eta_P^{(k+1)}$ の実部は, \mathcal{X} 上の任意の閉曲線 γ について

$$\operatorname{Re} \int_{\gamma} \eta_P^{(k+1)} = \int_{\gamma} dU_P^{(k)}$$

である. $\eta_P^{(k+1)}$ は後の 1.69 で使ふ.

(3) (第 3 種微分) 最後に 1.21 の記号を用いて

$$(1.29) \quad \tau_{P_1, P_2} = dV_{P_1, P_2} + \mathbf{i}^*(dV_{P_1, P_2})$$

とおくと, これは P_i において $(-1)^i \log t_i dt_i$ なる主要部を持つた Abel 微分である. 定義から単純な弧 $P_1 P_2$ を通らない任意の閉曲線 γ について

$$\operatorname{Re} \int_{\gamma} \tau_{P_1, P_2} = \int_{\gamma} dV_{P_1, P_2} = 0$$

となる.

練習 1.30 方程式

$$(1.31) \quad y^2 = x^5 + \mu_2 x^4 + \mu_4 x^3 + \mu_6 x^2 + \mu_8 x + \mu_{10}$$

で定義される代数曲線を考える. ここで, (1.31) の μ_j は複素数であつて, 右辺は重根を持たない多項式とし, これは, 無限遠点に 1 点 ∞ を添加することで非特異完備な \mathbb{C} 上の代数曲線となる. それを Riemann 面とみることができる¹⁸. 実際にこれの 1.1 の意味の構造函数系を 1 つ記述せよ.

命題 1.32 Riemann 面 \mathcal{X} 上の正則な微分形式 (第 1 種微分形式と呼ばれる) の空間は \mathbb{C} 上 g 次元である.

証明 その様な空間の基底は次の様に作ればよい. \mathcal{X} 上の閉曲線 α に対して P_1, P_2, \dots, P_n をその上に順に十分近接して取つた点列とし

$$(1.33) \quad U_{\alpha} = \frac{1}{2\pi} (U_{P_1, P_2} + U_{P_2, P_3} + \dots + U_{P_n, P_1})$$

とおく. ここに U_{P_1, P_2} 等は例 1.18 のものである. また, 十分近接してゐるといふのは, すべての隣り合つた 2 組がそれぞれ適当な局所円板に含まれることをいふ. このとき U_{α} は \mathcal{X} 上の至るところ特異点を持たない (多価な¹⁹) 調和函数である. (U_{α} は α を越えるときに別の分枝に移る.) しかも (1.19) より β が \mathcal{X} 上の任意の閉曲線であれば

$$(1.34) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{\beta} dU_{\alpha} = \beta \cdot \alpha$$

が成り立つ. ここで, 各閉曲線 α に対して

$$\omega_{\alpha} = dU_{\alpha} + i^*(dU_{\alpha})$$

を考える. (例 1.18 参照.) いま, 標準切断を与へる様な閉曲線の組を

$$(1.35) \quad \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_g, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_g$$

として, これらに応じて $\omega_{\alpha_i}, \omega_{\beta_j}$ を作る. (これらは P_1, \dots, P_n の取り方に依存するだらうが) それらを単に

$$(1.36) \quad \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{2g}$$

¹⁸詳しくは, 例へば, [56], pp.27-28.

¹⁹ここでは $\log z$ の様な函数のみを想定してゐる. 厳密には Weierstraß の解析函数と呼ばれるもの ([56], pp.21-23) である.

と書けば, これらが \mathcal{X} 上の第 1 種微分形式の空間を \mathbb{R} 上張ることがわかる. 実際 ω を \mathcal{X} 上の任意の正則な微分形式として

$$c_j = \int_{\alpha_j} \omega, \quad c_{g+j} = \int_{\beta_j} \omega$$

とすれば, (1.34) により, 任意の閉曲線 β について

$$\operatorname{Re} \int_{\beta} (\omega - c_1 \omega_1 - c_2 \omega_2 - \cdots - c_{2g} \omega_{2g}) = 0$$

となるから, 始点 I を固定した \mathcal{X} 上の 1 価函数として

$$\varphi(P) = \operatorname{Re} \int_I^P (\omega - c_1 \omega_1 - c_2 \omega_2 - \cdots - c_{2g} \omega_{2g})$$

が定義できる. しかし $\varphi(P)$ は極を持たず調和函数なので定数 (従つて 0) である²⁰. よつて $\varphi(P)$ の共役も恒等的に 0 である. ゆゑに

$$\omega = c_1 \omega_1 + c_2 \omega_2 + \cdots + c_{2g} \omega_{2g}$$

である. さらに (1.34) から $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{2g}$ は \mathbb{R} 上 1 次独立であることがわかる²¹. 次に, いま正則な微分形式の空間の \mathbb{C} 上の次元が q であつたとして, その基底を (上の記号を忘れて) $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_q$ とすれば

$$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_q, i\omega_1, i\omega_2, i\omega_3, \dots, i\omega_q$$

は \mathbb{R} 上 1 次独立なので $2q \leq 2g$. しかるに, 任意の正則微分形式は $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_q$ の \mathbb{C} 上の 1 次結合なので $2q \geq 2g$. \square

例 1.37 \mathcal{X} を例 1.30 と同じく

$$y^2 = x^5 + \mu_2 x^4 + \mu_4 x^3 + \mu_6 x^2 + \mu_8 x + \mu_{10}$$

で定義される種数 2 の超楕円曲線に対応する Riemann 面とせよ. \mathcal{X} 上の正則な微分形式は

$$\frac{dx}{2y}, \quad \frac{xdx}{2y}$$

の 1 次結合である.

次の補題²²から Riemann-Roch の定理をはじめ, 以下のほとんどの定理が導かれる.

²⁰[60], p.70, 定理 3.10 参照.

²¹ β として $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_g, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_g$ を取つて $\int_{\beta} \omega_j = \beta \circ \alpha_j, \int_{\beta} \omega_{g+j} = \beta \circ \beta_j$ を見ればよい.

²²[59], pp.252-256

補題 1.38 \mathcal{X}_0 において P_1, \dots, P_m および Q_1, \dots, Q_n を $\partial\mathcal{X}_0$ にない点とせよ. η を高々 P_1, \dots, P_m に極を持つ微分, ξ を高々 Q_1, \dots, Q_n に極を持つ微分とし, 各点 P_i における局所径数 t_i に関する展開を

$$\begin{cases} \eta = \sum_{\nu \gg -\infty} a_\nu^{(i)} t_i^\nu dt_i, \\ \xi = \sum_{\nu=0}^{\infty} a'_\nu^{(i)} t_i^\nu dt_i \end{cases} \quad (i = 1, \dots, m)$$

とせよ. 同様に Q_j における局所径数 s_j に関する展開を

$$\begin{cases} \eta = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu^{(j)} s_j^\nu ds_j, \\ \xi = \sum_{\nu \gg -\infty} b'_\nu^{(j)} s_j^\nu ds_j \end{cases} \quad (j = 1, \dots, n)$$

とせよ. このとき

$$(1.39) \quad \int_{\partial\mathcal{X}_0} \left(\int_{I_1}^P \eta \right) \xi(P) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^g \left(\int_{\alpha_k} \eta \int_{\beta_k} \xi - \int_{\beta_k} \eta \int_{\alpha_k} \xi \right),$$

および

$$(1.40) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^g \left(\int_{\alpha_k} \eta \int_{\beta_k} \xi - \int_{\beta_k} \eta \int_{\alpha_k} \xi \right) &+ \sum_{i=1}^m \left(a_{-1}^{(i)} \cdot \int_{I_1}^{P_i} \xi + \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_{-\nu-2}^{(i)} a'_\nu^{(i)}}{\nu+1} \right) \\ &+ \sum_{j=1}^n \left(b'_{-1}^{(j)} \cdot \int_{I_1}^{Q_j} \xi + \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{b'_{-\nu-2}^{(j)} b_\nu^{(j)}}{\nu+1} \right) = 0 \end{aligned}$$

が成り立つ.

定義 1.41 上の等式 (1.39) を 一般 Riemann 関係式 と呼ぶ.

証明 (補題 1.38 の) \mathcal{X}_0 の中で P_i, Q_j を中心とした十分小さい円 $\varepsilon_i, \varepsilon'_j$ を描く. これら各小円上の 1 点へ, I_1 から向ふ曲線 γ_i, γ'_j をこれら $(m+n)$ 本のどの 2 本も互ひに交はらない様を選ぶ. 証明は積分路

$$\gamma_i \circ \varepsilon_i \circ \gamma_j^{-1}, \quad \gamma'_i \circ \varepsilon'_i \circ \gamma'_j^{-1}$$

と $\partial\mathcal{X}_0$ を結んだものに沿つて (ここで \circ は曲線を繋ぐことを意味する)

$$P \mapsto \left(\int_{I_1}^P \eta \right) \left(d \int_{I_1}^P \xi \right)$$

を積分することで得られる. 実際, 命題 1.25 より上の微分形式の積分は

$$\int_{\partial\mathcal{X}_0} + \sum_{i=1}^m \lim_{\varepsilon_i \rightarrow P_i} \left(\int_{\gamma_i} + \int_{\gamma_i^{-1}} + \int_{\varepsilon_i} \right) + \sum_{j=1}^n \lim_{\varepsilon'_j \rightarrow Q_j} \left(\int_{\gamma'_j} + \int_{\gamma'_j^{-1}} + \int_{\varepsilon'_j} \right)$$

であるが, 左辺のそれぞれの項が 1.40 の $\frac{1}{2\pi i}$ 倍のそれらに等しい. 実際, \mathcal{X}_0 から $\gamma_i \circ \varepsilon_i \circ \gamma_j^{-1}$ や $\gamma'_i \circ \varepsilon'_i \circ \gamma'_j^{-1}$ の囲む小部分を除いて得られる単連結領域での積分として

$$h(P) = \int_{I_1}^P \eta$$

とおくとき, まづ

$$(1.42) \quad \begin{aligned} \int_{\partial \mathcal{X}_0} h(P)\xi(P) &= \sum_{k=1}^g \left(\int_{\alpha_k} h\xi + \int_{\beta_k} h\xi + \int_{\alpha_k^{-1}} h\xi + \int_{\beta_k^{-1}} h\xi \right) \\ &= \sum_{k=1}^g \left(\int_{\alpha_k} (h - h^{-1})\xi + \int_{\beta_k} (h - h^{-1})\xi \right) \end{aligned}$$

を計算する. 但し, $P \in \alpha_k$ (resp. β_k) に対応する α_k^{-1} (resp. β_k^{-1}) 上の点を P^- と表し,

$$h^-(P) = h(P^-)$$

で h^- を定義してゐる. 上で $P \in \alpha_k, \beta_k$ に応じて

$$(1.43) \quad \begin{aligned} h(P) - h^{-1}(P) &= - \int_{\beta_k} \eta, \\ h(P) - h^{-1}(P) &= - \int_{\alpha_k^{-1}} \eta = \int_{\alpha_k} \eta \end{aligned}$$

なので

$$(1.44) \quad \begin{aligned} &= \sum_{k=1}^g \left\{ \int_{\alpha_k} \left(- \int_{\beta_k} \eta \right) \xi + \int_{\beta_k} \left(\int_{\alpha_k} \eta \right) \xi \right\} \\ &= \sum_{k=1}^g \left(- \int_{\beta_k} \eta \int_{\alpha_k} \xi + \int_{\alpha_k} \eta \int_{\beta_k} \xi \right) \end{aligned}$$

となる. 次に γ_1, γ_2^{-1} の $\varepsilon_1 \rightarrow P$ の極限の積分

$$\left(\int_{I_1}^{P_1} + \int_{P_1}^{I_1} \right) h(P)\xi(P)$$

を計算する. $h(P)$ は P_1 の周りを時計周りに一周するとき, $-2\pi i a_{-1}^{(1)}$ だけ値が増すから

$$\begin{aligned} &= \int_{P_1}^{I_1} (-2\pi i a_{-1}^{(1)}) \xi(P) \\ &= (-2\pi i a_{-1}^{(1)}) \int_{I_1}^{P_1} \xi(P). \end{aligned}$$

これが (1.40) の第 2 の和の前半の $i = 1$ の項である. 他の番号 i についてや第 3 の和の前半についても同様である. 最後に

$$g(P) = \int_{I_1}^P \xi$$

と書くと

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon_1} h(P)\xi(P) &= \int_{\varepsilon_1} h(P)\frac{\xi(P)}{dt_1} dt_1 \\ &= \int_{\varepsilon_1} \frac{d(h(P)g(P))}{dt_1} - \int_{\varepsilon_1} \frac{dh(P)}{dt_1} g(P) dt_1 \quad (\because \text{部分積分}) \end{aligned}$$

ここで、第 1 項において、 P が ε_j を回つたとき、 $g(P)$ は、 $\xi(P)$ が P で正則なので不変であり、 $h(P)$ は、 $-s\pi i a_{-1}^{(1)}$ だけ増す。従つて $\varepsilon_1 \rightarrow P_1$ のとき

$$-2\pi i a_{-1}^{(1)} g(P)$$

に収束する。また、第 2 項は t_1 の函数 $\frac{dh(P)}{dt_1} g(P)$ の $t_1 = 0$ における留数の $-2\pi i$ 倍である。 ξ は P_1 で正則なので P_1 の近傍では

$$\begin{aligned} g(P) &= g(P_1) + \int_{P_1}^P \xi(P) \\ &= g(P_1) + \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_{\nu}^{\prime(1)}}{\nu+1} t_1^{\nu+1} \end{aligned}$$

となる。但し t_1 は P_1 の周りの局所変数 (それも t_1 と書く) の P における値である。これと

$$\frac{dh(P)}{dt_1} = \eta(P) = \sum_{\nu} a_{\nu}^{(1)} t_1^{\nu}$$

とから

$$\text{Res}_{t_1=0} \frac{dh(P)}{dt_1} g(P) = \boxed{a_{-1}^{(1)} \cdot g(P_1)} + \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_{-\nu-2}^{(1)} a_{\nu}^{\prime(1)}}{\nu+1}$$

であるから

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow P_1} \int_{\varepsilon_1} h(P)\xi(P) &= -2\pi i a_{-1}^{(1)} g(P) - \left(-2\pi i g(P) + \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_{-\nu-2}^{(1)} a_{\nu}^{\prime(1)}}{\nu+1} \right) \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_{-\nu-2}^{(1)} a_{\nu}^{\prime(1)}}{\nu+1} \end{aligned}$$

となる。その他の i や (1.40) の第 3 項の後半も同様である。 □

注意 1.45 (1.39) の左辺は Stokes の定理より

$$(1.46) \quad \int_{\partial \mathcal{X}_0} \left\{ \left(\int_I^P \eta \right) \xi \right\} = \int_{\mathcal{X}} \eta \wedge \xi$$

と書かれる。

補題 1.47 ω', ω を第 1 種微分として

$$(1.48) \quad \boxed{w(P)} = \int_{I_1}^P \omega$$

とおくと,

$$(1.49) \quad \sum_{j=1}^g \left(\int_{\alpha_j} \omega \int_{\beta_j} \omega' - \int_{\alpha_j} \omega' \int_{\beta_j} \omega \right) = \int_{\partial \mathcal{X}_0} w\omega' = 0$$

$$i \sum_{j=1}^g \left(\int_{\alpha_j} \bar{w} \int_{\beta_j} \omega - \int_{\alpha_j} \omega \int_{\beta_j} \bar{w} \right) \geq 0$$

であり, 不等式の等号は $\omega = 0$ のときのみ成り立つ.

証明 (1.40) で $\eta = \omega, \xi = \omega'$ とおけば (1.48) を得る. 次に (1.42), (1.43), (1.44) の計算より

$$\int_{\partial \mathcal{X}_0} w\bar{w} = \sum_{j=1}^g \left(\int_{\alpha_j} \omega \int_{\beta_j} \bar{w} - \int_{\alpha_j} \bar{w} \int_{\beta_j} \omega \right)$$

である. 一方 Stokes の定理 ([60], p.60 と p.56) より

$$\int_{\partial \mathcal{X}_0} w\bar{w} = \int_{\mathcal{X}_0} d(w\bar{w}) = \int_{\mathcal{X}_0} \omega \wedge \bar{w}.$$

ここで, \mathcal{X}_0 を \mathbb{C} に埋め込んで, その座標 $z = x + iy$ について実変数の微分とみて

$$\omega = fdz = f(dx + idy) = fdx + ifdy$$

とおけば

$$\omega \wedge \bar{w} = (fdx + ifdy) \wedge (\bar{f}dx - i\bar{f}dy) = -2i|f|^2 dx \wedge dy (= dxdy).$$

よつて

$$(1.49) \text{ の左辺} = 2 \int_{\mathcal{X}} |f|^2 dxdy \geq 0.$$

しかるに $\omega = 0 \iff f = 0$ より, 最後の主張もわかる. □

\mathcal{X} 上の正則な微分形式の空間の基底を $\omega_1, \dots, \omega_g$ として, これらについて

$$(1.50) \quad \Omega' = \left[\int_{\alpha_j} \omega_i \right], \quad \Omega'' = \left[\int_{\alpha_j} \omega_i \right], \quad \Omega = [\Omega' \Omega'']$$

とおき, これらを α_j, β_j に関する $\omega_1, \dots, \omega_g$ の 周期行列 と呼ぶ. また \mathcal{X} 上の閉曲線に関する, 微分 ω の積分を ω の 周期 と呼ぶ. 補題 1.47 から次の補題が導かれる.

補題 1.51 第 1 種微分 ω について

- (i) すべての $j = 1, \dots, g$ について $\int_{\alpha_j} \omega = 0$,
- (ii) すべての $j = 1, \dots, g$ について $\int_{\beta_j} \omega = 0$,
- (iii) すべての $j = 1, \dots, g$ について $\int_{\alpha_j} \omega \in \mathbb{R}$ かつ $\int_{\beta_j} \omega \in \mathbb{R}$,
 のいずれか 1 つでも成り立てば $\omega = 0$ である.

証明 一般に路 γ と微分 η について

$$\int_{\gamma} \bar{\eta} = \overline{\int_{\gamma} \eta}$$

であるから, これらは (1.49) からの直接の帰結である. \square

系 1.52 Ω', Ω'' は正則行列である.

証明 いま $[c_1 \cdots c_g]\Omega' = [0 \cdots 0]$ とする. これは $\omega = \sum_i c_i \omega_i$ のすべての α_j に関する周期が 0 であることを意味するが, このとき 1.51(i) により $\omega = 0$. ゆえに

$$[c_1 \cdots c_g] = [0 \cdots 0]$$

Ω'' についても 1.51(ii) により同様に示せる. \square

補題 1.53 任意に g 個の複素数 z_1, \dots, z_g が与へられたとき

$$(1.54) \quad \int_{\alpha_j} \omega = z_j \quad (\text{for all } j = 1, \dots, g)$$

となる第 1 種微分形式 ω が存在する.

証明 系 1.52 より, 写像 $\omega \mapsto \int_{\alpha_j} \omega$ は 2 つの \mathbb{C} 上の g 次元線形空間の同型であるからである. \square

定理 1.55 (Riemann の関係式)

- (1) $\Omega \begin{bmatrix} & 1_g \\ -1_g & \end{bmatrix}^t \Omega = O$.
- (2) $i \Omega \begin{bmatrix} & 1_g \\ -1_g & \end{bmatrix}^t \bar{\Omega}$ は正定値 Hermite 行列である.

証明 補題 1.47 の前半で ω, ω' を ω_j, ω_k にとれば

$$(1.56) \quad \Omega^t \Omega'' - \Omega''^t \Omega' = O$$

がわかる. つまり (1) を得る. 同様に

$$\omega = c_1 \omega_1 + \cdots + c_g \omega_g$$

とすると

$$i [c_1 \cdots c_g] [\Omega' \ \Omega''] \begin{bmatrix} & & & 1_g \\ & & & \\ & & & \\ -1_g & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{c}_1 \\ \vdots \\ \bar{c}_g \end{bmatrix}$$

が 1.47 の後半の左辺に他ならない. しかも, これが 0 となるのは $[c_1 \cdots c_g] = [0 \cdots 0]$ の時に限るのであるから $i \Omega \begin{bmatrix} & & & 1_g \\ & & & \\ & & & \\ -1_g & & & \end{bmatrix} {}^t \bar{\Omega}$ は正定値である. また, これは

$$= i(\Omega'' {}^t \bar{\Omega}' - \Omega' {}^t \bar{\Omega}'') = \overline{-i(\bar{\Omega}'' {}^t \Omega' - \bar{\Omega}' {}^t \Omega'')}$$

なので Hermite 行列である. ここまでの記号で

$$(1.57) \quad T = \Omega'^{-1} \Omega''$$

とおくと, 1.55 の主張は

$$(1.58) \quad {}^t T = T \text{ であり, } \text{Im } T \text{ は正定値な Hermite 行列である,}$$

と言ひ換へられる. 実際 (1.56) より

$$\begin{aligned} {}^t \Omega'' {}^t \Omega'^{-1} - \Omega'^{-1} \Omega'' &= O \\ \therefore {}^t (\Omega'^{-1} \Omega'') &= \Omega'^{-1} \Omega'' \\ \therefore {}^t T &= T \end{aligned}$$

であるし, Ω' は正則なので 1.55(2) より

$$\begin{aligned} \Omega'^{-1} \left(i \Omega \begin{bmatrix} & & & 1_g \\ & & & \\ & & & \\ -1_g & & & \end{bmatrix} {}^t \bar{\Omega} \right) \overline{{}^t \Omega'^{-1}} &= \Omega'^{-1} \left(i ({}^t \Omega' {}^t \bar{\Omega}'' - {}^t \Omega'' {}^t \bar{\Omega}') \right) \overline{{}^t \Omega'}^{-1} \\ &= i \left(\overline{{}^t \Omega'' {}^t \Omega'^{-1}} - \Omega'^{-1} {}^t \Omega'' \right) \\ &= i ({}^t \bar{T} - T) \\ &= i (\bar{T} - T) \\ &= 2 \text{Im } T \end{aligned}$$

も正定値 Hermite 行列である. □

いま, すぐ上で取った第 1 種微分形式の基底を取り換へて

$$(1.59) \quad {}^t [\hat{\omega}_1 \cdots \hat{\omega}_g] = \Omega'^{-1} {}^t [\omega_1 \cdots \omega_g]$$

とおけば

$$(1.60) \quad \left[\int_{\alpha_j} \hat{\omega}_i \right] = 1_g, \quad \left[\int_{\beta_j} \hat{\omega}_i \right] = T$$

となる. この様な微分形式のなす基底は 正規化されてゐる といはれる. これらのなす vector を

$$(1.61) \quad \hat{\omega} = {}^t [\hat{\omega}_1 \cdots \hat{\omega}_g]$$

と書く.

補題 1.62 周期行列 Ω を

$$\Omega = [\Omega_1 \cdots \Omega_{2g}]$$

と書くとき, $\Omega_1, \dots, \Omega_{2g}$ は \mathbb{R} 上 1 次独立である.

証明 $c = {}^t[c_1 \cdots c_{2g}] \in \mathbb{R}^{2g}$ について $\Omega c = \mathbf{0}$ とすると,

$$(1.63) \quad [1 \ T] c = \mathbf{0}$$

であり, よつて

$$[1 \ \bar{T}] c = \mathbf{0}$$

である. ゆゑに

$$i(\operatorname{Im} T) \begin{bmatrix} c_{g+1} \\ \vdots \\ c_{2g} \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

しかるに $\operatorname{Im}(T)$ は正定値なので, 特に正則であつて

$$c_{g+1} = \cdots = c_{2g} = 0.$$

これを (1.63) に代入すれば

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_g = 0$$

がわかる. □

練習 1.64 方程式 $y^2 = x^5 + 1$ で定義される代数曲線 C を考へる. C は無限遠点に 1 点が添加されたものとする. これにより C は完備非特異代数曲線²³となる. 従つて C は Riemann 面を定義する (1.30 を参照). これの上の正則な微分形式の基底として,

$$\omega_1 = \frac{dx}{2y}, \quad \omega_2 = \frac{xdx}{2y}$$

を取ることができることを示せ. さらに路 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ を適当に選び, modulus T の代表として

$$T = \begin{bmatrix} 1 - \zeta^4 & -\zeta^2 - \zeta^4 \\ -\zeta^2 - \zeta^4 & \zeta \end{bmatrix}$$

が取れることを示せ. 但し, $\zeta = e^{2\pi i/5}$ である.

1.4 正規化された Abel 微分とそれらの間の関係

ここでは, 正規化された微分形式なるものの定義をまとめておく.

²³非特異とは $f(x, y) = y^2 - (x^5 + 1)$ とおくとき, 偏微分係数が $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ となる点は存在しないこと. またこの曲線は射影曲線であることがわかるので, 完備である ([36]. pp.3.12-3.16).

補題—定義 1.65 先の Riemann 面 \mathcal{X} 上の 2 点 Q_1, Q_2 に対して $\hat{\tau}_{Q_1, Q_2}$ を Q_1, Q_2 以外のすべての点において正則な微分形式で

$$(1.66) \quad \text{ord}_{Q_1} \hat{\tau}_{Q_1, Q_2} = \text{ord}_{Q_2} \hat{\tau}_{Q_1, Q_2} = -1$$

かつ

$$(1.67) \quad \text{Res}_{Q_1} \hat{\tau}_{Q_1, Q_2} = 1, \quad \text{Res}_{Q_2} \hat{\tau}_{Q_1, Q_2} = -1$$

であり, すべての j について

$$(1.68) \quad \int_{\alpha_j} \hat{\tau}_{Q_1, Q_2} = 0$$

となるものとする²⁴. ここで ord , Res はそれぞれ (零点の) 位数, 留数を表す. この様な微分形式を 正規化された第 3 種微分形式 と呼ぶ. 上の条件を満たす微分形式が唯一つ存在する.

証明 実際, (1.66) と (1.67) を満たす第 3 種微分形式は, いつも適当な c_j によつて

$$\hat{\tau}_{P, Q} = dU_{P, Q} + \mathbf{i}^* dU_{P, Q} + \sum_{j=1}^g c_j \hat{\omega}_j$$

と書ける. ここに $U_{P, Q}$ は 1.18 で定義したものである. (1.59) の $\hat{\omega}_j$ により, c_j を条件 (1.68) が満たされる様に定めることができる. また, もしこの様な微分形式が 2 つ存在すれば, その差は第 1 種微分形式であるが, (1.68) の条件と 1.51(i) により, それは 0 である. \square

定義 1.69 $k \geq 2$ を与へられた自然数とする. 局所径数 t の与へられた点 $P \in \mathcal{X}$ に対して, 微分形式を P 以外のすべての点において正則で

$$\text{ord}_P \hat{\eta}_{P, t, k} = -k$$

かつ P における Laurent 展開が

$$(1.70) \quad \hat{\eta}_{P, t, k} = \left(-\frac{k-1}{t^k} + O(1) \right) dt$$

であり, $j = 1, \dots, g$ について

$$(1.71) \quad \int_{\alpha_j} \hat{\eta}_{P, t, k} = 0$$

となるものとする. 但し $O(1)$ は t について 0 次以上の項からなる冪級数を表す. これは例 1.20 の $\hat{\eta}_P^{(k)}$ ($k \geq 2$) から

$$\hat{\eta}_{P, t, k} = \eta_P^{(k)} + \sum_j c_j \omega_j$$

の形で作る. この様な $\hat{\eta}_{P, t, k}$ を 正規化された第 2 種微分形式 と呼ぶ. この様な微分形式も存在するとすれば, 唯一つであることが 1.51(i) よりわかる.

²⁴これは α_j をこれと homotope な路に置き換へると $2\pi i$ の整数倍が加はる.

今後は函数, 微分形式などは \mathcal{X} 上のものとも \mathcal{X}_0 上のものとも考へる. それをい
ちいち断らないが, 混乱はないものと思ふ.

定理 1.72 \mathcal{X} 上の局所径数 t の与へられた点 P , および 2 点 Q_1, Q_2 とに対して, 先
に取つてあつた路 α_i, β_j をこれらの 3 点を通過しない様に少しずらす. いま, P の近
傍の動点 P_t (値 t の定める点) とする. ($P_0 = P$ である). このとき \mathcal{X}_0 の上の積分に
ついて

$$(1.73) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_P^{P_t} \hat{\tau}_{Q_1, Q_2} \Big|_{t=0} &= \int_{Q_1}^{Q_2} \hat{\eta}_{P, t, 2}, \\ -2\pi i \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} \int_P^{P_t} \hat{\omega}_j &= \int_{\beta_j} \hat{\eta}_{P, t, k} \end{aligned}$$

が成り立つ.

証明 補題 1.38 において

$$\begin{aligned} m &= 1, P_1 = P, t_1 = t, \eta = \hat{\eta}_{P, t, 2} \\ n &= 2, Q_1, Q_2, \xi = \hat{\tau}_{Q_1, Q_2} \end{aligned}$$

とすれば, まづ η, ξ は正規化されてゐるので, (1.40) の最初の和は消える. また η の
 P での展開について $a_{-1}^{(1)} = 0$ なので, 第 2 項 (の和) の中の最初の項は消える. また
 $a_{-1}^{(1)} = 0$ ($nu \leq -3$) なので, 第 2 項の後部の和は $\nu = 0$ の所

$$a_{-2}^{(1)} a_0'^{(1)}$$

を除いて消える. η は Q_1, Q_2 で正則なので, 第 3 項の和は前部

$$\begin{aligned} -\left(b_{-1}^{(1)} \int_{I_1}^{Q_1} \eta + b_{-1}^{(2)} \int_{I_1}^{Q_2} \eta \right) &= -\left(\int_{I_1}^{Q_1} \eta - \int_{I_2}^{Q_2} \eta \right) \\ &= \int_{Q_1}^{Q_2} \hat{\eta}_{P, t, 2} \end{aligned}$$

を除いて消える. 一方

$$a_{-2}^{(1)} a_0'^{(1)} = -\frac{d}{dt} \int_P^{P_t} \hat{\tau}_{Q_1, Q_2} dt \Big|_{t=0}$$

より, 与式の前者を得る. 次に (1.40) において

$$\begin{aligned} m &= 1, P_1 = P, t_1 = t, \eta = \hat{\eta}_{P, t, k+1} \\ n &= 2, Q_1, Q_2, \xi = \hat{\omega}_j \end{aligned}$$

とおくと, (1.40) は

$$\frac{1}{2\pi i} \left(0 - \int_{\beta_j} \hat{\eta}_{P, t, k+1} \int_{\alpha_j} \hat{\omega}_j \right) + \left(0 + \frac{a_{-k}^{(1)} a_{k-2}^{(1)}}{k-1} \right) - \sum_{j=2}^2 (0 + 0) = 0$$

となるので,

$$\begin{aligned} \int_{\beta_j} \hat{\eta}_{P,t,k+1} &= 2\pi i a_{-k}^{(1)} a'_{k-2}{}^{(1)} \\ &= 2\pi i \frac{-(k-1)}{k-1} \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} \int_P^{\text{P}_t} \hat{\omega}_j \Big|_{t=0} \\ &= -2\pi i \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} \int_P^{\text{P}_t} \hat{\omega}_j \Big|_{t=0} \end{aligned}$$

を得て, (1.73) の後半を得る. \square

定理 1.74 \mathcal{X} 上の 4 点 P_1, P_2, Q_1, Q_2 について, すべての α_j をこれらの点を通らない様にずらしておく. このとき \mathcal{X}_0 上の積分に関して次が成り立つ.

$$(1.75) \quad \int_{P_1}^{\text{P}_2} \hat{\tau}_{Q_1, Q_2} = \int_{Q_1}^{\text{Q}_2} \hat{\tau}_{P_1, P_2},$$

$$(1.76) \quad 2\pi i \int_{P_1}^{\text{P}_2} \hat{\omega}_j = \int_{\beta_j} \hat{\tau}_{P_1, P_2}.$$

注意 1.77 (1.75) は 変数と径数の交換法則(exchange of variables and parameters) と呼ばれてゐる. これらは本講義録で頻繁に使はれる. 特に 1.75 により,

$$(1.78) \quad \lim_{Q_1 \rightarrow Q_2} \hat{\tau}_{Q_1, Q_2} = 0$$

がわかる.

証明 (1.75) は (1.40) で

$$m = n = 2, \quad \eta = \hat{\tau}_{Q_1, Q_2}, \quad \xi = \hat{\tau}_{P_1, P_2}$$

とすれば,

$$\begin{aligned} 0 + \sum_{i=1}^2 \left(a_{-1}^{(i)} \int_{I_1}^{\text{P}_i} \xi + 0 \right) - \sum_{i=1}^2 \left(b_{-1}^{(i)} \int_{I_1}^{\text{Q}_i} \eta + 0 \right) &= 0. \\ \therefore \left(\int_{I_1}^{\text{P}_1} - \int_{I_1}^{\text{P}_2} \right) \hat{\tau}_{Q_1, Q_2} - \left(\int_{I_1}^{\text{Q}_1} - \int_{I_1}^{\text{Q}_2} \right) \hat{\tau}_{P_1, P_2} &= 0. \end{aligned}$$

よつて (1.75) を得る. 次に (1.40) で

$$m = 2, \quad P_1, P_2, \quad n = 0, \quad \eta = \hat{\tau}_{P_1, P_2}, \quad \xi = \hat{\omega}_j$$

とすれば

$$\frac{1}{2\pi i} \left(0 - \int_{\beta_j} \hat{\tau}_{P_1, P_2} \int_{\alpha_j} \hat{\omega}_j \right) + \sum_{i=1}^2 \left(a_{-1}^{(i)} \int_{I_1}^{\text{P}_i} \hat{\omega}_j + 0 \right) + \sum_{i=1}^2 (0 + 0) = 0$$

となるので

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\beta_j} \hat{\tau}_{P_1, P_2} = \left(\int_{I_1}^{\text{P}_1} - \int_{I_1}^{\text{P}_2} \right) \hat{\omega}_j = \int_{P_1}^{\text{P}_2} \hat{\omega}_j$$

を得る. \square

2 Riemann-Roch の定理と Weierstraß の空隙値

2.1 Riemann-Roch の定理

Riemann 面 \mathcal{X} 上の点の形式的な有限和

$$D = \sum_{P \in \mathcal{X}} n_P P \quad (n_P \in \mathbb{Z}, \text{有限個の } P \text{ 以外では } n_P = 0)$$

を \mathcal{X} の 因子 といひ, これらのなす Abel 群を 因子群 と呼ぶ. 上の因子 D について

$$\deg D = \sum_{P \in \mathcal{X}} n_P$$

と書き, これを D の次数と呼ぶ. すべての n_P が正または 0 なる因子 D を 整因子 (integral divisor) といひ, $D \geq 0$ で表す. いま \mathcal{X} 上の函数 f と各点 P について f が P での零点と極の位数 (極については負の整数) を $\text{ord}_P f$ と書くとき

$$(f) = \sum_{P \in \mathcal{X}} (\text{ord}_P f) \cdot P$$

と書いて, これを f の因子と呼ぶ. さらに ω が \mathcal{X} 上の微分形式であるとき, 各点 $P \in \mathcal{X}$ における局所径数 t_P を取つて, P の近傍で $\omega = g_P(t_P) dt_P$ (g_P は函数) と書くとき 微分形式の因子 を

$$(\omega) = \sum_{P \in \mathcal{X}} (\text{ord}_P g_P) \cdot P$$

で定義する. これは t_P の取り方に依らない. 2つの因子 D_1 と D_2 に対して, その差 $D_1 - D_2$ がある函数の因子に一致するとき, D_1 と D_2 は 線形同値 (linearly equivalent) といひ, $D_1 \sim D_2$ で表す. どんな 2つの微分形式の因子も有理同値であるから, 微分形式の因子の全体がなす同値類を 標準類 (canonical class) と呼び, 標準類あるいはその代表を

$$K_{\mathcal{X}}$$

で表すことにする. 函数の因子に線形同値な因子の全体は Abel 群をなすので, 線形同値に関する因子群の剰余類群を考へることができる. それを 因子類群 または Picard 群 と呼び

$$\text{Pic}(\mathcal{X})$$

と記す. この中で, 次数 0 の因子のなす部分群を $\text{Pic}^0(\mathcal{X})$ と書く.

定義 2.1 因子 D に対して $(f) + D$ が整因子となる様な函数 f の全体と因子 0 のなす \mathbb{C} 上の線形空間を $L(D)$ と記す. Cohomology の記号では

$$L(D) = H^0(\mathcal{X}, \mathcal{O}(D)).$$

また, $(\eta) + D$ が整因子となる様な微分形式 η 全体と因子 0 のなす \mathbb{C} 上の線形空間を $\Omega(D)$ と記す. 特に \mathcal{X} 上で至るところ正則な微分形式の空間を単に Ω と書く. また, 正則な微分形式を断面とする層を roman 体で Ω と表すことにする. 従つて

$$\Omega(D) = H^0(\mathcal{X}, \Omega(D)).$$

このとき, 定数でない函数 f を固定した上で, 写像

$$L(K_{\mathcal{X}} + D) \ni g \mapsto gdf \in \Omega(D)$$

は同型を与へるので

$$(2.2) \quad \dim L(K_{\mathcal{X}} + D) = \dim \Omega(D)$$

がわかる.

命題 2.3 因子 D_1 と D_2 が線形同値ならば

$$\dim L(D_1) = \dim L(D_2)$$

である.

証明 $D_2 = D_1 + (f)$ のとき $(g) + D_1$ が整因子ならば

$$(gf^{-1}) + D_2 = (g) - (f) + D_2 = (g) + D_1$$

は整なので

$$L(D_1) \ni g \mapsto gf^{-1} \in L(D_2)$$

は vector 空間の準同型である. これの逆写像は $h \mapsto hf$ で与へられるから, 同型写像である. \square

定理 2.4 (Riemann-Roch の定理) 任意の因子 D について

$$\dim L(D) = \deg D - g + 1 + \dim L(K_{\mathcal{X}} - D)$$

が成り立つ. ($\dim L(K_{\mathcal{X}} - D) = \dim \Omega(-D)$ に注意)

証明 5つの step に分けて証明する.

Step 1. D が整因子のときに示す. いま

$$D = r_1 P_1 + \cdots + r_n P_n \quad (r_j \geq 0, \in \mathbb{Z})$$

とする. ここで P_1, \dots, P_n は相異なる点である. このとき $\Omega(-D)$ を記述する. ω を第 1 種微分形式として t を P における局所径数とすると $t(P_t) = t, t(P) = 0$

$$\delta^k \omega(P) = \frac{1}{(k+1)!} \frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}} \int_P^{\omega|_{t=0}} \omega \Big|_{t=0}$$

とおく. 正規化された第 1 種微分形式の基底

$$\hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2, \dots, \hat{\omega}_g$$

と因子 D に対して $g \times \deg(D)$ 型行列 $M(D)$ をその $(j, r_1 + \cdots + r_{k-1} + \ell)$ 成分が

$$(2.5) \quad \delta^\ell \hat{\omega}_j(P_k) \quad (0 \leq \ell \leq r_k - 1, 1 \leq k \leq n)$$

となるものとして定義する:

$$(2.6) \quad M(D) = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} \delta\hat{\omega}_1(P_1) & \cdots & \delta^{r_1-1}\hat{\omega}_1(P_1) & \delta\hat{\omega}_1(P_1) & \cdots & \delta^{r_2-1}\hat{\omega}_1(P_1) & \cdots & \delta\hat{\omega}_1(P_1) & \cdots & \delta^{r_n-1}\hat{\omega}_1(P_1) \\ \delta\hat{\omega}_2(P_1) & \cdots & \delta^{r_1-1}\hat{\omega}_2(P_1) & \delta\hat{\omega}_2(P_1) & \cdots & \delta^{r_2-1}\hat{\omega}_2(P_1) & \cdots & \delta\hat{\omega}_2(P_1) & \cdots & \delta^{r_n-1}\hat{\omega}_2(P_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta\hat{\omega}_g(P_1) & \cdots & \delta^{r_1-1}\hat{\omega}_g(P_1) & \delta\hat{\omega}_g(P_1) & \cdots & \delta^{r_2-1}\hat{\omega}_g(P_1) & \cdots & \delta\hat{\omega}_g(P_1) & \cdots & \delta^{r_n-1}\hat{\omega}_g(P_1) \end{array} \right].$$

このとき

$$\omega = c_1 \hat{\omega}_1 + \cdots + c_g \hat{\omega}_g$$

が $\Omega(-D)$ の元であることは $c = [c_1 \cdots c_g]$ が連立方程式

$$cM(D) = \mathbf{0}$$

の解であることと同値である. したがって $\dim \Omega(-D)$ はその解空間の次元に等しく,

$$(2.7) \quad \dim \Omega(-D) = g - \text{rank } M(D).$$

次に $f \in L(D)$ とすると df は完全微分形式なので, 特に α_j 周期はどれも 0 であつて

$$df = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^{r_k} a_{k\ell} \hat{\eta}_{P_k, t_k, \ell+1}$$

と一意的に表される. これの β_j 周期も 0 なので

$$\sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^{r_k} a_{k\ell} \int_{\beta_j} \hat{\eta}_{P_k, t_k, \ell+1} = 0.$$

ここで (1.73) の第 2 式から

$$\sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^{r_k} a_{k\ell} \delta^\ell \hat{\omega}_j = 0.$$

つまり

$$(2.8) \quad M(\delta) \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{1r_1} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{2r_2} \\ \vdots \\ a_{n1} \\ \vdots \\ a_{nr_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

を得る. 逆に (2.8) を満たす任意の複素数 $a_{k\ell}$ をとれば 2.16 の右辺は第 2 種微分形式であつて, すべての周期が 0, 従つて, ある函数 f により df と書かれる. しかも, 明ら

かに $f \in L(D)$ である. いま, $f \in L(D)$ に vector $[a_{k\ell}]_{\deg D \times 1} \in \mathbb{C}^{\deg D}$ を対応させる写像を φ とすると $\varphi(L(D))$ は (2.8) の解空間と一致するのであるから

$$\dim \varphi(L(D)) = \deg D - \text{rank} M(D).$$

$\text{Ker} \varphi$ は定数より成るから,

$$(2.9) \quad \dim L(D) = \dim \varphi(L(D)) + 1 = \deg D - \text{rank} M(D) + 1.$$

(2.7) と (2.9) を合せると

$$\dim L(D) = \deg D - g + 1 + \dim \Omega(-D)$$

を得る. 以上が Step 1.

Step 2 $\deg K_{\mathcal{X}} = 2g - 2$ を示す. $g = 0$ なら $(dz) = -2 \cdot \infty$ より正しい. そこで $g > 0$ とする. このとき $\dim \Omega(0) = g > 0$ なので $\omega \in \Omega(0)$ をとると (ω) は整因子なので Step 1 より

$$\dim L((\omega)) = \deg(\omega) - g + 1 + \dim \Omega(-(\omega))$$

であるが (2.2), (1.17) を使つて

$$\begin{aligned} \dim L((\omega)) &= \dim L(K_{\mathcal{X}}) = \dim \Omega(0) = g, \\ \Omega(-(\omega)) &= \dim \Omega(-K_{\mathcal{X}}) = \dim L(0) = 1 \end{aligned}$$

なので

$$g = \deg(\omega) - g + 1 + 1$$

つまり

$$(2.10) \quad \deg(\omega) = 2g - 2$$

Step 3 もし D がある整因子 D_1 に線形同値であれば

$$\begin{aligned} \dim L(D) &= \dim L(D_1), \\ \deg D &= \deg D_1, \\ \dim L(K_{\mathcal{X}} - D) &= \dim L(K_{\mathcal{X}} - D_1) \end{aligned}$$

ゆゑ, Step 1 より正しい. もし $K_{\mathcal{X}} - D$ がある整因子 D_2 に線形同値であれば

$$\begin{aligned} \dim L(D) &= \dim L(K_{\mathcal{X}} - D_2), \\ \deg D &= \deg K_{\mathcal{X}} - \deg D_2 = 2g - 2 - \deg D_2 \quad (\because \text{Step 2}) \\ \dim L(K_{\mathcal{X}} - D) &= \dim L(D_2) \end{aligned}$$

なので示すべきは

$$\dim L(K_{\mathcal{X}} - D_2) = (2g - 2) - \deg D_2 - g + 1 = \dim L(K_{\mathcal{X}} - D_2)$$

であるが, これは Step 1 により正しい.

Step 4 $\dim L(D) > 0$ ならば $0 \neq f \in L(D)$ について $(f) + D$ は整因子なので因子 D は整因子と線形同値となり, 与式は成り立つ. 次に $\dim L(K_{\mathcal{X}} - D) > 0$ ならば同様にして, $K_{\mathcal{X}} - D$ は整因子と線形同値なので良い.

Step 5 以上により D も $K_{\mathcal{X}} - D$ も整因子と線形同値でないとすれば, $\dim L(D) = \dim L(K_{\mathcal{X}} - D) = 0$ となることがわかったから, 示すべきは, その様な D について

$$(2.11) \quad \deg D = g - 1$$

となることである. いま $D = D_1 + D_2$ (D_1 と D_2 は “互いに素” な整因子) と書いておき, (2.11) を示す. まづ

$$\begin{aligned} \dim L(D_1) &\geq \deg D_2 + \deg D - g + 1 \quad (\because \text{Step 1}) \\ &= \deg D_2 + \deg D - g + 1 \end{aligned}$$

ここで, もし

$$\deg D \geq g$$

だとすると

$$(2.12) \quad \dim L(D_1) \geq \deg D_2 + 1$$

となるので $0 \neq f \in L(D_1)$ で丁度 D_2 に零点を持つものがとれる. なぜなら (Step 1 の様にして)

$$\delta^k f(P) = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dt^k} f(P_k) \Big|_{t=0}$$

とおいて

$$D_2 = r_1 P_1 + \cdots + r_n P_n$$

のとき

$$(2.13) \quad M(D) = \begin{bmatrix} \delta^1 f_1(P_1) & \cdots & \delta^{r_1} f_1(P_1) & \delta^1 f_1(P_2) & \cdots & \delta^{r_2} f_1(P_2) & \cdots \\ \delta^1 f_2(P_1) & \cdots & \delta^{r_1} f_2(P_1) & \delta^1 f_2(P_2) & \cdots & \delta^{r_2} f_2(P_2) & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ \delta^1 f_m(P_1) & \cdots & \delta^{r_1} f_m(P_1) & \delta^1 f_m(P_2) & \cdots & \delta^{r_2} f_m(P_2) & \cdots \end{bmatrix}$$

とおく. 但し $L(D_1)$ の基底を f_1, f_2, \dots, f_m としてゐる. いま

$$f = c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_m f_m$$

の係数 $c = [c_1 \ c_2 \ \cdots \ c_m]$ は

$$c M(D) = \mathbf{0}$$

の解であるが $M(D)$ は $m \times \deg D_2$ 型で

$$m \geq \deg D_2$$

なので, 非自明な解を持つからである. かくして $f \in L(D_1 - D_2) = L(D)$ となり,

$$\dim L(D) > 0$$

であるが, これは仮定に矛盾する. よつて

$$(2.14) \quad \deg D \leq g - 1.$$

D を $K_{\mathcal{X}} - D$ に取り替へて議論すると

$$\deg(K_{\mathcal{X}} - D) \leq g - 1$$

がわかる. $\deg D \geq 2g - 2$ なので

$$\deg D \geq g - 1$$

よつて

$$\deg D = g - 1$$

が示された. □

練習 2.15 自然数 $m \geq 1$ について, 各 $P \in \mathcal{X}$ に対し

$$\dim \Omega(mP) - \dim \Omega((m-1)P) = 1$$

を示せ.

再び次が示される.

系 2.16 $L(K_{\mathcal{X}})$ の次元は

$$\dim L(K_{\mathcal{X}}) = g$$

である.

証明 $D = 0$ とすれば

$$1 = 0 - g + 1 + \dim L(K_{\mathcal{X}})$$

である. □

系 2.17 (1) もし $\deg D < 0$ であれば, $\dim L(D) = 0$.

(2) もし $\deg D > 2g - 2$ であれば, $\dim L(K_{\mathcal{X}} - D) = 0$.

証明 (1) $0 \neq f \in L(D)$ とすると $0 = \deg f \geq -\deg D > 0$ となり矛盾である.

(2) 定理の証明の Step 2 で示した通り $\deg K_{\mathcal{X}} = 2g - 2$ なので, $\deg(K_{\mathcal{X}} - D) < 0$ となるから, (1) より結論を得る. □

系 2.18 もし $\deg D > 0$ であれば,

$$\dim \Omega(-D) = \dim L(K_{\mathcal{X}} + D) = \deg D - 1 + g.$$

証明 系 2.17 と Riemann-Roch の定理そのものから直ちにわかる. □

2.2 交叉形式と一般 Riemann 関係式

等式 (1.39) の左辺は $H_1(\mathcal{X}, \mathbb{Z})$ の交叉形式を $H_1(\mathcal{X}, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} = H_1(\mathcal{X}, \mathbb{C})$ に拡張し, それを, 以下の方法で自然に $H^1(\mathcal{X}, \mathbb{C})$ に移したものに他ならない²⁵. この小節では, このことを説明する. 但し, 層や homology 代数の初歩的な知識を仮定する. 基点 I を持つ Riemann 面 \mathcal{X} 上について, $\mathcal{O}(kI)$ で I に高々 k 位の極を持ち, その他の点では正則な函数を断面とする層を表し, $\mathcal{O}(\infty I)$ で I に任意の位数の極を持ち, その他の点では正則な函数を断面とする層を表す. 完全列

$$(2.19) \quad 0 \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{O}(\infty I) \xrightarrow{d} d\mathcal{O}(\infty I) \rightarrow 0$$

から完全列

$$\begin{aligned} H^0(\mathcal{X}, \mathbb{C}) \rightarrow H^0(\mathcal{X}, \mathcal{O}(\infty I)) \rightarrow H^0(\mathcal{X}, d\mathcal{O}(\infty I)) \xrightarrow{d} H^0(\mathcal{X}, d\mathcal{O}(\infty I)) \\ \rightarrow H^1(\mathcal{X}, \mathbb{C}) \rightarrow H^1(\mathcal{X}, \mathcal{O}(\infty I)) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

を得るが, Kodaira-Serre duality より

$$H^1(\mathcal{X}, \mathcal{O}(kI)) \cong H^0(\mathcal{X}, \Omega(-kI))$$

であることと,

$$H^1(\mathcal{X}, \mathcal{O}(\infty I)) = H^0(\mathcal{X}, \varinjlim_k \mathcal{O}(kI)) = \varinjlim_k H^1(\mathcal{X}, \mathcal{O}(kI))$$

および, $k > 2g - 2$ なら

$$H^0(\mathcal{X}, \Omega(-kI)) = 0$$

であることにより, \mathbb{C} 上の vector 空間の同型

$$(2.20) \quad H^1(\mathcal{X}, \mathbb{C}) \simeq \frac{H^0(\mathcal{X}, d\mathcal{O}(\infty I))}{dH^0(\mathcal{X}, \mathcal{O}(\infty I))}$$

を得る. つまり $H^1(\mathcal{X}, \mathbb{C})$ は, 完全微分形式の空間を法とした局所的に閉な微分形式, 即ち, 第 2 種微分形式の空間に同型なのである. 別の述べ方をすれば, 右辺分子の高々 I にのみ極を持つ第 2 種微分の空間 $H^0(\mathcal{X}, d\mathcal{O}(\infty I))$ を, 分母の \mathcal{X} 上の有理型函数の微分の空間で modulo したものである. ここで, 2 つ程補題を述べる.

補題 2.21 上の空間は有限次元で

$$(2.22) \quad \dim_{\mathbb{C}} \frac{H^0(\mathcal{X}, d\mathcal{O}(\infty I))}{dH^0(\mathcal{X}, \mathcal{O}(\infty I))} = 2g$$

である.

²⁵ この節の多くは中屋敷氏のご教示による.

証明 少し一般化した形で証明する. この証明は [27], pp.29-31 Theorem 8.1 と Theorem 8.2 によつてゐる. 以下 \dim は \mathbb{C} 上の次元を表す.

いま P_1, P_2, \dots, P_r を \mathcal{X} 上の r 個の相異なる点とし, N を $(N-1)r > 2g-2$ となる整数とする. ここで, 任意の完全微分 df について

$$df \in H^0\left(\mathcal{X}, d\mathcal{O}\left((N-1)\sum_{i=1}^r P_i\right)\right) \iff f \in H^0\left(\mathcal{X}, \mathcal{O}\left((N-1)\sum_{i=1}^r P_i\right)\right)$$

であることに注意すると,

$$(2.23) \quad \begin{aligned} & H^0\left(\mathcal{X}, d\mathcal{O}\left(\infty\sum_i P_i\right)\right) / dH^0\left(\mathcal{X}, \mathcal{O}\left(\infty\sum_i P_i\right)\right) \\ &= \bigcup_N H^0\left(\mathcal{X}, d\mathcal{O}\left((N-1)\sum_{i=1}^r P_i\right)\right) / dH^0\left(\mathcal{X}, \mathcal{O}\left((N-1)\sum_{i=1}^r P_i\right)\right). \end{aligned}$$

ここで N は $(N-1)r > 2g-2$ なるすべての整数を走る. さて, この補題の証明のためには, (2.23) の右辺に現れる各商空間の次元が $2g$ であることを示せばよい. まづ, $df = 0$ ならば f は定数函数なので,

$$\dim dH^0\left(\mathcal{X}, \mathcal{O}\left((N-1)\sum_{i=1}^r P_i\right)\right) = \dim L\left((N-1)\sum_{i=1}^r P_i\right) - 1.$$

一方,

$$H^0(\mathcal{X}, \Omega) \cap dH^0\left(\mathcal{X}, \mathcal{O}\left((N-1)\sum_{i=1}^r P_i\right)\right) = \{0\}.$$

なぜなら, f がどこかに極を持てば, df もそこに極を持つからである. また, 系 2.18 から

$$\dim \Omega\left(\sum_i P_i\right) = \dim L\left(K_{\mathcal{X}} + \sum_i P_i\right) = r - 1 + g$$

である. ここで $\Omega\left(N\sum_i P_i\right)$ は第 3 種微分の空間 $\Omega\left(\sum_i P_i\right)$ (従つて第 1 種微分の空間 Ω を) も含んでゐることに注意しながら, 以上をまとめ, Riemann-Roch の定理 (2.4) を使へば,

$$\begin{aligned} & \dim H^0\left(\mathcal{X}, d\mathcal{O}\left((N-1)\sum_{i=1}^r P_i\right)\right) / dH^0\left(\mathcal{X}, \mathcal{O}\left((N-1)\sum_{i=1}^r P_i\right)\right) \\ &= \left\{ \dim H^0\left(\mathcal{X}, \Omega\left(N\sum_{i=1}^r P_i\right)\right) - \dim H^0\left(\mathcal{X}, \Omega\left(\sum_{i=1}^r P_i\right)\right) + \dim \Omega \right\} \\ &\quad - \left\{ \dim H^0\left(\mathcal{X}, \mathcal{O}\left((N-1)\sum_{i=1}^r P_i\right)\right) - 1 \right\} \\ &= \left\{ \dim \Omega\left(N\sum_{i=1}^r P_i\right) - \dim \Omega\left(\sum_i P_i\right) + g \right\} - \dim L\left((N-1)\sum_{i=1}^r P_i\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ \dim L \left(K_{\mathbb{C}} + N \sum_{i=1}^r P_i \right) - \dim \Omega \left(\sum_i P_i \right) + g \right\} \\
&\quad - \dim L \left((N-1) \sum_{i=1}^r P_i \right) + 1 \\
&= \{(2g-2 + Nr + 1 - g) - (r-1 + g) + g\} - ((N-1)r - 1 + g) + 1 \\
&= 2g.
\end{aligned}$$

となるので, (2.23) の右辺の各商空間が $2g$ 次元であることがわかり, 左辺も $2g$ 次元であることがわかつて証明が終る. \square

上で得られた副産物を補題として, まとめておく

補題 2.24 いま P_1, P_2, \dots, P_r を \mathcal{X} 上の r 個の相異なる点とし, N を $(N-1)r > 2g-2$ となる整数とする. このとき

$$\dim H^0 \left(\mathcal{X}, d\mathcal{O} \left((N-1) \sum_{i=1}^r P_i \right) \right) / dH^0 \left(\mathcal{X}, \mathcal{O} \left((N-1) \sum_{i=1}^r P_i \right) \right) = 2g.$$

次に, 証明した (2.23) を用いて次を示す.

補題 2.25 Riemann 面 \mathcal{X} 上の (1.22) を満たす閉路 $\{\alpha_j, \beta_j\}$ についての線形写像

$$\begin{aligned}
(2.26) \quad & \frac{H^0(\mathcal{X}, d\mathcal{O}(\infty I))}{dH^0(\mathcal{X}, \mathcal{O}(\infty I))} \longrightarrow \mathbb{C}^{2g} \\
& \eta \mapsto \left(\int_{\alpha_1} \eta, \dots, \int_{\alpha_g} \eta, \int_{\beta_1} \eta, \dots, \int_{\beta_g} \eta \right)
\end{aligned}$$

は全単射である.

証明 補題 2.21 により, この写像の核が $\{0\}$ である事を示せばよい. いま $\eta \in H^0(\mathcal{X}, d\mathcal{O}(\infty I))$ に対し,

$$(2.27) \quad \int_{\alpha_j} \eta = \int_{\beta_j} \eta = 0 \quad \text{for all } j = 1, \dots, g$$

であるとする, 各点 $P \in \mathcal{X}$ に対し $\int_1^P \eta$ は積分路の取り方に依らずに定まる. これにより函数

$$H(P) = \int_1^P \eta$$

が定まるが, これはもちろん \mathcal{X} 上の有理型函数である. つまり

$$\eta(P) = dH(P)$$

は完全微分である. \square

$H_1(\mathcal{X}, \mathbb{C}) = H_1(\mathcal{X}, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C}$ とおくと, 非退化 pairing

$$\begin{aligned}
(2.28) \quad & H^1(\mathcal{X}, \mathbb{C}) \times H_1(\mathcal{X}, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C} \\
& (\eta, \gamma) \mapsto \int_{\gamma} \eta
\end{aligned}$$

により

$$(2.29) \quad H_1(\mathcal{X}, \mathbb{C}) \simeq H^1(\mathcal{X}, \mathbb{C})^\vee$$

と思ふ事ができる. この右辺の \vee は Pontryagin 双対を取ることを意味する. 次に $\omega, \eta \in H^0(\mathcal{X}, d\mathcal{O}(\infty I))$ に対して

$$(2.30) \quad \omega \star \eta = \int_{\partial \mathcal{X}^\circ} \left(\int_I^Q \omega \right) \eta(Q) = 2\pi i \sum_{Q \in \mathcal{X}} \text{Res} \left(\left(\int_I^Q \omega \right) \eta(Q) \right)$$

と定めると, これは (1.39) の左辺そのものなので, ω か η のどちらかが完全微分形式であれば消え, $H^1(\mathcal{X}, \mathbb{C}) \times H^1(\mathcal{X}, \mathbb{C})$ 上の双線型形式と思ふことができる. また反対称で非退化であることもわかる. 実際, 反対称である事は明らかである. 非退化であることを示さう. まづ 2.25 により, 各 $1 \leq j \leq g$ について,

$$\int_{\alpha_i} \eta_j = \delta_{ij}, \quad \int_{\beta_i} \eta_j = 0$$

あるいは

$$\int_{\alpha_i} \eta'_j = 0, \quad \int_{\beta_i} \eta'_j = \delta_{ij}$$

となる η_j と η'_j が存在する. これと (1.39) とから, もし, 全ての $\eta \in H^0(\mathcal{X}, d\mathcal{O}(\infty I))$ について $\eta \cdot \xi = 0$ ならば

$$\int_{\alpha_i} \xi = \int_{\beta_i} \xi = 0 \quad \text{for any } 1 \leq i \leq g$$

であることがわかる. ゆえに 2.25 により ξ は完全微分である. 以上を再記すると

$$(2.31) \quad \begin{aligned} H^1(\mathcal{X}, \mathbb{C}) \times H^1(\mathcal{X}, \mathbb{C}) &\rightarrow \mathbb{C} \\ (\omega, \eta) &\mapsto \omega \star \eta \end{aligned}$$

は非退化, 反対称な双線型形式である. これにより $H^1(\mathcal{X}, \mathbb{C}) \simeq H^1(\mathcal{X}, \mathbb{C})^\vee$ を得る.

上の2つを合せて $H^1(\mathcal{X}, \mathbb{C})$ と $H_1(\mathcal{X}, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C}$ を同一視する. この状況で, $H_1(\mathcal{X}, \mathbb{Z})$ の通常の交叉形式は $H_1(\mathcal{X}, \mathbb{C})$ の交叉形式に係数拡大で拡張するとき, この同一視により, その交叉形式が上の双線形形式 (2.31) に一致することが次の様にしてわかる. いま, $\alpha, \beta \in H_1(\mathcal{X}, \mathbb{C})$ を取り, この同一視で

$$\omega = \alpha, \quad \eta = \beta$$

とする. 即ち

$$\begin{aligned} \omega \star \eta' &= \int_{\alpha} \eta' \quad \text{for } \forall \eta', \\ \eta \star \omega' &= \int_{\beta} \omega' \quad \text{for } \forall \omega' \end{aligned}$$

であるとする. ここで, 標準 homology 基底 $\{\alpha_j, \beta_j\}$ (参照 (1.22)) を取つて

$$\alpha = \sum_{j=1}^g (m_j \alpha_j + n_j \beta_j), \quad \beta = \sum_{j=1}^g (m'_j \alpha_j + n'_j \beta_j)$$

とすると α と β の交叉数 $\alpha \cdot \beta$ は (1.35) より

$$(2.32) \quad \alpha \cdot \beta = \sum_{i=1}^g (m_i n'_i - m'_i n_i)$$

で与えられる. ここで $\{\alpha_j, \beta_j\}$ の双対基を $\{\zeta_j, \xi_j\}$ とする. 即ち,

$$\zeta_j, \xi_j \in H^0(\mathcal{X}, d\mathcal{O}(\infty I))$$

で,

$$\int_{\alpha_j} \zeta_i = \delta_{ij}, \quad \int_{\beta_j} \zeta_i = 0, \quad \int_{\alpha_j} \xi_i = 0, \quad \int_{\beta_j} \xi_i = \delta_{ij}$$

を満たすものである. Riemann の関係式 (1.39) の η, ξ を ζ_i, ξ_i と取れば

$$m_i = - \int_{\beta_i} \omega, \quad n_i = \int_{\alpha_i} \omega$$

を得る. 同様にして

$$m'_i = - \int_{\beta_i} \eta, \quad n'_i = \int_{\alpha_i} \eta$$

もわかる. よつて (2.32) から

$$\alpha \cdot \beta = \sum_{i=1}^g \left(- \int_{\beta_i} \omega \int_{\alpha_i} \eta + \int_{\alpha_i} \omega \int_{\beta_i} \eta \right) = \omega \star \eta.$$

ここで, 自然な同型²⁶

$$H^1(\mathcal{X}, \mathbb{Z}) = \text{Hom}(H_1(\mathcal{X}, \mathbb{Z}), \mathbb{Z})$$

(あるいは $H^1(\mathcal{X}, 2\pi i\mathbb{Z}) = \text{Hom}(H_1(\mathcal{X}, \mathbb{Z}), 2\pi i\mathbb{Z})$)

と, 交叉形式の定める非退化で反対称な paring

$$H_1(\mathcal{X}, \mathbb{Z}) \times H_1(\mathcal{X}, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$(\alpha, \beta) \mapsto \alpha \cdot \beta$$

から得られる同型

$$\text{Hom}(H_1(\mathcal{X}, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) = H_1(\mathcal{X}, \mathbb{Z})$$

を繋いでみると, 上の同一視では $H_1(\mathcal{X}, \mathbb{Z})$ の像が $H^1(\mathcal{X}, \mathbb{Z})$ (あるいは $H^1(\mathcal{X}, 2\pi i\mathbb{Z})$) となつてゐる²⁷.

²⁶[57], p.33 の系.

²⁷ある代数曲線の属 (5.1 節の平面三浦曲線) については, その Riemann 面について $H^1(\mathcal{X}, \mathbb{C})$ の symplectic 基底 ω_j, η_j を第 1 種微分の空間の基底を含む様に元の代数曲線の定義体 (環) 上の代数的な表示で具体的に与へることができる. 超楕円曲線の場合には (5.20) の ω_j と (5.61) の η_j がそれに他ならない. 但し ω_j, η_j は α_j, β_j の像ではなく, これらは, 一般には $H^1(\mathcal{X}, \mathbb{Z})$ (あるいは $H^1(\mathcal{X}, 2\pi i\mathbb{Z})$) に属してゐない ($\int_{\alpha_i} \omega_j, \int_{\beta_i} \omega_j, \int_{\alpha_i} \eta_j, \int_{\beta_i} \eta_j \notin \mathbb{Z}$ ゆゑ).

2.3 Weierstraß 点

ここでは Riemann 面上の各点において函数が持ち得る極の位数について述べる.

定理 2.33 P を Riemann 面 \mathcal{X} の点とするととき, \mathcal{X} 上に P においてのみ極を有する様な函数が存在する. しかも \mathcal{X} の種数を g とすれば, g 個の正の整数 n_1, n_2, \dots, n_g を除けば他の任意の正の整数 n については, P において丁度 n 位の極を有する函数が存在する.

証明 ²⁸ Riemann-Roch の定理 2.4 により任意の整数 $n > 0$ に対し

$$\begin{aligned} \dim L(nP) &= \deg(nP) - g + 1 + \dim L(K_{\mathcal{X}} - nP) \\ &= n - g + 1 + \dim L(K_{\mathcal{X}} - nP). \end{aligned}$$

よつて,

$$\begin{aligned} &(\dim L(nP) - \dim L((n-1)P)) \\ &\quad - (\dim L(K_{\mathcal{X}} - (n-1)P) - \dim L(K_{\mathcal{X}} - nP)) = 1. \end{aligned}$$

ここで $L(nP) \supset L((n-1)P)$, $L(K_{\mathcal{X}} - (n-1)P) \supset L(K_{\mathcal{X}} - nP)$ ゆゑ, $\dim L(nP) - \dim L((n-1)P)$ も $\dim L(K_{\mathcal{X}} - (n-1)P) - \dim L(K_{\mathcal{X}} - nP)$ も負でない整数である. (1.17) または (2.16) と (2.4) から, $\dim L(nP) - \dim L((n-1)P)$ は 0 か 1 である. これが 1 であれば $L(nP)$ に属し $L((n-1)P)$ に属さない函数が存在するから, それを φ とすれば φ は P にのみ n 位の極を有する函数である. さて, 上のことから

$$\begin{aligned} 1 = \dim L(0) &\leq \dim L(P) \leq \dim L(2P) \leq \dots \\ &\dots \leq \dim L((n-1)P) \leq \dim L(nP) \leq \dots \end{aligned}$$

において, 隣合ふ 2 つ次元の差は 0 または 1 であるが, $n > 2g - 2$ とすれば $\deg(K_{\mathcal{X}} - nP) < 0$ で, $\psi \in L(K_{\mathcal{X}} - nP)$ なる元は ψ 以外には存在しないから $\dim L(K_{\mathcal{X}} - nP) = 0$. よつて

$$\dim L(nP) = n - g + 1.$$

ゆゑに $n > 2g - 2$ の時には差は常に 1 となる. 一方 $\dim L((2g-1)P) = g$ であるから $\dim L(0) = 1$ から始まつて $\dim L((2g-1)P) = g$ に達する迄の間に $\dim L((n-1)P) = \dim L(nP)$ となる n が丁度 g 回なければならぬ. これを n_1, n_2, \dots, n_g とすればよい. \square

定義 2.34 上の定理 2.33 の数列 n_1, n_2, \dots, n_g を点 P における Weierstraß 列 といひ, 各 n_j を P における 空隙値 といふ. Riemann 面 \mathcal{X} の種数が g のとき, Weierstraß 列が $1, 2, \dots, g$ でない点 P を Weierstraß 点 と呼ぶ.

Weierstrass 点の例については例 5.7 を見よ. また, 以下の様に Weierstraß 点の数は有限であることが Hurwitz により示されてゐる. 証明は [60], p.147, 定理 5.21 を参照されたい.

²⁸[59], p.108 による.

定理 2.35 (Hurwitz) 種数 g の Riemann 面の Weierstraß 点の個数を N とすれば

$$2(g+1) \leq N \leq (g-1)g(g+1)$$

である.

3 Abel-Jacobi の定理

3.1 Jacobi 多様体

いま $\Omega = [\Omega' \ \Omega''] = [\Omega_1 \ \cdots \ \Omega_{2g}]$ について

$$\Lambda = \mathbb{Z}\Omega_1 + \mathbb{Z}\Omega_2 + \cdots + \mathbb{Z}\Omega_{2g} \ (\subset \mathbb{C}^g)$$

とおくと 1.62 により Λ は \mathbb{C}^g の格子である. つまり Λ は \mathbb{Z} 上の階数 $2g$ の加群で

$$\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} = \mathbb{C}^g$$

となる. 同様に $[1_g \ T] = [e_1 \ \cdots \ e_g \ T_1 \ \cdots \ T_g]$ と書くとき

$$\hat{\Lambda} = \mathbb{Z}e_1 + \mathbb{Z}e_2 + \cdots + \mathbb{Z}e_g + \mathbb{Z}T_1 + \mathbb{Z}T_2 + \cdots + \mathbb{Z}T_g \ (\subset \widehat{\mathbb{C}^g})$$

は $\widehat{\mathbb{C}^g}$ の格子である.

定義 3.1 \mathbb{C}^g/Λ を \mathcal{X} の Jacobi 多様体 と呼び,

$$J = \text{Jac } \mathcal{X} = \mathbb{C}^g/\Lambda$$

と書く. また

$$\hat{J} = \widehat{\mathbb{C}^g}/\hat{\Lambda}$$

も必要に応じて使ふ.

3.2 Abel の定理

定義 3.2 整因子 D に対して $\dim L(D) = 1$ が成り立つとき, 即ち, \mathcal{X} 上の高々 D なる極を持つ様な有理型函数が定数以外に存在しないとき, D を 一般因子 と呼ぶ.

因子 D が一般因子であることと,

$$(3.3) \quad \dim \Omega(-D) = g - \deg D$$

であることは同値である (R-R theorem). 特に一般因子の次数は g を越えない. また次数 g の因子が一般であるための必要十分条件は

$$(3.4) \quad \dim L(K_{\mathcal{X}} - D) (= \dim \Omega(-D)) = 0$$

となることである. 次数が g 以下で一般因子でないものを 特殊因子 と呼ぶ. 一般因子と特殊因子は theta 函数の振舞ひで判定できることを後の (4.38) で述べる. \mathcal{X} 上には必ず一般因子が存在する. 即ち

命題 3.5 $g > 0$ とすると, 任意の P について

$$\dim \Omega(-P) = g - 1.$$

即ち, すべての第 1 種微分形式の共通零点は存在しない.

証明 Riemann-Roch の定理より

$$\dim \Omega(-P) = \dim L(P) - 1 + g - 1 \geq g - 1.$$

もし $\dim \Omega(-P) = g$ であれば ($\dim \Omega(0) = g$ より $\dim \Omega(-P) \leq g$)

$$\dim L(P) = 1 - g + 1 + g = 2$$

なので, ある $f \in L(P)$ について $f(P) = \infty$. この f は P 以外では正則なので

$$f : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{P}^1$$

は 1 対 1 (どの値も 1 回ずつ取る ([1], p.131, Theorem 11 の直前) ので \mathcal{X} の種数は 0 になる. □

この命題から $g = 1$ ならば, 1 点からなるすべての因子が一般因子であることがわかる.

系 3.6 $g \geq 1$ ならば $L(P) = \mathbb{C}$.

証明 これは

$$\dim L(P) = \deg P - g + 1 + \dim \Omega(-P) = 1 - g + 1 + (g - 1) = 1$$

からわかる. □

定理 3.7 Riemann 面 \mathcal{X} 上に相異なる点 P_1, \dots, P_g を, 因子 $P_1 + \dots + P_g$ が一般である様にとれる.

証明 任意の整因子 $D = P_1 + \dots + P_g$ ($1 \leq n \leq g$) について Riemann-Roch の定理を適用すると

$$\dim \Omega(-(P_1 + \dots + P_g)) = \dim L(P_1 + \dots + P_n) - n + g - 1 \geq g - n$$

がわかる. $g = 1$ のときに定理が正しいことはすでにわかつてゐるから $g > 1$ とする. P_1 は任意の点とする. 3.5 から $0 \neq \omega \in \Omega(-P_1)$ なる ω が取れる. P_2 を ω の零点でない点とすると $\dim \Omega(-P_1 - P_2) \leq g - 2$. 従つて $\dim \Omega(-P_1 - P_2) = g - 2$. これを $n - 1$ 回繰り返せば

$$\dim \Omega(-(P_1 + \dots + P_n)) = g - n$$

となる. $n = g$ のときは主張の式である. □

例 3.8 超楕円曲線

$$\mathcal{C} : y^2 = x^{2g+1} + \mu_2 x^{2g} + \dots + \mu_{4g+2}$$

を考へる. 右辺 = 0 は重根を持たないとし, これは無限遠点 ∞ を添加してあるものとする. 無限遠点での局所径数 t は, たとへば

$$x = \frac{1}{t^2}, y = -\frac{1}{t^{2g+1}} + \text{“higher terms”}$$

または

$$t = -\frac{x^g}{y}$$

などを与えられる. 右辺 = 0 の根を a_1, \dots, a_{2g+1} とするとき, 分岐点 $(a_1, 0), \dots, (a_{2g+1}, 0)$ での局所変数 t は $t = y$ でよい. またそれ以外の点 (x_0, y_0) では $t = x - x_0$ とすればよい. これで \mathcal{C} は種数 g の Riemann 面となる. \mathcal{C} 上の因子

$$D = P_1 + \dots + P_g \quad (\text{相異なる点の和})$$

が一般的であるためには $x(P_j)$ が相異なることが必要十分である. なぜなら, すべての $P_j \neq \infty$ ならば, これは, 先の記号で

$$M(D) \neq 0 \iff \det(x(P_k)^{j-1}) \neq 0$$

であることと同値. しかるに, これは

$$\det(x(P_k)^{j-1}) = \prod_{i < j} (x(P_i) - x(P_j)) \neq 0$$

であるから, 主張が示された.

定義 3.9 基点 I を固定する. 次数 0 の因子 $D = c_1 P_1 + \dots + c_n P_n$ ($c_i \in \mathbb{Z}$) と第 1 種微分形式の基底のなす vector

$$\omega = {}^t[\omega_1 \ \dots \ \omega_g]$$

について, 適当な積分路を用意して対応

$$(3.10) \quad D \mapsto \sum_i c_i \int_I^{P_i} \omega \in \mathbb{C}^g$$

を考へる. これは mod Λ で積分路の選び方に依らずに定まる. これを

$$(3.11) \quad \begin{aligned} \bar{a}(\cdot, \omega) : \text{Pic}^\circ(\mathcal{X}) &\rightarrow \mathbb{C}^g / \Lambda = J \\ D &\mapsto \bar{a}(D, \omega) \end{aligned}$$

と記して Abel 写像 と呼ぶ. 以下では, 積分路を適当に選んで (3.10) の積分自体 (mod Λ しないもの) を使ふことも多い. それを $\bar{}$ を外して

$$(3.12) \quad \mathbf{a}(D, \omega)$$

と書くことにする.

定義 3.13 Riemann 面 \mathcal{X} の n 個の, 順序を無視した直積

$$(3.14) \quad \text{Sym}^n(\mathcal{X}) = \{(P_1, \dots, P_n); \text{順序を無視}, P_j \in \mathcal{X}\}$$

を考へる (n 次対称積). その元を

$$P_1 + \dots + P_n$$

と書いて $\text{Pic}^\circ(\mathcal{X})$ の元の代表とみることにする. それゆゑ

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{a}}(\cdot, \omega) : \text{Sym}^g(\mathcal{X}) &\longrightarrow J \\ P_1 + \cdots + P_n &\mapsto \bar{\mathbf{a}}(P_1 + \cdots + P_n, \omega) \end{aligned}$$

とも書くことにする. これの像を

$$(3.15) \quad W^{[n]} = \mathbf{a}(\text{Sym}^n(\mathcal{X}), \omega)$$

と記す. さらに ω を正規化された第 1 種微分 $\hat{\omega}$ に取つた場合は

$$(3.16) \quad \hat{W}^{[n]} = \mathbf{a}(\text{Sym}^n(\mathcal{X}), \hat{\omega})$$

と書く. もちろん

$$\{0\} = W^{[0]} \subset W^{[1]} \subset \cdots \subset W^{[g]} = J$$

である.

定理 3.17 (Abel の定理) $\omega = {}^t[\omega_1, \dots, \omega_g]$ とその周期格子 Λ は先の通りとする. 因子 D が主因子, つまりある函数の因子になつてゐるためには

$$(3.18) \quad \deg D = 0 \quad \text{かつ} \quad \bar{\mathbf{a}}(D, \omega) = 0$$

となることが必要十分である. それゆゑ

$$\begin{aligned} \text{Pic}^\circ(\mathcal{X}) &\rightarrow J \\ D &\mapsto \bar{\mathbf{a}}(D, \omega) \end{aligned}$$

は群の単射準同形である.

証明 いま, ある函数 f により

$$D = r_1 P_1 + \cdots + r_n P_n = (f)$$

となつてゐたとする. 微分

$$d \log f = \frac{df}{f}$$

は点 P_j に留数 r_j の 1 位の極を持つ第 3 種微分である. 従つて

$$(3.19) \quad d \log f = \sum_{i=1}^n r_i \hat{\tau}_{P_i, \mathbf{I}} + \sum_{j=1}^g \hat{\omega}_j$$

の形に表される. 3.19 を α_k に沿つて積分すると

$$2\pi i n_k = c_k \quad (n_k \in \mathbb{Z}).$$

次に β_k に沿つて積分すると

$$2\pi i m_k = \sum_{i=1}^n r_i \int_{\beta_k} \hat{\tau}_{P_i, \mathbf{I}} + \sum_{j=1}^g c_j T_{jk}$$

となる. 但し, $[T_{jk}] = T = \Omega'^{-1}\Omega''$ は (1.57) で定めた周期行列である. 変数と径数との交換法則 (1.76) により

$$m_k = r_i \int_I^{P_i} \hat{\omega}_k + \sum_{j=1}^g n_j T_{jk}$$

を得る. よつて

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n r_i \int_I^{P_i} \hat{\omega}_k &= m_k - \sum_{j=1}^g n_j T_{jk} \\ \therefore \mathfrak{a}(D, \omega) &= \sum_{i=1}^n r_j \int_I^{P_j} \omega_k = \sum_{j=1}^g m_j \Omega'_{jk} - \sum_{j=1}^g n_j \Omega''_{jk} \in \Lambda \\ \therefore \mathfrak{a}(D, \omega) &\in \Lambda. \end{aligned}$$

逆を示すために点 Q を固定し, (3.19) から予想される式

$$f(P) = \exp \left(\sum_{i=1}^n r_j \int_Q^P \hat{\tau}_{P_j, I} + \sum_{j=1}^g c_j \hat{\omega}_j \right)$$

にて函数 f を定義する. ここで定数 c_j を適当に定めて f が積分路の取り方に依らぬ様にできれば, f は \mathcal{X} 上の函数であることになり, $(f) = D$ は明らかである. 積分路 γ を $\gamma + \alpha_j$ に変へたとき f は

$$f \cdot \exp(c_j)$$

に変はる. 従つて $c_j = 2\pi i n_j$ ($n_j \in \mathbb{Z}$) と書ける. さらに, 積分路 γ を $\gamma + \beta_j$ に変へると, 再び (1.76) より

$$\exp \left[2\pi i \left\{ \sum_{i=1}^n r_i \int_I^{P_i} \hat{\omega}_j + \sum_{k=1}^g n_k T_{kj} \right\} \right]$$

の乗法子が掛かる. しかるに仮定より

$$\mathfrak{a}(D, \hat{\omega}) = \sum_{k=1}^g r_k \int_I^{P_k} \hat{\omega}_j \in \hat{\Lambda}$$

であるから, 整数 n_1, \dots, n_g を $\{ \quad \}$ 内が整数になる様にとれる. □

命題 3.20 ι で Abel 写像 $\bar{\mathfrak{a}}(\cdot, \omega)$ を $W^{[1]} = C$ 上に制限したものを表す. この写像

$$\iota : C \rightarrow J, \quad P \mapsto \int_I^P \omega \pmod{\Lambda}$$

は単射, 従つて埋め込みである.

証明 上の記号でもし $\iota(P) = \iota(Q)$, $P \neq Q$ なる 2 点があつたとする. これは $\bar{\mathfrak{a}}(P - Q, \omega) = 0$ を意味し, Abel の定理により $P - Q$ は函数の因子となる. ゆゑに $\dim L(Q) \geq 2$. これは系 3.6 に反する. □

3.3 Jacobi の定理

ここでは Abel 写像 $\bar{\alpha}(\cdot, \omega)$ が上への写像であることを証明する. まづ準備として

補題 3.21 D_0 を g 次の任意の因子とし, D を 0 次の任意の因子とせよ. このとき, ある g 次の因子 D_1 が存在して

$$(3.22) \quad \bar{\alpha}(D_1 - D_0, \omega) = \bar{\alpha}(D, \omega)$$

となる.

証明 Riemann-Roch の定理を $D + D_0$ に用いると

$$\dim L(D + D_0) = g - g + 1 + \dim \Omega(-D - D_0) \geq 1.$$

従つて, 函数 f が存在して

$$(f) + (D + D_0) =: D_1$$

は整因子となる. つまり

$$D_1 - D_0 = D + (f).$$

Abel の定理より, この D_1 が求めるものである. \square

定理 3.23 (Jacobi の定理) 種数 g の Riemann 面 \mathcal{X} を考へる. 基点は I とする. D_0 を g 次の任意の因子とし, $u \in \mathbb{C}^g/\Lambda$ を任意の元とせよ. このとき g 次の整因子 D が存在して,

$$(3.24) \quad \bar{\alpha}(D - D_0, \omega) = u$$

となる. u_0 を標準類 $K_{\mathcal{X}} \in \text{Pic}^\circ(\mathcal{X})$ から定まる²⁹ vector, つまり $u_0 = \bar{\alpha}(K_{\mathcal{X}}, \omega)$ とおくと, D が一意的に定まるための必要十分条件は

$$(3.25) \quad u \in u_0 - \bar{\alpha}(D_0, \omega) - W^{[g-2]}$$

となることである. 特に

$$(3.26) \quad \bar{\alpha}(\cdot, \omega) : \text{Sym}^g(\mathcal{X}) \rightarrow J$$

は双有理写像である.

証明 まづ D_0 が一般因子でないとき, それを一般因子 D'_0 と取り換へて, さらに u を

$$u + \bar{\alpha}(D_0 - D'_0, \omega)$$

に取り換へて, 定理の最初の主張を示せたならば

$$\bar{\alpha}(D - D'_0, \omega) = u + \bar{\alpha}(D_0 - D'_0, \omega)$$

$$\bar{\alpha}(D - D_0, \omega) = u$$

²⁹標準類 $K_{\mathcal{X}}$ は線形同値に関して 1 つの類をなす.

となる. そこで D_0 を一般因子として示す.

$$D_0 = Q_1 + \cdots + Q_g$$

として, 上と同様の考へから Q_1, \dots, Q_g がすべて異なる場合に示せばよい. 各 P_j は Q_j の近傍の動点であるとして

$$(P_1, \dots, P_g) \mapsto \bar{\alpha}(P_1 + \cdots + P_g - D_0, \omega)$$

の Jacobi 行列式の $(P_1, \dots, P_g) = (Q_1, \dots, Q_g)$ における値は先の (2.13) の記号で行列

$$M(D_0)$$

の行列式 $\det M(D_0)$ に等しいが, D_0 が一般因子なので, それは 0 でない. 従つて, 逆函数定理により (3.24) は $\mathbf{0} \in \mathbb{C}^g$ のある近傍 U において解を持つ.

次に u を任意の vector として, n を十分大きな自然数で $n^{-1}u \in U$ とする. このとき上のことから整因子 $D' = P'_1 + \cdots + P'_g$ が存在して

$$\bar{\alpha}(D' - D_0, \omega) = n^{-1}u$$

となる. 即ち

$$\bar{\alpha}(nD' - nD_0, \omega) = u$$

である. 3.21 により g 次の整因子 D が存在して

$$\bar{\alpha}(D - D_0, \omega) = \bar{\alpha}(nD' - nD_0, \omega) (= u)$$

となる.

次に一意性を示す. 次数が g の相異なる因子 $D = P_1 + \cdots + P_g$ と D' と $D_0 = Q_1 + \cdots + Q_g$ について

$$\bar{\alpha}(D - D_0, \omega) = \bar{\alpha}(D' - D_0, \omega) = u$$

と仮定すると Abel の定理により

$$(f) = D' - D$$

となる定数でない函数 f が存在する. 従つて $\dim L(D) \geq 2$. これは Riemann-Roch の定理により,

$$\dim \Omega(-D) \geq 1$$

と同値である. そこで $0 \neq \eta \in \Omega(-D)$ なる η を取る. 微分因子の次数はいつも $2g - 2$ であつたから $\deg(\eta) = 2g - 2$. よつて,

$$(\eta) = P_1 + \cdots + P_g + \tilde{P}_1 + \cdots + \tilde{P}_{g-2}$$

なる点 $\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_g$ が存在する. このとき

$$u_0 - \bar{\alpha}(D_0, \omega) = \bar{\alpha}((\eta) - D_0, \omega) = \sum_{i=1}^g \int_{Q_i}^{P_i} \omega + \sum_{j=1}^{g-2} \int_1^{\tilde{P}_j} \omega \pmod{\Lambda}.$$

一方 $\bar{\alpha}(D - D_0, \omega) = u$ から

$$\sum_{i=1}^g \int_{Q_i}^{P_i} \text{mod } \Lambda = u$$

ゆえ,

$$(3.27) \quad u = u_0 - \mathbf{a}(D_0, \omega) - \sum_{i=1}^{g-2} \int_1^{\tilde{P}_i} \omega.$$

つまり (3.24) の解 u が一意でないならば

$$(3.28) \quad u \in u_0 - \mathbf{a}(D_0, \omega) - W^{[g-2]}.$$

逆に, もし (3.28) が成り立つてみるとすると, ある $\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_{g-2}$ で (3.27) が成り立ち, 上の議論が逆転できて 2 つの解 D, D' が存在することがわかる. $\bar{\alpha}(\cdot, \omega)$ は, 上の条件で定まる閉集合を除いた所で双正則な写像なので, それは双有理写像である. \square

注意 3.29 (構成的な Jacobi の逆問題) Riemann 面 \mathcal{X} が代数曲線として実現されてゐて, その代数曲線の affine 部分の方程式が $f(x, y) = 0$ と書かれてゐるとする. このとき, 双有理写像 (3.26) に鑑み, Jacobi 多様体 $J = \mathbb{C}^g / \Lambda$ 上の, \mathbb{C}^g から来る自然な座標 $u = (u_1, \dots, u_g)$ を変数とする函数を方程式 $f(x, y) = 0$ から来る座標 $(x_1, y_1), \dots, (x_g, y_g)$ を変数とする $\text{Sym}^g(\mathcal{X})$ 上の函数としての表示せよ, といふ問題を (構成的な) Jacobi の逆問題 と呼ぶ. これの答にあたるものを後で (定理 8.13) で述べる.

4 Theta 函数

4.1 Theta 函数の定義と平行移動公式

ここでも引き続き第 1 節の記号を使ふ. $a, b \in \mathbb{R}^g$ について, 指標 (characteristic) 付きの Riemann の theta 函数(theta 級数) を

$$(4.1) \quad \vartheta \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} (z, T) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^g} \exp [2\pi i \{ \frac{1}{2} {}^t(n+b)T(n+b) + {}^t(n+b)(z+a) \}] \\ = \exp [2\pi i \{ \frac{1}{2} {}^t b T b + {}^t b (z+a) \}] \vartheta(z+a+bT, T)$$

で定める. ここで

$$\vartheta(z, T) = \vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} (z, T)$$

である. また T は ${}^t T = T$ かつ $\text{Im } T$ が正定値なるものとする. この級数は全空間 \mathbb{C}^g ($\ni z$) 上絶対かつ一様収束する (証明は [60], p.170 など). 一般に, (4.1) に現れる $\begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix}$ を theta 函数 (4.1) の theta characteristic と呼ぶ.

補題 4.2 (平行移動公式, translational relation) $a, b \in \mathbb{R}^g$ に対して

$$(4.3) \quad \vartheta \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} (z+p+qT, T) = \exp [2\pi i (-\frac{1}{2} {}^t q T q - {}^t q (z+a) + {}^t b p)] \vartheta \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} (z, T)$$

証明 これは定義から容易に示されるので省略する. □

4.2 Riemann の定理 (1)

“天下り” であるが, 下の定理 4.7 に現れる重要な数について, 定義を述べておく.

定義 4.4 (Riemann 定数) 今までの記号で $\{\alpha_j, \beta_j\}$ と周期行列 $T = [T_{ij}]$ に対して,

$$(4.5) \quad K_j = -\frac{1}{2} T_{jj} - \int_{I_1}^{I_j} \hat{\omega}_j + \sum_{i=1}^g \int_{\alpha_i} \left(\int_{I_1}^P \hat{\omega}_j \right) \hat{\omega}_i(P)$$

とおき, $K = {}^t [K_1 \cdots K_g] \in \mathbb{C}^g$ を \mathcal{X} の Riemann 定数 と呼ぶ. ただし, 積分路は \mathcal{X}_0 上のもので, I_j は α_j と β_j に共通な \mathcal{X}_0 の頂点である. 従つて K 自体は \mathcal{X}_0 に対応する α_i, β_j 達に依存する.

いま $c \in \mathbb{C}^g$ を固定する. K を Riemann 定数とする. ここで \mathcal{X}_0 の函数

$$(4.6) \quad P \mapsto G(P) = \vartheta \left(\int_1^P \hat{\omega} - c + K \right)$$

を考へる. これを適当な積分路を取つて \mathcal{X} 上の多価函数と思ふと, 前補題 4.2 より, 0 か否かは積分路に依らないので $G(P)$ の零点や極については \mathcal{X} の各点にその位数が自然に定義される.

定理 4.7 (Riemann の定理) いま $c \in \mathbb{C}^g$ を固定する. 上で述べた Riemann 面 \mathcal{X} 上の多価函数

$$(4.8) \quad P \mapsto G(P) = \vartheta \left(\int_{I_1}^P \hat{\omega} - c + K \right)$$

が恒等的には 0 でないとする. このとき $G(P)$ は丁度 g 個の点で 1 位の零点を持つ. もちろん, その内のいくつかが一様一致すれば重根となる. さらに, それらの点を P_1, \dots, P_g とすれば

$$(4.9) \quad \mathfrak{a}(P_1 + \dots + P_g - g \cdot I, \hat{\omega}) \equiv c \pmod{\hat{\Lambda}}$$

となる.

証明 まず $c' \in \mathbb{C}^g$ を固定し, \mathcal{X}_0 上の函数

$$(4.10) \quad P \mapsto F(P) = \vartheta \left(\int_{I_1}^P \hat{\omega} - c' \right)$$

を考へる. 始めに $F(P)$ は恒等的には 0 でないとして, α_j, β_j が $F(P)$ の零点を通らない様に少し変形しておく. さて $F(P)$ の \mathcal{X}_0 上での零点の個数は重複度を込めて丁度 g であることを示さう. その個数 n は留数定理により

$$(4.11) \quad n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathcal{X}_0} f \log F = \sum_{j=1}^g H_j, \quad \text{ただし}$$

$$H_j = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\alpha_j} + \int_{\alpha_j^{-1}} + \int_{\beta_j} + \int_{\beta_j^{-1}} \right) d \log F.$$

$P \in \alpha_j, \beta_j$ のとき P^- にて $\alpha_j^{-1}, \beta_j^{-1}$ 上の対応する点を表す. つまり P と P^- は \mathcal{X} 上では同じ点である. $P \in \alpha_j$ のとき基点 I_1 から P^- への道を \mathcal{X}_0 の縁に沿つて (左周りに) P を経由し, 残りの α_j とさらに β_j を通り, α_j^{-1} の一部を通つて P^- に至る. このとき縁 PI_j^- と縁 $I_j^- P^-$ に対応する積分の和は

$$(4.13) \quad \int_P^{I_j} \hat{\omega} + \int_{I_j'^-}^{P^-} \hat{\omega} = 0$$

であるから

$$(4.14) \quad \int_{I_1}^{P^-} \hat{\omega}_k = \int_{I_1}^P \hat{\omega}_k + T_{jk},$$

即ち

$$(4.15) \quad \int_{I_1}^{P^-} \hat{\omega} = \int_{I_1}^P \hat{\omega} + T_j \quad (P \in \alpha_j)$$

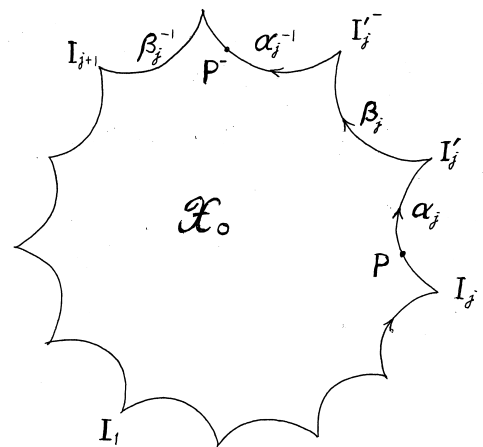


図 4.12

を得る. 同様にして $P \in \beta_j$ のときは

$$(4.16) \quad \int_{I_1}^{P^-} \hat{\omega} = \int_{I_1}^P \hat{\omega} - e_j \quad (P \in \beta_j)$$

である. 従つて $P \in \alpha_j$ のときは 4.2 により

$$(4.17) \quad \begin{aligned} F(P^-) &= \vartheta \left(\int_{I_1}^{P^-} \hat{\omega} - c' \right) \\ &= \vartheta \left(\int_{I_1}^P \hat{\omega} + T_j - c' \right) \\ &= \exp \left[2\pi i \left(\int_{I_1}^P \hat{\omega} - c_j \right) - \pi i T_{jj} \right] \cdot F(P). \end{aligned}$$

同様に $P \in \beta_j$ のときは

$$(4.18) \quad F(P^-) = F(P)$$

である. これらより $F^-(P) = F(P^-)$ と書くと

$$H_j = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha_j} (d \log F - d \log F^-) = \int_{\alpha_j} d \left(\int_{I_1}^P \hat{\omega} \right) = \int_{\alpha_j} \hat{\omega}_j = 1.$$

ゆゑに $n = g$ で, $F(P)$ は \mathcal{X} 上に g 個の零点を持つ. ここまでは K の値は何でもよい. 引き続き $F(P)$ の零点を P_1, \dots, P_g とするとき, 像 $\mathbf{a}(P_1 + \dots + P_g - g \cdot I, \hat{\omega})$ を求める. いま

$$(4.19) \quad v = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathcal{X}_0} \left(\int_{I_1}^P \hat{\omega} \right) d \log F$$

とおくと, 留数定理より

$$(4.20) \quad v \equiv \mathbf{a}(P_1 + \dots + P_g - g \cdot I, \hat{\omega}) \pmod{\hat{\Lambda}}$$

である. 以下

$$(4.21) \quad \hat{w}(P) = \begin{bmatrix} \hat{w}_1(P) \\ \vdots \\ \hat{w}_g(P) \end{bmatrix} = \mathbf{a}(P - I_1, \hat{\omega}) = \int_{I_1}^P \hat{\omega}$$

と書く.

$$(4.22) \quad \hat{w}^-(P) = \hat{w}(P^-)$$

とおくと

$$(4.23) \quad v = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^g \left\{ \int_{\alpha_j} (\hat{w} d \log F - \hat{w}^- d \log F^-) + \int_{\beta_j} (\hat{w} d \log F - \hat{w}^- d \log F^-) \right\}.$$

この式に現れる積分の計算を行ふ. 先と同様に

$$\begin{aligned}
 L_j &:= \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha_j} (\hat{w} d \log F - \hat{w}^- d \log F^-) \\
 (4.24) \quad &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha_j} (\hat{w} - \hat{w}^-) d \log F^- + \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha_j} \hat{w} (d \log F - d \log F^-) \\
 &= -\frac{1}{2\pi i} \left(T_j \int_{\alpha_j} d \log F + \int_{\alpha_j} \hat{w}^- d \hat{w}_j^- \right)
 \end{aligned}$$

を得る. 道 α_j の始点と終点での F の値は同じであるから

$$(4.25) \quad \int_{\alpha_j} d \log F = 2\pi i n_j \quad n_j \in \mathbb{Z}$$

と書ける. 一方 $P \in \alpha_j$ のとき \mathcal{X}_o の辺 PP^- は β_j を挟むので

$$(4.26) \quad \int_{\alpha_j} \hat{w}^- \hat{w}_j^- = \int_{\alpha_j} \hat{w} \hat{w}_j + T_j$$

であるから

$$(4.27) \quad L_j \equiv \int_{\alpha_j} \hat{w}(P) \hat{w}_j(P) \pmod{\hat{\Lambda}}$$

となる. 次に

$$\begin{aligned}
 M_j &:= \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta_j} (\hat{w} d \log F - \hat{w}^- d \log F^-) \\
 (4.28) \quad &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta_j} (\hat{w} - \hat{w}^-) d \log F + \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta_j} \hat{w}^- (d \log F - d \log F^-) \\
 &= \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\beta_j} d \log F \right) e_j \quad (\because (4.16))
 \end{aligned}$$

である. いま β_j の始点 I_j と終点 I_j^- について

$$\begin{aligned}
 (4.29) \quad \int_{\beta_j} d \log F &= \log F(I_j^-) - \log F(I_j) \\
 &= \exp \{ -2\pi i (\hat{w}_j(I_j) - c'_j) - \pi i T_{jj} \} F(I_j)
 \end{aligned}$$

であるから

$$(4.30) \quad \int_{\beta_j} d \log F = -2\pi i (\hat{w}_j(I_j) - c'_j) - \pi i T_{jj} + 2\pi i m_j \quad (m_j \in \mathbb{Z})$$

となる. ゆゑに

$$(4.31) \quad M_j \equiv (-\hat{w}_j(I_j) + c'_j - \frac{1}{2} T_{jj}) e_j$$

となり

$$(4.32) \quad \begin{aligned} v &= \sum_{j=1}^g (L_j + M_j) \\ &\equiv \sum_{j=1}^g \left\{ \left(-\frac{1}{2} T_{jj} - \hat{w}_j(I_j) \right) e_j + \int_{\alpha_j} \hat{w} \hat{w}_j \right\} + c'_j e_j. \end{aligned}$$

ここで $c' = c - K$ とすると

$$(4.33) \quad G(P) = F(P)$$

で、これの零点 P_1, \dots, P_g について

$$(4.34) \quad \mathbf{a}(P_1 + \dots + P_g, \hat{\omega}) \equiv K + (c - K) = c \pmod{\hat{\Lambda}}$$

となる。但し、 K はその第 j 成分が

$$(4.35) \quad K_j = -\frac{1}{2} T_{jj} - \int_{I_1}^{I_j} \hat{\omega}_j + \sum_{k=1}^g \int_{\alpha_k} \left(\hat{\omega}_k(P) \int_{I_1}^P \hat{\omega}_j \right)$$

により与えられる vector である。 □

4.3 Riemann の定理 (2) — Theta 函数の零因子

次に定理 4.7 の仮定がどのような定数 $c \in \mathbb{C}^g$ について成立するかが問題となる。そこで theta 函数の零点の特徴付けとともにこれを論じる。以下では theta 函数 $\vartheta(z, T)$ を単に $\vartheta(z)$ と略記する。ここで T はもちろん今論じてゐる Riemann 面の modulus である。

定理 4.36 函数

$$z \mapsto \vartheta(z - K) \quad (\mathbb{C}^g \rightarrow \mathbb{C})$$

の零点集合は $W^{[g-1]}$ ((3.15) 参照) に一致する。

証明 Step 1. まず、 $z \in W^{[g-1]}$ のとき $\vartheta(z - K) = 0$ を示す。しばらく $\mathbf{a}(\cdot) = \mathbf{a}(\cdot, \omega)$ と略記する。 g 次の一般因子は存在する (\because 3.7) から、その 1 つ

$$D = P_1 + \dots + P_g$$

を取り、

$$c = \mathbf{a}(D) = \mathbf{a}(P_1 + \dots + P_g)$$

とおく。ここで

$$(4.37) \quad \vartheta(\mathbf{a}(P_1 + \dots + P_{g-1}) - K) = 0$$

を示す. (i) $G(P) = \vartheta(\mathbf{a}(P) - c + K)$ が恒等的に 0 の場合は明らかに

$$\begin{aligned}\vartheta(\mathbf{a}(P_1 + \cdots + P_{g-1}) - K) &= \vartheta(\mathbf{a}(D) - K - \mathbf{a}(P_g)) \\ &= \vartheta(\mathbf{a}(P_g) - \mathbf{a}(D) + K) \quad (\because \vartheta \text{ は偶関数})\end{aligned}$$

である. $G(P) = \vartheta(\mathbf{a}(P) - c + K)$ が恒等的に 0 でない場合, その零点は g 個の点からなり, その因子を D' とすると 4.7 より

$$\mathbf{a}(D') \equiv c \equiv \mathbf{a}(D) \pmod{\hat{\Lambda}}$$

しかるに D は一般因子なので $D' = D$, つまり

$$\vartheta(\mathbf{a}(P_1 + \cdots + P_{g-1}) - K) = \vartheta(\mathbf{a}(D) - \mathbf{a}(P_g) - K) = \vartheta(\mathbf{a}(P_g) - c + K) = 0.$$

以上より (4.37) が示された. 次に Q_1, \dots, Q_{g-1} を任意の点として

$$G(Q_1, \dots, Q_{g-1}) = \vartheta(\mathbf{a}(Q_1 + \cdots + Q_{g-1}) - K)$$

とおく. G は $\text{Sym}^{g-1} \mathcal{X}$ 上の多価関数である. Q_j が P_j の近傍にあれば, 因子

$$Q_1 + \cdots + Q_{g-1} + Q_g$$

は一般因子である. なぜなら (2.6) の行列について条件 $|M(Q_1 + \cdots + Q_{g-1} + P_g)| \neq 0$ は開集合を定義するからである. よつて

$$G(Q_1, \dots, Q_{g-1}) = 0.$$

G は有理型関数なので, 各変数ごとに一致の定理を使へば, これが恒等的に 0 であることがわかる. 以上より (4.37) が任意の $P_1, \dots, P_{g-1} \in \mathcal{X}$ について成り立つことがわかった. 結局

$$z \in \hat{W}^{[g-1]} \implies \vartheta(z - K) = 0.$$

Step 2. 逆に $\vartheta(z - K) = 0$ であるとする. $\vartheta(z)$ はもちろん恒等的に 0 ではないから

$$\vartheta(c - c' - z - K) = 0 \quad (\forall c, \forall c' \in \hat{W}^{[r]})$$

となる r は $g-1$ 以下である. r_0 をその様な r の最大とせよ. 次数 $r_0 + 1$ の整因子 D_1, D_2 が存在して

$$\vartheta(\mathbf{a}(D_1) - \mathbf{a}(D_2) - z + K) \neq 0$$

D_2 を定める点を少し動かしてもよいから, D_2 は相異なる点からなるとしてよい. P_1 を D_1 に含まれる 1 点として

$$D_1 = D'_1 - P_1$$

とする. このとき

$$G_1(P) = \vartheta(\mathbf{a}(P) + \mathbf{a}(D'_1) - \mathbf{a}(D_2) - z + K)$$

は $P = P_1$ で 0 でないのだから, その零点は次数 g の整因子をなす. それを D_3 と記す. このとき, 定理 4.7 より

$$\mathfrak{a}(D_3) = z - \mathfrak{a}(D'_1) + \mathfrak{a}(D_2).$$

一方 P_2 を D_2 の点として

$$D_2 = D'_2 + P_2$$

とすれば r_0 の定義により

$$G_1(P_2) = \vartheta(\mathfrak{a}(D'_1) - \mathfrak{a}(D'_2) - z + K) = 0$$

であるから P_2 は D_3 に含まれる. D_2 は相異なる点から成るので, $g - r_0 - 1$ 次の整因子 D'_3 が存在して

$$D_3 = D_2 + D'_3$$

となる. つまり

$$\begin{aligned} z &\equiv \mathfrak{a}(D'_1) + \mathfrak{a}(D'_2) = \mathfrak{a}(D'_1 + D'_3), \\ \deg(D'_1 + D'_3) &= s + (g - s - 1) = g - 1 \end{aligned}$$

となる. □

定理 4.38 函数

$$(4.39) \quad G(P) = \vartheta(\mathfrak{a}(P) - c + K) \quad (c \in \mathbb{C}^g)$$

が恒等的に 0 でないための必要十分条件は c が一般因子の像であることである.

証明 (4.39) が恒等的に 0 であると仮定すると, 定理 4.36 より, 各 P に対して $g - 1$ 次の整因子 D_P が存在して

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}(P) - c &\equiv \mathfrak{a}(D_P) \pmod{\Lambda}, \\ \therefore c &\equiv \mathfrak{a}(P + D_P) \pmod{\Lambda}. \end{aligned}$$

よつて c は特殊因子 (\because 上を満たす P が無限個あるのだから). 逆に c が特殊因子であるとして, Jacobi の定理を適用し,

$$c \equiv \mathfrak{a}(D), \quad \deg D = g$$

なる D を取つておく. 仮定より

$$n := \dim L(D) \geq 2$$

である. $L(D)$ の基底を $1, f_1, \dots, f_{n-1}$ とする. (4.39) が恒等的に 0 でないとする. Q を (4.39) の零点でない点とせよ. ここで

$$f(P) = c_0 + c_1 f_1(P) + \dots + c_{n-1} f_{n-1}(P)$$

とにおいて係数 c_j を $f(Q) = 0$ となる様にとる. さらに

$$(f) = D' - D$$

と書くと (この差には “無駄” はあり得る), Abel の定理より

$$\mathbf{a}(D) = \mathbf{a}(D') \pmod{\hat{\Lambda}}.$$

ところが D' は Q を含むのだから

$$\vartheta(\mathbf{a}(Q) - \mathbf{a}(D') + K) = \vartheta(\mathbf{a}(D' - Q) - K)$$

は定理 4.36 により 0 となり, Q の取り方に矛盾する. \square

定理 4.38 は Riemann の特異点定理 (Riemann's singularity theorem) へと精密化される ([2], pp.226–227, [21], p.348 等を参照) が, 平面三浦曲線と呼ばれるものの場合には, さらに精密な事実が知られてをり, それは命題 7.17 で述べられる.

4.4 第 3 種微分形式と theta 函数との関係

ここでは, sigma 函数の理論を展開するのに要となる重要な次の関係式を証明する.

定理 4.40 点 P_j, Q_j ($j = 1, \dots, g$) を

$$(4.41) \quad \mathbf{a}(P_1 + \dots + P_g, \hat{\omega}) \notin \hat{W}^{[g-1]}, \quad \mathbf{a}(Q_1 + \dots + Q_g, \hat{\omega}) \notin \hat{W}^{[g-1]}$$

なる \mathcal{X} の点とする. $P, Q \in \mathcal{X}$ について次が成り立つ:

$$(4.42) \quad \exp\left(\sum_{j=1}^g \int_Q^P \hat{\tau}_{P_j, Q_j}\right) = \frac{\vartheta(\mathbf{a}(P - P_1 - \dots - P_g) + K) \vartheta(\mathbf{a}(Q - Q_1 - \dots - Q_g) + K)}{\vartheta(\mathbf{a}(P - Q_1 - \dots - Q_g) + K) \vartheta(\mathbf{a}(Q - P_1 - \dots - P_g) + K)}.$$

(4.41) の条件は (4.42) の極を考へるなら不要である. ここで, 左辺の積分路は $Q \rightarrow P$ が右辺の \mathbf{a} を定義する積分路 $I \rightarrow P$ と $I \rightarrow Q$ の差に homotope になるものとし, 分子で 2 回現れる各積分路 $I \rightarrow P_j$ や $I \rightarrow Q_j$ はそれぞれ同一のものとする.

証明 両辺を P の函数とみて, それぞれの因子を調べる. 右辺の因子は

$$(P_1 + \dots + P_g) - (Q_1 + \dots + Q_g)$$

であり, 左辺の因子も τ_{P_j, Q_j} の定義により, これと一致する. いま α_j を点 P を通る様にとつておき, α_j に沿つて P を 1 周させても両辺は変らない. また, 道 β_j を P を通る様にとつておき, P を β_j に沿つて 1 周させてみると

$$\begin{aligned} & \exp 2\pi i \left[\{\mathbf{a}(P) - \mathbf{a}(P_1 + \dots + P_g) + K + \frac{1}{2} T_{ii}\} \right. \\ & \quad \left. - \{\mathbf{a}(P) - \mathbf{a}(Q_1 + \dots + Q_g) + K + \frac{1}{2} T_{ii}\} \right] \\ & = \exp 2\pi i [(\mathbf{a}(P_1 + \dots + P_g) - \mathbf{a}(Q_1 + \dots + Q_g))] \end{aligned}$$

が乗される. 一方 (1.76) より, 左辺も同じ結果になる. 従つて \mathcal{X} 上の函数と考へてみた両辺の商は \mathcal{X} 上の函数になり, それらは極を持たないので, 定数である, しかるに $P = Q$ としてみると, ともに 1 となるので, 実際に両辺は一致する. \square

第2部

特別な代数曲線の場合

5 平面三浦曲線

5.1 平面三浦曲線の定義

無限遠点が 1 点のみの代数曲線を定義する³⁰. いま $d < q$ を互いに素な 2 つの自然数とし,

$$(5.1) \quad f(x, y) = y^d + p_1(x)y^{d-1} + \cdots + p_{d-1}(x)y - p_d(x)$$

とおく. 但し, $p_j(x)$ は x の $\lceil \frac{jq}{d} \rceil$ 次以下の多項式で, その係数を

$$(5.2) \quad \begin{aligned} p_j(x) &= \sum_{k:jq-dk>0} \mu_{jq-dk} x^k \quad (1 \leq j \leq d-1) \\ p_d(x) &= x^q + \mu_{d(q-1)}x^{q-1} + \cdots + \mu_{dq} \end{aligned}$$

と書くことにする. いま

$$(5.3) \quad f(x, y) = 0$$

で定義される代数曲線 \mathcal{C} を考える. 但し, これは無限遠点に唯一の点を持つ完備代数曲線を意味する. この様な曲線を一般に 平面三浦曲線 と呼ぶこととし, 特に上の形の曲線を (d, q) 平面三浦曲線 (略して (d, q) 曲線) と呼ぶことにする. 一般の楕円曲線は

$$(5.4) \quad y^2 + (\mu_1x + \mu_3)y = x^3 + \mu_2x^2 + \mu_4x + \mu_6$$

と書かれるから, これは $(2, 3)$ 平面三浦曲線であり, 平面三浦曲線は一般の楕円曲線の自然な一般化であると見ることができる.

定理 5.5 非特異完備代数曲線は compact な Riemann 面の構造を持ち, 逆に任意の compact な Riemann 面はある非特異代数曲線として実現される.

この証明は長いので, [59] の第 4 章の第 3 節と第 4 節を読みたい. 但し, 以降では具体的な非特異代数曲線を具体的な局所径数を使って調べるので, この定理の証明を辿らなくてもその内容を実感できると思はれる.

この講義録では主に $(2, 2g+1)$ 平面三浦曲線 (それは 超楕円曲線 と呼ばれるものの一部である) を中心に述べるが, そのほとんどの内容は一般の平面三浦曲線に対しても定式化されつつある. 以後, (5.1) の係数 $\{\mu_j\}$ の \mathbb{Z} 上の多項式の全体を簡単に $\mathbb{Z}[\boldsymbol{\mu}]$ で表す:

$$\mathbb{Z}[\boldsymbol{\mu}] = \mathbb{Z}[\{\mu_j\}].$$

³⁰ この種の代数曲線は V.M. Buchstaber, V.Z. Enolskii, D.V. Leykin が研究を始めたもので, 彼らは “ (n, s) -curve” と呼んでゐる. しかし, n と s を別の文字に置き換へるときに, この名称は不便であるから, 適切な名称を付けたい. 筆者にはまだ確定できる良い名称が浮ばないので, この講義録では文献 [55] にちなんで “平面三浦曲線” と呼ぶことにした.

5.2 Schur-Weierstraß の空隙値

互いに素な 2 つの正の整数の組 (d, q) に対して

$$(5.6) \quad \{ad + bq \mid a, b \in \mathbb{Z}, a \geq 0, b \geq 0\}$$

に属さない正の整数を小さい順に並べたものを

$$w_1, w_2, \dots, w_g$$

と書いて Schur-Weierstraß の空隙値列 と呼ぶ. これは有限数列であつて $g = \frac{(d-1)(q-1)}{2}$ となる. この記号も以後, 何度も使はれる.

例 5.7 例へば $(d, q) = (3, 4)$ であれば

$$w_1 = 1, w_2 = 2, w_3 = 5$$

である. 非特異 $(3, 4)$ 曲線 $\mathcal{C} : f(x, y) = 0$ について, 函数 x は ∞ で 3 位の極を持ち, それ以外の点では正則であり, 函数 y は ∞ で 4 位の極を持つて, それ以外の点では正則である. ∞ のみに極を持つ函数で, その極の位数が 1 位, 2 位, 5 位である様な函数は存在しない (読者はこれを確かめよ). 従つて, ∞ は \mathcal{C} の Weierstraß 点である (定義 2.34 を見よ).

5.3 判別式

次に \mathcal{C} の判別式を定義する.

定義 5.8 上の (5.1) の f について, すべての μ_j を不定元に置き替へて

$$(5.9) \quad \begin{aligned} R_1 &= \text{rslt}_x \left(\text{rslt}_y \left(f(x, y), \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \right), \text{rslt}_y \left(f(x, y), \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \right) \right), \\ R_2 &= \text{rslt}_y \left(\text{rslt}_x \left(f(x, y), \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \right), \text{rslt}_x \left(f(x, y), \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \right) \right), \\ R &= \text{gcd}(R_1, R_2) \quad \text{in } \mathbb{Z}[\boldsymbol{\mu}] \end{aligned}$$

とする. 但し rslt_z は変数 z に関する Sylvester の意味の終結式を示す. このとき R は $\mathbb{Z}[\boldsymbol{\mu}]$ の中で完全平方元になる³¹. これの平方根の 1 つを D とする. どちらの平方根を取るかについては, 後の定義 6.56 で述べる. さうして, μ_j を元の値に戻す (元の値を代入する)³². 得られた D を \mathcal{C} の 判別式 と呼ぶ.

補題 5.10 (5.1) で y を含む項が y^d のみの場合 (purely d -gonal curve), D は $p_d(x) = 0$ の q 個の根の差積の平方に一致する. 特に, 超楕円曲線 (5.15) $y^2 = f(x)$ については, 定義した判別式 D は $f(x) = 0$ の $2g + 1$ 個の根の差積の平方に一致する.

証明 省略する. □

³¹これらの事は相当に確からしいと思はれるが, 実は, 筆者は証明を持つてゐない. $(d, q) = (2, 3), (2, 5)$ など, 種数が小さい曲線の場合は, computer で確認することができる.

³²一旦, μ_j を不定元にするのは gcd を取る操作と μ_j に値を入れる操作が可換でないからである.

5.4 Weight

ここで次の様な重さを導入する.

定義 5.11 (5.1) の $f(x, y)$ に現れる諸量に対し, Sato weight と呼ばれる 重さ を x, y, μ_j のそれがそれぞれ $-d, -q, -j$ となるものとして定める. 記号で

$$\text{wt}(x) = -d, \quad \text{wt}(y) = -q, \quad \text{wt}(\mu_j) = -j$$

などと記すことにする.

注意 5.12 この重さにより, 平面三浦曲線に関して本講義録に登場するすべての等式は斉重 (of homogeneous weight) となる.

5.5 Hurwitz 整な級数

いま z_1, \dots, z_m が不定元で, A が可換整域のとき, 次の様な形式的冪級数からなる環を考へる:

$$(5.13) \quad A\langle\langle z_1, z_2, \dots, z_m \rangle\rangle = \sum_{n_1, \dots, n_m \geq 0} A \frac{z_1^{n_1}}{n_1!} \frac{z_2^{n_2}}{n_2!} \cdots \frac{z_m^{n_m}}{n_m!}.$$

この元を A 上の z_1, \dots, z_m に関する Hurwitz 整級数 と呼ぶ. この記号は以後, 頻繁に登場する.

5.6 超楕円曲線

これから述べていく理論の相当な部分は, 一般の (d, q) 平面三浦曲線に拡張されつつあるが, 入門書であるとの立場から以下では $d = 2, s = 2g + 1, p_1(x) = 0$ の場合, 即ち

$$(5.14) \quad y^2 = x^{2g+1} + \mu_2 x^{2g} + \cdots + \mu_{4g+2}$$

により得られる完備代数曲線 (非特異ならば超楕円曲線) \mathcal{C} を中心に述べていくこととする. 簡単のために上の右辺を

$$(5.15) \quad f(x) = x^{2g+1} + \mu_2 x^{2g} + \cdots + \mu_{4g+2}$$

と書く. $f(x) = 0$ が重根を持たないと仮定することが多いが, 重根を持つ場合も自然な極限操作でうまくいくので一々断らない. 重さについては, この場合は

$$(5.16) \quad \text{wt}(x) = -2, \quad \text{wt}(y) = -2g - 1, \quad \text{wt}(\mu_j) = -j$$

である. さて $f(x) = 0$ の根に順序を付けて $c_1, a_1, \dots, c_g, a_g, c$ とし,

$$C_j(c_j, 0), A_j(a_j, 0), C(c, 0)$$

と名付ける. この場合は

$$\text{wt}(D) = -4g(2g + 1).$$

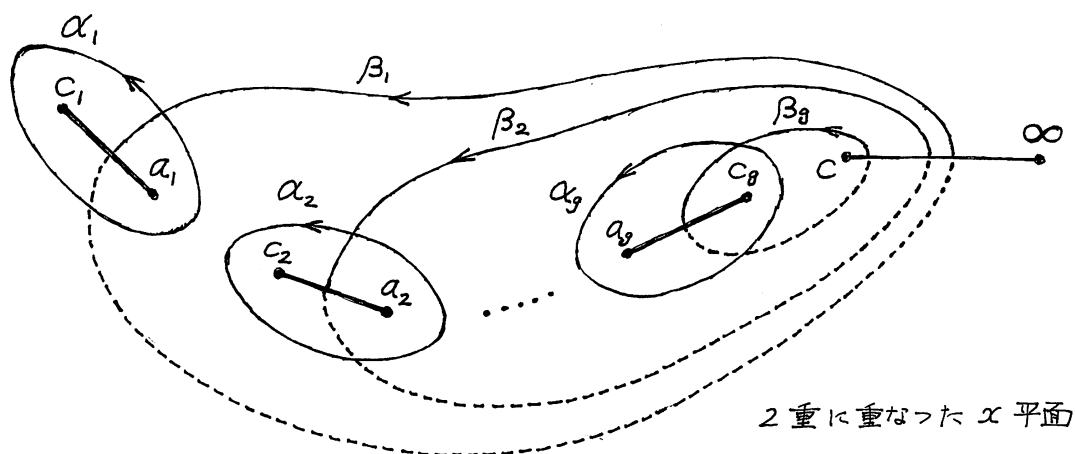


図 5.17

ここで図 5.17 の様に $\{\alpha_j, \beta_j\}$ を定める. これら $2g$ 個の道の交叉積は

$$(5.18) \quad \alpha_i \cdot \alpha_j = \beta_i \cdot \beta_j = 0, \quad \alpha_i \cdot \beta_j = \delta_{ij}$$

となつてゐて, これらが \mathcal{C} の基本群 $\pi^1(\mathcal{C})$ の基底をなすのである.

5.7 第 1 種微分形式, 周期行列

§1 から §3 で述べた Riemann 面 \mathcal{X} として (5.14) で定義される超楕円曲線 \mathcal{C} を考へる. 各点 P における局所変数は, 例へば

$$t = \begin{cases} y & f(x(P)) = 0 \text{ のとき} \\ -\frac{x^g}{y} & P = \infty \text{ のとき} \\ x - x(P) & \text{それ以外の } P \end{cases}$$

とする.

注意 5.19 以後, 函数や微分形式の変数として

- ・点の名前 P, Q 等;
- ・定義方程式の座標 $(x, y), (z, w)$ 等;
- ・局所径数 t 等

の 3 種類を自由に用いるので注意して欲しい. 混乱はないものと信じる.

曲線 \mathcal{C} の第 1 種微分形式の基底は

$$(5.20) \quad \omega_j = \omega_j(x, y) = \frac{x^{j-1} dx}{\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)} = \frac{x^{j-1} dx}{2y} \quad (j = 1, \dots, g)$$

と取る.

注意 5.21 一般の (d, q) 曲線では, (5.6) の要素の中, 小さい方から $g = \frac{(d-1)(q-1)}{2}$ 個を

$$a_1d + b_1q (= 0), a_2d + b_2q (= d), a_3d + b_3q, \dots, a_gd + b_gq (= 2g - 1)$$

と記しておき (読者は g 番目の値が $(2g - 1)$ となる理由を考へよ), それに応じて

$$(5.22) \quad \omega_j = \omega_j(x, y) = \frac{x^{\alpha_j} y^{\beta_j} dx}{\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)}$$

とすれば第 1 種微分の基底が得られる.

以下, 簡単のために

$$\omega = {}^t[\omega_1 \cdots \omega_g]$$

と書く. 上の ω_j に対する α_i, β_j の周期は

$$(5.23) \quad \Omega' = \left[\int_{\alpha_j} \omega_i \right], \quad \Omega'' = \left[\int_{\beta_j} \omega_i \right], \quad \Omega = [\Omega' \ \Omega'']$$

と記す. 系 1.52 で述べた様に Ω' は正則行列であるが, いま

$${}^t[\hat{\omega}_1 \cdots \hat{\omega}_g] = \Omega'^{-1} {}^t[\omega_1 \cdots \omega_g], \quad T = \Omega'^{-1} \Omega''$$

とおけば

$$(5.24) \quad \left[\int_{\alpha_j} \hat{\omega}_i \right] = 1_g, \quad \left[\int_{\beta_j} \hat{\omega}_i \right] = T$$

である. 以下でも

$$\hat{\omega} = {}^t[\hat{\omega}_1 \cdots \hat{\omega}_g]$$

と書く. $\hat{\omega}$ の成分は正規化された第 1 種微分形式と呼ばれるのであつた.

5.8 数論的局所径数による展開

ここでは, 以後の便宜のために, 前小節で定義した対象を無限遠点 ∞ において, そこの局所径数で展開しておく.

便宜の為に (5.66) で定義された曲線 \mathcal{C} について, 以下の様に特別な局所径数を取ることとする. まず, $di + qj = -1$ で $|i| < q$ かつ $|j| < d$ なる組 (i, j) を取り, $t = \pm x^j y^i$ とおく (符号 \pm はその時の便宜によつて決めるが, あまり重要ではない). このとき $\text{wt}(t) = 1$ である. これを \mathcal{C} の無限遠点における 数論的局所径数 と呼ぶ. 実際, この局所径数で展開を行ふと係数が整になるからこの呼び名を使ふ.

超楕円曲線の場合に具体的に述べる:

$$(5.25) \quad \begin{aligned} f(x, y) &= y^2 + (\mu_1 x^g + \mu_3 x^{g-1} + \cdots + \mu_{2g+1})y \\ &\quad - (x^{2g+1} + \mu_2 x^{2g} + \cdots + \mu_{4g} x + \mu_{4g+2}), \\ f_x(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} f(x, y), \quad f_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \end{aligned}$$

とする. このとき $t = -x^g/y$ が数論的局所径数である. これの値によつて定まる各種の変数の値を $\langle t \rangle$ つけて示す. 例へば \mathcal{C} の座標 x は $x\langle t \rangle$ などと記す. 補助的に

$$s = 1/x$$

を導入すると $f(x, y) = 0$ は

$$s = (1 + \mu_2 s + \cdots + \mu_{4g} s^2 + \mu_{4g+2} s^3) t^2 + (\mu_1 s + \mu_3 s^2 + \cdots + \mu_{2g+1} s^{g+1}) t$$

と書かれる. これを recursive に使つて

$$s = t^2 + \mu_1 t^3 + \cdots \in \mathbb{Z}[\boldsymbol{\mu}][[t]]$$

なる展開を得る. 従つて

$$(5.26) \quad \begin{aligned} x\langle t \rangle &= t^{-2} - \mu_1 t^{-1} + \cdots \in t^{-2} \mathbb{Z}[\boldsymbol{\mu}][[t]], \\ y\langle t \rangle &= -t^{-2g-1} + \mu_1 t^{-2g} + \cdots \in t^{-2g-1} \mathbb{Z}[\boldsymbol{\mu}][[t]] \end{aligned}$$

なる展開を得る. ここで,

$$\begin{aligned} \omega_j(x, y) &= \frac{x^{j-1} dx}{2y + \mu_1 x^g + \mu_3 x^{g-1} + \cdots + \mu_{2g+1}} \\ &= \frac{x^{j-1} dx}{dt} \cdot \frac{dt}{2y + \mu_1 x^g + \mu_3 x^{g-1} + \cdots + \mu_{2g+1}} \in (1 + t \mathbb{Z}[\frac{1}{2}, \boldsymbol{\mu}][[t]]) dt, \\ \omega_j(x, y) &= -\frac{x^{j-1} dy}{f_1(x, y)} \in (1 + t \mathbb{Z}[\frac{1}{3}, \boldsymbol{\mu}][[t]]) dt \end{aligned}$$

ゆゑ

$$\begin{aligned} \omega_1(x, y) &= (t^{2g-2} + \cdots) dt \in \mathbb{Z}[\boldsymbol{\mu}][[t]] dt, \\ \omega_2(x, y) &= (t^{2g-4} + \cdots) dt \in \mathbb{Z}[\boldsymbol{\mu}][[t]] dt, \\ &\dots\dots\dots, \\ \omega_g(x, y) &= (1 + \mu_1 t + \cdots) dt \in \mathbb{Z}[\boldsymbol{\mu}][[t]] dt \end{aligned}$$

がわかる. さらに (3.20) の写像は

$$(5.27) \quad \begin{aligned} u_1 &= \int_{\infty}^{(x,y)} \omega_1(x, y) = \frac{1}{2g-1} t^{2g-2} + \cdots \in \mathbb{Z}[\boldsymbol{\mu}]\langle\langle t \rangle\rangle, \\ u_2 &= \int_{\infty}^{(x,y)} \omega_2(x, y) = \frac{1}{2g-3} t^{2g-4} + \cdots \in \mathbb{Z}[\boldsymbol{\mu}]\langle\langle t \rangle\rangle, \\ &\dots\dots\dots, \\ u_g &= \int_{\infty}^{(x,y)} \omega_g(x, y) = t + \frac{\mu_1}{2} t^2 + \cdots \in \mathbb{Z}[\boldsymbol{\mu}]\langle\langle t \rangle\rangle \end{aligned}$$

で記述され, これより Abel-Jacobi 写像 $\mathbf{a}(\cdot, \omega)$ の $\mathcal{C} = \text{Sym}^1(\mathcal{C})$ の像における関係として

$$u_i = \frac{1}{2(g-i)-1} u_g^{2(g-i)-1} + \cdots \in \mathbb{Z}[\boldsymbol{\mu}]\langle\langle u_g \rangle\rangle \quad (i = 1, \dots, g-1)$$

がわかる. 一般の $\text{Sym}^k(\mathcal{C})$ の像については

$$u_i^{(j)} = \sum_{j=1}^k \int_{\infty}^{(x_j, y_j)} \omega_i$$

として

$$(5.28) \quad u_i = \frac{1}{2i-1} \left((u_g^{(1)})^{2(g-i)-1} + \cdots + (u_g^{(k)})^{2(g-i)-1} \right) + \cdots \in \mathbb{Z}[\boldsymbol{\mu}] \langle\langle u_g^{(1)}, \dots, u_g^{(k)} \rangle\rangle$$

($i = 1, \dots, g-1$)

となつてゐる.

5.9 標準的な第 1, 第 2, 第 3 種微分形式

定義 5.29 (1) 2 点 $Q_1, Q_2 \in \mathcal{C}$ に対して微分形式 $\hat{\tau}_{Q_1, Q_2}$ を次の条件をみたす微分形式とする (唯一つ存在).

Q_1, Q_2 以外のすべての点で正則で

$$(5.30) \quad \begin{aligned} \text{ord}_{Q_1} \hat{\tau}_{Q_1, Q_2} &= \text{ord}_{Q_2} \hat{\tau}_{Q_1, Q_2} = 1 \\ \text{Res}_{Q_1} \hat{\tau}_{Q_1, Q_2} &= 1, \quad \text{Res}_{Q_2} \hat{\tau}_{Q_1, Q_2} = -1 \end{aligned}$$

であり, すべての $j = 1, \dots, g$ について

$$(5.31) \quad \int_{\alpha_j} \hat{\tau}_{Q_1, Q_2} = 0.$$

(2) 点 $P \in \mathcal{C}$, P の局所経数 t , 整数 $k \geq 2$ を与へたとき, 微分形式 $\hat{\eta}_{P, t, k}$ を次の条件を満たすものとして定める: P の近傍で

$$(5.32) \quad \hat{\eta}_{P, t, k} = \left(-\frac{k-1}{t^k} + a_0 + \cdots \right) dt$$

と展開され, P 以外の点では極を持たず,

$$(5.33) \quad \int_{\alpha_j} \hat{\eta}_{P, t, k} = 0.$$

(5.32) を満たす P のみに極を持つ様な微分形式は第 1 種微分形式の差を除いて一意的であるが, (5.33) の条件と 1.51 から, その曖昧さは除かれ, 一意に存在することがわかる.

補題 5.34 一般の代数曲線 (Riemann 面) \mathcal{X} の無限遠点の近傍に 2 つの動点 Q_1, Q_2 を考へ, 基点 I での局所変数 t のそれぞれの点における値を t_1, t_2 とする. このとき (1.65) の $\hat{\tau}_{Q_1, Q_2}$ に対して $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ 上の 2 次微分形式 $\hat{\xi}(Q_1, Q_2)$ ($(Q_1, Q_2) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$) を

$$(5.35) \quad \hat{\xi}(P, Q_2) = \lim_{t_1 \rightarrow t_2} \frac{\hat{\tau}_{Q_1, Q_2}(P)}{t_1 - t_2} dt_2$$

で定義する. このとき

$$(5.36) \quad \hat{\xi}(P, Q_2) = \frac{d}{dt_2} \hat{\tau}_{Q_1, Q_2}(P) dt_2 \Big|_{t_1 \rightarrow t_2}$$

とも書けて, 局所径数の P での値を t 書くとき, $\hat{\xi}(P, Q_2) = \hat{\xi}(t, t_2)$ などとも記す. これは, 対角部分 $\Delta_{\mathcal{X}} = \{(P, P) \mid P \in \mathcal{X}\}$ 以外では正則で, かつ,

$$(5.37) \quad \begin{cases} \hat{\xi}(t_1, t_2) = \left(\frac{1}{(t_1 - t_2)^2} + \mathbb{C}[[t_1, t_2]] \right) dt_1 dt_2, \\ \text{任意に固定された } t_1 \text{ について } \int_{\alpha_j} \hat{\xi}(t_1, t_2) = 0 \quad (j = 1, \dots, g) \end{cases}$$

を満たす.

証明 $\hat{\tau}_{Q_1, Q_2}(P)$ 定義と (1.78) から展開が

$$\hat{\tau}_{Q_1, Q_2}(P) \in \left(\frac{1}{t - t_1} - \frac{1}{t - t_2} + (t_1 - t_2) \mathbb{C}[[t, t_1, t_2]] \right) dt$$

となること, および (1.68) よりわかる. \square

ここで, (5.1) の一般の $f(x, y)$ に戻り, 不定元を表す文字 Z を使ひ, 代数曲線 \mathcal{C} 上の 2 点 $P(x, y), Q(z, w)$ について

$$(5.38) \quad \begin{aligned} [P, Q] &= [(x, y), (z, w)] \\ &= \omega_1(x, y) \frac{1}{x - z} \frac{f(Z, y) - f(Z, w)}{y - w} \Big|_{Z=z} \\ &= \frac{dx}{(z - x) \frac{\partial}{\partial y} f(x, y)} \sum_{k=1}^q y^{q-k} \left[\frac{f(Z, w)}{w^{q+1-k}} \right]_w^+ \Big|_{Z=z} \end{aligned}$$

とおく. これは weight $-d$ で斉重である. ただし $[]_w^+$ は w についての負冪の項をすべて取り除くことを意味する.

定義 5.39 一般に代数曲線 (Riemann 面) \mathcal{X} の基点 I の近傍に 2 つの動点 P, Q を考へ, I での局所変数 t のそれぞれの点における値を t_1, t_2 とする. $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ 上の 2 次微分形式

$$(5.40) \quad \mathcal{X} \times \mathcal{X} \ni (P, Q) \mapsto \xi(P, Q)$$

で, 対角部分 $\Delta_{\mathcal{X}}$ 以外では正則, かつ, 次の条件を満たすものを Klein の基本 2 形式 と呼ぶ:

動点 $P \in \mathcal{X}$ に対応する局所経数を取り t と書く. P の近傍の動点 Q_1, Q_2 の t の値をそれぞれ t_1, t_2 とするとき, $\xi(Q_1, Q_2) = \xi(t_1, t_2)$ と記す. このとき,

$$(5.41) \quad \begin{aligned} \xi(t_1, t_2) &= \left(\frac{1}{(t_1 - t_2)^2} + \text{“a series in } \mathbb{C}[[t_1, t_2]] \text{”} \right) dt_1 dt_2, \\ \xi(t_1, t_2) &= \xi(t_2, t_1). \end{aligned}$$

注意 5.42 上の様な $\xi(P, Q)$ は一意的には定まらないが, その様な性質を持つ別の 2 形式を取れば, その差は

$$\sum_{i,j} a_{ij} \omega_i(P) \omega_j(Q) \quad (a_{ij} = a_{ji} \text{ は定数})$$

の形になる.

平面三浦曲線の場合. (d, q) 平面三浦曲線の場合は, 上の ξ は以下に述べる様な数論的な性質を持つので, その場合については, 単に解析的な視点からだけではなく, 形式的冪級数を用いた代数的な視点からも微分形式を考察していく.

補題 5.43 平面三浦曲線 \mathcal{C} については, 種数 g 個の第 2 種微分形式 η_j ($j = 1, \dots, g$) が存在して (必然的にこれら η_j は $t = 0$ でのみで極を持つ)

$$(5.44) \quad \xi((x, y), (z, w)) = \frac{d}{dz}[(x, y), (z, w)] dz + \sum_{j=1}^g \omega_j(x, y) \eta_j(z, w)$$

で定められる 2-形式 $\xi((x, y), (z, w))$ が次の性質を持つ: いま t_1 と t_2 をそれぞれ数論的局所径数 t の (x, y) と (z, w) における値とし, $\xi((x, y), (z, w)) = \xi(t_1, t_2)$ と書くとき, (どの μ_j も $\mu_j \in \mathbb{C}$ であるとして)

$$(1) \quad \xi(t_1, t_2) - \frac{dt_1 dt_2}{(t_1 - t_2)^2} \in \mathbb{C}[[t_1, t_2]] dt_1 dt_2,$$

$$(2) \quad \xi(t_1, t_2) = \xi(t_2, t_1).$$

また, より強く, その η_j ($j = 1, \dots, g$) を

$$\xi(t_1, t_2) - \frac{dt_1 dt_2}{(t_1 - t_2)^2} \in \mathbb{Z}[\boldsymbol{\mu}][[t_1, t_2]]$$

となる様を選ぶことができる. また, η_j は

$$\eta_j(t) = \frac{-w_{g-j+1}}{t^{w_{g-j+1}+1}} dt + \text{“higher terms in } t \text{ with coefficients in } \mathbb{Z}[\boldsymbol{\mu}] \text{” } dt$$

と展開される. 但し, w_j は組 (d, q) に関する j 番目の Schur-Weierstraß 空隙値である.

注意 5.45 (1) この様に展開係数の整数性に拘るのは, 後で sigma 関数の展開の Hurwitz 整性を証明するのに必要だからである.

(2) 式 (5.44) を最も一般的な $(2, 3)$ 曲線

$$y^2 + (\mu_1 x + \mu_3) y = x^3 + \mu_2 x^2 + \mu_4 x + \mu_6$$

について書くと

$$\begin{aligned} \omega_1(x, y) &= \frac{dx}{2y + \mu_1 x + \mu_3}, \quad \eta_1(x, y) = \frac{-x dx}{2y + \mu_1 x + \mu_3}, \\ \xi((x, y), (z, w)) &= \left\{ xz(x+z) + (\mu_1^2 + 2\mu_2)xz + \mu_1(z y + x w) \right. \\ &\quad \left. + (\mu_3 \mu_1 + \mu_4)(x+z) + 2yw + \mu_3(y+w) + \mu_3^2 + 2\mu_6 \right\} \\ &\quad \cdot \frac{dx dz}{(z-x)^2 (2y + \mu_1 x + \mu_3)(2w + \mu_1 z + \mu_3)} \end{aligned}$$

である.

証明 (5.43 の) (2, 3) 曲線の場合は [43] に証明がある. 以下の証明を読まれて (2, 5) 曲線の場合などに同様に方法を試みられたい. また, (3, 5) 曲線の場合, [44] に, それぞれの $\xi(t_1, t_2)$ の具体的な形が記してある. ここでは (3, 4) 曲線の場合に証明を書く. つまり, 次の曲線について述べる³³:

$$(5.46) \quad f(x, y) = y^3 + (\mu_1 x + \mu_4) y^2 + (\mu_2 x^2 + \mu_5 x + \mu_8) y - (x^4 + \mu_3 x^3 + \mu_6 x^2 + \mu_9 x + \mu_{12}) \quad (\mu_j \text{ は定数}).$$

計算のための記号を用意する. まづ $t = x/y$, $s = y/x^2$ とすると,

$$\begin{aligned} f(1/t/s, 1/t^2/s) s^4 t^6 &= 0, \\ \therefore -\mu_{12} s^4 t^6 - \mu_9 s^3 t^5 + (\mu_8 s^3 - \mu_6 s^2) t^4 \\ &\quad + (\mu_5 s^2 - \mu_3 s) t^3 + (\mu_4 s^2 + \mu_2 s - 1) t^2 + \mu_1 s t + s = 0 \end{aligned}$$

を使つて, 通常の方法で再帰的に s を t の冪級数に展開し, その結果, 次を得る:

$$\begin{aligned} x(t) &= t^{-3} + \mu_1 t^{-2} + \mu_2 t^{-1} - \mu_3 + \mu_4 t + (-\mu_4 \mu_1 + \mu_5) t^2 \\ &\quad + (\mu_4 \mu_1^2 - \mu_5 \mu_1 - \mu_2 \mu_4 - \mu_6) t^3 + \cdots \in \frac{1}{t^3} \mathbb{Z}[\boldsymbol{\mu}][[t]], \\ y(t) &= x(t)/t \in \frac{1}{t^4} + \frac{1}{t^3} \mathbb{Z}[\boldsymbol{\mu}][[t]]. \end{aligned}$$

これから,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -3t^{-4} - 2\mu_1 t^{-3} - \mu_2 t^{-2} + \mu_4 + (-2\mu_4 \mu_1 + 2\mu_5) t \\ &\quad + (3\mu_4 \mu_1^2 - 3\mu_5 \mu_1 - 3\mu_2 \mu_4 - 3\mu_6) t^2 + \cdots \in \frac{1}{t^4} \mathbb{Z}[\boldsymbol{\mu}][[t]]. \end{aligned}$$

を得, さらに

$$(5.47) \quad \begin{aligned} \frac{\frac{dx}{dt}(t)}{f_y(t)} &= -t^4 + 2\mu_1 t^5 + (-3\mu_1^2 + 2\mu_2) t^6 + (4\mu_1^3 - 6\mu_2 \mu_1 - 2\mu_3) t^7 \\ &\quad + (-5\mu_1^4 + 12\mu_2 \mu_1^2 + 6\mu_3 \mu_1 + (3\mu_4 - 3\mu_2^2)) t^8 \\ &\quad + (6\mu_1^5 - 20\mu_2 \mu_1^3 - 12\mu_3 \mu_1^2 - 12(\mu_4 - \mu_2^2) \mu_1 + (6\mu_3 \mu_2 + 3\mu_5)) t^9 \\ &\quad + (-7\mu_1^6 + 30\mu_2 \mu_1^4 + 20\mu_3 \mu_1^3 + (30\mu_4 - 30\mu_2^2) \mu_1^2 \\ &\quad + (-24\mu_3 \mu_2 - 12\mu_5) \mu_1 - 12\mu_2 \mu_4 + 4\mu_2^3 - 3\mu_3^2 - 3\mu_6) t^{10} \\ &\quad + \cdots \in t^4 \mathbb{Z}[\boldsymbol{\mu}][[t]]. \end{aligned}$$

も得られる. これから (3, 4) 曲線の場合の第 1 種微分形式の t による展開は

$$\begin{aligned} \omega_1(x, y) &= \frac{dx}{f_y(x, y)} = (-t^4 + \cdots) dt, \\ \omega_2(x, y) &= \frac{x dx}{f_y(x, y)} = (-t + \cdots) dt, \\ \omega_3(x, y) &= \frac{y dx}{f_y(x, y)} = (-1 + \cdots) dt \end{aligned}$$

³³超楕円曲線の場合だけでは, 証明の道筋がわかりにくいと思はれるのと, 筆者が洗練された一般的証明を持つてゐないからである.

である. 与へられた一般的な t に対して, $t^{(1)}$ と $t^{(2)}$ を $x\langle t \rangle = x\langle t^{(1)} \rangle = x\langle t^{(2)} \rangle$ となる値で, $t^{(1)}, t^{(2)}$ の 3 つは (generic には) 異なる値とする. いま, この記法で 6 点 $(x\langle t_i \rangle, y\langle t_i \rangle)$, $(x\langle t_i^{(1)} \rangle, y\langle t_i^{(1)} \rangle)$, $(x\langle t_i^{(2)} \rangle, y\langle t_i^{(2)} \rangle)$, $(i = 1, 2)$ を考へる. さて, Weierstraß の準備定理により

$$x\langle t_1 \rangle^{-1} - x\langle t_2 \rangle^{-1} = (t_1 - t_2)(t_1 - t_2^{(1)})(t_1 - t_2^{(2)})p(t_1, t_2)$$

となる $p(t_1, t_2) \in 1 + (t_1, t_2)\mathbb{Z}[\boldsymbol{\mu}][[t_1, t_2]]$ が存在する.

$$\begin{aligned} & \frac{\omega_1(x, y)}{dt_1} \frac{1}{x-z} \frac{f(Z, y) - f(Z, w)}{y-w} \Big|_{Z=z} \\ (5.48) \quad &= \frac{\omega_1(x, y)}{dt_1} \frac{-(xz)^{-1}}{x^{-1} - z^{-1}} \frac{f(Z, y) - f(Z, w)}{y-w} \Big|_{Z=z} \\ &= \frac{\frac{dx}{dt}\langle t_1 \rangle}{\frac{\partial}{\partial y}f(x, y)} \frac{1}{t_1 - t_2} \cdot \frac{y\langle t_1 \rangle - y\langle t_2^{(1)} \rangle}{t_1 - t_2^{(1)}} \cdot \frac{y\langle t_1 \rangle - y\langle t_2^{(2)} \rangle}{t_1 - t_2^{(2)}} (-x\langle t_1 \rangle x\langle t_2 \rangle)^{-1} p(t_1, t_2)^{-1} \end{aligned}$$

において中央の 2 つの因子は, Weierstraß の準備定理により約分される. つまり $j = 1, 2$ について

$$\frac{y\langle t_1 \rangle - y\langle t_2^{(j)} \rangle}{t_1 - t_2^{(j)}} \in (t_1 t_2^{(j)})^{-4} \mathbb{Z}[\boldsymbol{\mu}][[t_1, t_2^{(j)}]].$$

さて

$$\begin{aligned} y\langle t_1 \rangle - y\langle t_2^{(1)} \rangle &= \left(\frac{x\langle t_2 \rangle}{t_1} - \frac{x\langle t_2 \rangle}{t_2^{(1)}} \right) - \left(\frac{x\langle t_1 \rangle}{t_1} - \frac{x\langle t_2 \rangle}{t_1} \right) \\ &= \frac{x\langle t_2 \rangle}{t_1 t_2^{(1)}} (t_2^{(1)} - t_1) + \frac{1}{t_1} (x\langle t_1 \rangle - x\langle t_2 \rangle) \end{aligned}$$

なので

$$\frac{y\langle t_1 \rangle - y\langle t_2^{(1)} \rangle}{t_2^{(1)} - t_1} = \frac{x\langle t_2 \rangle}{t_1 t_2^{(1)}} + \frac{1}{t_1} (t_1 - t_2)(t_1 - t_2^{(2)})x\langle t_1 \rangle x\langle t_2 \rangle$$

これは $t_2^{(1)}$ を $t_2^{(2)}$ に替へても同様である. それら 2 式を掛ければ

$$\begin{aligned} & \frac{y\langle t_1 \rangle - y\langle t_2^{(1)} \rangle}{t_2^{(1)} - t_1} \cdot \frac{y\langle t_1 \rangle - y\langle t_2^{(2)} \rangle}{t_2^{(2)} - t_1} \\ &= \frac{x\langle t_2 \rangle^2}{t_1^2 t_2^{(1)} t_2^{(2)}} + \frac{x\langle t_1 \rangle x\langle t_2 \rangle^2}{t_1^2} (t_1 - t_2) \left(\frac{t_1 - t_2^{(2)}}{t_2^{(1)}} + \frac{t_1 - t_2^{(1)}}{t_2^{(2)}} \right) \\ & \quad + \frac{x\langle t_1 \rangle^2 x\langle t_2 \rangle^2}{t_1^2} (t_1 - t_2)^2 (t_1 - t_2^{(1)})(t_1 - t_2^{(2)}) \end{aligned}$$

一方, すべての μ_j が 0 の場合には $t_2^{(1)} = \zeta t_2$, $t_2^{(2)} = \zeta^2 t_2$ ($\zeta = e^{2\pi i/3}$) であり, この場合

に上記を計算すると

$$\begin{aligned}
& \frac{y\langle t_1 \rangle - y\langle t_2 \rangle}{t_2^{(1)} - t_1} \cdot \frac{y\langle t_1 \rangle - y\langle t_2 \rangle}{t_2^{(1)} - t_1} xy\langle t_1 \rangle^{-1} y\langle t_2 \rangle^{-1} \\
&= \frac{1}{t_1 t_2^5} (t_1^6 - t_1 t_2^5 + t_1^3 t_2^3 - t_1^6 t_2 + t_2^6) \\
&= 1 + \frac{1}{t_1 t_2^5} (t_1^6 - 2t_1 t_2^5 + t_1^3 t_2^3 - t_1^6 t_2 + t_2^6) \\
&= 1 + \frac{1}{t_1 t_2^5} (t_2 - t_1) (-t_1^5 - t_2^3 t_1^2 - t_2^4 t_1 + t_2^5) \\
&= 1 + (t_2 - t_1) \left(-\frac{t_1^4}{t_2^5} - \frac{t_1}{t_2^2} - \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_1} \right).
\end{aligned}$$

従つて, $\{\mu_j\}$ が一般の場合に戻つて, d/dt_2 したもの

$$\begin{aligned}
(5.49) \quad & \frac{d}{dt_2} [(x, y)\langle t_1 \rangle, (x, y)\langle t_2 \rangle] dt_2 = \left((t_2 - t_1)^{-2} \right. \\
& \left. + t_1^4 \cdot 5t_2^{-6} + t_1 \cdot 2t_2^{-3} + t_2^{-2} + \text{"higher terms in } \mu_j\text{"} \right) dt_1 dt_2
\end{aligned}$$

の後の級数の部分は $\mathbb{Z}[\boldsymbol{\mu}]$ 係数であることがわかつた. さて (5.49) の t_1 に関しての定数項にあたる部分のうち, t_2 の負冪の部分 (つまり t_2^{-2}) と同じ主要項を持つ第 2 種微分 $\eta_3\langle t_2 \rangle$ で, その t_2 に関する展開が $\mathbb{Z}[\boldsymbol{\mu}]$ に係数を持つものが取れる. 実際, それは

$$\eta_3\langle t_2 \rangle = \frac{-x^2 dx}{f_y(x, y)} \langle t_2 \rangle = (t_2^{-2} + \dots) dt_2$$

である. そこで (5.49) から $\omega_3\langle t_1 \rangle \eta_3\langle t_2 \rangle$ を差し引いたもの

$$\begin{aligned}
(5.50) \quad & \frac{d}{dt_2} [(x, y)\langle t_1 \rangle, (x, y)\langle t_2 \rangle] dt_2 + \omega_3\langle t_1 \rangle \eta_3\langle t_2 \rangle \\
&= \left((t_2 - t_1)^{-2} + t_1^4 \cdot 5t_2^{-6} + t_1 \cdot 2t_2^{-3} + \text{"higher terms in } \mu_j\text{"} \right) dt_1 dt_2
\end{aligned}$$

について, t_1 に関しての 1 次の項の係数にあたる部分全体のうち, t_2 の負冪の部分 (それは $2t_2^{-3} + \dots$ の形) と同じ主要項を持つ第 2 種微分 $\eta_2\langle t_2 \rangle$ で, その t_2 に関する展開が $\mathbb{Z}[\boldsymbol{\mu}]$ に係数を持つものが取れる. 実際, それは

$$\eta_2\langle t_2 \rangle = \frac{(-xy + a\mu_1 x^2 + b\mu_3 y + \dots) dx}{f_y(x, y)} \langle t_2 \rangle = (t_2^{-2} + \dots) dt_2 \quad (a, b, \dots \in \mathbb{Z})$$

の形で取れる. 最後に (5.50) から $\omega_2\langle t_1 \rangle \eta_2\langle t_2 \rangle$ を差し引いたもの

$$\begin{aligned}
(5.51) \quad & \frac{d}{dt_2} [(x, y)\langle t_1 \rangle, (x, y)\langle t_2 \rangle] dt_2 + \omega_3\langle t_1 \rangle \eta_3\langle t_2 \rangle + \omega_2\langle t_1 \rangle \eta_2\langle t_2 \rangle \\
&= \left((t_2 - t_1)^{-2} + t_1^4 \cdot 5t_2^{-6} + \text{"higher terms in } \mu_j\text{"} \right) dt_1 dt_2
\end{aligned}$$

を考えると, これらは $\mathbb{Z}[\boldsymbol{\mu}]$ 係数の級数あることと, $\mathbb{Q}[\boldsymbol{\mu}]$ 上では補題は成り立つ ([39], Lemma 5) ことから, この式を $\mathbb{Q}[\boldsymbol{\mu}]$ で考へて存在するべき第 2 種微分 $\eta_1\langle t_2 \rangle$ は

$$\begin{aligned}
\eta_1\langle t_2 \rangle &= \frac{(-x^2 y + \dots) dx}{f_y(x, y)} \langle t_2 \rangle \quad (\text{分子の } \dots \text{ のところは } \mathbb{Z}[\boldsymbol{\mu}][x, y] \text{ に属する}) \\
&= (t_2^{-2} + \dots) dt_2
\end{aligned}$$

の形でなければならず, この t_2 による冪級数展開は $\mathbb{Z}[\boldsymbol{\mu}]$ 上に係数を持つ. これで

$$(5.52) \quad \begin{aligned} & \frac{d}{dt_2} [(x, y)\langle t_1 \rangle, (x, y)\langle t_2 \rangle] dt_2 + \omega_3\langle t_1 \rangle \eta_3\langle t_2 \rangle + \omega_2\langle t_1 \rangle \eta_2\langle t_2 \rangle + \omega_1\langle t_1 \rangle \eta_1\langle t_2 \rangle \\ & = \left((t_2 - t_1)^{-2} + \text{“a series in } \mathbb{Z}[\boldsymbol{\mu}][[t_1, t_2]] \text{”} \right) dt_1 dt_2 \end{aligned}$$

となることがわかった. 次にこれを t_1, t_2 に関して対称な形式に変形する. まづ, そのもそのこの 2 形式の性質から, (5.52) は

$$(t_1 - t_2)^{-2} dt_1 dt_2 + \sum_{i,j=1}^3 a_{ij} \omega_i\langle t_1 \rangle \omega_j\langle t_2 \rangle \quad (a_{ij} \in \mathbb{Z})$$

と書かれなければならない. このとき,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt_2} [(x, y)\langle t_1 \rangle, (x, y)\langle t_2 \rangle] dt_2 + \omega_3\langle t_1 \rangle (\eta_3 - a_{31} \omega_1 - a_{32} \omega_2)\langle t_2 \rangle \\ & \quad + \omega_2\langle t_1 \rangle (\eta_2 - a_{21} \omega_1 - a_{23} \omega_3)\langle t_2 \rangle + \omega_1\langle t_1 \rangle (\eta_1 - a_{12} \omega_2 - a_{13} \omega_3)\langle t_2 \rangle \\ & = (t_1 - t_2)^{-2} dt_1 dt_2 + \sum_{i=1}^3 a_{ii} \omega_i\langle t_1 \rangle \omega_i\langle t_2 \rangle \end{aligned}$$

となるので, η_3, η_2, η_1 をそれぞれ

$$\eta_3 - a_{31} \omega_1 - a_{32} \omega_2, \quad \eta_2 - a_{21} \omega_1 - a_{23} \omega_3, \quad \eta_1 - a_{12} \omega_2 - a_{13} \omega_3$$

に取り替へれば, それらが所望の第 2 種微分形式となり, 証明が完結する. \square

注意 5.53 参考のために, 上記の証明の結果得られる (3, 4) 曲線の第 2 種微分形式 η_1, η_2, η_3 , 及び 2 形式 $\boldsymbol{\xi}((x, y), (z, w))$ を (x, y) と (z, w) で書いたものを記しておく.

$$\begin{aligned} \eta_1(x, y) &= -(5x^2y + (\mu_1\mu_2 + 3\mu_3)xy + (\mu_2\mu_4 + \mu_6)y + \mu_2y^2 + 3\mu_1x^3 \\ & \quad + (\mu_2^2 + 2\mu_3\mu_1 + 2\mu_4)x^2 + (\mu_5\mu_2 + \mu_6\mu_1 + \mu_3\mu_4)x) \frac{dx}{f_y(x, y)}, \\ \eta_2(x, y) &= -(2xy + \mu_1x^2) \frac{dx}{f_y(x, y)}, \\ \eta_3(x, y) &= -\frac{x^2}{f_y(x, y)}. \end{aligned}$$

また,

$$\boldsymbol{\xi}((x, y), (z, w)) = \frac{F(x, y, z, w) dx dz}{(x - z)^2 f_y(x, y) f_y(z, w)}$$

であつて, ここに

$$\begin{aligned} F(x, y, z, w) &= 3y^2w^2 - 2(xyz^3 + x^3zw) + (x^2z^2w + x^2yz^2) + (\mu_8\mu_4 + 3\mu_{12})(y + w) \\ & \quad + \mu_8(y^2 + w^2) + (\mu_{12}\mu_1 + \mu_9\mu_4 + \mu_8\mu_5)(x + z) + (\mu_8\mu_1 + \mu_9)(xy + zw) \\ & \quad + (2\mu_4^2 - 2\mu_8)yw + (\mu_5\mu_4 + 2\mu_9)(yz + wx) + (2\mu_4\mu_1 - \mu_5)(yxw + yzw) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (\mu_4\mu_2 + \mu_6)(yz^2 + wx^2) + 2\mu_4(y^2w + yw^2) + \mu_5(y^2z + xw^2) \\
& + 2\mu_1(xyw^2 + y^2zw) + \mu_2(y^2z^2 + x^2w^2) + (2\mu_9\mu_1 + 2\mu_8\mu_2 + 2\mu_4\mu_6 + \mu_5^2)xz \\
& + (\mu_5\mu_1 + 2\mu_6)(xzw + xyz) + (\mu_6\mu_1 + \mu_5\mu_2 + \mu_4\mu_3)(xz^2 + x^2z) \\
& + (2\mu_1^2 - 2\mu_2)xyzw + (2\mu_3\mu_1 + \mu_2^2 + 2\mu_4)x^2z^2 + (\mu_2\mu_1 + 3\mu_3)(xyz^2 + x^2zw) \\
& + \mu_1(x^2z^3 + x^3z^2) + (\mu_8^2 + 2\mu_{12}\mu_4).
\end{aligned}$$

5.10 超楕円曲線の場合

前節の内容を超楕円曲線の場合について [4] に沿った方法で以下に述べる. まづは (5.38) に従ひ,

$$\mathcal{C} : y^2 = x^{2g+1} + \mu_2x^{2g} + \cdots + \mu_{4g}x + \mu_{4g+2}$$

の上の動点 $(x, y), (w, z)$ について

$$(5.54) \quad [(x, y), (z, w)] = \frac{y+w}{x-z} \cdot \frac{dx}{2y}$$

である. 実は ξ は

$$(5.55) \quad \xi((x, y), (w, z)) = \frac{F(x, z) + 2yw}{(x-z)^2} \frac{dx}{2y} \frac{dz}{2w}$$

で与えられる. ここに

$$\begin{aligned}
(5.56) \quad F(x, z) &= \sum_{j=0}^g x^j z^j (\mu_{4(g-j)}(x+z) + 2\mu_{4g-4j+2}) \\
&= (x+z)x^g z^g \\
&\quad + 2\mu_2 x^g z^g \\
&\quad + \mu_4(x+z)x^{g-1} z^{g-1} \\
&\quad + 2\mu_6 x^{g-1} z^{g-1} \\
&\quad + \mu_8(x+z)x^{g-2} z^{g-2} \\
&\quad + \cdots \\
&\quad + \mu_{4g}(x+z) \\
&\quad + 2\mu_{4g+2}
\end{aligned}$$

である. これは

$$(5.57) \quad F(x, x) = 2f(x), \quad \frac{\partial}{\partial x} F(x, z) \Big|_{x=z} = \frac{d}{dx} f(x)$$

を満たす. さて \mathcal{C} 上の動点

$$P(x, y), \quad Q(z, w)$$

と定点

$$A(a, b), B(c, d)$$

について

$$(5.58) \quad R_{Q,B}^{P,A} = \int_A^P \int_B^Q \xi = \int_A^P \int_B^Q \frac{F(x, z) + 2yw}{(x-z)^2} \frac{dx}{2y} \frac{dz}{2w} \quad (\text{weight } 0)$$

とおき, さらに

$$(5.59) \quad \Pi_{Q,B}^{P,A} = \int_A^P ([P, Q] - [P, B]) \quad (\text{変数 } P \text{ について積分})$$

とおく³⁴. このどちらも $P \in \mathcal{C}$. (\mathcal{C} は \mathcal{C} に対応する Riemann 面の正規多角形) の函数とみるときは $P = Q, B$ でそれぞれ留数 $1, -1$ なる 1 位の極を持ち, その他の点では正則な微分形式の積分になつてゐる. いま

$$(5.60) \quad \eta_j = -\frac{1}{2y} \sum_{k=j}^{2g-j} (k+1-j) \mu_{4g-2j-2k} x^k dx$$

なる微分形式を考へる. つまり

$$(5.61) \quad \begin{aligned} \eta_g &= -\mu_0 x^g \frac{dx}{2y}, \\ \eta_{g-1} &= -(\mu_4 x^{g-1} + 2\mu_2 x^g + 3\mu_0 x^{g+1}) \frac{dx}{2y}, \\ \eta_{g-2} &= -(\mu_8 x^{g-2} + 2\mu_6 x^{g-1} + 3\mu_4 x^g + 4\mu_2 x^{g+1} + 5\mu_0 x^{g+2}) \frac{dx}{2y}, \\ &\dots \\ \eta_1 &= -(\mu_{4g-4} x + 2\mu_{4g-6} x^2 + 3\mu_{4g-6} x^3 + \dots \\ &\quad + (2g)\mu_2 x^{2g-2} + (2g-1)\mu_0 x^{2g-1}) \frac{dx}{2y} \end{aligned}$$

とおく. このとき,

補題 5.62

$$(5.63) \quad \xi((x, y), (z, w)) = \frac{d}{dz} [(z, w), (x, y)] dz + \sum_{j=1}^g \omega_j(x, y) \eta_j(z, w)$$

が成り立つ. 積分で書けば

$$(5.64) \quad R_{Q,B}^{P,A} = \Pi_{Q,B}^{P,A} + \sum_{j=1}^g \int_A^P \omega_j \int_B^Q \eta_j.$$

証明 ξ や η_j は (5.44) から定められるものであり, 補題 5.43 の証明の方法で実際に計算されて, その結果が (5.55) と (5.61) なのである. しかし, ここでは, 逆に (5.55) と (5.61) から両辺を直接計算して一致することを確かめて証明とする. やや大変ではあるが読者には試られたい. \square

³⁴行き掛かり上, この辺りでは文献 [4] と類似の記号を別の意味に使つてゐる. 申し訳ないが, どうか混同しないでいただきたい.

命題 5.65 ある定数成分の行列 $\Gamma = [c_{ij}]_{g \times g}$ が存在して, 任意の $P, Q, A, B \in \mathcal{C}$ に対して

$$\xi(P, Q) = \hat{\xi}(P, Q) + 2 \sum_{j=1}^g c_{ij} \omega_j(P) \omega_j(Q), \text{ または}$$

$$\int_A^P \int_B^Q \xi = \int_A^P \int_B^Q \hat{\xi}(P, Q) + 2 \sum_{j=1}^g c_{ij} \int_A^P \omega_j \int_B^Q \omega_j.$$

が成り立つ. 但し, $\hat{\tau}_{Q,B}$ は正規化された第 3 種微分形式である. つまり (5.35) の $\hat{\xi}(P, Q)$ について,

$$(5.66) \quad R_{Q,B}^{P,A} = \int_A^P \hat{\tau}_{Q,B}(P) + 2 \sum_{j=1}^g c_{ij} \int_A^P \omega_j(P) \int_B^Q \omega_j(Q).$$

証明 微分形式

$$(5.67) \quad \xi(P, Q) - \hat{\xi}(P, Q)$$

は P についても Q についても至る所で正則であるから, 第 1 種微分形式の 2 重 1 次結合で表せなければならない. 後半は (5.35) からわかる. \square

先の (5.60) の, あるいはより一般に 補題 5.43 で述べた, 第 2 種微分形式 η_j の周期からなる行列を

$$(5.68) \quad H' = \left[\int_{\alpha_j} \eta_i \right]_{\substack{1 \leq i \leq g \\ 1 \leq j \leq g}}, \quad H'' = \left[\int_{\beta_j} \eta_i \right]_{\substack{1 \leq i \leq g \\ 1 \leq j \leq g}}$$

と記す. これと (5.23) の行列を結合して

$$(5.69) \quad M = \begin{bmatrix} \Omega' & \Omega'' \\ H' & H'' \end{bmatrix}$$

と書く.

補題 5.70 (一般 Legendre 関係式, Weierstraß 関係式)
上の行列 M は

$$(5.71) \quad M \begin{bmatrix} & -1_g \\ 1_g & \end{bmatrix} {}^t M = 2\pi i \begin{bmatrix} & -1_g \\ 1_g & \end{bmatrix}$$

$$\left(= \begin{bmatrix} -\Omega'^t \Omega'' + \Omega''^t \Omega' & -\Omega'^t H'' + \Omega''^t H' \\ -H'^t \Omega'' + H''^t \Omega' & -H'^t H'' + H''^t H' \end{bmatrix} \right)$$

を満たす. また (5.65) の Γ は

$$(5.72) \quad \Gamma = \frac{1}{2} H' \Omega'^{-1}$$

と書いて Γ は対称行列である³⁵.

³⁵ この行列 Γ は sigma 関数を定義する際に theta 関数の違いの調整をする.

注意 5.73 $\Omega'^{-1}\Omega'' = T$ も対称行列であり, $\text{Im } T > 0$ であることは既に述べた.

証明 等式 (5.64) と (5.66) より $P = (x, y)$ について

$$\int_A^P ([P, Q] - [P, B]) dx + \sum_{j=1}^g \int_A^P \omega_j \int_B^P \eta_j = \int_A^P \hat{\tau}_{Q,B} + 2 \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^g c_{ij} \int_A^P \omega_i \int_B^Q \omega_j$$

である. これを P における局所変数 t で微分すると

$$\begin{aligned} ([P, Q] - [P, B]) \frac{dx}{dt} \Big|_{t=0} + \sum_{j=1}^g \frac{x^{j-1}}{2y} \frac{dx}{dt} \Big|_{t=0} \int_B^Q \eta_j \\ = \int_B^Q \hat{\eta}_{P,t,2} + 2 \sum_i \sum_j c_{ij} \frac{x^{i-1}}{2y} \frac{dx}{dt} \Big|_{t=0} \int_B^Q \omega_j. \end{aligned}$$

ここで (1.73) の関係式

$$\frac{d}{dt} \int_P^{P_t} \hat{\tau}_{Q_1, Q_2} \Big|_{t=0} = \int_{Q_1}^{Q_2} \hat{\eta}_{P,t,2}$$

を使った. 次に各 $1 \leq k \leq g$ について α_k に 1 点 B を取り, Q を B から α_k に沿って 1 周させると

$$0 + \left[\frac{1}{2y} \frac{dx}{dt} \Big|_{t=0} \cdots \frac{x^{g-1}}{2y} \frac{dx}{dt} \Big|_{t=0} \right] H' = 0 + 2 \left[\frac{1}{2y} \frac{dx}{dt} \Big|_{t=0} \cdots \frac{x^{g-1}}{2y} \frac{dx}{dt} \Big|_{t=0} \right] \Gamma \Omega'$$

を得る. ここで P は任意であつて

$$\frac{1}{2y}, \frac{x}{2y}, \cdots, \frac{x^{g-1}}{2y}$$

は 1 次独立なので

$$(5.74) \quad H' = 2\Gamma\Omega'$$

となり (5.72) が示せた. Γ の対称性は

$$R_{Q,B}^{P,A} = R_{P,A}^{Q,B}$$

であることと変数と径数の交換法則 (1.75) により (5.66) からわかる. さて, (5.64) と (5.66) から

$$(5.75) \quad \Pi_{Q,B}^{P,A} + \sum_{j=1}^g \int_A^P \omega_j \int_B^Q \eta_j = \int_B^Q \hat{\tau}_{P,A} + 2 \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^g c_{ij} \int_A^P \omega_i \int_B^Q \omega_j.$$

ここで B から Q への積分路を β_k へと変形すれば

$$(5.76) \quad \int_A^P 0 dx + \sum_{j=1}^g \int_A^P \omega_j \int_{\beta_k} \eta_j = \int_{\beta_k} \hat{\tau}_{P,A} + 2 \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^g c_{ij} \int_A^P \omega_i \int_{\beta_k} \omega_j.$$

従つて, (1.76), つまり

$$2\pi i \int_{P_1}^{P_2} \hat{\omega}_k = \int_{\beta_k} \hat{\tau}_{P_1, P_2}$$

より

$$= 2\pi i \int_A^P \hat{\omega}_j + 2 \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^g c_{ij} \int_A^P \omega_i \int_{\beta_k} \omega_j.$$

さらに (5.76) の A から P へ至る積分路を α_ℓ に変形することで

$$\sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^g \int_{\alpha_\ell} \omega_j \int_{\beta_k} \eta_j, = 2\pi i \int_{\alpha_\ell} \hat{\omega}_j + 2 \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^g c_{ij} \int_{\alpha_\ell} \omega_i \int_{\beta_k} \omega_j.$$

つまり

$$\begin{aligned} {}^t\Omega' H'' &= 2\pi i 1_g + 2 {}^t\Omega' \Gamma \Omega'' \\ &= 2\pi i 1_g + 2 {}^t\Omega' \left(\frac{1}{2} {}^t\Omega'^{-1} {}^t H' \right) \Omega'' \\ &= 2\pi i 1_g + {}^t H' \Omega'' \end{aligned}$$

よつて

$$(5.77) \quad {}^t\Omega' H'' - {}^t H' \Omega'' = 2\pi i 1_g.$$

この転置を取れば

$${}^t H'' \Omega' - {}^t \Omega'' H' = 2\pi i 1_g.$$

一方, (5.77) に左から ${}^t\Omega'^{-1}$ を掛けて ${}^t\Omega'^{-1} {}^t H' = 2\Gamma$ の対称性を使へば

$$(5.78) \quad H'' - H' \Omega'^{-1} \Omega'' = 2\pi i {}^t\Omega'^{-1}.$$

さらにこの転置を取つて

$$(5.79) \quad {}^t H'' - {}^t \Omega'' {}^t\Omega'^{-1} {}^t H' = 2\pi i \Omega'^{-1}.$$

$\Omega'^{-1} \Omega''$ は対称行列だから (5.78) に右から ${}^t\Omega'$ を掛けることで

$$(5.80) \quad H'' {}^t\Omega' - H' {}^t\Omega'' = 2\pi i 1_g$$

も得られる. 次に

$$\begin{aligned} \Omega'^{-1} \Omega'' &= {}^t(\Omega'^{-1} \Omega'') = {}^t\Omega'' {}^t\Omega'^{-1}, \\ \therefore \Omega'' {}^t\Omega' &= \Omega' {}^t\Omega'', \\ \therefore \Omega'' {}^t\Omega' - \Omega' {}^t\Omega'' &= O. \end{aligned}$$

さらに

$$\begin{aligned} H'' {}^t H' &= H'' {}^t\Omega' {}^t\Omega'^{-1} {}^t H' \\ &= (2\pi i 1_g + H' {}^t\Omega'') {}^t\Omega'^{-1} {}^t H' \quad (\because (5.80)) \\ &= 2\pi i {}^t\Omega'^{-1} {}^t H' + H' {}^t\Omega'' {}^t\Omega'^{-1} {}^t H' \\ &= 2\pi i {}^t\Omega'^{-1} {}^t H' + H' ({}^t H'' - 2\pi i \Omega'^{-1}) \quad (\because (5.79)) \\ &= H' {}^t H'' \quad (\because \Gamma \text{ の対称性}). \end{aligned}$$

これで与式 (5.71) が示せた. □

注意 5.81 (5.71) より M も正則であることがわかり,

$${}^t M^{-1} \begin{bmatrix} & -1_g \\ 1_g & \end{bmatrix} M^{-1} = \frac{1}{2\pi i} \begin{bmatrix} & -1_g \\ 1_g & \end{bmatrix}$$

であるが, 左から ${}^t M$, 右から M を掛けると

$$2\pi i \begin{bmatrix} & -1_g \\ 1_g & \end{bmatrix} = {}^t M \begin{bmatrix} & -1_g \\ 1_g & \end{bmatrix} M$$

となる. つまり

$$(5.82) \quad \begin{bmatrix} {}^t H' \Omega' - {}^t \Omega' H' & {}^t H' \Omega'' - {}^t \Omega' H'' \\ {}^t H'' \Omega' - {}^t \Omega'' H' & {}^t H'' \Omega'' - {}^t \Omega'' H'' \end{bmatrix} = 2\pi i \begin{bmatrix} & -1_g \\ 1_g & \end{bmatrix}$$

なる関係式を得る.

補題 5.83 (2.30) で定めた積について

$$\omega_i \star \omega_j = \eta_i \star \eta_j = 0, \quad \omega_i \star \eta_j = \delta_{ij}$$

が成り立つ. つまり ω_j, η_j ($j = 1, \dots, g$) は $H^1(\mathcal{C}, \mathbb{C})$ の symplectic 基底になつてゐる.

証明 これらは (1.39) と (5.71), および \star の定義 (2.30) から直ちに導かれる. \square

6 Sigma 函数

一般の (d, q) 曲線 $\mathcal{C} : f(x, y) = 0$ について, sigma 函数の定義を述べる. 曲線 \mathcal{C} に付随する sigma 函数は種数 $g = \frac{1}{2}(d-1)(q-1)$ 個の変数の整型函数であり, ここから多くの重要な函数が構成される.

6.1 周期格子と Riemann 定数

(d, q) 曲線 C ($g = (d-1)(q-1)/2$) について, 5.21 (例へば超楕円曲線の場合には (5.20)) で定めた第 1 種微分形式による vector $[\omega_1, \dots, \omega_g]$ の周期, つまりあらゆる閉曲線に関しての積分の全体を

$$(6.1) \quad \Lambda = \left\{ \oint [\omega_1, \dots, \omega_g] \right\} (\subset \mathbb{C}^g)$$

と書く. これは 1.62 により \mathbb{C}^g 内の格子になる. いま, \mathcal{C} の基点を ∞ とし, $H_1(\mathcal{C}, \mathbb{Z})$ の symplectic 基底 $\{\alpha_j, \beta_j\}$ を 1 組選ぶとき, (4.5) の Riemann 定数 K を $\Omega^{-1}\delta$ とも記すことにして $\delta', \delta'' \in \mathbb{R}^g/\mathbb{Z}^g$ を

$$\Omega'K = \delta \equiv \Omega'\delta' + \Omega''\delta'' \pmod{\Lambda}$$

で定める. ちなみに, 標準類を $K_{\mathcal{C}} = 2(g-1)\infty$ と取れるので ($\because \omega_1 = \frac{dx}{f_y}$ を考へれば良い), 予め, [35], p.166, Corollary 3.11 によつて,

$$\Omega'K \in \frac{1}{2}\Lambda - (g-1)\mathfrak{a}(\infty, \omega) = \frac{1}{2}\Lambda$$

がわかるが, 我々の場合は以下の計算の結果でもこれは確認される.

6.2 Riemann 定数の計算 (超楕円曲線の場合)

補題 6.2 断らない限りは §5.6 の記号を使ふ.

$$(6.3) \quad y^2 = f(x), \quad f(x) = x^{2g+1} + \mu_2 x^{2g} + \dots + \mu_{4g+2}$$

で定義される超楕円曲線 \mathcal{C} について, $\{\alpha_j, \beta_j\}$ を図 (5.17) の様にとるとき, (4.35) の Riemann 定数 K は

$$(6.4) \quad \begin{aligned} K &= \Omega^{-1}\delta = {}^t\delta' + T {}^t\delta'' \\ &= {}^t\left[\frac{g}{2} \ \frac{g-1}{2} \ \dots \ \frac{1}{2}\right] + T {}^t\left[\frac{1}{2} \ \frac{1}{2} \ \dots \ \frac{1}{2}\right] \pmod{\hat{\Lambda}} \\ &\equiv \sum_{j=1}^g \int_{\infty}^{A_j} \hat{\omega} \end{aligned}$$

で与へられる.

注意 6.5 もし $\{\alpha_j, \beta_j\}$ を図 (5.7) と別のものにするならば δ も変はる. これについては 補題 6.47 の証明で触れる.

証明 2つの方法を紹介する.

[第1の方法]³⁶ α_j, β_j を ∞ を通る様に取り直す. 以下,

$$\mathbf{a}_j(P) = \text{"}j\text{-th component of } \mathbf{a}(P - \infty, \hat{\omega})\text{"} = \int_{\infty}^P \hat{\omega}_j(P)$$

と書く. (4.35) から

$$K_i = -\frac{1}{2} T_{ii} - \mathbf{a}_i(\infty_i) + \sum_{j=1}^g \int_{\alpha_j} \mathbf{a}_i(P) \hat{\omega}_j(P).$$

但し, ∞_i は α_i の終点を表す. まづ, $j = i$ に対しては

$$\begin{aligned} \int_{\alpha_j} \mathbf{a}_i(P) \hat{\omega}_j(P) &= \int_{\alpha_j} \mathbf{a}_j(P) d\mathbf{a}_i(P) = \frac{1}{2} \int_{\alpha_i} d(\mathbf{a}_i(P))^2 \\ &= \frac{1}{2} \{ \mathbf{a}_i(\alpha_i \text{ の終点})^2 - \mathbf{a}_i(\alpha_i \text{ の始点})^2 \} \\ &= \frac{1}{2} \{ \mathbf{a}_i(\alpha_i \text{ の終点})^2 - (\mathbf{a}_i(\alpha_i \text{ の終点}) - 1)^2 \} \\ &= \mathbf{a}_i(\infty_i) - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

ゆゑに

$$(6.6) \quad K_i = -\frac{1}{2} T_{ii} - \frac{1}{2} + \sum_{j \neq i} \int_{\alpha_j} \mathbf{a}_i(P) \hat{\omega}_j(P).$$

次に $j \neq i$ の場合は $\bar{P} = \overline{(x, y)} = (x, -y)$ として

$$\int_{\alpha_j} \mathbf{a}_i(P) \hat{\omega}_j(\bar{P}) = \left[(\hat{\omega}_i(P) + \hat{\omega}_i(\bar{P})) \hat{\omega}_j(P) \right]_{\alpha_j \text{ の始点}}^{\alpha_j \text{ の終点}}$$

ここで

$$d(\mathbf{a}_i(P) + \mathbf{a}_i(\bar{P})) = \hat{\omega}_i(P) + \hat{\omega}_i(\bar{P}) = 0$$

なので $\mathbf{a}_i(P) + \mathbf{a}_i(\bar{P})$ は定数, それゆゑ

$$\mathbf{a}_i(P) + \mathbf{a}_i(\bar{P}) = 2\mathbf{a}_i(A_j)$$

である. よつて

$$\int_{\alpha_j} \mathbf{a}_i(P) \hat{\omega}_j(P) = 2\mathbf{a}_i(A_j) \int_{C_j}^{\mathbf{A}_j} \hat{\omega}_j = 2\mathbf{a}_i(A_j) \times \frac{1}{2} = \mathbf{a}_i(A_j) = \int_{\infty}^{\mathbf{A}_j} \hat{\omega}_i.$$

ここで 図 (5.17) からわかる様に

$$\begin{aligned} \int_C^{\mathbf{A}_i} \hat{\omega} &= \frac{1}{2} \int_{\beta_i} \hat{\omega} - \frac{1}{2} \sum_{k=i+1}^g \int_{\alpha_k} \hat{\omega} \\ &= T^t \left[0 \cdots 0 \quad \frac{i}{2} \quad 0 \cdots 0 \right] + {}^t \left[0 \cdots 0 \quad -\frac{i+1}{2} \cdots -\frac{1}{2} \right] \end{aligned}$$

³⁶C. Neumann による ([26], pp.450–451 参照).

であり

$$\int_{\infty}^{\mathcal{C}} \hat{\omega} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^g \int_{\alpha_j} \hat{\omega} = {}^t \left[\frac{1}{2} \cdots \frac{1}{2} \right]$$

なので, 結局

$$\int_{\infty}^{\mathcal{A}_i} \hat{\omega} = {}^t \left[\frac{1}{2} \cdots \frac{i}{2} \ 0 \cdots 0 \right] + T {}^t \left[0 \cdots 0 \ \frac{i}{2} \ 0 \cdots 0 \right]$$

となるので, 結局 (6.6) から

$$(6.7) \quad K_i \equiv \sum_{j=1}^g \int_{\infty}^{\mathcal{A}_i} \hat{\omega} \pmod{\hat{\Lambda}}.$$

以上をまとめて与式を得る.

[第 2 の方法]³⁷ 今まで通りに $T = [T_{jk}]_{g \times g}$ は \mathcal{C} の modulus とする. \mathcal{C} の座標 (x, y) を用いて $\hat{\omega}_j(x, y) = \frac{\varphi_j(x) dx}{2y}$ を正規化された正則 1 形式とする. ここに $\varphi_j(x)$ は x の $(g-1)$ 次以下の多項式である. 第 3 種微分

$$(z, w) \mapsto \frac{y+w}{x-z} \cdot \frac{dz}{2w}$$

を考へる. これは $P = (x, y)$ と無限遠点 ∞ で, それぞれ留数 $-1, 1$ の 1 位の極を持ち, その他の点では正則である. (1.73) の第 2 式より容易に

$$(6.8) \quad \mathbf{a}_k(P) := \int_{\infty}^P \hat{\omega}_k(P) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta_k} \frac{y+w}{x-z} \frac{dz}{2w} + \frac{1}{2\pi i} \sum_{i=1}^g T_{ik} \int_{\alpha_i} \frac{y+w}{x-z} \frac{dz}{2w}.$$

但し $P = (x, y)$ で, どの α_i, β_k も点 (z, w) を通らないものとする. ここでは (6.6) が得られた所から別の路に進む. Riemann 定数

$$K_k = -\frac{1}{2} T_{kk} - \frac{1}{2} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^g \int_{\alpha_j} \left(\hat{\omega}_j(P) \int_{\infty}^P \hat{\omega}_k \right) \quad (k = 1, \dots, g)$$

の積分路 α_j を, 上の下線部に鑑み, 全体に少し大きく広げたものを α'_j と書くことにすると, (6.8) を代入にして

$$\begin{aligned} K_k &= \frac{1}{2} T_{kk} - \frac{1}{2} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^g \int_{\alpha'_j} \left(\hat{\omega}_j(P) \mathbf{a}_k(P) \right) \\ &= \frac{1}{2} T_{kk} - \frac{1}{2} \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^g \int_{\alpha'_j} \left\{ \hat{\omega}_j(x, y) \int_{\beta_k} \frac{dz}{2(x-z)} + \frac{\varphi_j(x) dx}{2y} \int_{\beta_k} \frac{y dz}{(x-z) \cdot 2w} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^g T_{ik} \hat{\omega}_j(x, y) \int_{\alpha_i} \frac{dz}{2(x-z)} + \sum_{i=1}^g T_{ik} \frac{\varphi_j(x) dx}{2y} \int_{\alpha_i} \frac{y dz}{(x-z) \cdot 2w} \right\} \end{aligned}$$

³⁷Christoffel による ([26], pp.452–453 参照).

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}T_{kk} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi i} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^g \int_{\alpha'_j} \left(\hat{\omega}_j(x, y) \int_{\beta_k} \frac{dz}{2(x-z)} \right) \\
&\quad + \frac{1}{2\pi i} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^g \int_{\beta_k} \left(\frac{dz}{2w} \int_{\alpha'_j} \frac{\varphi_j(x)dx}{2(x-z)} \right) \\
(6.9) \quad &+ \frac{1}{2\pi i} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^g \sum_{i=1}^g T_{ik} \int_{\alpha'_j} \left(\hat{\omega}_j(x, y) \int_{\alpha_i} \frac{dz}{2(x-z)} \right) \\
&\quad + \frac{1}{2\pi i} \sum_{i=1}^g \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^g T_{ik} \int_{\alpha_i} \left(\frac{dz}{2w} \int_{\alpha'_j} \frac{\varphi_j(x)dx}{2(x-z)} \right)
\end{aligned}$$

ここで α_j と β_k の位置関係から, $(x, y) \in \alpha'_j$ について

$$\int_{\beta_k} \frac{dz}{z-x} = \begin{cases} 2\pi i & (j < k), \\ 0 & (j > k). \end{cases}$$

さらに, $(x, y) \in \alpha'_j$ について

$$\int_{\alpha_i} \frac{dz}{z-x} = 0.$$

一方, Cauchy の積分定理から $(z, w) \in \alpha_i$ と各 $j (\neq k)$ について

$$\int_{\alpha'_j} \frac{\varphi_j(x)dx}{x-z} = \begin{cases} -2\pi i \varphi_i(z) & (j = i), \\ 0 & (j \neq i). \end{cases}$$

以上を使へば (6.9) は

$$K_k = \frac{1}{2}(T_{kk} - 1) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k-1} \int_{\alpha'_j} \hat{\omega}_j + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^g T_{ik} \int_{\alpha_i} \frac{\varphi_i(z)dz}{2w}$$

となる. さらに

$$\int_{\alpha'_j} \hat{\omega}_j(x, y) = 1, \quad \int_{\alpha_i} \frac{\varphi_i(z)dz}{2w} = \int_{\alpha_i} \hat{\omega}_i(z, w) = 1$$

により

$$K_k = \frac{1}{2}(T_{kk} - 1) - \frac{1}{2}(k-1) + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^g T_{ik} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^g T_{ik} - \frac{1}{2}k$$

を得る. □

注意 6.10 超楕円曲線以外の (d, q) 曲線についての Riemann 定数が計算されてゐる例については, 筆者は, $(3, 4)$ 曲線についての志賀による計算 [49], p.326, Proposition I-2 以外には知らない.

注意 6.11 一般に $\{\alpha_j\}, \{\beta_j\}$ を $\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z})$ で変換するとき, theta characteristic は (6.45) の様に変換される. これは Igusa [23] や [3], Chapter XVIII に詳しく述べられてゐる. Mumford [35], pp.162-170 に Riemann 定数の幾何学的な特徴付けが述べられてゐる. この変換の曲線上での積分による定義 (4.35) により即した形での説明がなされると良いと思ふ.

6.3 標準 theta 輪体

ここでは後で構成する sigma 函数とその導函数の零点を詳しく述べるために必要な定義をする.

定義 6.12 (標準 theta 輪体) ω を (5.20) の様にとる. (3.15) の $W^{[n]}$ ($0 \leq n \leq g$) に対し,

$$[-1]W^{[n]} = \{-u; u \in W^{[n]}\}$$

とおき,

$$\Theta^{[n]} = W^{[g-1]} \cup [-1]W^{[g-1]}$$

と書いて, これを n 次元の 標準 theta 輪体 と呼ぶ.

注意 6.13 一般には $W^{[n]}$ と $[-1]W^{[n]}$ は一致しないことに注意せよ. ただし, 一般の平面三浦曲線で $n \geq g-2$ のとき, または \mathcal{C} が超楕円曲線などの特殊な曲線³⁸の場合にはこの両者は一致する.

命題 6.14 整数 $k > 0$ に対し, $W^{[k]}$ は J の部分多様体である.

証明 Jacobi の定理の (3.25) から $W^{[k]}$ は $\mathrm{Sym}^k \mathcal{C}$ と双有理同型である. 一方 \mathcal{C} が Riemann 面 (完備な非特異代数曲線) のとき $\mathrm{Sym}^k \mathcal{C}$ も射影的 (解析) 多様体 (projective manifold) である ([35], p.152 および [36], pp.3.26-3.27). 従つて, これと Abel 写像 $\bar{\alpha}(\cdot, \omega)$ によつて双有理同型である $W^{[k]}$ は J の部分多様体である. \square

定義 6.15 Modulo Λ で与へられる写像を

$$\kappa : \mathbb{C}^g \rightarrow \mathbb{C}^g / \Lambda$$

と記す.

6.4 Sigma 函数の積分による構成

ここでは, $g=1$ で [54], pp.447-449 などに述べられてゐる $\sigma(u)$ の構成法を $g=2$ で実行してみたい.

(5.61) で定義した第 2 種微分形式 η_j と (5.20) の第 1 種微分形式 ω_j は, 補題 5.43 で説明した方法で, 一般には, $\{\omega_j\}$ から $\{\eta_j\}$ を計算することができる. また, 具体的な計算で (2.30) の積に関して symplectic basis をなすことを容易に確かめられる.

³⁸ $y^{2m} = f(x)$ と書かれる 平面三浦曲線などでもさうである.

種数 $g = 1$ の場合, 変数 $u \in \mathbb{C}$ と任意に固定された $u^{(0)} \in \mathbb{C} - \Lambda$ について

$$\int_{(x^{(0)}, y^{(0)})}^{(x, y)} \eta_1 = \zeta(u) - \zeta(u^{(0)})$$

が成り立つ. ここに $\zeta(u)$ は Weierstraß の zeta 函数である. 左辺の積分路を $\ell \in \Lambda$ に相当する分だけ増やすとき, 変へるとき η_1 の周期 $H'\ell' + H''\ell''$ だけ増加する. 一方 $\zeta(u + \ell) = \zeta(u) + H'\ell' + H''\ell''$ なので辻褄が合ふ. さらに $\zeta(u)$ を積分して \exp を取れば Weierstraß の $\sigma(u)$ が得られる.

このとき $c(\ell)$ が存在して

$$(6.16) \quad \sigma(u + \ell) = c(\ell)\sigma\left(\frac{1}{2}\ell\right) \exp\left(\frac{1}{2}u(H'\ell' + H''\ell'')\right)$$

となることが容易にわかる. $\sigma\left(\frac{1}{2}\ell\right) \neq 0$ なる ℓ は $\Lambda \setminus 2\Lambda$ に属するものであり, その様な ℓ について $u = -\frac{1}{2}\ell$ とおくと,

$$\sigma\left(\frac{1}{2}\ell\right) = -c(\ell)\sigma\left(\frac{1}{2}\ell\right) \exp\left(\frac{1}{2}\ell(H'\ell' + H''\ell'')\right)$$

となる. ゆゑに (6.23) の記号で

$$c(\ell) = -\exp\left(\frac{1}{2}\ell(H'\ell' + H''\ell'')\right) = -\exp L\left(\frac{1}{2}\ell, \ell\right)$$

となる. つまり

$$\sigma(u + \ell) = -\sigma(u) \exp L\left(u + \frac{1}{2}\ell, \ell\right) \quad (\ell \in \Lambda \setminus 2\Lambda)$$

となる. $\ell \in 2\Lambda$ のときは, (6.16) の両辺を u で微分した後, 同様の計算を行へば

$$\sigma(u + \ell) = \sigma(u) \exp L\left(u + \frac{1}{2}\ell, \ell\right) \quad (\ell \in 2\Lambda)$$

を得る. つまり

$$\chi(\ell) = \exp\left[2\pi i\left(\frac{1}{2}\ell' + \frac{1}{2}\ell'' + \frac{1}{2}\ell'\ell''\right)\right]$$

とおくと

$$\sigma(u + \ell) = \chi(\ell)\sigma(u) \exp L\left(u + \frac{1}{2}\ell, \ell\right) \quad (\ell \in \Lambda)$$

を得る.

以上の方法を $g = 2$ に自然に拡張すれば以下に述べる様になるが, 多変数ゆゑの困難があり, (6.24) 以下は厳密な議論ではない. しかし, これで sigma 函数が凡そ何如なる函数かが理解できる.

まづ,

$$\int_{(x_1^{(0)}, y_1^{(0)})}^{(x_1, y_1)} \eta_j + \int_{(x_2^{(0)}, y_2^{(0)})}^{(x_2, y_2)} \eta_j = \zeta_j(u) - \zeta_j(u^{(0)}) + g_j(x_1, y_1; x_2, y_2)$$

なる ($\zeta_j(u; u^{(0)})$ に関する) 方程式を考へる. $g_j(x_1, y_1; x_2, y_2)$ は \mathcal{C} 上の適当な函数である. ここに u は変数で $u^{(0)}$ は任意に固定された点 $\notin \Lambda$ で,

$$u = \int_{\infty}^{(x_1, y_1)} \omega + \int_{\infty}^{(x_2, y_2)} \omega \quad (\in \mathbb{C}^2),$$

$$u^{(0)} = \int_{\infty}^{(x_1^{(0)}, y_1^{(0)})} \omega + \int_{\infty}^{(x_2^{(0)}, y_2^{(0)})} \omega \quad (\in \mathbb{C}^2)$$

となつてゐるものであり, $\zeta_j(u)$ は $\kappa^{-1}l(\mathcal{C})$ 上の函数で,

$$(6.17) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u_i} \zeta_j(u) &= \frac{\partial}{\partial u_j} \zeta_i(u), \\ \zeta_j(u + l) &= \zeta_j(u) + (H'l' + H''l'')_j \quad (\text{for } l \in \Lambda) \end{aligned}$$

を満たすものである. ただし, 最後の $()_j$ は j 番目の成分を取り出すことを意味する.

まづ, 次の偏微分を以下で何度も使ふので, ここで計算しておく:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}$$

ゆゑ

$$(6.18) \quad \begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2y_1} & \frac{1}{2y_2} \\ \frac{x_1}{2y_1} & \frac{x_2}{2y_2} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{4y_1y_2}{x_2 - x_1} \begin{bmatrix} \frac{x_2}{2y_2} & -\frac{1}{2y_2} \\ -\frac{x_1}{2y_1} & \frac{1}{2y_1} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{x_2 - x_1} \begin{bmatrix} 2x_2y_1 & -2y_1 \\ -2x_1y_2 & 2y_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$g = 1$ では $g_1(x_1, y_1; x_2, y_2) \equiv 0$ として $\zeta(u)$ を定義できたが, $g = 2$ ではそんなに簡単ではなく, 以下に述べる様に, $g_2(x_1, y_1; x_2, y_2) \equiv 0$ とするのは良いものの, $g_1(x_1, y_1; x_2, y_2)$ は非自明な函数を取らなくてはならない. まづ

$$(6.19) \quad \int_{(x_1^{(0)}, y_1^{(0)})}^{(x_1, y_1)} \eta_2 + \int_{(x_2^{(0)}, y_2^{(0)})}^{(x_2, y_2)} \eta_2 = \zeta_2(u) - \zeta_2(u^{(0)})$$

を解く. 両辺を u_2 で微分すれば

$$\frac{x_1^2}{2y_1} \frac{\partial x_1}{\partial u_2} + \frac{x_2^2}{2y_2} \frac{\partial x_2}{\partial u_2} = \frac{\partial}{\partial u_2} \zeta_2(u).$$

しかるに (6.18) より左辺を計算すれば

$$\frac{\partial}{\partial u_2} \zeta_2(u) = -x_1 - x_2$$

を得る. これは後に $\wp_{22}(u)$ と書かれる函数である. さて $\zeta_1(u)$ を決めるために, 今度は (6.19) を u_1 で微分して, 同様な計算をすれば

$$\frac{\partial}{\partial u_1} \zeta_2(u) = x_1x_2$$

を得る. これは後に $\wp_{12}(u) = \wp_{21}(u)$ と書かれる函数である. 以上から $\zeta_2(u)$ は積分定数を除いて定まる.

これらの導函数 $\wp_{ji2}(u) = \frac{\partial}{\partial u_j} \wp_{i2}(u)$, $\wp_{kj22}(u) = \frac{\partial^2}{\partial u_j \partial u_k} \wp_{22}(u)$ のうちいくつかを計算しておく:

$$(6.20) \quad \begin{aligned} \wp_{122}(u) &= \frac{\partial}{\partial u_2} (x_1x_2) = x_2 \cdot \frac{-2y_1}{x_2 - x_1} + x_1 \cdot \frac{2y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2 - x_1}, \\ \wp_{222}(u) &= \frac{\partial}{\partial u_2} (-x_1 - x_2) = (-1) \cdot \frac{-2y_1}{x_2 - x_1} + (-1) \cdot \frac{2y_2}{x_2 - x_1} = \frac{2(y_1 - y_2)}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{\partial}{\partial u_2} \frac{2(y_1 - y_2)}{x_2 - x_1} = 2(3(x_1^2 + x_2^2) + 4x_2x_1 + 2\mu_2(x_2 + x_1) + \mu_4) \end{aligned}$$

を得る. 最後の計算はやや面倒であるが, 困難はない.

今度は $\zeta_1(u)$ と $g_1(x_1, y_1; x_2, y_2)$ について

$$\int_{(x_1^{(0)}, y_1^{(0)})}^{(x_1, y_1)} \eta_1 + \int_{(x_2^{(0)}, y_2^{(0)})}^{(x_2, y_2)} \eta_1 = \zeta_1(u) - \zeta_1(u^{(0)}) + g_1(x_1, y_1; x_2, y_2)$$

を考へる. この式を u_2 で微分すると

$$\begin{aligned} & \frac{3x_1^2 + 2\mu_2x_1 + \mu_4}{2y_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial u_2} + \frac{3x_2^2 + 2\mu_2x_2 + \mu_4}{2y_2} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial u_2} \\ &= \frac{\partial}{\partial u_2} \zeta_1(u) + \frac{\partial}{\partial u_2} g_1(u) \\ &= \wp_{12}(u) + \frac{\partial}{\partial u_2} g_1(u) \\ &= x_1x_2 + \frac{\partial}{\partial u_2} g_1(u) \end{aligned}$$

となるべきである. これを計算すると

$$\frac{\partial}{\partial u_2} g_1(u) = 3(x_1^2 + x_2^2) + 4x_1x_2 + 2\mu_2(x_1 + x_2) + \mu_4$$

となる. これは (6.20) で見た通り $-\frac{1}{2}\wp_{2222}(u)$ に他ならない. つまり $g_1(x_1, y_1; x_2, y_2)$ は定数の差を除いて $-\frac{1}{2}\wp_{222}(u)$ と一致することがわかる. 以上から

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial u_1} \zeta_2(u) = \frac{\partial}{\partial u_2} \zeta_1(u), \\ & \int_{(x_1^{(0)}, y_1^{(0)})}^{(x_1, y_1)} \eta_1 + \int_{(x_2^{(0)}, y_2^{(0)})}^{(x_2, y_2)} \eta_1 = \zeta_1(u) - \zeta_1(u^{(0)}) + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \\ & \int_{(x_1^{(0)}, y_1^{(0)})}^{(x_1, y_1)} \eta_2 + \int_{(x_2^{(0)}, y_2^{(0)})}^{(x_2, y_2)} \eta_2 = \zeta_2(u) - \zeta_2(u^{(0)}) \end{aligned}$$

なる方程式が解 $\zeta_1(u)$ と $\zeta_2(u)$ を持つことがわかった. さらに $g = 1$ のときの sigma 関数の構成法を辿ることができる. つまり $\frac{\partial}{\partial u_2} \zeta_1(u) = \frac{\partial}{\partial u_1} \zeta_2(u)$ となる様にしてあるから,

$$\frac{\partial}{\partial u_1} \log \sigma(u) = \zeta_1(u), \quad \frac{\partial}{\partial u_2} \log \sigma(u) = \zeta_2(u)$$

を満たす函数 $\sigma(u)$ が存在する. ここで (6.17) から

$$(6.21) \quad \log \sigma(u + \ell) = \log \sigma(u) + {}^t u(H'\ell' + H''\ell'') + c_1(\ell)$$

が成り立たねばならない. 但し $c(\ell)$ は $\ell \in \Lambda$ に依存し u に依存しない定数. これより

$$(6.22) \quad \sigma(u + \ell) = c(\ell)\sigma(u) \exp({}^t u(H'\ell' + H''\ell'')), \quad c(\ell) = \exp(c_1(\ell)).$$

ここで, 得られた式を整理するために記号を導入する. 各 $u \in \mathbb{C}^g$ に対して, $u', u'' \in \mathbb{R}^g$ を

$$u = \Omega' u' + \Omega'' u''$$

で一意的に定まる元とする (1.62 も参照). このとき, $u, v \in \mathbb{C}^g$ と

$$\ell = \Omega' \ell' + \Omega'' \ell'' \in \Lambda, \quad \ell', \ell'' \in \mathbb{Z}^g$$

について

$$(6.23) \quad \begin{aligned} L(u, v) &= {}^t u (H' v' + H'' v''), \\ \chi(\ell) &= \exp\{2\pi i ({}^t \ell' \delta'' - {}^t \ell'' \delta' + \frac{1}{2} {}^t \ell' \ell'')\} \in \{-1, 1\} \end{aligned}$$

とおく. この記号で

$$(6.24) \quad \sigma(u + \ell) = c(\ell) \sigma(u) \exp L(u, \ell), \quad c(\ell) = \exp(c_1(\ell)).$$

$g = 1$ のときは $\sigma(u)$ の零点の全体 Λ は $\kappa^{-1} \iota(\text{Sym}^0(\mathcal{C}))$ なのであると解するならば, $g = 2$ の場合は $\kappa^{-1} \iota(\mathcal{C}) = \kappa^{-1}(W^{[1]}) = \kappa^{-1} \iota(\text{Sym}^1(\mathcal{C}))$ であるべきだと考へられる. だとすれば, $\sigma(u)$ の原点における展開の leading terms は, Abel 積分の局所係数 $t = x^2/y$ による展開

$$(6.25) \quad \left\{ \int_{\infty}^{(x(t), y(t))} \omega \mid t \in \mathbb{C} \right\} = \left\{ \left(\frac{1}{3} t^3 + \cdots, t + \cdots \right) \mid t \in \mathbb{C} \right\}$$

において全ての $\mu_j = 0$ のとしたもの, つまり

$$\{(u_1, u_2) = (\frac{1}{3} t^3, t) \mid t \in \mathbb{C}\}$$

で消えるものであると考へられる. その様な多項式で最も簡単なのは

$$(6.26) \quad u_1 - \frac{1}{3} u_2^3$$

である. そこで $\sigma(u)$ は $\sigma(u) = u_1 - \frac{1}{3} u_2^3 + O(\mu)$ なる leading terms を持ち, $\kappa^{-1}(W^{[1]})$ をその零点集合とした函数で, さらに $W^{[1]}$ の原点に関する対称性と (6.26) に鑑み, 奇函数 であることも要請しやう. このとき, $\sigma(\frac{1}{2}\ell) \neq 0$ なる $\frac{1}{2}\ell$ は $\frac{1}{2}\Lambda \cap \kappa^{-1}(\Theta^{[1]})$ に属するものであり, その様な ℓ について $u = -\frac{1}{2}\ell$ とおくと $\sigma(-\frac{1}{2}\ell) = -\sigma(\frac{1}{2}\ell)$ が成り立つ筈なので, (6.22) により

$$\sigma(\frac{1}{2}\ell) = -c(\ell) \sigma(\frac{1}{2}\ell) \exp(\frac{1}{2} {}^t \ell (H' \ell' + H'' \ell'')).$$

ゆゑに (6.23) の記号で

$$(6.27) \quad c(\ell) = -\exp(\frac{1}{2} {}^t \ell (H' \ell' + H'' \ell'')) = -\exp L(\frac{1}{2}\ell, \ell)$$

となる. つまり

$$\sigma(u + \ell) = -\sigma(u) \exp L(u + \frac{1}{2}\ell, \ell) \quad (\ell \in \Lambda \setminus 2\Lambda)$$

となる. さて $\frac{1}{2}\ell$ は modulo Λ で 16 個あるが, その内, 丁度, ∞ から分岐点 A_j, C_j, C までの積分および Λ の点で代表される 6 個が $\Theta^{[1]}$ に含まれるものに対応してゐる. 残りの 10 個が $\Theta^{[1]}$ に属さないこともわかる. 実際, \mathcal{C} 上の点 (x, y) が 2 分点であれば,

対応する座標 $u \in \mathbb{C}^2$ について $u = -u$ なので, $(x, -y) = (x, y)$. つまり $y = 0$ なる 5 つの点か ∞ に限るからである. また, $\Theta^{[1]}$ のどの点も Jacobi 多様体の中で非特異であることが次の様にしてわかる. 各点の局所係数 t を (5.7) の様にとれば $\kappa^{-1}(\Theta)$ その点の近傍は

$$u_1 = \int_{\infty}^t \omega_1, \quad u_2 = \int_{\infty}^t \omega_2,$$

で記述される. これを級数に展開した最初の項を見れば, 上のことがわかる. また $\kappa^{-1}(\Theta^{[1]})$ の各点で, 函数 $\sigma_1(u)$ または $\sigma_2(u) = \frac{\partial}{\partial u_2} \sigma(u)$ は消えない. 実際, (6.26) で規定した最初の数項から, 原点, 従つてその近傍で $\kappa^{-1}(\Theta^{[1]})$ 上に 1 位の零点を持つ. しかるに全空間 \mathbb{C}^2 上の整型函数 $\sigma(u)$ で, $\kappa^{-1}(\Theta^{[1]})$ で消えるものを求めてみるので, $\kappa^{-1}(\Theta^{[1]})$ の開集合上に 1 位の零点を持つ筈である. ここで, (6.25) の様に調べてみるとわかる様に, (2, 5) 平面三浦曲線については $\Theta^{[1]}$ は非特異であることに注意する.

そこで, u_1 で (6.22) の両辺を微分してから, $\Theta^{[1]}$ に属する 6 つの ℓ について $u = -\frac{1}{2}\ell$ を代入する. そのとき $\sigma_1(u) = \frac{\partial}{\partial u_1} \sigma(u)$ は偶函数なので,

$$\begin{aligned} \sigma_1(\tfrac{1}{2}\ell) &= c(\ell)\sigma_1(\tfrac{1}{2}\ell) \exp(-\tfrac{1}{2}t\ell(H'\ell' + H''\ell'')), \\ c(\ell) &= \exp(\tfrac{1}{2}t\ell(H'\ell' + H''\ell'')). \end{aligned}$$

それゆゑ

$$\sigma(u + \ell) = \sigma(u) \exp L(u + \tfrac{1}{2}\ell, \ell) \quad (\tfrac{1}{2}\ell \in \kappa^{-1}(\Theta) \cap \Lambda)$$

を得る. 以上のことから各 $\ell \in \Lambda$ について

$$(6.28) \quad \chi'(\ell) = \begin{cases} -1 & \text{if } \tfrac{1}{2}\ell \in \kappa^{-1}(\Theta^{[1]}), \\ 1 & \text{if } \tfrac{1}{2}\ell \notin \kappa^{-1}(\Theta^{[1]}) \end{cases}$$

とおくと

$$\sigma(u + \ell) = \chi'(\ell)\sigma(u) \exp L(u + \tfrac{1}{2}\ell, \ell) \quad (\ell \in \Lambda)$$

がわかつた. ここで $\chi'(\cdot)$ は (6.23) の $\chi(\cdot)$ と一致する:

$$\chi'(\ell) = \chi(\ell).$$

これは 16 個の場合を逐一確認すれば良い³⁹. また, 上の条件 (6.28) から逆に,

$$\chi'(\ell) = \exp(2\pi i({}^t\delta'\ell'' - {}^t\delta''\ell' + \tfrac{1}{2}t\ell'\ell''))$$

となる δ', δ'' が $\text{mod } (\frac{1}{2}\mathbb{Z})^2$ で一意的に定まる⁴⁰.

ここまですべてまとめておく:

³⁹このことは, 一般の完備非特異代数曲線についても成り立つだろうか.

⁴⁰この方法で, 一般の場合にも Riemann 定数 δ', δ'' を求めることができないだろうか. できないにしても, 多くの場合, $\chi(\cdot)$ がわかるだけで十分. なぜなら $\sigma(u) = C_a \sum_{\ell \in \Lambda} \chi(\ell) \exp L(u + \ell, a) \exp L(u + \frac{1}{2}\ell, -\ell)$ ($a \notin \Lambda$ は任意に固定, C_a は定数) と定義できるので, δ を知る必要がないから. この方法での (多くの場合の) $\sigma(u)$ の構成については [46] を参照されたい.

作業仮説 6.29 いま, 平面三浦曲線 \mathcal{C} について 5.21 や (5.20) で定めた第 1 種微分形式 $\{\omega_j\}$ について

$$(6.30) \quad u_j = \sum_{k=1}^g \int_{\infty}^{(x_k, y_k)} \omega_j$$

とおけば, 5.43 や (5.61) で定義した第 2 種微分形式 η_j から (5.68) で定めた周期行列 H', H'' について, \mathbb{C}^g 上の函数を成分とする有理型函数 vector

$$(6.31) \quad \zeta(u) = {}^t[\zeta_1(u) \zeta_2(u) \cdots \zeta_g(u)]$$

で

$$(6.32) \quad \zeta(u + \ell) = \zeta(u) + H' \ell' + H'' \ell'' \quad (\ell \in \Lambda)$$

となるものが存在するであらう. 但し Λ は (6.1) で定めた \mathbb{C}^g 内の格子である. さらに \mathbb{C}^g 上の整型函数 $\sigma(u)$ で,

$$(6.33) \quad d \log \sigma(u) = \zeta_1(u) du_1 + \zeta_2(u) du_2 + \cdots + \zeta_g(u) du_g \quad (= \zeta(u) du)$$

となり, $\kappa^{-1}(\Theta^{[g-1]})$ (記号は 6.12 および 6.15 を参照) にのみ 1 位の零点を持つものが定数倍を除いて唯一つ存在するであらう. その様な函数 $\sigma(u)$ は (6.23) の記号で

$$(6.34) \quad \sigma(u + \ell) = \chi(\ell) \sigma(u) \exp L(u + \frac{1}{2} \ell, \ell) \quad (\ell \in \Lambda)$$

を満たすであらう.

6.5 Riemann 形式

ここで sigma 函数に対応する Riemann 形式の性質をまとめておく.

定義 6.35 平面三浦曲線 \mathcal{C} に付随して (6.23) と全く同様に定義した \mathbb{R} 上で双線形, 第 1 変数について \mathbb{C} 上線形な 2 次形式 $L(,)$ について

$$(6.36) \quad E(u, v) = L(u, v) - L(v, u)$$

と定義し, これを \mathcal{C} の Riemann 形式 と呼ぶ.

補題 6.37 次の成り立つ.

- (i) $E(iu, v) = E(iv, u)$,
- (ii) $E(u, v) = 2\pi i({}^t u' v'' - {}^t u'' v')$,
- (iii) $\ell, k \in \Lambda$ のとき $\chi(\ell + k) = \chi(\ell) \chi(k) \cdot \exp \frac{1}{2} E(\ell, k)$.

特に, $E(,)$ は $i\mathbb{R}$ に値を取り, しかも $\Lambda \times \Lambda$ 上では $2\pi i\mathbb{Z}$ に値を取る.

証明 先に (ii) を示す. (5.71) および (5.82) を使へば

$$\begin{aligned}
L(u, v) - L(v, u) &= ({}^t\Omega'u' + \Omega''u'')(H'v' + H''v'') - ({}^t\Omega'v' + \Omega''v'')(H'u' + H''u'') \\
&= {}^t u'({}^t\Omega'H'' - {}^tH'\Omega'')v'' + {}^t u''({}^t\Omega'H' - {}^tH''\Omega')v' \\
&= 2\pi i ({}^t u'v'' - {}^t u''v')
\end{aligned}$$

となり成り立つ. ここで, 定理 5.70 と注意 5.81 により, 特に $E(\Lambda, \Lambda) = 2\pi i\mathbb{Z}$ であることがわかる.

(i) を示す. まづ

$$\begin{aligned}
E(iu, v) - E(iv, u) &= L(iu, v) - L(v, iu) - L(iv, u) + L(u, iv) \\
&= iL(u, v) - iL(iv, iu) - iL(v, u) + iL(iu, iv) \\
&= i\{E(u, v) - E(iu, iv)\}.
\end{aligned}$$

ここで, 最初の式は \mathbb{R} に値を持ち, 最後の式は $i\mathbb{R}$ に値を持つ. よつて, これらは 0 である.

(iii) は

$$\begin{aligned}
L(u+k + \frac{1}{2}\ell, -\ell) &= L(u + \frac{1}{2}(\ell + k) + \frac{1}{2}k, -\ell) \\
(6.38) \quad &= L(u + \frac{1}{2}(\ell + k), -\ell - k) + L(u + \frac{1}{2}(\ell + k), k) + L(\frac{1}{2}k, -\ell) \\
&= L(u + \frac{1}{2}(\ell + k), -\ell - k) + L(u + \frac{1}{2}k, k) + L(\frac{1}{2}\ell, k) - L(\frac{1}{2}k, \ell) \\
&= L(u + \frac{1}{2}(\ell + k), -\ell - k) + L(u + \frac{1}{2}k, k) + \frac{1}{2}[L(\ell, k) - L(k, \ell)].
\end{aligned}$$

であることと, $\chi(\ell + k)/(2\pi i)$ が

$$\begin{aligned}
&(\ell'' + k'')\delta' + (\ell' + k')\delta'' + \frac{1}{2}(\ell' + k')(\ell'' + k'') \\
(6.39) \quad &= (\ell''\delta' + \ell'\delta'') + (k''\ell' + k'\delta'') + \frac{1}{2}\ell'\ell'' + \frac{1}{2}(\ell'k'' + k'\ell'') + \frac{1}{2}k'k'' \\
&\equiv (\ell''\delta' + \ell'\delta'' + \frac{1}{2}\ell'\ell'') + (k''\ell' + k'\delta'' + \frac{1}{2}k'k'') + \frac{1}{2}(\ell'k'' - k'\ell'') \pmod{2}.
\end{aligned}$$

で与えられることからわかる. \square

6.6 Sigma 函数の解析的構成

次に sigma 函数 $\sigma(u)$ を theta 級数を使つて構成する方法を述べる.

定義 6.40 種数 g の超楕円曲線 $\mathcal{C} : y^2 = f(x)$ について, M を (5.69) で定めるとき

$$(6.41) \quad \sigma(u) = c \exp\left(-\frac{1}{2}{}^t u H' \Omega'^{-1} u\right) \vartheta \begin{bmatrix} \delta'' \\ \delta' \end{bmatrix} (\Omega'^{-1} u; \Omega'^{-1} \Omega'')$$

で定義される函数を \mathcal{C} の sigma 函数 といふ. 但し

$$(6.42) \quad c = \frac{1}{D^{1/8}} \left(\frac{|\Omega'|}{(2\pi)^g} \right)^{1/2}$$

である. ここで π は円周率, $|\Omega'|$ は Ω' の行列式を意味し, 根号の選び方は (6.56) で指示する. (5.18) を満たす様な基本群の基 α_j, β_j の選び方を替へると $\Omega', \Omega'', H', H''$, つまり (5.69) の M , および δ', δ'' は変はるが, $\sigma(u)$ 自体は不変であることが theta 級数の modular 変換性からわかる.

以下では (6.23) の記号を使ふ. まづ ${}^t\gamma \begin{bmatrix} & 1_g \\ -1_g & \end{bmatrix} \gamma = \begin{bmatrix} & 1_g \\ -1_g & \end{bmatrix}$, $|\gamma| = 1$ なる $2g$ 次正方行列 γ で, その成分がすべて \mathbb{Z} に属するもの全体のなす群を $\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z})$ と書く (symplectic 群). $\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z})$ は

$$(6.43) \quad \mathcal{H} = \left\{ M = \begin{bmatrix} \Omega' & \Omega'' \\ H' & H'' \end{bmatrix}; \mathbb{C} \text{ 上の } 2g \text{ 次正方行列で} \right. \\ \left. M \begin{bmatrix} & 1_g \\ -1_g & \end{bmatrix} {}^t M = 2\pi i \begin{bmatrix} & 1_g \\ -1_g & \end{bmatrix} \text{ を満たし, } \mathrm{Im} \Omega'^{-1} \Omega'' \text{ は正定値} \right\}$$

の各元 $M = \begin{bmatrix} \Omega' & \Omega'' \\ H' & H'' \end{bmatrix}$ に次の様に作用する: $\gamma = \begin{bmatrix} {}^t A & {}^t B \\ {}^t C & {}^t D \end{bmatrix} \in \mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z})$ を取るとき,

$$(6.44) \quad \gamma M = M \begin{bmatrix} & 1_g \\ 1_g & \end{bmatrix} {}^t \gamma \begin{bmatrix} & 1_g \\ 1_g & \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} D & B \\ C & A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega' D + \Omega'' C & \Omega' B + \Omega'' A \\ H' D + H'' C & H' B + H'' A \end{bmatrix}.$$

これは我々の周期行列 M についての積分路 $\{\alpha_j\}, \{\beta_j\}$ の取り換へに対応してゐる. Theta characteristic への $\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z})$ の作用は [3], Chapter XVIII や [23], p.84 によれば

$$(6.45) \quad \begin{bmatrix} b'' \\ b' \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} D & -C \\ -B & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b'' \\ b' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \mathrm{diag}(C {}^t D) \\ \frac{1}{2} \mathrm{diag}(A {}^t B) \end{bmatrix}$$

である⁴¹. ここで, 正方行列 M に対して $\mathrm{diag}(M)$ は M の対角成分を並べてできる列 vector を表す. 各 $\ell \in \Lambda$ が

$$\ell = \Omega' \ell' + \Omega'' \ell'' = (\Omega' D + \Omega'' C) \ell'_1 + (\Omega' B + \Omega'' A) \ell''_1,$$

但し $\ell'_1, \ell''_1 \in \mathbb{Z}^g$, と書かれるとすれば,

$$\begin{aligned} (H' D + H'' C) \ell'_1 + (H' B + H'' A) \ell''_1 &= H' (D \ell'_1 + B \ell''_1) + H'' (C \ell'_1 + A \ell''_1) \\ &= H' \ell'_1 + H'' \ell''_1 \end{aligned}$$

から

$$L_M(u + \frac{1}{2} \ell, \ell) = L_{\gamma M}(u + \frac{1}{2} \ell, \ell)$$

がわかる.

補題 6.46 ($\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z})$ の生成系) $\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z})$ は次の 3 種類の元で生成される:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1_g \\ -1_g & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & {}^t A^{-1} \end{bmatrix} (A \in \mathrm{GL}(g, \mathbb{Z})), \begin{bmatrix} 1_g & B \\ 0 & 1_g \end{bmatrix} (B \text{ は対称行列}).$$

⁴¹これを Riemann 定数の定義 (4.5) に即して理解したい.

証明 [50] または [35], p.210 を見られたい。 \square

函数 $u \mapsto \sigma(u)$ に $\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z})$ の元を作用させても不変であるが, $u \mapsto \sigma(u + \ell)$ に $\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z})$ の元を作用させると, ± 1 倍の違いのみ生じる場合がある. 実際, 上の第 3 の元による作用については, 必ずしも, $\ell \mapsto \chi(\ell)$ が不変ではないからである.

補題 6.47 $\chi(\cdot)$ と $L(\cdot, \cdot)$ は (6.23) で定義したそれとする. 任意の $u \in \mathbb{C}^g$ と任意の $\ell \in \Lambda$ について

- (i) $\sigma(u + \ell) = \chi(\ell) \sigma(u) \exp L(u + \frac{1}{2}\ell, \ell)$,
- (ii) $\sigma(u)$ は $H_1(\mathcal{C}, \mathbb{Z})$ の symplectic 基底 $\{\alpha_j\}, \{\beta_j\}$ の取り方に依らない.
- (iii) $u \mapsto \sigma(u)$ は $\kappa^{-1}(\Theta^{[g-1]})$ に 1 位の極を持つ⁴².
- (iv) $\sigma(u) = 0 \iff u \in \kappa^{-1}(\Theta^{[g-1]})$,
- (v) $\sigma(-u) = (-1)^{g(g+1)/2} \sigma(u)$, つまり $\sigma(u)$ は奇函数または偶函数である.

証明 (i) これは函数 ϑ の平行移動公式 (4.3) から次の様に示される:

目標の (i) の指数函数の因子は

$$\begin{aligned}
& \exp\left(-\frac{1}{2}({}^t(u + \ell)H'\Omega'^{-1}(u + \ell))\right) \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2}({}^t u H'\Omega'^{-1}u + {}^t u H'\Omega'^{-1}\ell + {}^t \ell H'\Omega'^{-1}u + {}^t \ell H'\Omega'^{-1}\ell)\right) \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2}{}^t u H'\Omega'^{-1}u - {}^t u H'\Omega'^{-1}\ell - \ell H'\Omega'^{-1}u\right) (\because H'\Omega'^{-1} \text{ is symmetric}) \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2}{}^t u H'\Omega'^{-1}u\right) \exp\left(-{}^t(u + \frac{1}{2}\ell)H'\Omega'^{-1}\ell\right) \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2}{}^t u H'\Omega'^{-1}u\right) \exp\left(-{}^t(u + \frac{1}{2}\ell)H'\Omega'^{-1}(\Omega'\ell' + \Omega''\ell'')\right) \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2}{}^t u H'\Omega'^{-1}u\right) \exp\left(-{}^t(u + \frac{1}{2}\ell)(H'\ell' + H'\Omega'^{-1}\Omega''\ell'')\right) \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2}{}^t u H'\Omega'^{-1}u\right) \exp\left(-{}^t(u + \frac{1}{2}\ell)(H'\ell' + H''\ell'')\right) \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2}{}^t u H'\Omega'^{-1}u\right) \exp\left(-{}^t(u + \frac{1}{2}\ell)(H'\ell' + (H''\Omega' + 2\pi\mathbf{i}){}^t\Omega'^{-1}\ell'')\right) \\
&\hspace{15em} (\because (5.80)) \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2}{}^t u H'\Omega'^{-1}u\right) \exp\left(-{}^t(u + \frac{1}{2}\ell)(H'\ell' + H''\ell'' + 2\pi\mathbf{i}\Omega'^{-1}\ell'')\right) \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2}{}^t u H'\Omega'^{-1}u\right) \\
&\quad \cdot \exp\left(-{}^t(u + \frac{1}{2}\ell)(H'\ell' + H''\ell'') - 2\pi\mathbf{i}\ell''\Omega'^{-1}u - \pi\mathbf{i}({}^t\ell'\Omega' + {}^t\ell''\Omega''){}^t\Omega'^{-1}\ell''\right) \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2}{}^t u H'\Omega'^{-1}u\right) \\
&\quad \cdot \exp\left(-L(u + \frac{1}{2}\ell, \ell) - 2\pi\mathbf{i}{}^t\ell''\Omega'^{-1}u - \pi\mathbf{i}({}^t\ell'\ell'' + {}^t\ell''\Omega'^{-1}\Omega''\ell'')\right)
\end{aligned}$$

であり, また theta 級数の部分は

$$\begin{aligned}
& \vartheta \begin{bmatrix} \delta'' \\ \delta' \end{bmatrix} (\Omega'^{-1}(u + \ell) | \Omega'^{-1}\Omega'') \\
&= \vartheta \begin{bmatrix} \delta'' \\ \delta' \end{bmatrix} (\Omega'^{-1}u + \ell' + \Omega'^{-1}\Omega''\ell'' | \omega'^{-1}\omega'') \\
&= \exp\left[2\pi\mathbf{i}\left(\frac{1}{2}{}^t\ell''\Omega'^{-1}\Omega''\ell'' - \ell''(\Omega'^{-1}u + \delta') + \delta''\ell'\right)\right] \vartheta \begin{bmatrix} \delta'' \\ \delta' \end{bmatrix} (\Omega'^{-1}u | \Omega'^{-1}\Omega'')
\end{aligned}$$

⁴²1 位であるとは, 荒く言へば, \mathbb{C}^g/Λ 内の “超平面” との generic な section (それは \mathbb{C} 上 1 次元) の上で $\sigma(u)$ が通常の意味で 1 位の極を持つ, といふ意味.

となるからである.

(ii) いま, $\alpha = {}^t[\alpha_1, \dots, \alpha_g]$ と $\beta = {}^t[\beta_1, \dots, \beta_g]$ が $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in \text{Sp}(2g, \mathbb{Z})$ によつて $H_1(\mathcal{E}, \mathbb{Z})$ の中で

$$\alpha \longrightarrow C\alpha + D\beta, \quad \beta \longrightarrow A\alpha + B\beta$$

なる変更を受けたとせよ. このとき Ω'' と Ω' は

$$C\Omega'' + D\Omega', \quad A\Omega'' + B\Omega'$$

に変はり⁴³, $\Omega^{-1}u$ は $(D\Omega' + C\Omega'')^{-1}u$ に変はる. よつて, この変換により (6.41) の指数関数の因子は

$$\begin{aligned} & \exp\left(-\frac{1}{2} {}^t u {}^t (C\Omega'' + D\Omega')^{-1} (DH' + CH'') (C\Omega'' + D\Omega') (C\Omega'' + D\Omega')^{-1} u\right) \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2} {}^t u {}^t (C\Omega'' + D\Omega')^{-1} (DH' + CH'') u\right) \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2} {}^t u {}^t (C\Omega'' + D\Omega')^{-1} (DH'\Omega' + CH''\Omega') \Omega'^{-1} u\right) \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2} {}^t u (C\Omega'' + D\Omega')^{-1} (DH'\Omega' + C(H'\Omega'' - 2\pi i)\Omega'^{-1} u)\right) \quad (\because (5.82)) \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2} {}^t u (C\Omega'' + D\Omega')^{-1} ((D\Omega' + C\Omega'')H' - 2\pi i)\Omega'^{-1} u\right) \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2} {}^t u (\Omega'^{-1}H' + \pi i(C\Omega'' + D\Omega')^{-1}) \Omega'^{-1} u\right) \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2} {}^t u \Omega'^{-1} H' u\right) \exp\left(\pi i {}^t u {}^t \Omega'^{-1} (C\Omega'^{-1}\Omega'' + D)^{-1} \Omega'^{-1} u\right) \end{aligned}$$

となる. 種数 $g = 1$ の場合, このことと, [47], p.180 にある Dedekind eta 函数と theta 級数の modular 変換則と同様な性質により, 各因子から現れる因子は, すべて相殺されることがわかる. 種数が 1 より大きい場合, 補題 6.46 の 3 種の元について, その変換を調べれば良いが, 煩雑なのでここには述べない. [3], Sections 333–335 (pp.552–557) を参照されたい. Igusa の本 [23] の (Chapter 2, pp.84–85 および) Chapter V, §2, pp.177–183 にも $\text{Sp}(2g, \mathbb{Z})$ による指標付き theta 級数の変換公式が詳しく述べられてゐる. 種数 $g = 1$ の場合は [47] の §80, p.180, Theorem を参照されたい.

(iii) と (vi) は 4.36 で示した.

(v) $\Theta^{[g-1]}$ の定義から $[-1]\Theta^{[g-1]} = \Theta^{[g-1]}$ であり, それゆゑ $\sigma(-u)$ と $\sigma(u)$ は同じ位置に零点を持つので, 商 $\sigma(-u)/\sigma(u)$ は全空間 \mathbb{C}^g 上で零点や極を持たない. $[-1]\Lambda = \Lambda$ なので $\ell \in \Lambda$ のとき

$$\begin{aligned} \sigma(-(u + \ell)) &= \chi_M(-\ell)\sigma(-u) \exp L(-u - \frac{1}{2}\ell, -\ell) \\ &= \chi_M(\ell)\sigma(-u) \exp L(u + \frac{1}{2}\ell, \ell). \end{aligned}$$

よつて

$$(6.48) \quad \frac{\sigma(-(u + \ell))}{\sigma(u + \ell)} = \frac{\sigma(-u)}{\sigma(u)} \quad \text{for all } \ell \in \Lambda.$$

Liouville の定理から $\sigma(-u)/\sigma(u)$ は全空間で定数である. $\sigma(-u)$ と $\sigma(u)$ の適当な高次偏導函数の $u = (0, 0, \dots, 0)$ における値は ± 1 倍を除いて一致しなければならないから, 主張が示された. \square

⁴³ $T = \Omega'^{-1}\Omega''$ は $\frac{AT+B}{CT+D}$ に変はる.

もとの曲線の対称性が sigma 関数にきちんと反映することもわかる. 例へば

$$y^2 = x^{2g+1} + \mu_{4g+2}$$

なる特殊な曲線を考えると, これは $\zeta = \exp(2\pi i/(2g+1))$ に関して

$$(x, y) \mapsto (\zeta x, -y)$$

なる自己同型を持つ. これにより $(x_j, y_j) \mapsto (\zeta x_j, -y_j)$ と変換すれば, \mathbb{C}^g の変数は

$$u = \sum_{j=1}^g \int_{\infty}^{(x_j, y_j)} \omega = (u_1, u_2, \dots, u_g) \mapsto (-\zeta^2 u_1, -\zeta^4 u_2, \dots, -\zeta^3 u_{g-1}, -\zeta u_g)$$

となる. これを $u \mapsto [-\zeta]u$ と書くことにする. このとき

$$(6.49) \quad \sigma([-\zeta]u) = -\zeta^{g(g+1)/2} \sigma(u)$$

が成り立つことが以下の様に示される. 定義から $[-\zeta]\Theta^{[g-1]} = \Theta^{[g-1]}$ であつて $\sigma([-\zeta]u)$ と $\sigma(u)$ は位数も込めて同一の零点を持つ. また, [41] にある様に $H'^{-1}H'' = \Omega'^{-1}\Omega''$ (複素共役) で

$$L([-\zeta]u + \frac{1}{2}[-\zeta]\ell, [-\zeta]\ell) = L(u + \frac{1}{2}\ell, \ell)$$

が成り立つ. これと $[-\zeta]\Lambda = \Lambda$ とから

$$\begin{aligned} \sigma([-\zeta](u + \ell)) &= \sigma([-\zeta]u + [-\zeta]\ell) \\ &= \chi_M([-\zeta]\ell) \sigma([-\zeta]u) \exp L([-\zeta] + \frac{1}{2}[-\zeta]\ell, [-\zeta]\ell). \end{aligned}$$

よつて

$$\frac{\sigma([-\zeta](u + \ell))}{\sigma(u + \ell)} = \pm \frac{\sigma([-\zeta]u)}{\sigma(u)} \quad (\ell \in \Lambda)$$

を得るが, これは全空間で有界ゆゑ, 先と同様の議論と後の (6.54) により, (6.49) が成り立つ.

この節の最後に $\sigma(u)$ の特徴付けを述べておく.

命題 6.50 上の χ_M と L_M について,

$$\varphi(u + \ell) = \chi_M(\ell) \varphi(u) \exp L_M(u + \frac{1}{2}\ell, \ell)$$

なる整型函数⁴⁴ $u \mapsto \varphi(u)$ の全体のなす空間は 1 次元である.

証明 Idea は次の通り: ある \mathbb{C} 双線型形式 $B(,)$ を見つけて, Λ の階数 g (Λ の階数の半分) の部分 \mathbb{Z} 加群 Λ^* について,

$$\varphi(u + \ell) \exp B(u + \ell, u + \ell) = \varphi(u) \exp B(u, u) \quad (\ell \in \Lambda^*)$$

が成り立つ様にできる. このとき, $\varphi(u) \exp B(u, u)$ は Λ^* に関して Fourier 級数に展開できる. $\ell \in \Lambda \setminus \Lambda^*$ について $\varphi(u + \ell) \exp B(u + \ell, u + \ell)$ と $\varphi(u) \exp B(u, u)$ の関係とその Fourier 展開の (未定の) 係数の関係に翻訳し, その係数たちの方程式の解を数えることで, 目的の次元が 1 次元であることがわかる. 詳しくは, [3] の p.448–452, または [34] の p.26, Proposition, または [27] の p.31, Theorem 3.1 を参照されたい. 原典は [18] である. また, 種数 1 の場合には [46] に詳細を書き下してある. \square

⁴⁴全空間 \mathbb{C}^g で正則な函数.

6.7 Sigma 関数の展開の最初の部分

まだ sigma 関数は定数倍を除いてしか定義されてゐない. そこで, ここでは sigma 関数の leading terms ((7.8 の μ_j 達に依存しない部分) を調べる. Sigma 関数 $\sigma(u)$ が原点で冪級数に展開される様子は (7.7) で述べた. いま, u が $g-1$ 個の点の像として

$$(6.51) \quad u = \sum_{j=1}^{g-1} \int_{\infty}^{(x_j, y_j)} \omega$$

となつてゐるとき, 6.47 の (iv) により $\sigma(u) = 0$ である. この事実は, (6.51) を $g-1$ 個の変数

$$u_g^{(j)} = \int_{\infty}^{(x_j, y_j)} \omega_g$$

で冪級数に展開したもの

$$(6.52) \quad \begin{aligned} u &= (u_1, \dots, u_g), \\ u_i &= \frac{1}{2(g-i)+1} \left((u_g^{(1)})^{2(g-i)+1} + \dots + (u_g^{(g-1)})^{2(g-i)+1} \right) \\ &\quad + \text{“higher weight terms with respect to } u_g^{(i)} \text{s with coefficients in } \mathbb{Q}[\boldsymbol{\mu}] \text{”} \end{aligned}$$

(この形については (5.28) 参照) を展開 (7.7) に代入すれば, 結果が消えることを意味する. 従つて (6.51) の制限をしない元の $\sigma(u)$ の原点での展開の leading terms (μ_j を全く含まない項の部分) を

$$S(u)$$

と書くとき, $S(u)$ は u_1, u_2, \dots, u_g の weight $g(g+1)/2$ の斉重多項式であつて, (6.52) で全ての μ_j を 0 として得られる多項式

$$\begin{aligned} u &= (u_1, \dots, u_g), \\ u_i &= \frac{1}{2(g-i)+1} \left((u_g^{(1)})^{2(g-i)+1} + \dots + (u_g^{(g-1)})^{2(g-i)+1} \right) \end{aligned}$$

を代入したときに消えるものでなければならない. 以上の性質で $S(u)$ が決定される. それは以下に説明する Schur 多項式に他ならない.

6.8 Schur-Weierstraß 多項式

ここでは Schur-Weierstraß 多項式についての基本事項をまとめておく. 主な文献は [28] と [10] である. しばらくは g は単なる正整数であるとし,

$$u_g^{(1)}, \dots, u_g^{(g)}$$

は不定元とする. 整数 n ($0 \leq n \leq g$) を固定する. 以下では単に \mathbf{u}_g と書いて, 変数 $u_g^{(1)}, \dots, u_g^{(n)}$ の集合, あるいは, これらを成分とする vector を表すことにする. 各 $k \geq 0$ に対して

$$(-1)^k U_k^{[n]}(\mathbf{u}_g)$$

は k 次の完全対称式 (complete symmetric polynomial) を表すものとする. 即ち, それは, 変数 $u_g^{(1)}, \dots, u_g^{(g)}$ の全次数が k なる全ての単項式の単純和である. 例へば $U_2^{[2]}(\mathbf{u}_g) = u_g^{(1)2} + u_g^{(2)2} + u_g^{(1)}u_g^{(2)}$. 我々は, それが n 変数であることを $[n]$ を付けて表すのである. もし $k < 0$ であれば $U_k^{[n]}(\mathbf{u}_g)$ は 0 であると見做すことにする. さて, 行列式

$$|U_{g-2i+j+1}^{[n]}(\mathbf{u}_g)|_{i,j=1,\dots,g}$$

を考へる. いま簡単に $U_k = U_k^{[n]}(\mathbf{u}_g)$ 書けば, $k < 0$ なら $U_k = 0$ なので, この行列式は具体的には

$$\begin{array}{c} \left| \begin{array}{cccccc} U_g & U_{g+1} & U_{g+2} & \cdots & U_{2g-2} & U_{2g-1} \\ U_{g-2} & U_{g-1} & U_g & \cdots & U_{2g-4} & U_{2g-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ U_1 & U_2 & U_3 & \cdots & U_{g-1} & U_g \\ & U_0 & U_1 & \cdots & U_{g-3} & U_{g-2} \\ & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & & U_0 & U_1 \end{array} \right| & \text{if } g \text{ is odd,} \\ \\ \left| \begin{array}{cccccc} U_g & U_{g+1} & U_{g+2} & U_{g+3} & \cdots & U_{2g-2} & U_{2g-1} \\ U_{g-2} & U_{g-1} & U_g & U_{g+1} & \cdots & U_{2g-4} & U_{2g-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ U_0 & U_1 & U_2 & U_3 & \cdots & U_{g-2} & U_{g-1} \\ & & U_0 & U_1 & \cdots & U_{g-4} & U_{g-3} \\ & & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & & & U_0 & U_1 \end{array} \right| & \text{if } g \text{ is even} \end{array}$$

と書かれる. 以下においては

$$\begin{aligned} p_j &= (u_g^{(1)})^j + \cdots + (u_g^{(g)})^j \\ u_j^{(i)} &= \frac{1}{2^{(g-j)+1}} (u_g^{(1)})^{2(g-j)+1} \\ \mathbf{u}^{(i)} &= (u_1^{(i)}, \dots, u_g^{(i)}) \\ u_j &= u_j^{(1)} + \cdots + u_j^{(g)} = \frac{1}{2^{(g-j)+1}} p_{2(g-j)+1} \\ \mathbf{u} &= u^{(1)} + \cdots + u^{(g)} = (u_1, \dots, u_g) \end{aligned}$$

と記す. ここで

$$(6.53) \quad S(\mathbf{u}) = S(u_1, \dots, u_g) = |U_{g-2i+j+1}^{[g]}(\mathbf{u}_g)|_{1 \leq i, j \leq g}$$

と記し, これを $((d, q) = (2, 2g+1))$ 曲線に付随する Scur-Weierstraß 多項式 と呼ぶ. 次は基本的な事実である.

命題 6.54 u_1, \dots, u_g に依らない或る定数 c' が存在して

$$\sigma(\mathbf{u}) = c' \cdot S(\mathbf{u}) + O(\boldsymbol{\mu}).$$

ここに, $O(\boldsymbol{\mu})$ は, $\{\mu_j\}$ についての 1 次以上の項からなる級数を表す.

補題 6.55 次が成り立つ :

$$U_k^{[g]}(\mathbf{u}_g) = (-1)^k \begin{vmatrix} -p_1 & 1 & & & \\ -p_2 & -p_1 & 2 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ -p_k & -p_{k-1} & -p_{k-2} & \cdots & -p_1 \end{vmatrix}.$$

証明 [28], p.29, $\ell. - 4$, p.28, $\ell. - 13$. □

定義 6.56 (Sigma 関数の最終的定義) Sigma 関数 $\sigma(u)$ をここで更めて, 6.54 の c' が 1 となる様に (6.42) の c の定義における根号を定める.

7 Sigma 関数の性質

7.1 Schur-Weierstraß 多項式の導関数の零点

Schur-Weierstraß 多項式 (6.53) は $\sigma(u)$ の展開から, すべての $\mu_j = 0$ として得られるものであるから, 明らかに次が成り立つ.

整数 n で $1 \leq n \leq g-1$ なるものを取り, v_g を変数とせよ. いま

$$v = \left(\frac{1}{2g-1} v_g^{2g-1}, \dots, \frac{1}{3} v_g^3, v_g \right),$$

$$u^{(j)} = \left(\frac{1}{2g-1} (u_g^{(j)})^{2g-1}, \dots, \frac{1}{3} (u_g^{(j)})^3, u_g^{(j)} \right).$$

と書き,

$$S_{\mathfrak{h}^n}(u) = \left(\prod_{i \in \mathfrak{h}^n} \frac{\partial}{\partial u_i} \right) S(u)$$

などと記す. また

定義 7.1 次の部分集合を用意する :

$$\Delta^{[n]} = \left\{ u^{(1)} + u^{(2)} + \dots + u^{(n)} \mid u^{(j)} = \left(\frac{1}{2g-1} (u_g^{(j)})^{2g-1}, \dots, \frac{1}{3} (u_g^{(j)})^3, u_g^{(j)} \right), u_g^{(j)} \in \mathbb{C} \right\}.$$

これは, $\Theta^{[n]}$ が退化したものと見做すべきものである.

命題 7.2 (1) (7.14) で定めた multi-indices に関する導関数について次のそれぞれが成り立つ:

$$S_{\mathfrak{h}}(v) = -(-1)^{(g-1)(g-2)(g-3)/2} v_g^g,$$

$$S_{\mathfrak{h}^{n+1}}(u^{(1)} + \dots + u^{(n)} + v) = (-1)^{(g-n)(g-n-1)/2} S_{\mathfrak{h}^n}(u^{(1)} + \dots + u^{(n)}) v_g^{g-n} + (d^\circ(v_g) \geq g-n+2),$$

$$S_{\mathfrak{b}}(2v) = -(-1)^{g(g-1)(g-2)/2} 2v_g^{2g-1}.$$

(2) Multi-index I について $\text{wt}(I) = \text{wt}(\mathfrak{h}^n)$ ならば, ある整数 c が存在して $u \in \kappa^{-1}(\Theta^{[n]})$ について, $\sigma_I(u) = c \sigma_{\mathfrak{h}^n}(u)$ となる.

(3) Multi-index I について $\text{wt}(I) < \text{wt}(\mathfrak{h}^n)$ ならば $u \in \kappa^{-1}(\Theta^{[n]})$ のとき, $\sigma_I(u) = 0$ となる.

証明 これは, やや手間がかかるので, 論文 [42] を参照されたい. □

[42] では, 先にこの 7.2 を示した後, 多変数の Liouville の定理等を使つて, この sigma 関数への拡張版 7.17 を証明する, といふ手順を踏んでゐる.

7.2 補足

超楕円曲線 (6.3) $y^2 = f(x)$ (種数 g) について ∞ での局所変数を 5.8 節の様に

$$t = -\frac{x^g}{y}$$

と取るとき ∞ の近傍にある点 (x, y) について, (5.26) 等から

$$\int_{\infty}^{(x,y)} \omega_j = \int_{\infty}^{(x,y)} \frac{x^{j-1} dx}{2y} = \frac{1}{2g-2j+1} t^{2g-2j-1} + \dots \quad (j = 1, \dots, g)$$

となる. これより, 今 $P_i(x_i, y_i)$ ($i = 1, \dots, g$) を ∞ の近傍に取り, そこでの t の値を $t^{(i)}$ と書くことにすると $\sigma(u)$ の変数である所の

$$(7.3) \quad u = \sum_{i=1}^g \int_{\infty}^{P_i} \omega = \sum_{i=1}^g \int_{\infty}^{(x_i, y_i)} \omega$$

は

$$u = \sum_{j=1}^g \begin{bmatrix} \frac{1}{2g-1} (t^{(j)})^{2g-1} + \dots \\ \frac{1}{2g-3} (t^{(j)})^{2g-3} + \dots \\ \vdots \\ \frac{1}{3} (t^{(j)})^3 + \dots \\ t^{(j)} + \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2g-1} ((t^{(1)})^{2g-1} + \dots + (t^{(g)})^{2g-1}) + \dots \\ \frac{1}{2g-3} ((t^{(1)})^{2g-3} + \dots + (t^{(g)})^{2g-3}) + \dots \\ \vdots \\ \frac{1}{3} ((t^{(1)})^3 + \dots + (t^{(g)})^3) + \dots \\ (t^{(1)} + t^{(g)}) + \dots \end{bmatrix}$$

で, 各成分は weight

$$2g-1, 2g-3, \dots, 3, 1$$

で斉重となつてゐる. そこで

$$(7.4) \quad \lim_{\text{すべての } \mu_j \rightarrow 0} \sigma(u)$$

を知りたいければ, $\sigma(u)$ の零点が $\text{Sym}^{g-1}(\mathcal{C})$ の像と一致するのであるから, $(g-1)$ 個の点 P_1, \dots, P_{g-1} について, それらの数論的局所径数の値を $t^{(1)}, \dots, t^{(g-1)}$ とするとき,

$$(7.5) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2g-1} \{ (t^{(1)})^{2g-1} + \dots + (t^{(g-1)})^{2g-1} \} - u_1 &= 0, \\ \frac{1}{2g-3} \{ (t^{(1)})^{2g-3} + \dots + (t^{(g-1)})^{2g-3} \} - u_2 &= 0, \\ &\dots\dots\dots, \\ \frac{1}{3} \{ (t^{(1)})^3 + \dots + (t^{(g-1)})^3 \} - u_{g-1} &= 0, \\ \{ (t^{(1)} + \dots + (t^{(g-1)})) \} - u_g &= 0 \end{aligned}$$

の $u^{(1)}, \dots, u^{(g-1)}$ に関する集結式 (の 1 つの因子) が求めるものであると考へられる. これを systematic にできたなら, それで $\sigma(u)$ の最初の項が求められる. 例へば

$$(7.6) \quad \begin{aligned} g=1 \text{ のとき } \sigma(u) &\in u_1 + (\mathbb{Q}[\boldsymbol{\mu}][[u_1]])_{\text{wt} \geq 2}, \\ g=2 \text{ のとき } \sigma(u) &\in u_1 - \frac{1}{3} u_2^3 + (\mathbb{Q}[\boldsymbol{\mu}][[u_1, u_2]])_{\text{wt} \geq 4}, \\ g=3 \text{ のとき } \sigma(u) &\in u_1 u_3 - u_2^2 + \frac{1}{3} u_2 u_3^3 - \frac{1}{45} u_3^6 + (\mathbb{Q}[\boldsymbol{\mu}][[u_1, u_2]])_{\text{wt} \geq 7}. \end{aligned}$$

これらの weight は順に 1, 3, 6 となつてゐて $g(g+1)/2$ に一致することに注意されたい。但し $(\mathbb{Q}[\boldsymbol{\mu}][[u_1, \dots, u_g]])_{\text{wt} \geq w}$ は, μ_2, \dots, μ_{4g+2} の \mathbb{Q} 上の多項式を係数とする u_1, \dots, u_g の冪級数で $\{u_j\}$ に関する重さが w 以上のものを表す。

これと同様なことをより高い種数の場合にも systematic にやれば前の 6.8 節の様になるのである。

7.3 Sigma 函数の冪級数展開

まづ 1 つ記号を導入する. (d, q) 曲線に付随する変数 u_j の重さは, (d, q) に関する Schur-Weierstraß 空隙値列の $(g-j+1)$ 番目の値 w_{g-j+1} であるが, そのとき, $u_j = u_{\langle w_{g-j+1} \rangle}$ と書くことにする. 例へば $g=3$ である $(3, 4)$ 曲線の場合, 変数 u_1, u_2, u_3 の重さは 5, 2, 1 である. これらの変数を

$$u_{\langle 1 \rangle} = u_3, \quad u_{\langle 2 \rangle} = u_2, \quad u_{\langle 5 \rangle} = u_1$$

などを書くこととする.

定理 7.7 函数 $\sigma(u)$ を原点の周りで冪級数に展開するとき, (5.16) で定めた weight に関して $\frac{1}{2}g(g+1)$ 次の斉重となる. しかも, 平方 $\sigma(u)^2$ の展開は

$$(7.8) \quad \sigma(u)^2 \in \mathbb{Z}[\mu_1, \mu_3, \dots, \mu_{2g+1}, \mu_2, \mu_4, \dots, \mu_{4g+2}] \langle\langle u_{\langle w_g \rangle}, u_{\langle w_{g-1} \rangle}, \dots, u_{\langle w_1 \rangle} \rangle\rangle$$

となる. いくつかの場合に $\sigma(u)$ 自身の展開を述べる:

— (2, 3) 曲線のとき,

$$\sigma(u) \in \mathbb{Z}[\frac{1}{2}\mu_1, \mu_3, \mu_2, \mu_4, \dots, \mu_6] \langle\langle u_{\langle 3 \rangle}, u_{\langle 1 \rangle} \rangle\rangle.$$

— (2, 5) 曲線のとき,

$$\sigma(u) \in \mathbb{Z}[\mu_1, \frac{1}{2}\mu_3, \mu_5, \mu_2, \mu_4, \mu_6, \mu_8, \mu_{10}] \langle\langle u_{\langle 5 \rangle}, u_{\langle 3 \rangle}, u_{\langle 1 \rangle} \rangle\rangle.$$

— (2, 7) 曲線のとき,

$$\sigma(u) \in \mathbb{Z}[\frac{1}{2}\mu_1, \mu_3, \frac{1}{2}\mu_5, \mu_7, \mu_2, \mu_4, \mu_6, \mu_8, \mu_{10}, \mu_{12}, \mu_{14}] \langle\langle u_{\langle 7 \rangle}, u_{\langle 5 \rangle}, u_{\langle 3 \rangle}, u_{\langle 1 \rangle} \rangle\rangle.$$

— (3, 4) 曲線のとき,

$$\sigma(u) \in \mathbb{Z}[\mu_1, \mu_4, \mu_2, \frac{1}{2}\mu_5, \mu_8, \mu_3, \mu_6, \mu_9, \mu_{12}] \langle\langle u_{\langle 5 \rangle}, u_{\langle 2 \rangle}, u_{\langle 1 \rangle} \rangle\rangle.$$

この定理の $g \geq 2$ の場合の証明をきちんと書いたものは見当たらない様に思はれるが, 密接に関係する事柄 (この定理が成り立つ内的な構造の研究) は, 古くから algebraic theta 等と呼ばれて Barsotti ([7] など) やそれに続く研究者により, 調べられてきた様である. $g=1$ の場合は [52] にある sigma 函数の原点での展開係数に関する漸化式から, ほぼ示せる. $g \geq 2$ の場合に \mathbb{Z} を \mathbb{Q} に弱めたものは, 本質的には F.Klein に依ると思はれるが, (d, q) 曲線の sigma 函数について, 中屋敷 [39] にきちんと書かれてゐる.

証明 ここでは, (3, 4) 曲線を例に上げて以下に述べる. 中屋敷 [38] を応用して証明する. この論文は無限次元 Grassmann 多様体の理論に基づいてゐる. これを非常に荒く述べると, 無限次元 Grassmann 多様体といふものに, 自然に無限次元の行列の行列式を fibre に持つ line bundle が存在し, その変換規則が, theta 函数の平行移動公式と一致するため, 平行移動公式の解の 1 次元性から, その section である tau 函数が theta 函数と一致するのである. この理論を正確に述べるだけで, 多くの紙数を必要とするので, 読者にはたいへん申し訳ないが, [38] で使われる種々の概念や記号等を説明する余裕がない. 必要に応じて原論文 [38] を参照していただくこととしたい. ただし, [38] の結果を使ふと, 我々の定式化で sigma 函数がどの様になるかは, 以下できちんと述べる. 説明を具体的にするために, ここでも (3, 4) 曲線で説明する. [38] に現れる無限個の変数 $\{t_j\}$ (可積分系の理論で使われる τ 函数の無限個の変数) をここでは $\{U_j\}$ と記す. これらの取り方にはかなり自由度があるが, ここではまづ, U_1, U_2, U_5 以外の U_j は 0 となる様にとる. さうすると, $\sigma(u) = \sigma(u_{(5)}, u_{(2)}, u_{(1)})$ の変数との関係は必然的に

$$\begin{aligned} U_1 &= u_{(1)} + \mu_1 u_{(2)} + (\mu_2 \mu_1^2 + \mu_3 \mu_1 + 2\mu_4 - \mu_2^2) u_{(5)} \\ U_2 &= u_{(2)} + (\mu_1^3 - 2\mu_2 \mu_1 - \mu_3) u_{(5)} \\ U_5 &= u_{(5)} \end{aligned}$$

となる. また

$$\begin{aligned} (\log t^{-(3-1)}) \sqrt{\frac{du_{(5)}}{dt}} &= \sum_j \frac{c_j}{j} t^j \quad (\log \text{ 中の } t \text{ の冪の } -(3-1) \text{ の } 3 \text{ は (3, 4) 曲線の種数.}) \\ &= -\mu_1 t + \left(\frac{1}{2}\mu_1^2 - \mu_2\right)t^2 + \left(-\frac{1}{3}\mu_1^3 + \mu_2\mu_1 + \mu_3\right)t^3 \\ &\quad + \left(\frac{1}{4}\mu_1^4 - \mu_2\mu_1^2 - \mu_3\mu_1 - \frac{3}{2}\mu_4 + \frac{1}{2}\mu_2^2\right)t^4 \\ &\quad + \left(-\frac{1}{5}\mu_1^5 + \mu_2\mu_1^3 + \mu_3\mu_1^2 + (3\mu_4 - \mu_2^2)\mu_1 - \mu_3\mu_2 - \frac{3}{2}\mu_5\right)t^5 \\ &\quad + \dots \end{aligned}$$

で係数 c_j を定める:

$$(7.9) \quad \begin{cases} c_1 = -\mu_1, \\ c_2 = \mu_1^2 - 2\mu_2, \\ c_5 = -\mu_1^5 + 5\mu_2\mu_1^3 + 5\mu_3\mu_1^2 + 5(3\mu_4 - \mu_2^2)\mu_1 - 5\mu_3\mu_2 - \boxed{\frac{15}{2}\mu_5}. \end{cases}$$

ここで, 最後の項を囲んだ理由は後でわかる. また

$$\begin{aligned} \xi(t_1, t_2) &= \frac{dt_1 dt_2}{(t_1 - t_2)^2} \\ &= \mu_4 t_1^2 + 2\mu_4 t_2 t_1 + \mu_4 t_2^2 \\ &\quad + (\mu_5 - 2\mu_4 \mu_1) t_1^3 + (2\mu_5 - 4\mu_4 \mu_1) t_2 t_1^2 + (2\mu_5 - 4\mu_4 \mu_1) t_2^2 t_1 + (\mu_5 - 2\mu_4 \mu_1) t_2^3 \\ &\quad + (3\mu_4 \mu_1^2 - 2\mu_5 \mu_1 - 2\mu_2 \mu_4 - \mu_6) t_1^4 + (6\mu_4 \mu_1^2 - 4\mu_5 \mu_1 - 4\mu_2 \mu_4 - 2\mu_6) t_2^3 t_1 \\ &\quad + (7\mu_4 \mu_1^2 - 5\mu_5 \mu_1 - 4\mu_2 \mu_4 - 3\mu_6) t_2^2 t_1^2 + (6\mu_4 \mu_1^2 - 4\mu_5 \mu_1 - 4\mu_2 \mu_4 - 2\mu_6) t_2 t_1^3 \\ &\quad + \dots \\ &= \sum_{i,j} q_{ij} t_1^{i-1} t_2^{j-1} \end{aligned}$$

を用意する. また, 不定元 T を用意して

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= U_1T + U_2T^2 + U_2T^3 + U_4T^4 + U_5T^5 + \cdots \\ &= U_1T + U_2T^2 + U_2T^3 + U_5T^5\end{aligned}$$

に対して

$$\begin{aligned}\mathbf{p} &= 1 + \frac{1}{1!}\mathbf{T} + \frac{1}{2!}\mathbf{T}^2 + \frac{1}{3!}\mathbf{T}^3 + \frac{1}{4!}\mathbf{T}^4 + \frac{1}{5!}\mathbf{T}^5 + \cdots \\ &= p_0 + p_1T + p_2T^2 + p_3T^3 + p_4T^4 + p_5T^5 + \cdots\end{aligned}$$

とおいて p_j を定める. このとき

$$\begin{aligned}p_1 &= u_{\langle 1 \rangle} + \mu_1 u_{\langle 2 \rangle} + (\mu_2 \mu_1^2 + \mu_3 \mu_1 + 2\mu_4 - \mu_2^2) u_{\langle 5 \rangle}, \\ p_2 &= u_{\langle 2 \rangle} + \frac{1}{2} u_{\langle 1 \rangle}^2 + \frac{1}{2} \mu_1^2 u_{\langle 2 \rangle}^2 + (\mu_1^3 - 2\mu_2 \mu_1 - \mu_3) u_{\langle 5 \rangle} \\ &\quad + \mu_1 u_{\langle 2 \rangle} u_{\langle 1 \rangle} + (\mu_2 \mu_1^2 + \mu_3 \mu_1 + 2\mu_4 - \mu_2^2) u_{\langle 5 \rangle} u_{\langle 1 \rangle} \\ &\quad + (\mu_2 \mu_1^3 + \mu_3 \mu_1^2 + 2\mu_4 \mu_1 - \mu_2^2 \mu_1) u_{\langle 5 \rangle} u_{\langle 2 \rangle} \\ &\quad + \left(\frac{1}{2} \mu_2^2 \mu_1^4 + \mu_3 \mu_2 \mu_1^3 + (2\mu_2 \mu_4 - \mu_2^3 + \frac{1}{2} \mu_3^2) \mu_1^2\right. \\ &\quad \left. + (2\mu_3 \mu_4 - \mu_3 \mu_2^2) \mu_1 + 2\mu_4^2 - 2\mu_2^2 \mu_4 + \frac{1}{2} \mu_2^4\right) u_{\langle 5 \rangle}^2, \\ &\quad \dots\end{aligned}$$

等々となる. もちろん, これらはすべて $\mathbb{Z}[\boldsymbol{\mu}]$ 上 Hurwitz 整である. これらを用いて, 行列

$$S(u) = S(u_{\langle 5 \rangle}, u_{\langle 2 \rangle}, u_{\langle 1 \rangle}) = \begin{bmatrix} \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ \cdots & 1 & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 & p_7 & p_8 & p_9 & p_{10} & \cdots \\ \cdots & 0 & 1 & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 & p_7 & p_8 & p_9 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 1 & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 & p_7 & p_8 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 & p_7 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & \cdots \end{bmatrix}$$

を用意する. ここで, [38] による次の結果を定理として掲げておく (ほかの平面三浦曲線の場合も同様である).

定理 7.10 Sigma 関数は以上で定義したものを使って,

$$(7.11) \quad \sigma(u) = \det(S(u)\Gamma) \cdot \exp q(u)$$

と与えられる.

この表示から $\sigma(u_{\langle 5 \rangle}, u_{\langle 2 \rangle}, u_{\langle 1 \rangle})$ の $u_{\langle 5 \rangle}, u_{\langle 2 \rangle}, u_{\langle 1 \rangle}$ に関する展開は

$$\mathbb{Z}[\mu_1, \mu_4, \mu_2, \frac{1}{2}\mu_5, \mu_8, \mu_3, \mu_6, \mu_9, \mu_{12}]$$

上の Hurwitz 整な級数であることがわかる ((7.9) を見よ). また $\sigma(u)^2$ の展開は $\mathbb{Z}[\boldsymbol{\mu}]$ 上 Hurwitz 整であることもわかる. \square

注意 7.12 定理 7.7 の結果は最良であつて, いくつかの μ_j について $\frac{1}{2}$ を外すことはできない.

7.4 Sigma 関数の導関数の零点の位置

一般の平面三浦曲線に付随する $\sigma(u)$ に関して, その導関数を精密に調べておくことは応用上, 非常に重要である. ここでも 7.3 節の記号を使ふ. ここでは超楕円曲線の場合に絞つてその概要を述べる. まづ, 次の定義をする.

定義 7.13 各整数 n ($1 \leq n \leq g$) に対して, Weierstraß 空隙値列 $\{w_1, \dots, w_g\} = \{1, 3, \dots, 2g-1\}$ の索引集合 \mathfrak{h}^n を

$$(7.14) \quad \mathfrak{h}^n = \begin{cases} \langle 3, 7, \dots, 2(g-n)-1 \rangle & (n \equiv g \pmod{2} \text{ のとき}), \\ \langle 1, 5, \dots, 2(g-n)-1 \rangle & (n \equiv g+1 \pmod{2} \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定める. 特に \mathfrak{h}^1 および \mathfrak{h}^2 は良く使ふので,

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}^1, \quad \mathfrak{b} = \mathfrak{h}^2$$

なる記号を用意しておく.

定義 7.15 Weierstraß 空隙値列 $\{w_1, \dots, w_g\}$ に関する multi-index 集合 I について Sigma 関数 $\sigma(u)$ の導関数 $\sigma_I(u)$ を

$$\sigma_I(u) = \left(\prod_{\langle i \rangle \in I} \frac{\partial}{\partial u_{\langle i \rangle}} \right) \sigma(u)$$

で定め, 特に

$$\sigma_{\mathfrak{h}^n}(u) = \left(\prod_{\langle i \rangle \in \mathfrak{h}^n} \frac{\partial}{\partial u_{\langle i \rangle}} \right) \sigma(u)$$

と定める. これを表で示せば以下の様になる.

種数 \ 関数	$\sigma_{\mathfrak{h}}$	$\sigma_{\mathfrak{b}}$	$\sigma_{\mathfrak{h}^3}$	$\sigma_{\mathfrak{h}^4}$	$\sigma_{\mathfrak{h}^5}$	$\sigma_{\mathfrak{h}^6}$	$\sigma_{\mathfrak{h}^7}$	$\sigma_{\mathfrak{h}^8}$	$\sigma_{\mathfrak{h}^9}$	\dots
1	σ	σ	σ	σ	σ	σ	σ	σ	σ	\dots
2	$\sigma_{\langle 1 \rangle}$	σ	σ	σ	σ	σ	σ	σ	σ	\dots
3	$\sigma_{\langle 3 \rangle}$	$\sigma_{\langle 1 \rangle}$	σ	σ	σ	σ	σ	σ	σ	\dots
4	$\sigma_{\langle 15 \rangle}$	$\sigma_{\langle 3 \rangle}$	$\sigma_{\langle 1 \rangle}$	σ	σ	σ	σ	σ	σ	\dots
5	$\sigma_{\langle 37 \rangle}$	$\sigma_{\langle 15 \rangle}$	$\sigma_{\langle 3 \rangle}$	$\sigma_{\langle 1 \rangle}$	σ	σ	σ	σ	σ	\dots
6	$\sigma_{\langle 159 \rangle}$	$\sigma_{\langle 37 \rangle}$	$\sigma_{\langle 15 \rangle}$	$\sigma_{\langle 3 \rangle}$	$\sigma_{\langle 1 \rangle}$	σ	σ	σ	σ	\dots
7	$\sigma_{\langle 3,7,11 \rangle}$	$\sigma_{\langle 159 \rangle}$	$\sigma_{\langle 37 \rangle}$	$\sigma_{\langle 15 \rangle}$	$\sigma_{\langle 3 \rangle}$	$\sigma_{\langle 1 \rangle}$	σ	σ	σ	\dots
8	$\sigma_{\langle 1,5,9,13 \rangle}$	$\sigma_{\langle 3,7,11 \rangle}$	$\sigma_{\langle 159 \rangle}$	$\sigma_{\langle 37 \rangle}$	$\sigma_{\langle 15 \rangle}$	$\sigma_{\langle 3 \rangle}$	$\sigma_{\langle 1 \rangle}$	σ	σ	\dots
9	$\sigma_{\langle 3,7,11,15 \rangle}$	$\sigma_{\langle 1,5,9,13 \rangle}$	$\sigma_{\langle 3,7,11 \rangle}$	$\sigma_{\langle 159 \rangle}$	$\sigma_{\langle 37 \rangle}$	$\sigma_{\langle 15 \rangle}$	$\sigma_{\langle 3 \rangle}$	$\sigma_{\langle 1 \rangle}$	σ	\dots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots

$\sigma_{\mathfrak{h}^n}(u)$ の表

定義 7.16 Multi-index I について, その weight $\text{wt}(I)$ を I に含まれる w_j の和と定める.

このとき次が成り立つ. これは Schur 多項式の (7.2) に対応する結果である.

命題 7.17 函数 $\sigma(u)$ について, 次が成り立つ. その原点での展開が u_j 達の $\mathbb{Q}[\mu]$ 係数の冪級数であつた (定理 7.7 参照). v は $\kappa^{-1}(\Theta^{[1]})$ 上の動くとする. このとき次が成り立つ.

- (1) $u \mapsto \sigma(u)$ は因子 $\Theta^{[g-1]}$ の引き戻し $\kappa^{-1}(\Theta^{[g-1]})$ で (代数幾何学の意味での) 1 位の零点を持ち, それ以外の点では 0 にならない.
- (2) 函数 $v \mapsto \sigma_{\mathfrak{h}}(v)$ の零点は modulo Λ で, $v = (0, 0, \dots, 0)$ に持ち, その位数はいつでも g である. また, これ以外には零点を持たない. この函数は

$$(7.18) \quad \sigma_{\mathfrak{h}}(v) = (-1)^{(g-2)(g-3)/2} v_{(1)}^g + (d^\circ(v_{(1)}) \geq g+2)$$

なる展開を持つ.

- (3) n を $1 \leq n \leq g-1$ なる整数とせよ. いま $v, u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(n)}$ は $\kappa^{-1}(\Theta^{[1]})$ を動くとする. もし $u^{(1)} + \dots + u^{(n)} \notin \kappa^{-1}(\Theta^{[n-1]})$ ならば, 函数 $v \mapsto \sigma_{\mathfrak{h}^{n+1}}(u^{(1)} + \dots + u^{(n)} + v)$ は modulo Λ で, $v = -u^{(1)}, \dots, -u^{(n)}$ に 1 位の零点を持ち, $v = (0, 0, \dots, 0)$ に位数 $g-n$ の零点を持つ. また, これ以外の零点を持たない. この函数は

$$(7.19) \quad \begin{aligned} & \sigma_{\mathfrak{h}^{n+1}}(u^{(1)} + \dots + u^{(n)} + v) \\ &= (-1)^{(g-n)(g-n-1)/2} \sigma_{\mathfrak{h}^n}(u^{(1)} + \dots + u^{(n)}) v_{(1)}^{g-n} + (d^\circ(v_{(1)}) \geq g-n+1) \end{aligned}$$

と展開される.

- (4) Multi-index I について $\text{wt}(I) = \text{wt}(\mathfrak{h}^n)$ ならば, ある整数 c が存在して $u \in \kappa^{-1}(\Theta^{[n]})$ について, $\sigma_I(u) = c \sigma_{\mathfrak{h}^n}(u)$ となる.

- (5) Multi-index I について $\text{wt}(I) < \text{wt}(\mathfrak{h}^n)$ ならば $u \in \kappa^{-1}(\Theta^{[n]})$ のとき, $\sigma_I(u) = 0$ となる.

- (6) $\text{wt}(I) \leq \text{wt}(\mathfrak{h}^n)$ ならば, $u \in \kappa^{-1}(\Theta^{[n]})$ と $\ell \in \Lambda$ について

$$(7.20) \quad \sigma_I(u + \ell) = \chi(\ell) \sigma_I(u) \exp L(u + \frac{1}{2}\ell, \ell)$$

が成り立つ.

注意 7.21 (1) この定理は, 楕円曲線の場合の sigma 函数を種数 g の代数曲線に拡張したものは, 各階層と, それに対応する sigma 函数の導函数の組の全体であることを示唆してゐる. つまり, 階層 $\Theta^{[n]}$ 上の “sigma 函数” としては $\sigma_{\mathfrak{h}^n}(u)$ を考へるべきで, これらの組

$$\{(\Theta^{[n]}, \sigma_{\mathfrak{h}^n}(u))\}_{n=1, \dots, g}$$

が, 楕円曲線の sigma 函数の役割りを果たす.

- (2) この様に見ると, 種数の高い曲線に対応する sigma 函数に対して, 楕円曲線の場合の $\sigma(u)$ の無限積展開 (Jacobi の公式) を一般化するには, \mathbb{C} 上 1 次元の多様体である第 1 階層 $\kappa^{-1}(\iota(\mathcal{C}))$ 上での $\sigma_{\mathfrak{h}}(u)$ の無限積展開を考案すべきなのではないかと思へてくる.

- (3) 命題 6.50 で述べた事は, 各階層での類似の性質に拡張されると思はれる. 即ち, 第 n 階層 $\kappa^{-1}(\Theta^{[n]})$ で (7.19) の形の等式を満たす様なこの階層上に定義された正則函数は, (7.19) の $\sigma_I(u)$ と定数倍を除いて一致すると予想される.

証明 ここでは theta 級数による sigma 関数の定義 6.40 に基づいて考へる. 命題の主張 (1) のうち sigma 関数が $\kappa^{-1}(\Theta^{[g-1]})$ 上で消えるといふ部分は, 定理 4.36 と sigma 関数の定義 6.40 からわかる. それが 1 位の零点であるといふのは 4.7 から直ちにわかることである.

(2) について, [44] や [29] の代数的な証明を紹介する. しかし, 細部を詳述すると長くなるので, ここでは $g = 5$ で方針を説明する. まづ, 各階層で対応する重さの導関数が高々 1 次元しかないことは, 各階層での平行移動公式 (6) を使つて導けるが, ここではそれをも以下の地道な計算で確かめることにする. $g = 5$ の超楕円曲線の場合は u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 の重さは 9, 7, 5, 3, 1 である. 前にも説明した通り, これらの変数を

$$u_{\langle 1 \rangle} = u_5, \quad u_{\langle 3 \rangle} = u_4, \quad u_{\langle 5 \rangle} = u_3, \quad u_{\langle 7 \rangle} = u_2, \quad u_{\langle 9 \rangle} = u_1$$

などを書くこととし, これらについて微分して得られる導関数を, 重さを添字にして

$$\sigma_{\langle 1 \rangle}(u) = \sigma_5(u), \quad \sigma_{\langle 59 \rangle}(u) = \sigma_{31}(u), \quad \sigma_{\langle 135 \rangle}(u) = \sigma_{543}(u)$$

などと表す. さらに以下の表では $\langle ij \dots \rangle$ は $\sigma_{\langle ij \dots \rangle}(u)$ を示してゐる. また $u^{[j]}$ は変数 u が第 4 階層 $\kappa^{-1}(\Theta^{[j]})$ を動くことを意味する. この証明中は v は常に第 1 階層 $\kappa^{-1}(\Theta^{[1]})$ を動くものとする. 以下の方法を 剥離法 と呼ぶ.

まづ, 平行移動公式 6.47 (1) を $u_{\langle 1 \rangle}$ で微分した後, $\sigma(u^{[4]}) = 0$ を使へば

$$\sigma_{\langle 1 \rangle}(u^{[4]} + \ell) = \chi(\ell) \sigma_{\langle 1 \rangle}(u^{[4]}) \exp L(u^{[4]} + \frac{1}{2}\ell, \ell)$$

を得る. これが第 4 階層における (7.20) である. 次に $0 = \sigma(u^{[3]} + v)$ を $v_{\langle 1 \rangle}$ で展開すれば

$$0 = \sigma(u^{[3]} + v) = \sigma_{\langle 1 \rangle}(u^{[3]})v_{\langle 1 \rangle} + \sigma_{\langle 11 \rangle}(u^{[3]})\frac{1}{2!}v_{\langle 1 \rangle}^2 \\ + \{\sigma_{\langle 111 \rangle}(u^{[3]})\frac{1}{3!} + \sigma_{\langle 3 \rangle}(u^{[3]})\}v_{\langle 1 \rangle}^3 + \dots$$

である. ここで $v_{\langle 3 \rangle} = \frac{1}{3}v_{\langle 1 \rangle}^3 + \dots$ を使つた. これより, 恒等的に

$$(7.22) \quad \sigma_{\langle 1 \rangle}(u^{[3]}) = \sigma_{\langle 11 \rangle}(u^{[3]}) = \sigma_{\langle 111 \rangle}(u^{[3]})\frac{1}{3!} + \sigma_{\langle 3 \rangle}(u^{[3]}) = 0$$

である. これと, 平行移動公式 6.47 (1) を $\partial^3/\partial u_{\langle 1 \rangle}^3$ して (あるいは, $\partial/\partial u_{\langle 3 \rangle}$ して) $u = u^{[3]}$ としたもののから,

$$\sigma_{\langle 111 \rangle}(u^{[3]} + \ell) = \chi(\ell) \sigma_{\langle 111 \rangle}(u^{[3]}) \exp L(u^{[3]} + \frac{1}{2}\ell, \ell), \\ \sigma_{\langle 3 \rangle}(u^{[3]} + \ell) = \chi(\ell) \sigma_{\langle 3 \rangle}(u^{[3]}) \exp L(u^{[3]} + \frac{1}{2}\ell, \ell)$$

がわかる. これが第 3 階層の (7.20) である. また (7.22) により

$$0 = \sigma_{\langle 1 \rangle}(u^{[2]} + v) = \sigma_{\langle 111 \rangle}(u^{[2]})\frac{1}{2!}v_{\langle 1 \rangle}^2 + \{\sigma_{\langle 1111 \rangle}(u^{[2]})\frac{1}{3!} + \sigma_{\langle 13 \rangle}(u^{[2]})\frac{1}{3}\}v_{\langle 1 \rangle}^3 \dots$$

であるから, 上の (7.22) と合せて

$$(7.23) \quad \sigma_{\langle 111 \rangle}(u^{[2]}) = \sigma_{\langle 3 \rangle}(u^{[2]}) = 0, \quad \sigma_{\langle 1111 \rangle}(u^{[2]})\frac{1}{3!} + \sigma_{\langle 13 \rangle}(u^{[2]})\frac{1}{3} = 0$$

を得る. しかるに

$$0 = \sigma_{\langle 11 \rangle}(u^{[2]} + v) = \sigma_{\langle 1111 \rangle}(u^{[2]}) \frac{1}{2!} v_{\langle 1 \rangle}^2 + \dots$$

と上の式から

$$\sigma_{\langle 1111 \rangle}(u^{[2]}) = \sigma_{\langle 13 \rangle}(u^{[2]}) = 0$$

を得る. 次に $\sigma(u^{[3]})$, $\sigma_{\langle 1 \rangle}(u^{[3]})$, $\sigma_{\langle 11 \rangle}(u^{[3]})$ の重さ 5 の微分の項を同様にして調べれば,

$$\sigma_{\langle 11111 \rangle}(u^{[2]}) = \sigma_{\langle 113 \rangle}(u^{[2]}) = \sigma_{\langle 5 \rangle}(u^{[2]}) = 0$$

を得る. これと平行移動公式の適当な偏微分から, 先にやつたのと同様にして,

$$\sigma_{\langle 111111 \rangle}(u^{[2]} + \ell) = \chi(\ell) \sigma_{\langle 111111 \rangle}(u^{[2]}) \exp L(u^{[2]} + \frac{1}{2}\ell, \ell),$$

$$\sigma_{\langle 1113 \rangle}(u^{[2]} + \ell) = \chi(\ell) \sigma_{\langle 1113 \rangle}(u^{[2]}) \exp L(u^{[2]} + \frac{1}{2}\ell, \ell),$$

$$\sigma_{\langle 33 \rangle}(u^{[2]} + \ell) = \chi(\ell) \sigma_{\langle 33 \rangle}(u^{[2]}) \exp L(u^{[2]} + \frac{1}{2}\ell, \ell),$$

$$\sigma_{\langle 15 \rangle}(u^{[2]} + \ell) = \chi(\ell) \sigma_{\langle 15 \rangle}(u^{[2]}) \exp L(u^{[2]} + \frac{1}{2}\ell, \ell)$$

がわかる. 次に $\sigma(u^{[3]})$, $\sigma_{\langle 1 \rangle}(u^{[3]})$, $\sigma_{\langle 11 \rangle}(u^{[3]})$ の重さ 6 の微分の項を同様にして調べれば,

$$\sigma_{\langle 111111 \rangle}(u^{[2]}) = 16 \sigma_{\langle 15 \rangle}(u^{[2]}), \quad \sigma_{\langle 1113 \rangle}(u^{[2]}) = -2 \sigma_{\langle 15 \rangle}(u^{[2]}),$$

$$\sigma_{\langle 33 \rangle}(u^{[2]}) = -2 \sigma_{\langle 15 \rangle}(u^{[2]})$$

を得る. 同様にして

$$\sigma_{\langle 111111 \rangle}(u^{[1]}) = \sigma_{\langle 1113 \rangle}(u^{[1]}) = \sigma_{\langle 33 \rangle}(u^{[1]}) = 0$$

も示せる. さらに $\sigma(u^{[2]})$, $\sigma_{\langle 1 \rangle}(u^{[2]})$, $\sigma_{\langle 11 \rangle}(u^{[2]})$, $\sigma_{\langle 111 \rangle}(u^{[2]})$, $\sigma_{\langle 3 \rangle}(u^{[2]})$ の重さ 7 の微分の項を同様にして調べれば,

$$\sigma_{\langle 1111111 \rangle}(u^{[1]}) = \sigma_{\langle 11113 \rangle}(u^{[1]}) = \sigma_{\langle 115 \rangle}(u^{[1]}) = \sigma_{\langle 133 \rangle}(u^{[1]}) = \sigma_{\langle 7 \rangle}(u^{[1]}) = 0$$

を得る. 以下同様に調べて行く. 説明を省略するが, 重さ 8 または 9 だけ微分した導関数は全て第 1 階層で消えることも同様にして示される. その結果, やはり平行移動公式の偏微分から, I が重さ 9 のとき

$$\sigma_I(u^{[1]} + \ell) = \chi(\ell) \sigma_I(u^{[1]}) \exp L(u^{[1]} + \frac{1}{2}\ell, \ell)$$

がわかる. 最後に重さ $15 - 10 = 5$ の函数の第 1 階層について下表に示す様な計算がなされる.

函数	$\langle 1^{10} \rangle$	$\langle 31^7 \rangle$	$\langle 3^2 1^4 \rangle$	$\langle 3^3 1 \rangle$	$\langle 51^5 \rangle$	$\langle 531^2 \rangle$	$\langle 5^2 \rangle$	$\langle 71^3 \rangle$	$\langle 73 \rangle$	$\langle 91 \rangle$
$\langle \rangle$	1/10!	8/8!/3	15/6!/3 ²	4/4!/3 ³	6/6!/5	12/4!/5/3	1/2!/5 ²	4/4!/7	2/2!/7/3	2/2!/9
$\langle 1 \rangle$	1/9!	7/7!/3	10/5!/3 ²	1/3!/3 ³	5/5!/5	6/3!/5/3	0	3/3!/7	0	1/9
$\langle 11 \rangle$	1/8!	6/6!/3	6/4!/3 ²	0	4/4!/5	2/2!/5/3	0	2/2!/7	0	0
$\langle 111 \rangle$	1/7!	5/5!/3	3/3!/3 ²	0	3/3!/5	0	0	1/7	0	0
$\langle 3 \rangle$	0	1/7!	5/5!/3	3/3!/3 ²	0	3/3!/5	0	0	1/7	0
$\langle 1111 \rangle$	1/6!	4/4!/3	1/2!/3 ²	0	2/2!/5	0	0	0	0	0
$\langle 13 \rangle$	0	1/6!	4/4!/4/3	1/2!/3 ²	0	2/2!/5	0	0	0	0
$\langle 11111 \rangle$	1/5!	3/3!/3	0	0	1/5	0	0	0	0	0
$\langle 5 \rangle$	0	0	0	0	1/5!	3/3!/3	1/5	0	0	0
第 1 階層上	768	-48	0	-6	8	2	-2	-2	1	0

この結果

$$\begin{aligned}\sigma_{\langle 110 \rangle}(u^{[1]}) &= 768 \sigma_{\langle 73 \rangle}(u^{[1]}), \quad \sigma_{\langle 317 \rangle}(u^{[1]}) = -48 \sigma_{\langle 73 \rangle}(u^{[1]}), \quad \sigma_{\langle 3214 \rangle}(u^{[1]}) = 0, \\ \sigma_{\langle 331 \rangle}(u^{[1]}) &= -6 \sigma_{\langle 73 \rangle}(u^{[1]}), \quad \sigma_{\langle 515 \rangle}(u^{[1]}) = 8 \sigma_{\langle 73 \rangle}(u^{[1]}), \quad \sigma_{\langle 5312 \rangle}(u^{[1]}) = 2 \sigma_{\langle 73 \rangle}(u^{[1]}), \\ \sigma_{\langle 52 \rangle}(u^{[1]}) &= -2 \sigma_{\langle 73 \rangle}(u^{[1]}), \quad \sigma_{\langle 713 \rangle}(u^{[1]}) = -2 \sigma_{\langle 73 \rangle}(u^{[1]}), \quad \sigma_{\langle 91 \rangle}(u^{[1]}) = 0\end{aligned}$$

を得る. つまり $\sigma_{\langle 73 \rangle}(u) = \sigma_{\sharp}(u^{[1]})$ である. さらに同様な計算を続けることで, $\sigma_{\langle 73 \rangle}(u)$ および $\sigma(u)$ を重さ 14 以下だけ微分して得られる導関数はどれも第 0 階層, つまり Λ の点で消えることがわかる. よつて, $\sigma_{\langle 73 \rangle}(u^{[1]})$ は原点で 5 位の零である. しかるに, ここまでの結果から, 各階層において translational relation が成り立つので, それの対数を \mathcal{C} の正規多角形 \mathcal{C}_0 の周囲に沿って積分することにより, 偏角の原理から関数 $v \mapsto \sigma_{\sharp}^n(u^{[n-1]} + v)$ は Λ の点で重複度込みで丁度 $g = 5$ 個の零点を持つ事がわかる. それゆゑ, $v \mapsto \sigma_{\sharp}^n(u^{[n-1]} + v)$ は主張にある通りの箇所での位数の零点を持ち, それ以外では消えない. 特に $\sigma(v)$ の $v_{\langle 1 \rangle}$ に関する展開の最低次の項は $g = 5$ 次である. $\sigma(u)$ の原点における冪級数展開において, 全ての μ_j を 0 としたものが, (6.53) の Schur-Weierstraß 多項式であることを認めるならば, $\sigma_{\sharp}(v)$ の展開の初項の係数は $(-1)^{(g-1)(g-3)/2} v_{\langle 1 \rangle}^{g(g+1)/2}$ となる筈である:

$$\sigma_{\sharp}(v) = (-1)^{(g-1)(g-3)/2} v_{\langle 1 \rangle}^{g(g+1)/2} + \dots$$

このことと以上の結果から, 残りの主張もすべて容易に得られる. □

注意 7.24 (1) 上に述べた証明はもつと整理されるべきであるが, まだ, 解明できてゐない事も多いので, 止むを得ず地道に計算過程を述べた. 事実, σ 関数の行列式表示 (7.11) を利用すれば証明ができる筈で, それが, 最も自然な証明であらう ([40] 参照). [42] では, まづ $S(u)$ についての上の結果を証明し, それを sigma 関数の場合に解析的に lift する方法を用いてゐる.

(2) 上の証明から次の事がわかる. もし $\Theta^{[g-1]}$ で 1 位の零点を持つ関数 $\sigma(u)$ で, その原点での展開が斉重かつ u_j 達の $\mathbb{Q}[\boldsymbol{\mu}]$ 係数の冪級数になるものがあつたとせよ. そのとき, 全ての μ_j を 0 として得られる u_j 達の多項式 $S(u)$ は同様の性質を持つ (7.2 参照). よつて 0 でない定数倍を除いて, この $S(u)$ は 6.53 の $S(u)$ と一致しなければならない. そのことから, もし 6.29 の様に定められる関数 (σ 関数) を具体的に構成できれば, そこから, Riemann の singularity theorem やそのいかなる拡張もなしで, 命題 7.21 を証明できる. その応用は相当に広いと思はれる. 特に, 次の小節で述べる様な美しい公式が得られる.

7.5 Hermite-Frobenius-Stickelberger 型の公式

Frobenius と Stickelberger は [19] で, Weierstrass の sigma 関数 $\sigma(u)$ と $\wp(u)$, つまり (2, 3) 曲線の場合に, n 個 ($n \geq 2$) の変数 $u^{(1)}, \dots, u^{(n)} \in \mathbb{C}$ についての等式

$$(7.25) \quad (-1)^{(n-1)(n-2)/2} 1! 2! \cdots (n-1)! \cdot \frac{\sigma(u^{(1)} + \cdots + u^{(n)}) \prod_{i < j} \sigma(u^{(i)} - u^{(j)})}{\sigma_{\sharp}(u^{(1)})^n \cdots \sigma_{\sharp}(u^{(n)})^n} \\ = \begin{vmatrix} 1 & \wp(u^{(1)}) & \wp'(u^{(1)}) & \cdots & \wp^{(n-2)}(u^{(1)}) \\ 1 & \wp(u^{(2)}) & \wp'(u^{(2)}) & \cdots & \wp^{(n-2)}(u^{(2)}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \wp(u^{(n)}) & \wp'(u^{(n)}) & \cdots & \wp^{(n-2)}(u^{(n)}) \end{vmatrix}$$

を与へた. これは Hermite による先行論文の結果を explicit に書いたものなので, Hermite-Frobenius-Stickelberger の公式 と呼ぶことにする.

この節では, この等式を種数の高い代数曲線の場合に一般化することを考へる. まづ, 函数 $\kappa^{-1}\iota(\mathcal{C}) \ni u \mapsto (x(u), y(u)) \in \mathcal{C}$ を, (5.20) の第 1 種微分の基底 $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_g)$ を用いて,

$$u = \int_{\infty}^{(x(u), y(u))} \omega, \quad f(x(u), y(u)) = 0$$

となるものと定める. このとき (5.26) と (5.27) とから, $\mathbb{Q}[\boldsymbol{\mu}]$ を係数とする $u_{\langle 1 \rangle}$ の冪級数として

$$(7.26) \quad x(u) = \frac{1}{u_{\langle 1 \rangle}^2} + \cdots, \\ y(u) = -\frac{1}{u_{\langle 1 \rangle}^{2g+1}} + \cdots$$

と展開される. この記法を使ふとき, (2, 3) 曲線 ($g = 1$) についての (7.25) が

$$\frac{\sigma(u^{(1)} + \cdots + u^{(n)}) \prod_{i < j} \sigma(u^{(i)} - u^{(j)})}{\sigma(u^{(1)})^n \cdots \sigma(u^{(n)})^n} = \begin{vmatrix} 1 & x(u^{(1)}) & y(u^{(1)}) & x^2(u^{(1)}) & xy(u^{(1)}) & x^3(u^{(1)}) & \cdots \\ 1 & x(u^{(2)}) & y(u^{(2)}) & x^2(u^{(2)}) & xy(u^{(2)}) & x^3(u^{(2)}) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 1 & x(u^{(n)}) & y(u^{(n)}) & x^2(u^{(n)}) & xy(u^{(n)}) & x^3(u^{(n)}) & \cdots \end{vmatrix}$$

($n \times n$ 型の行列式, (2, 3) 曲線)

と書き直せることは容易にわかる. この式の類似は, 一般の (2, $2g + 1$) 曲線では次の様になる:

定理 7.27 (Hermite-Frobenius-Stickelberger 型の公式 [42]) $u^{(1)}, \dots, u^{(n)} \in \kappa^{-1}\iota(\mathcal{C})$ に対して, 次の式が成り立つ.

(1) $2 \leq n \leq g$ のとき,

$$(-1)^{n(n-1)(n+g+1)/2} \cdot \frac{\sigma_{\sharp}^n(u^{(1)} + \cdots + u^{(n)}) \prod_{i < j} \sigma_{\flat}(u^{(i)} - u^{(j)})}{\sigma_{\sharp}(u^{(1)})^n \cdots \sigma_{\sharp}(u^{(n)})^n} = \begin{vmatrix} 1 & x(u^{(1)}) & \cdots & x^{n-1}(u^{(1)}) \\ 1 & x(u^{(2)}) & \cdots & x^{n-1}(u^{(2)}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x(u^{(n)}) & \cdots & x^{n-1}(u^{(n)}) \end{vmatrix}.$$

(2) 一般に $n \geq g$ のとき,

$$(-1)^{(n-g-1)(n+g^2+2g)/2} \cdot \frac{\sigma_{\mathfrak{h}^n}(u^{(1)} + \cdots + u^{(n)}) \prod_{i < j} \sigma_{\mathfrak{h}}(u^{(i)} - u^{(j)})}{\sigma_{\mathfrak{h}}(u^{(1)})^n \cdots \sigma_{\mathfrak{h}}(u^{(n)})^n}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x(u^{(1)}) & \cdots & x^g(u^{(1)}) & \cdots & y(u^{(1)}) & x^{g+1}(u^{(1)}) & xy(u^{(1)}) & x^{g+2}(u^{(1)}) & x^2y(u^{(1)}) & \cdots \\ 1 & x(u^{(2)}) & \cdots & x^g(u^{(2)}) & \cdots & y(u^{(2)}) & x^{g+1}(u^{(2)}) & xy(u^{(2)}) & x^{g+2}(u^{(2)}) & x^2y(u^{(2)}) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 1 & x(u^{(n)}) & \cdots & x^g(u^{(n)}) & \cdots & y(u^{(n)}) & x^{g+1}(u^{(n)}) & xy(u^{(n)}) & x^{g+2}(u^{(n)}) & x^2y(u^{(n)}) & \cdots \end{vmatrix}.$$

ここで、右辺の行列式の中は $n \times n$ 型の行列である。

証明 まづは、命題 7.17 (6) を使つて、上の (1) と (2) の両辺はどの変数 $u, v, u^{(j)}$ についても周期格子 Λ に関して全く周期的であることが容易にわかる。以下では、 n に関する帰納法を使ふ。 $n = 2$ のとき、7.17 (2), (3) の零点に関する主張から、 u あるいは v の $\iota(\mathcal{C})$ 上の函数としての因子 (極と零点) が一致することがわかる。また (7.18) と $x(u)$ と $y(u)$ の展開 (7.26) を使つて、両辺の初項が一致することがわかるから、両辺が一致する。次に、両辺を \mathcal{C} 上の $u^{(n)}$ の函数とみて因子を比較し、それらの一致を確認する。その上で、(7.19), (7.26), および帰納法の仮定を使つて、 $u^{(n)}$ に関する両辺の冪級数展開の初項が一致することがわかる。先頭の符号は、これらの過程を踏んで得られる ([42] と下記の注意を参照)。□

注意 7.28 上記公式の先頭の符号が [42] では誤つてをり、その修正が [51] にある。

7.6 第3種微分と sigma 函数の関係 (Riemann の基本関係式)

定理 4.40 を sigma 函数の言葉に訳すと次の様になる.

定理 7.29 $P_j, Q_j \in \mathcal{C}$ ($j = 1, \dots, g$) に対して

$$(7.30) \quad \exp\left(\sum_{j=1}^g R_{P_j, Q_j}^{P, Q}\right) = \frac{\sigma\left(\int_{\infty}^P \omega - \sum_{j=1}^g \int_{\infty}^{P_j} \omega\right) \sigma\left(\int_{\infty}^Q \omega - \sum_{j=1}^g \int_{\infty}^{Q_j} \omega\right)}{\sigma\left(\int_{\infty}^P \omega - \sum_{j=1}^g \int_{\infty}^{Q_j} \omega\right) \sigma\left(\int_{\infty}^Q \omega - \sum_{j=1}^g \int_{\infty}^{P_j} \omega\right)}$$

が成り立つ.

証明 命題 5.65 の $\Gamma = [c_{ij}]_{g \times g}$ に対して

$$\begin{aligned} & t\left(\int_{\infty}^P \omega - \sum_{j=1}^g \int_{\infty}^{P_j} \omega\right) \Gamma\left(\int_{\infty}^P \eta - \sum_{j=1}^g \int_{\infty}^{P_j} \eta\right) \\ & - t\left(\int_{\infty}^Q \omega - \sum_{j=1}^g \int_{\infty}^{P_j} \omega\right) \Gamma\left(\int_{\infty}^Q \eta - \sum_{j=1}^g \int_{\infty}^{P_j} \eta\right) \\ & - t\left(\int_{\infty}^P \omega - \sum_{j=1}^g \int_{\infty}^{Q_j} \omega\right) \Gamma\left(\int_{\infty}^P \eta - \sum_{j=1}^g \int_{\infty}^{Q_j} \eta\right) \\ & + t\left(\int_{\infty}^Q \omega - \sum_{j=1}^g \int_{\infty}^{Q_j} \omega\right) \Gamma\left(\int_{\infty}^Q \eta - \sum_{j=1}^g \int_{\infty}^{Q_j} \eta\right) \\ & = \sum_r \sum_s c_{rs} \left(\int_{\infty}^P \omega_r - \sum_{j=1}^g \int_{\infty}^{P_j} \omega_r\right) \left(\int_{\infty}^P \eta_s - \sum_{j=1}^g \int_{\infty}^{P_j} \eta_s\right) \\ & - \sum_r \sum_s c_{rs} \left(\int_{\infty}^Q \omega_r - \sum_{j=1}^g \int_{\infty}^{P_j} \omega_r\right) \left(\int_{\infty}^Q \eta_s - \sum_{j=1}^g \int_{\infty}^{P_j} \eta_s\right) \\ & - \sum_r \sum_s c_{rs} \left(\int_{\infty}^P \omega_r - \sum_{j=1}^g \int_{\infty}^{Q_j} \omega_r\right) \left(\int_{\infty}^P \eta_s - \sum_{j=1}^g \int_{\infty}^{Q_j} \eta_s\right) \\ & + \sum_r \sum_s c_{rs} \left(\int_{\infty}^Q \omega_r - \sum_{j=1}^g \int_{\infty}^{Q_j} \omega_r\right) \left(\int_{\infty}^Q \eta_s - \sum_{j=1}^g \int_{\infty}^{Q_j} \eta_s\right) \\ & = 2 \sum_{j=1}^g \left(\sum_r \sum_s c_{rs} \int_Q^P \omega_r \int_{Q_j}^{P_j} \eta_s\right) \\ & = \sum_{j=1}^g \left(R_{P_j, Q_j}^{P, Q} - \int_Q^P \tau_{P_j, Q_j}\right) \end{aligned}$$

となるが, 補題 6.2 と (5.72) に注意し, 上の式の \exp を (4.42) において $I = \infty$ としたものに掛ければ所望の等式が得られる. \square

8 ϕ 函数

8.1 ϕ 函数の定義と基本性質

定義 8.1 我々は $i = 1, \dots, g$ について

$$(8.2) \quad \begin{aligned} \wp_{ij}(u) &= -\frac{\partial^2}{\partial u_i \partial u_j} \log \sigma(u) \\ &= \frac{\sigma_i(u)\sigma_j(u) - \sigma_{ij}(u)\sigma(u)}{\sigma(u)^2} \end{aligned}$$

と定め, これを \wp 函数と呼ぶ. ここで

$$(8.3) \quad \sigma_i(u) = \frac{\partial}{\partial u_i} \sigma(u), \quad \sigma_{ij}(u) = \frac{\partial^2}{\partial u_i \partial u_j} \sigma(u)$$

である.

平行移動公式 (6.47)(i) から u を $u + \ell$ ($\ell \in \Lambda$ に変へても u_i の 1 次式の指数函数が掛かるだけであるから \wp 函数はその定義により λ を周期 (の一部) とする周期函数であることがわかる. これゆゑ $\wp_{ij}(u)$ は Jacobi 多様体 J 上の函数と見做すことにする. さうすれば $\wp_{ij}(u)$ は (6.47)(iii) から, $\Theta^{[g-1]}$ に高々 2 位の極を持ち, それ以外の点では正則である. いま Jacobi 多様体 J 上の $\Theta^{[g]}$ に高々 n 位の極を持ち, それ以外で正則な函数のなす空間を代数幾何学の記号を使つて

$$(8.4) \quad \Gamma(J, \mathcal{O}(n\Theta^{[g-1]}))$$

と書くことにする. 上のことは

$$(8.5) \quad \wp_{ij}(u) \in \Gamma(J, \mathcal{O}(2\Theta^{[g-1]}))$$

と書ける.

命題 8.6 $\wp_{ij}(u)$ は偶函数である.

証明 $\sigma(u)$ は偶または奇函数なので, 定義より明らか. □

注意 8.7 上の 8.2 は Kummer 多様体 の方程式を書き下すのに重要である (第 11 節参照).

補題 8.8 $P_j = (x_j, y_j)$ ($j = 1, \dots, g$) と $P = (x, y)$ に対して

$$v = {}^t[v_1 \cdots v_g] = \int_{\infty}^P \omega - \sum_{j=1}^g \int_{\infty}^{P_j} \omega$$

とおくとき

$$(8.9) \quad 4y_r y \frac{\partial^2}{\partial x_r \partial x} = - \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^g x_r^{i-1} x^{j-1} \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j}$$

となる.

証明 Jacobi の定理 3.23 より P, P_1, \dots, P_g が \mathcal{C} 上を動くとき v_1, \dots, v_g の全体は \mathbb{C}^g 全体を動くことに注意する. このとき

$$\frac{\partial^2}{\partial x_r \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{i=1}^g \frac{\partial v_i}{\partial x_r} \frac{\partial}{\partial v_i} \right) = \sum_{i=1}^g \left[\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_r \partial x} \frac{\partial}{\partial v_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_r} \left(\sum_{j=1}^g \frac{\partial v_i}{\partial x_r} \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j} \right) \right]$$

ここで v_i の定義より

$$\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_r \partial x} = 0.$$

よつて

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^g \frac{\partial v_i}{\partial x_r} \sum_{j=1}^g \frac{\partial v_i}{\partial x_r} \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j} \\ &= \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^g \frac{x_r^{i-1}}{-2y_r} \cdot \frac{x^{j-1}}{2y} \cdot \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j}. \end{aligned}$$

この両辺に $4y_r y$ を掛けて主張を得る. □

定理 8.10 $F(x, z)$ は (5.56) で定義したものとする. $P = (x, y), P_r = (x_r, y_r)$ ($r = 1, \dots, g$) について

$$u = \sum_{r=1}^g \int_{\infty}^{P_r} \omega$$

とするとき

$$(8.11) \quad \frac{F(x_r, x) + 2y_r y}{(x_r - x)^2} = \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^g \wp_{ij} \left(\int_{\infty}^P \omega - u \right) x_r^{i-1} x^{j-1}$$

が成り立つ.

証明 まず, P, P_r, Q_r ($r = 1, \dots, g$) を取れば

$$(8.12) \quad \begin{aligned} 2y_r \frac{\partial}{\partial x_r} R_{P_r, Q_r}^{P, Q} &= \int_{Q_r}^P \frac{F(x, x_r) - 2y_r y}{4(x - x_r)^2} \frac{dx}{2y} \\ \therefore 4y_r \frac{\partial^2}{\partial x_r \partial x} R_{P_r, Q_r}^{P, Q} &= \frac{F(x, x_r) - 2y_r y}{4(x - x_r)^2} \end{aligned}$$

になつてゐることに注意する. 但し $P = (x, y)$ に対して $\bar{P} = (x, -y)$ などと書いてゐる. それゆゑ, 右辺の分子が差になつてゐる事に注意せよ. ここで (8.9) を (5.31) の \log に対して施せば上の (8.8) より所望の式を得る. □

定理 8.13 いま \mathcal{C} 上の g 個の点 (x_r, y_r) ($r = 1, \dots, g$) に対して

$$(8.14) \quad u = \sum_{r=1}^g \int_{\infty}^{(x_r, y_r)} \omega$$

とおくと

$$(8.15) \quad \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^g \wp_{ij}(u) x_r^{i-1} x_s^{j-1} = \frac{F(x_r, x_s) - 2y_r y_s}{(x_r - x_s)^2}, \quad (g \geq 2)$$

$$(8.16) \quad x_r^g - \sum_{j=1}^g \wp_{jg}(u) x_r^{j-1} = 0$$

が任意の $r = 1, \dots, g; s = 1, \dots, g$ について成り立つ. 特に第 2 式より

$$(8.17) \quad (-1)^{g-j} \wp_{jg}(u) = \text{“}x_1, \dots, x_g \text{ の } (g-j+1) \text{ 次の基本対称式”}$$

である.

証明 等式 (8.11) で $g \geq 2$ のときは $s \neq r$ なる s について $P_s \rightarrow \infty$ とした後で \bar{P} を P_s と名付ければ (8.15) が得られる. また (8.11) の両辺を x^{g-1} で割つたあと $P \rightarrow \infty$ とするとき, $F(x_r, x)$ の x に関する最高次の項は

$$x_r^g x^g$$

であり,

$$y/x^{g-1+2} \rightarrow 0$$

なので (8.16) が得られる. □

例 8.18 $g = 2$ だと

$$\begin{aligned} \wp_{12} \left(\int_{\infty}^{(x_1, y_1)} \omega + \int_{\infty}^{(x_2, y_2)} \omega \right) &= -x_1 x_2, \\ \wp_{22} \left(\int_{\infty}^{(x_1, y_1)} \omega + \int_{\infty}^{(x_2, y_2)} \omega \right) &= x_1 + x_2. \end{aligned}$$

これは, 様々な書物に大要のみ書かれてある Jacobi の逆問題 の最も美しい記述であると思はれる. さらに, もし曲線 $y^2 = x^5 + 1$ を考へるならば $(x, y) \mapsto (\zeta x, -y)$ ($\zeta = e^{2\pi i/5}$) なる自己同型に関して

$$\wp_{ij}(-\zeta u_1, -\zeta u_2) = \zeta^{-i-j} \wp_{ij}(u_1, u_2) \quad (i, j = 1, 2)$$

である.

9 Jacobi 多様体の定義方程式系

9.1 \wp 関数を成分に持つ行列

いま u は \mathcal{C} 上の g 個の点 $(x_1, y_1), \dots, (x_g, y_g)$ と

$$u = \left(\int_{\infty}^{(x_1, y_1)} + \int_{\infty}^{(x_2, y_2)} + \dots + \int_{\infty}^{(x_g, y_g)} \right) \omega$$

なる関係があるとせよ. このとき fundamental relation (8.11)

$$(9.1) \quad \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^g \wp_{ij} \left(u - \int_{\infty}^{(x, y)} \right) x_r^{i-1} x^{j-1} = \frac{F(x_r, x) + 2y_r y}{(x_r - x)^2}$$

が成り立つ. これから Jacobi 多様体の自然な方程式系を導くのが本節の目標である. まづ (9.1) から, いくつかの必要な式を導いておく. (9.1) の分母を払って,

$$(9.2) \quad (x_r - x)^2 \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^g \wp_{ij} \left(u - \int_{\infty}^{(x, y)} \right) x_r^{i-1} x^{j-1} - (F(x_r, x) + 2y_r y) = 0$$

を得る. ここで $x = 1/t^2$, $y = 1/t^{2g+1} + \dots$ として, (9.2) の左辺を t で展開すれば, その t に関する各係数が消える. 特に最低次とその次の項が消えることから, 各 r について

$$\begin{aligned} y_r &= \wp_{ggg} x_r^{g-1} + \wp_{gg, g-1} x_r^{g-2} + \dots + \wp_{gg2} x_r + \wp_{gg1}, \\ x_r^g &= \wp_{gg} x_r^{g-1} + \wp_{g, g-1} x_r^{g-2} + \dots + \wp_{g2} x_r + \wp_{g1} \end{aligned}$$

が成り立つ. さらに (8.15) を思ひ出す: すべての r, s について

$$(9.3) \quad (x_r - x_s)^2 \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^g \wp_{ij}(u) x_r^{i-1} x_s^{j-1} - (F(x_r, x_s) - 2y_r y_s) = 0.$$

いま

$$W(x) = {}^t [1 \ x \ x^2 \ \dots \ x^{g-1} \ x^g \ x^{g+1}]$$

とおいて, (9.3) を

$$y_r y_s = {}^t W(x_r) H W(x_s)$$

の形に変形するならば $H = [h_{ij}]$ の成分は

$$\begin{aligned} h_{ij} &= 2\wp_{i-1, j-1} - \wp_{i-2, j} - \wp_{i, j-2} + \delta_{ij} (\mu_{4g+6-4i} + \mu_{4g+6-4j}) \\ &\quad + (\delta_{i, j+1} \mu_{4g+8-4i} + \delta_{i+1, j} \mu_{4g+8-4j}) \end{aligned}$$

となる. 但し δ_{ij} は Kronecker の delta である. 例へば $g = 4$, つまり

$$y^2 = x^9 + \mu_2 x^8 + u_4 x^7 + \dots$$

のときは

$$H = \begin{bmatrix} 2\mu_{18} & \mu_{16} & -\wp_{11} & -\wp_{12} & -\wp_{13} & -\wp_{14} \\ \mu_{16} & 2\wp_{11} + 2\mu_{14} & \wp_{12} + \mu_{12} & 2\wp_{13} - \wp_{22} & 2\wp_{14} - \wp_{23} & -\wp_{24} \\ -\wp_{11} & \wp_{12} + \mu_{12} & 2\wp_{22} - 2\wp_{13} + 2\mu_{10} & \wp_{23} - \wp_{14} + \mu_8 & 2\wp_{24} - \wp_{33} & -\wp_{34} \\ -\wp_{12} & 2\wp_{13} - \wp_{22} & \wp_{23} - \wp_{14} + \mu_8 & 2\wp_{33} - 2\wp_{24} + 2\mu_6 & 2\wp_{34} - \wp_{34} + \mu_4 & -\wp_{44} \\ -\wp_{13} & 2\wp_{14} - \wp_{23} & 2\wp_{24} - \wp_{33} & 2\wp_{34} - \wp_{34} + \mu_4 & 2\wp_{44} + 2\mu_2 & 1 \\ -\wp_{14} & -\wp_{24} & -\wp_{34} & -\wp_{44} & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

このとき, もちろん

$$-2f(x_r) = {}^tW(x_r)HW(x_r).$$

次に,

$$U(x) = {}^t[1 \ x \ x^2 \ \cdots \ x^{g-1}]$$

とおき,

$$(9.4) \quad x_r^g = \wp_{gg}x_r^{g-1} + \wp_{g2}x_r^{g-2} + \cdots + \wp_{g,g-1}x_r + \wp_{gg}$$

を利用して $y_r y_s = {}^tU(x_r)KU(x_s)$ の形の式を作れば, この K は

$$K = \left[\det H \begin{bmatrix} i & g+1 & g+2 \\ j & g+1 & g+2 \end{bmatrix} \right]_{1 \leq i \leq g, 1 \leq j \leq g}$$

となる. 実際

$$H = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ {}^tH_{21} & x^{g+1} \end{bmatrix}$$

とするとき

$$\begin{aligned} & {}^tW(x_r)HW(x_r) \\ &= [{}^tW'(x_r) \ x_r^{g+1}] \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ {}^tH_{21} & x^{g+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^tW'(x_s) \\ x_s^{g+1} \end{bmatrix} \\ &= [{}^tW'(x_r)H_{11} + x_r^{g+1}{}^tH_{12} \ 0] \begin{bmatrix} {}^tW'(x_s) \\ x_s^{g+1} \end{bmatrix} \\ &= {}^tW'(x_r)H_{11}W'(x_s) + x_r^{g+1}{}^tH_{12}x_s^{g+1} \\ &= {}^tW'(x_r)H_{11}W'(x_s) + x_r^{g+1} \cdot 0 \\ &= {}^tU(x_r)H'_{11}U(x_s) + x_r^g{}^tH'_{12} + {}^tU(x_r)H'_{12}x_s^g + x_r^g h_{g+1,g+1}x_s^g \\ &= {}^tU(x_r)H'_{11}U(x_s) \\ &\quad + {}^tU(x_r) \begin{bmatrix} \wp_{1g} \\ \vdots \\ \wp_{gg} \end{bmatrix} {}^tH'_{12} \\ &\quad + {}^tU(x_r)H'_{12}[\wp_{1g} \ \cdots \ \wp_{gg}]U(x_s) \\ &\quad + {}^tU(x_r) \begin{bmatrix} \wp_{1g} \\ \vdots \\ \wp_{gg} \end{bmatrix} h_{g+1,g+1}[\wp_{1g} \ \cdots \ \wp_{gg}]U(x_s) \\ &= {}^tU(x_r) \left[H \begin{bmatrix} i & g+1 & g+2 \\ j & g+1 & g+2 \end{bmatrix} \right] U(x_s). \end{aligned}$$

(ここの計算は全く形式的なもの). また,

$$y_r = \wp_{ggg}x_r^{g-1} + \wp_{gg,g-1}x_r^{g-2} + \cdots + \wp_{gg2}x_r + \wp_{gg1}$$

なので,

$$y_r y_s = \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^g \wp_{ggi} \wp_{ggj} x_r^{i-1} x_s^{j-1}$$

$$= {}^t U(x_r) \begin{bmatrix} \wp_{gg1} \wp_{gg1} & \wp_{gg1} \wp_{gg2} & \cdots & \wp_{gg1} \wp_{ggg} \\ \wp_{gg2} \wp_{gg1} & \wp_{gg2} \wp_{gg2} & \cdots & \wp_{gg2} \wp_{ggg} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \wp_{ggg} \wp_{gg1} & \wp_{ggg} \wp_{gg2} & \cdots & \wp_{ggg} \wp_{ggg} \end{bmatrix} U(x_s)$$

である. ここで $[{}^t U(x_1) {}^t U(x_2) \cdots {}^t U(x_g)]$ は generic には正則行列なので,

$$\frac{1}{2} \wp_{ggi} \wp_{ggj} + \det H \begin{bmatrix} i & g+1 & g+2 \\ j & g+1 & g+2 \end{bmatrix} = 0 \quad (i, j = 1, \dots, g)$$

である. これが Jacobi 多様体を定義する十分な量の方程式を含んでゐることを示さう. いま

$$\{P_{11}, \dots, P_{gg}\}, \{P_{gg1}, \dots, P_{ggg}\}$$

をその 1 つの解とせよ (どれがどの変数に対応してゐるかは言ふまでもないと思ふ). このとき

$$y = P_{ggg}x^{g-1} + P_{gg,g-1}x^{g-2} + \cdots + P_{gg2}x + P_{gg1},$$

$$x^g = P_{gg}x^{g-1} + P_{g,g-1}x^{g-2} + \cdots + P_{g2}x + P_{g1}$$

が与へる g 個の根を

$$(x_1, y_1), \dots, (x_g, y_g)$$

とし, これから

$$u = \left(\int_{\infty}^{(x_1, y_1)} + \int_{\infty}^{(x_2, y_2)} + \cdots + \int_{\infty}^{(x_g, y_g)} \right) \omega$$

を定めると, 先の等式 $y_r = \wp_{gg1}x_r^{g-1} + \cdots$, $x^g = \wp_{g1}x_r^{g-1} + \cdots$ により,

$$P_{g1} = \wp_{g1}(u), \dots, P_{gg} = \wp_{gg}(u), P_{gg1} = \wp_{gg1}(u), \dots, P_{ggg} = \wp_{ggg}(u)$$

となる. 後は方程式を i, j の大きい方から順に辿つて, 順に, その他の組 (i, j) について $P_{ij} = \wp_{ij}(u)$ が了解される. 実際, 例へば $g = 4$ なら, まづ

$$\wp_{444}^2 = - \begin{vmatrix} 2\wp_{33} - 2\wp_{24} + 2\mu_6 & \wp_{34} + \mu_4 & -\wp_{44} \\ \wp_{34} + \mu_4 & 2\wp_{44} + 2\mu_2 & 1 \\ -\wp_{44} & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

と

$$P_{444}^2 = - \begin{vmatrix} 2P_{33} - 2P_{24} + 2\mu_6 & P_{34} + \mu_4 & -P_{44} \\ P_{34} + \mu_4 & 2P_{44} + 2\mu_2 & 1 \\ -P_{44} & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

より $P_{33} = \wp_{33}(u)$ でなければならない. さらに

$$\wp_{442}\wp_{444} = - \begin{vmatrix} \wp_{23} - \wp_{14} + 2\mu_6 & 2\wp_{24} - \wp_{33} & -\wp_{34} \\ \wp_{34} + \mu_4 & 2\wp_{44} + 2\mu_2 & 1 \\ -\wp_{44} & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

と

$$P_{443}P_{444} = - \begin{vmatrix} P_{23} - P_{14} + 2\mu_6 & 2P_{24} - P_{33} & -P_{34} \\ P_{34} + \mu_4 & 2P_{44} + 2\mu_2 & 1 \\ -P_{44} & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

により, $P_{23} = \wp_{23}(u)$ でなければならない. 以下順に進めると $P_{gg,i+1}P_{gg,j+1}$ についての方程式から $P_{ij} = \wp_{ij}(u)$ が得られて, 結局, すべての i, j について $P_{ij} = \wp_{ij}(u)$, $P_{ggj} = \wp_{ggj}(u)$ となるで, 上の解 $\{P_{ij}, P_{ggj}\}$ は Jacobi 多様体上の座標を与える.

従つてこれらの解は, 確かに Jacobi 多様体の 1 つの点の座標を与える. 以上から上の方程式系は Jacobi 多様体の定義方程式系である. ちなみに Jacobi 多様体の次元 g は変数

$$\{\wp_{11}, \dots, \wp_{gg}\}, \{\wp_{gg1}, \dots, \wp_{ggg}\}$$

の個数 $\frac{1}{2}g(g+1) + g$ から, 方程式の個数 $\frac{1}{2}g(g+1)$ を差し引いたものと一致してゐて, 辻褄が合つてゐる.

以上を定理としてまとめておく.

定理 9.5 超楕円曲線 \mathcal{C} の Jacobi 多様体の 1 つの model の定義方程式は

$$\frac{1}{2}\wp_{ggi}\wp_{ggj} + \det H \begin{bmatrix} i & g+1 & g+2 \\ j & g+1 & g+2 \end{bmatrix} = 0 \quad (i, j = 1, \dots, g)$$

で与えられる. これは特異点を含み得る.

注意 9.6 これは 特異点を含み得る が, それはこの方程式系を偏微分して得られる方程式により (座標を $\wp_{ijkl}, \wp_{ijklm}, \dots$ 等を導入して増やせば) 解消されていくと考へられる. この事は中屋敷氏の一連の研究 [12], [37] 等と深い関係がある様に思はれる.

9.2 \wp 函数のみたすその他の微分方程式

Weierstraß の \wp 函数は $\wp'(u)^2 = 4\wp(u)^3 - g_2\wp(u) - g_3$ なる微分方程式を満たす. 超楕円函数の場合も $\wp_{ij}(u)$ はいくつかの微分方程式を満たす. 本節では, 前節の結果を種数が 2 または 3 の場合に適用して, この場合について具体的に述べる. 途中で引用する文献の他に [5] も参考にされたい.

9.2.1 種数 3 以下の場合の準備

任意の $j, k, \dots, r \in \{1, \dots, g\}$ に対して

$$(9.7) \quad \wp_{jk\dots r}(u) = \frac{\partial}{\partial u_j} \wp_{k\dots r}(u)$$

と定めると $\wp_{jk\dots r}(u)$ はすべて Λ を周期とする周期函数つまり Jacobi 多様体 $J = \mathbb{C}^g/\Lambda$ 上の有理型函数になつてゐる. 種数 $g = 1$ のときは $\wp_{11}(u)$ は (定数の差を除いて) 所謂 Weierstraß の \wp 函数である.

Sigma 函数は $\kappa^{-1}(\Theta^{[g-1]})$ を 1 位の零の因子としてゐるので, (8.5) にも述べたように,

$$\wp_{ij}(u) \in \Gamma(J, \mathcal{O}(2\Theta)), \quad \wp_{ijk}(u) \in \Gamma(J, \mathcal{O}(3\Theta))$$

となることがわかる. ここで $\Gamma(J, \mathcal{O}(n\Theta))$ は Θ に n 位の極をもち, 他の点では正則であるような J 上の函数全体のなす空間をあらわす.

9.2.2 種数 2 の場合

一連の方程式を導くには幾通りも方法があるが, ここでは, Eilbeck の計算による \wp 函数の関係式の最小生成系について述べつつ, (2, 5) 曲線の場合に記述する⁴⁵.

(2, 5) 曲線 $\mathcal{C} : f(x, y) = 0$, 但し

$$f(x, y) = y^2 - (x^5 + \mu_2 x^4 + \mu_4 x^3 + \mu_6 x^2 + \mu_8 x + \mu_{10}),$$

について, 前節の結果から 3 つの方程式

$$(9.8) \quad \begin{aligned} \wp_{222}^2 &= 4\wp_{11} + 4\mu_6 + 4\wp_{12}\wp_{22} + 4\wp_{22}\mu_4 + 4\wp_{22}^3 + 4\wp_{22}^2\mu_2, \\ \wp_{122}^2 &= 4\mu_{10} - 4\wp_{11}\wp_{12} + 4\wp_{12}^2\wp_{22} + 4\wp_{12}^2\mu_2, \\ \wp_{122}\wp_{222} &= 2\mu_8 + 2\wp_{12}^2 + 2\wp_{12}\mu_4 - 2\wp_{22}\wp_{11} + 4\wp_{12}\wp_{22}^2 + 4\wp_{22}\wp_{12}\mu_2 \end{aligned}$$

が \mathcal{C} の Jacobi 多様体を定義する. ここではこれらの等式から種々の等式を導いてみる. しかし, 実際はこの手順は複雑すぎて理論的な興味しかない様に思はれる. さて, Kummer 関係式と呼ばれる関係式が

$$(9.9) \quad K := \wp_{222}^2\wp_{122}^2 - (\wp_{122}\wp_{222})^2 = 0,$$

に上の関係式 (9.8) を代入して得られる:

$$\begin{aligned} &4\wp_{12}\wp_{22}\mu_{10} + 2\wp_{11}\wp_{12}^2\wp_{22} + 2\wp_{22}\wp_{11}\mu_8 + 4\mu_6\wp_{12}^2\mu_2 - 2\wp_{12}\mu_4\mu_8 \\ &- 4\wp_{12}\wp_{22}^2\mu_8 - 2\wp_{22}\mu_4\wp_{11}\wp_{12} - 4\wp_{22}\wp_{12}\mu_2\mu_8 - \wp_{12}^4 + 4\wp_{11}\mu_{10} - 4\wp_{11}^2\wp_{12} \\ &+ 4\mu_6\mu_{10} + 4\wp_{22}^3\mu_{10} - \mu_8^2 - 2\wp_{12}^2\mu_8 - 2\wp_{12}^3\mu_4 - \wp_{12}^2\mu_4^2 - \wp_{22}^2\wp_{11}^2 \\ &+ 4\wp_{11}\wp_{12}^2\mu_2 + 4\wp_{22}^2\mu_2\mu_{10} + 4\mu_6\wp_{12}^2\wp_{22} + 4\wp_{22}\mu_4\mu_{10} - 4\mu_6\wp_{11}\wp_{12} = 0. \end{aligned}$$

これは偶函数 \wp_{ij} の基本関係式を与へてゐて, これは \mathcal{C} の Jacobi 多様体 J の解析的座標 u_1, u_2 を $(-u_1, -u_2)$ とを同一視した多様体 (Kummer 多様体) の定義方程式に外ならない. さて, 上の K の u_2 に関する微分を \wp_{112} に関して解けば

$$(9.10) \quad \wp_{112} = \frac{N}{D}$$

⁴⁵論文は未発表.

なる形の式を得る. 但し N は

$$N_1\wp_{122} + N_2\wp_{222}$$

の形をしてゐて, N_1, N_2 は \wp_{ij} 達の 3 次式であり, D は \wp_{ij} 達の 3 次式であつて

$$D = -\mu_4\wp_{22}\wp_{12} - \wp_{22}^2\wp_{11} + \wp_{22}\mu_8 - 4\wp_{11}\wp_{12} + \wp_{12}^2\wp_{22} - 2\mu_6\wp_{12} + 2\wp_{12}^2\mu_2 + 2\mu_{10}$$

で与へられる. (9.10) の両辺に \wp_{222} を掛けて (9.8) を使つて \wp_{ijk} の平方の項に代入して, 整理すれば

$$\wp_{112}\wp_{222} = \frac{N_{222}}{D}$$

なる式を得る. ここに N_{222} は \wp_{ij} の重さ 20 の 6 次式である. この右辺の除算は割り切れて, \wp_{ij} の多項式になるのであるが, 実際の計算では, まづ Gröbner 基底の理論を使つて N_{222} が ideal $\langle K, D \rangle$ に属することがわかり,

$$N_{222} = A_{222}K + B_{222}D$$

となる A_{222} と B_{222} を求めることができる:

$$\begin{aligned} A_{222} &= \wp_{12} + \frac{3}{2}\wp_{22}^2 + \mu_2\wp_{22} + \frac{1}{2}\mu_4, \\ B_{222} &= 2\wp_{22}\wp_{12}\mu_4 + 2\wp_{12}^2\wp_{22} + 2\wp_{22}^2\wp_{11} - 2\wp_{22}\mu_8 + 4\wp_{12}\mu_6 + 4\wp_{11}\wp_{12} \end{aligned}$$

を得る. $K = 0$ であるので, 結局

$$\begin{aligned} \wp_{112}\wp_{222} &= 2\wp_{22}\wp_{12}\mu_4 + 2\wp_{12}^2\wp_{22} + 2\wp_{22}^2\wp_{11} - 2\mu_8\wp_{22} \\ &\quad + 4\mu_6\wp_{12} + 4\wp_{11}\wp_{12} (= B_{222}) \end{aligned}$$

これが $\wp_{112}\wp_{222}$ に対する所望の等式である. (9.10) に \wp_{122} あるいは \wp_{112} を掛けて, 同様の計算をすれば対応する右辺の N_{122} と N_{112} (これらの定義は書くまでもないだらう) が得られて, 結局

$$\begin{aligned} A_{122} &= -\frac{1}{2}\wp_{11} + \frac{3}{2}\wp_{12}\wp_{22} + \wp_{12}\mu_2, \\ \wp_{112}\wp_{122} = B_{122} &= 2\wp_{22}\wp_{11}\wp_{12} + 2\wp_{12}^3 + 2\wp_{12}^2\mu_4 + 2\mu_8\wp_{12} - 4\wp_{22}\mu_{10}, \\ A_{112} &= \frac{1}{2}\wp_{22}\wp_{11} + \wp_{12}^2 + \frac{1}{2}\wp_{12}\mu_4, \\ \wp_{112}^2 = B_{112} &= -4\wp_{12}\wp_{22}\mu_8 + 4\wp_{12}^2\mu_6 + 4\wp_{12}^2\wp_{11} + 4\wp_{22}^2\mu_{10} \end{aligned}$$

を得る. ここで (9.8) の最初の式の $-\wp_{12}$ 倍, 第 2 の式の $-\wp_{12}$ 倍, および第 3 式を加へて \wp_{ijk} 達の得られてゐる 2 次関係式を代入すれば

$$-\wp_{112}(-\wp_{112} + \wp_{12}\wp_{222} - \wp_{122}\wp_{22}) = 0$$

を得る. \wp_{112} は函数としては 0 ではないから, 括弧内が消えなければならず,

$$(9.11) \quad L_7 \equiv -\wp_{112} + \wp_{12}\wp_{222} - \wp_{122}\wp_{22} = 0$$

となる. L_7 を使つて \wp_{112} に (9.8) の第 1 式の u_2 を関して微分したものを代入すれば,

$$(9.12) \quad -2\wp_{222}(-\wp_{2222} + 4\wp_{12} + 2\mu_4 + 6\wp_{22} + 4\mu_2\wp_{22}) = 0$$

を得る. ここで \wp_{222} は恒等的には 0 ではないから,

$$(9.13) \quad \wp_{2222} = 6\wp_{22}^2 + 4\wp_{12} + 2\mu_4 + 4\mu_2\wp_{22}.$$

この関係式と (9.11) から得られる \wp_{112} の表示を (9.8) の第 2 式を u_2 に関して微分して得られる式に代入すれば, 同様の変形で

$$(9.14) \quad \wp_{1222} = 6\wp_{12}\wp_{22} - 2\wp_{11} + 4\wp_{12}\mu_2$$

を得る. さらに得られた等式たちを $L_7 = 0$ を u_2 で微分した式に代入して

$$(9.15) \quad \wp_{1122} = 4\wp_{12}^2 + 2\wp_{12}\mu_4 + 2\wp_{22}\wp_{11}$$

を得る. ここまでの方法を L_7 を u_1 で微分した式にも適用することにより

$$(9.16) \quad \wp_{1112} = -2\wp_{22}\mu_8 + 4\wp_{12}\mu_6 + 6\wp_{11}\wp_{12} - 4\mu_{10}$$

が導かれる. この段階で (9.13) を u_1 で微分した式と (9.14) を u_2 で微分した式を等置すれば

$$L_9 := -\wp_{111} + 2\wp_{112}\wp_{22} - \wp_{12}\wp_{122} + 2\wp_{112}\mu_2 - \wp_{122}\mu_4 - \wp_{222}\wp_{11} = 0$$

となる. L_9 に \wp_{222} を掛けて上で得られた式を代入すれば

$$\begin{aligned} \wp_{222}\wp_{111} &= -4\mu_8\wp_{22}\mu_2 + 8\mu_6\wp_{12}\mu_2 + 8\mu_2\wp_{11}\wp_{12} - 4\mu_8\wp_{22}^2 + 8\mu_6\wp_{12}\wp_{22} \\ &\quad + 6\wp_{22}\wp_{11}\wp_{12} - 2\mu_8\wp_{12} - 2\wp_{12}^3 - 4\wp_{12}^2\mu_4 - 2\mu_4\wp_{22}\wp_{11} \\ &\quad - 2\mu_8\mu_4 - 2\wp_{12}\mu_4^2 - 4\wp_{11}^2 - 4\mu_6\wp_{11} \end{aligned}$$

となり, また L_9 を u_1 に関して微分したものに (9.15) と (9.16) を代入すれば

$$\wp_{1111} = -12\wp_{22}\mu_{10} - 8\mu_2\mu_{10} + 4\mu_8\wp_{12} + 2\mu_8\mu_4 + 6\wp_{11}^2 + 4\mu_6\wp_{11}.$$

最後に L_9 に \wp_{122} , \wp_{122} , または \wp_{111} を掛けて上で得られた等式を代入することで

$$\begin{aligned} \wp_{122}\wp_{111} &= 2\wp_{12}^2\wp_{11} + 4\mu_8\wp_{12}\wp_{22} - 8\mu_{10}\wp_{22}^2 + 4\mu_2\mu_8\wp_{12} - 8\mu_2\mu_{10}\wp_{22} \\ &\quad - 4\wp_{12}\mu_{10} + 2\mu_4\wp_{11}\wp_{12} + 2\wp_{22}\wp_{11}^2 - 2\mu_8\wp_{11} - 4\mu_4\mu_{10}, \\ \wp_{112}\wp_{111} &= 4\wp_{11}^2\wp_{12} - 8\mu_{10}\wp_{11} - 4\mu_4\mu_{10}\wp_{22} + 2\mu_4\mu_8\wp_{12} - 2\mu_8\wp_{22}\wp_{11} \\ &\quad + 4\mu_6\wp_{11}\wp_{12} - 4\wp_{22}\wp_{12}\mu_{10} + 2\mu_8\wp_{12}^2 - 8\mu_6\mu_{10} + 2\mu_8^2, \\ \wp_{111}^2 &= 4\wp_{11}^3 + 4\mu_8\wp_{12}\wp_{11} + 4\mu_{10}\wp_{12}^2 + 4\mu_6\wp_{11}^2 \\ &\quad - 16\mu_2\mu_{10}\wp_{11} - 16\mu_{10}\wp_{22}\wp_{11} + 8\mu_4\mu_{10}\wp_{12} - 16\mu_6\mu_{10}\wp_{22} + 4\mu_8^2\wp_{22} \\ &\quad + 4\mu_8\mu_4\wp_{11} + 4\mu_8^2\mu_2 + 4\mu_4^2\mu_{10} - 16\mu_6\mu_2\mu_{10}. \end{aligned}$$

がわかる. 但し, ここでは (9.9) も使つてゐる.

上で得られた等式をまとめておく:

命題 9.17 \mathcal{C} は $y^2 = x^5 + \mu_2 x^4 + \cdots + \mu_8 x + \mu_{10}$ で定義された超楕円曲線 ((2, 5) 平面三浦曲線) とする. 簡単のために $\wp_{ijkl} = \wp_{ijkl}(u)$, $\wp_{ij} = \wp_{ij}(u)$ と書くとき次が成り立つ:

$$\wp_{222}^2 = 4\wp_{11} + 4\mu_6 + 4\wp_{12}\wp_{22} + 4\wp_{22}\mu_4 + 4\wp_{22}^3 + 4\wp_{22}^2\mu_2, \quad [-6]$$

$$\wp_{122}\wp_{222} = 2\mu_8 + 2\wp_{12}^2 + 2\wp_{12}\mu_4 - 2\wp_{22}\wp_{11} + 4\wp_{12}\wp_{22}^2 + 4\wp_{22}\wp_{12}\mu_2, \quad [-8]$$

$$\wp_{122}^2 = 4\mu_{10} - 4\wp_{11}\wp_{12} + 4\wp_{12}^2\wp_{22} + 4\wp_{12}^2\mu_2, \quad [-10]$$

$$\begin{aligned} \wp_{122}\wp_{111} &= 2\wp_{12}^2\wp_{11} + 4\mu_8\wp_{12}\wp_{22} - 8\mu_{10}\wp_{22}^2 + 4\mu_2\mu_8\wp_{12} - 8\mu_2\mu_{10}\wp_{22} \\ &\quad - 4\wp_{12}\mu_{10} + 2\mu_4\wp_{11}\wp_{12} + 2\wp_{22}\wp_{11}^2 - 2\mu_8\wp_{11} - 4\mu_4\mu_{10}, \quad [-14] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \wp_{112}\wp_{111} &= 4\wp_{11}^2\wp_{12} - 8\mu_{10}\wp_{11} - 4\mu_4\mu_{10}\wp_{22} + 2\mu_4\mu_8\wp_{12} - 2\mu_8\wp_{22}\wp_{11} \\ &\quad + 4\mu_6\wp_{11}\wp_{12} - 4\wp_{22}\wp_{12}\mu_{10} + 2\mu_8\wp_{12}^2 - 8\mu_6\mu_{10} + 2\mu_8^2, \quad [-16] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \wp_{111}^2 &= 4\wp_{11}^3 + 4\mu_8\wp_{12}\wp_{11} + 4\mu_{10}\wp_{12}^2 + 4\mu_6\wp_{11}^2 \\ &\quad - 16\mu_2\mu_{10}\wp_{11} - 16\mu_{10}\wp_{22}\wp_{11} + 8\mu_4\mu_{10}\wp_{12} - 16\mu_6\mu_{10}\wp_{22} \\ &\quad + 4\mu_8^2\wp_{22} + 4\mu_8\mu_4\wp_{11} + 4\mu_8^2\mu_2 + 4\mu_4^2\mu_{10} - 16\mu_6\mu_2\mu_{10}, \quad [-18] \end{aligned}$$

$$\wp_{2222} = 6\wp_{22}^2 + 2\mu_4 + 4\mu_6\wp_{22} + 4\wp_{21}, \quad [-4]$$

$$\wp_{2221} = 6\wp_{22}\wp_{21} + 4\mu_2\wp_{21} - 2\wp_{11}, \quad [-6]$$

$$\wp_{2211} = 4\wp_{21}^2 + 2\wp_{22}\wp_{11} + 2\mu_4\wp_{21}, \quad [-8]$$

$$\wp_{2111} = 6\wp_{21}\wp_{11} - \mu_{10} - 2\mu_8\wp_{22} + 4\mu_6\wp_{21}, \quad [-10]$$

$$\wp_{1111} = 6\wp_{11}^2 - 4\mu_{10}\mu_2 + 2\mu_8\mu_4 - 12\mu_{10}\wp_{22} + 4\mu_8\wp_{21} + 4\mu_6\wp_{11}. \quad [-12]$$

ここに [] は weight を表す.

9.2.3 種数 3 の場合

(2, 7) 曲線 ($g = 3$) の場合を述べる. 第 9.1 節の方法により, 下記の一連の等式を得る:

$$(9.18) \quad \wp_{333}^2 = 4\wp_{33}^3 + 4\wp_{33}\wp_{23} - 4\wp_{13} + 4\wp_{22} + 4\mu_4\wp_{33}^2 + 4\mu_5\wp_{33} + 4\mu_6 \quad [-6]$$

$$(9.19) \quad \begin{aligned} \wp_{233}\wp_{333} &= 4\wp_{23}\wp_{33}^2 + 2\wp_{23}^2 - 2\wp_{33}\wp_{22} + 4\wp_{33}\wp_{13} + 2\wp_{12} + 4\mu_4\wp_{33}\wp_{23} \\ &\quad + 2\mu_5\wp_{23} + 2\mu_8 \quad [-8] \end{aligned}$$

$$(9.20) \quad \wp_{233}^2 = 4\wp_{23}^2\wp_{33} + 8\wp_{23}\wp_{13} - 4\wp_{23}\wp_{22} + 4\wp_{11} + 4\mu_4\wp_{23}^2 + 4\mu_{10} \quad [-10]$$

$$(9.21) \quad \begin{aligned} \wp_{223}\wp_{333} &= 2\wp_{23}^2\wp_{33} + 2\wp_{22}\wp_{33}^2 - 4\wp_{33}\wp_{12} - 2\wp_{23}\wp_{13} + 4\wp_{23}\wp_{22} - 2\wp_{11} \\ &\quad + 4\mu_4\wp_{33}\wp_{13} + 2\mu_5\wp_{33}\wp_{23} + 2\mu_5\wp_{13} + 4\mu_6\wp_{23} - 2\mu_8\wp_{33} \quad [-10] \end{aligned}$$

$$(9.22) \quad \wp_{133}\wp_{333} = 4\wp_{13}\wp_{33}^2 - 2\wp_{33}\wp_{12} + 2\wp_{23}\wp_{13} - 2\wp_{11} + 4\mu_4\wp_{33}\wp_{13} + 2\mu_5\wp_{13} \quad [-10]$$

命題 9.23 いま, \mathcal{C} は方程式 $y^2 = x^7 + \mu_2 x^6 + \cdots + \mu_{12} x + \mu_{14}$ で定義されている超楕円曲線 ((2, 5) 平面三浦曲線) とする. 簡単のために $\wp_{ijkl} = \wp_{ijkl}(u)$, $\wp_{ij} = \wp_{ij}(u)$ と書くと以下の方程式が成り立つ:

$$(9.24) \quad \wp_{3333} - 6\wp_{33}^2 = 2\mu_4 + 4\mu_2\wp_{33} + 4\wp_{32}, \quad [-4]$$

$$(9.25) \quad \wp_{3332} - 6\wp_{33}\wp_{32} = 4\mu_2\wp_{32} + 2(3\wp_{31} - \wp_{22}), \quad [-6]$$

- (9.26) $\wp_{3331} - 6\wp_{31}\wp_{33} = 4\mu_2\wp_{31} - 2\wp_{21},$ [-6]
- (9.27) $\wp_{3322} - 4\wp_{32}^2 - 2\wp_{33}\wp_{22} = 2\mu_4\wp_{32} + 4\mu_2\wp_{31} - 2\wp_{21},$ [-8]
- (9.28) $\wp_{3321} - 2\wp_{33}\wp_{21} - 4\wp_{32}\wp_{31} = 2\mu_4\wp_{31},$ [-10]
- (9.29) $\wp_{3311} - 4\wp_{31}^2 - 2\wp_{33}\wp_{11} = 2\Delta,$ [-12]
- (9.30) $\wp_{3222} - 6\wp_{32}\wp_{22} = -4\mu_{10} - 2\mu_8\wp_{33} + 4\mu_6\wp_{32} + 4\mu_4\wp_{31} - 6\wp_{11},$ [-10]
- (9.31) $\wp_{3221} - 4\wp_{32}\wp_{21} - 2\wp_{31}\wp_{22} = -2\mu_{12} + 4\mu_6\wp_{31} - 2\Delta,$ [-12]
- (9.32) $\wp_{3211} - 4\wp_{31}\wp_{21} - 2\wp_{32}\wp_{11} = -4\mu_{14} + 2\mu_8\wp_{31},$ [-14]
- (9.33) $\wp_{3111} - 6\wp_{31}\wp_{11} = 4\mu_{14}\wp_{33} - 2\mu_{12}\wp_{32} + 4\mu_{10}\wp_{31},$ [-16]
- (9.34) $\wp_{2222} - 6\wp_{22}^2 = -8\mu_{10}\mu_2 + 2\mu_8\mu_4 - 6\mu_{12} - 12\mu_{10}\wp_{33}$
 $+ 4\mu_8\wp_{32} + 4\mu_6\wp_{22} + 4\mu_4\wp_{21} - 12\mu_2\wp_{11} + 12\Delta,$ [-12]
- (9.35) $\wp_{2221} - 6\wp_{22}\wp_{21} = -4\mu_{12}\mu_2 - 8\mu_{14} - 6\mu_{12}\wp_{33} + 4\mu_8\wp_{31} + 4\mu_6\wp_{21} - 2\mu_4\wp_{11},$ [-14]
- (9.36) $\wp_{2211} - 4\wp_{21}^2 - 2\wp_{22}\wp_{11} = -8\mu_{14}\mu_2 - 8\mu_{14}\wp_{33} - 2\mu_{12}\wp_{32} + 4\mu_{10}\wp_{31} + 2\mu_8\wp_{21},$ [-16]
- (9.37) $\wp_{2111} - 6\wp_{21}\wp_{11} = -2\mu_{14}\mu_4 - 8\mu_{14}\wp_{32} + 2\mu_{12}(3\wp_{31} - \wp_{22}) + 4\mu_{10}\wp_{21},$ [-18]
- (9.38) $\wp_{1111} - 6\wp_{11}^2 = -4\mu_{14}\mu_6 + 2\mu_{12}\mu_8 + 4\mu_{14}(4\wp_{31} - 3\wp_{22}) + 4\mu_{12}\wp_{21} + 4\mu_{10}\wp_{11}.$ [-20]

ここに [] は weight を表し,

$$(9.39) \quad \Delta = \wp_{32}\wp_{21} - \wp_{31}\wp_{22} + \wp_{31}^2 - \wp_{33}\wp_{11}.$$

証明 (10.8) と合せて, $g = 2$ なら後に述べる (10.10) を, $g = 3$ なら (10.17) を使ふことで, 上の形の等式が存在することはわかる. さらに weight を考慮して以下の様に求めることができる. 例へば (1) について $\wp_{3333} - 6\wp_{33}^2$ は weight 4 であるが, (10.17) と sigma 函数の原点での展開の形 (7.7) から

$$(9.40) \quad a_1 \wp_{23} + a_2 \mu_1^2 \wp_{33} + a_2 \mu_2 \wp_{33} + b_1 \mu_1^4 + b_2 \mu_1^2 \mu_2 + b_3 \mu_2^2 + b_4 \mu_1 \mu_3 + b_5 \mu_4$$

の形に書けなければならない. ここで a_j, b_j はすべて有理数である. この等式に $\sigma(u)^2$ を掛けてから, 計算機を利用して, 知られてゐる $\sigma(u)$ の展開の最初の数項を代入して, 未定係数法で a_j, b_j を決定すれば良い. (2) 以降も同様にできる. また [5] も参照されたい. そこでは, 一般の種数に対して一般的な見地から議論がなされている. □

10 標準 Abel 函数の空間

10.1 一般論

この章では次の方針で $\wp_{k\dots l}(u+v)$ を $\wp_{ij}(u)$, $\wp_{ij}(v)$, $\wp_{hij}(u)$ および $\wp_{hij}(v)$ 等の有理函数として表すことを目標とする.

定理 10.1 (次元の公式) これまでの記号で, 種数 g の平面三浦曲線の Jacobi 多様体 J と標準 theta 因子 $\Theta^{[g-1]}$ について, $n \geq 2$ のとき,

$$(10.2) \quad \dim \Gamma(J, \mathcal{O}(n\Theta^{[g-1]})) = n^g.$$

証明 [34] の言葉と記号を使ふ. [34], p.154 において, $L = L(H, \alpha)$ とある直線束は, 我々の場合の $\mathcal{O}(H)$ に対応する. 実際 $H^0(J, \mathcal{O}(H))$ は $\mathbb{C}\sigma(u)$ と見做せる (同, p.26, Prop.). またこのとき, $\det(E(\ , \))$ は 6.37 (ii) から 1 である. よつて, 同, p.154 の記号で $\deg \phi_L = \deg \phi_{\mathcal{O}(H)} = 1$ となる. 一方, 同, p.60 (a) により $\phi_{\mathcal{O}(n\Theta^{[g-1]})} = n\phi_{\mathcal{O}(H)}$ なので, 同, p.150 の (Abel 多様体に関する) “Riemann-Roch theorem” を使へば, 結局

$$\begin{aligned} \chi(\mathcal{O}(n\Theta^{[g-1]}))^2 &= \chi(\mathcal{O}(\Theta^{[g-1]})^{\otimes n})^2 \\ &= \deg n\phi_{\mathcal{O}(H)} \\ &= \deg n_J \cdot \deg \phi_{\mathcal{O}(H)} \\ &= n^{2g} \cdot 1 = n^{2g}. \end{aligned}$$

但し, n_J は Jacobi 多様体 J の n 倍写像である. さらに, $\mathcal{O}(H)$ は ample なので, 同, p.155 の Theorem の記号で $P(t) = (t+1)^{2g}$ であり, これの正の根は 0 個なので, $\mathcal{O}(H)$ の “index” は $i(\mathcal{O}(H)) = 0$ とわかる. よつて, “Vanishing theorem” (同, p.150) より,

$$\begin{aligned} H^0(J, \mathcal{O}(n\Theta^{[g-1]})) &\neq (0) \quad (\text{実際, } \sigma(u) \text{ を含む}), \\ H^k(J, \mathcal{O}(n\Theta^{[g-1]})) &= (0) \quad \text{for } k = 0, \dots, g \end{aligned}$$

である. 従つて, Euler 標数は $\chi(\mathcal{O}(n\Theta^{[g-1]})) = \dim H^0(J, \mathcal{O}(n\Theta^{[g-1]}))$ となる. 以上より,

$$\begin{aligned} \dim \Gamma(J, \mathcal{O}(n\Theta^{[g-1]})) &= \dim H^0(J, \mathcal{O}(n\Theta^{[g-1]})) = \chi(\mathcal{O}(n\Theta^{[g-1]})) \\ &= \sqrt{n^{2g}} = n^g \end{aligned}$$

が得られる. □

これまでのことから

$$(10.3) \quad \frac{\sigma(u+v)\sigma(u-v)}{\sigma(u)^2\sigma(v)^2}$$

は $\wp_{ij}(u)$ と $\wp_{ij}(v)$ 達の \mathbb{Q} 係数の多項式で書かれる筈である. それができれば, 両辺に

$$(10.4) \quad \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\frac{\partial}{\partial u_j} + \frac{\partial}{\partial v_j} \right) \log$$

を作用させることで所望の式を得ることができる.

10.2 基底

まず, 新しい函数を定義する. 2 つの変数 $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ に対して

$$(10.5) \quad \Delta_i = \frac{\partial}{\partial u_i} - \frac{\partial}{\partial v_i}$$

なる作用素を考へる. この作用素は現在では Hirota's bilinear operator として知られてゐるが, 既に Baker により導入されてゐて ([3], p.151; [6], p.49). これを使つて

$$(10.6) \quad \begin{aligned} Q_{ijkl}(u) &= -\frac{1}{2\sigma(u)^2} \Delta_i \Delta_j \Delta_k \Delta_l \sigma(u) \sigma(v)|_{v=u} \\ &= \wp_{ijkl}(u) - 2(\wp_{ij}\wp_{kl} + \wp_{ik}\wp_{jl} + \wp_{il}\wp_{jk})(u), \end{aligned}$$

なる函数を得る. 具体的には

$$(10.7) \quad \begin{aligned} Q_{ijkk} &= \wp_{ijkk} - 2\wp_{ij}\wp_{kk} - 4\wp_{ik}\wp_{jk}, & Q_{iikk} &= \wp_{iikk} - 2\wp_{ii}\wp_{kk} - 4\wp_{ik}^2, \\ Q_{ikkk} &= \wp_{ikkk} - 6\wp_{ik}\wp_{kk}, & Q_{kkkk} &= \wp_{kkkk} - 6\wp_{kk}^2. \end{aligned}$$

ここで, (10.6) に従つて Q_{ijkl} を $\sigma(u)$, $\sigma(u)_i$, $\sigma(u)_{ij}$ 等を書いてみれば, 一般の (d, q) 曲線について

$$(10.8) \quad Q_{ijkl} \in \Gamma(J, \mathcal{O}(2\Theta^{[g-1]}))$$

であることがわかる. つまり, theta 因子 $\Theta^{[g-1]}$ で高々 2 位の極を持つ函数である.

始めに, $(2, 5)$ 曲線について述べる.

命題 10.9 $(2, 5)$ 曲線 ($g = 2$) について以下が成り立つ.

(1) $\dim \Gamma(J, \mathcal{O}(2\Theta^{[1]})) = 2^2 = 4$ であり,

$$(10.10) \quad \Gamma(J, \mathcal{O}(2\Theta^{[1]})) = \mathbb{C}1 \oplus \mathbb{C}\wp_{11} \oplus \mathbb{C}\wp_{12} \oplus \mathbb{C}\wp_{22}.$$

(2) $\dim \Gamma(J, \mathcal{O}(3\Theta^{[1]})) = 3^2 = 9$ であり,

$$(10.11) \quad \begin{aligned} \Gamma(J, \mathcal{O}(3\Theta^{[1]})) &= \Gamma(J, \mathcal{O}(2\Theta^{[1]})) \oplus \mathbb{C}\wp_{111} \oplus \mathbb{C}\wp_{112} \oplus \mathbb{C}\wp_{122} \\ &\quad \oplus \mathbb{C}\wp_{222} \oplus \mathbb{C}(\wp_{12}^2 - \wp_{11}\wp_{22}). \end{aligned}$$

証明 (1) 6.47 (iii) から $\wp_{ij} \in \Gamma(J, \mathcal{O}(2\Theta^{[1]}))$ である. ところが, (7.6) から容易に \wp_{11} , \wp_{12} , \wp_{22} が 1 次独立であることは確認できるので, 主張が示された.

(2) $\wp_{ijk} \in \Gamma(J, \mathcal{O}(3\Theta^{[1]}))$ は容易にわかる. $\wp_{12}^2 - \wp_{11}\wp_{22} \in \Gamma(J, \mathcal{O}(3\Theta^{[1]}))$ もこの函数を σ_i と σ_{ij} 達とで書いてみればわかる. 1 次独立性も (1) と同様に確かめられるので, (10.2) から主張が示される. \square

これにより,

$$\frac{\sigma(u+v)\sigma(u-v)}{\sigma(u)^2\sigma(v)^2} = a[\wp_{11}(u) - \wp_{11}(v)] + b[\wp_{12}(u)\wp_{22}(v) - \wp_{12}(v)\wp_{22}(u)]$$

であるが, (7.6) で述べた様に

$$\sigma(u) = u_1 - \frac{1}{3}u_2^3 + \cdots$$

なので, これを代入することで, 容易に a, b を求めることができる. 結果は $a = b = 1$ であり, 次の定理を得る.

定理 10.12 (2, 5) 曲線 ($g = 2$) について

$$(10.13) \quad \frac{\sigma(u+v)\sigma(u-v)}{\sigma(u)^2\sigma(v)^2} = \wp_{11}(u) - \wp_{11}(v) + \wp_{12}(u)\wp_{22}(v) - \wp_{12}(v)\wp_{22}(u)$$

が成り立つ.

次に (2, 7) 曲線について述べる. まづ

$$(10.14) \quad \Delta(u) = (\wp_{23}\wp_{12} - \wp_{13}\wp_{22} + \wp_{13}^2 - \wp_{11}\wp_{33})(u).$$

と置く⁴⁶.

補題 10.15 函数 Δ は $\Gamma(J, \mathcal{O}(2\Theta^{[2]}))$ に属する:

$$\Delta \in \Gamma(J, \mathcal{O}(2\Theta^{[2]})).$$

証明 $\Delta(u)$ を $\sigma(u)$, $\sigma_j(u)$, $\sigma_{ij}(u)$ 等を書いてみれば $\Gamma(J, \mathcal{O}(3\Theta^{[2]}))$ に属することはわかるが, $\Gamma(J, \mathcal{O}(3\Theta^{[2]}))$ に属することは全く自明でない. (9.29) からわかる. 別の方向からの証明は [5] を参照されたい. \square

命題 10.16 (2, 7) 曲線は $g = 3$ で, $\dim \Gamma(J, \mathcal{O}(2\Theta^{[2]})) = 8$, $\dim \Gamma(J, \mathcal{O}(3\Theta^{[2]})) = 27$ であり,

$$(10.17) \quad \Gamma(J, \mathcal{O}(2\Theta^{[2]})) = \mathbb{C}1 \oplus \mathbb{C}\wp_{11} \oplus \mathbb{C}\wp_{12} \oplus \mathbb{C}\wp_{13} \oplus \mathbb{C}\wp_{22} \oplus \mathbb{C}\wp_{23} \oplus \mathbb{C}\wp_{33} \oplus \mathbb{C}\Delta.$$

$$(10.18) \quad \begin{aligned} \Gamma(J, \mathcal{O}(3\Theta^{[2]})) = & \Gamma(J, \mathcal{O}(2\Theta^{[2]})) \oplus \mathbb{C}\wp_{111} \oplus \mathbb{C}\wp_{112} \oplus \mathbb{C}\wp_{113} \\ & \oplus \mathbb{C}\wp_{122} \oplus \mathbb{C}\wp_{123} \oplus \mathbb{C}\wp_{133} \oplus \mathbb{C}\wp_{222} \oplus \mathbb{C}\wp_{223} \oplus \mathbb{C}\wp_{233} \oplus \mathbb{C}\wp_{333} \\ & \oplus \mathbb{C}\wp^{[11]} \oplus \mathbb{C}\wp^{[12]} \oplus \mathbb{C}\wp^{[13]} \oplus \mathbb{C}\wp^{[23]} \oplus \mathbb{C}\wp^{[33]} \\ & \oplus \mathbb{C}\partial_1\Delta \oplus \mathbb{C}\partial_2\Delta \oplus \mathbb{C}\partial_3\Delta \oplus \mathbb{C}T, \end{aligned}$$

ここに

$$T = T(u) = (2\wp_{22}^3 + \wp_{222}^2 - \wp_{2222}\wp_{22})(u).$$

証明 [14] を参照されたい. \square

次に (3, 4) 曲線について述べる. 先に定義した函数 Q_{ijkl} を使へば (3, 4) 曲線の場合が次の様に述べられる:

命題 10.19 (3, 4) 平面三浦曲線については $g = 3$, $\dim \Gamma(J, \mathcal{O}(2\Theta^{[2]})) = 2^3 = 8$ で,

$$\begin{aligned} \Gamma(J, \mathcal{O}(2\Theta^{[2]})) = & \mathbb{C}1 \oplus \mathbb{C}\wp_{11} \oplus \mathbb{C}\wp_{12} \oplus \mathbb{C}\wp_{13} \oplus \mathbb{C}\wp_{22} \oplus \mathbb{C}\wp_{23} \oplus \mathbb{C}\wp_{33} \oplus \mathbb{C}Q_{1333}, \\ \Gamma(J, \mathcal{O}(3\Theta^{[2]})) = & \Gamma(J, \mathcal{O}(2\Theta^{[2]})) \oplus \mathbb{C}\wp_{111} \oplus \mathbb{C}\wp_{112} \oplus \mathbb{C}\wp_{113} \oplus \mathbb{C}\wp_{122} \oplus \mathbb{C}\wp_{123} \\ & \oplus \mathbb{C}\wp_{133} \oplus \mathbb{C}\wp_{222} \oplus \mathbb{C}\wp_{223} \oplus \mathbb{C}\wp_{233} \oplus \mathbb{C}\wp_{333} \\ & \oplus \mathbb{C}\wp^{[11]} \oplus \mathbb{C}\wp^{[12]} \oplus \mathbb{C}\wp^{[13]} \oplus \mathbb{C}\wp^{[22]} \oplus \mathbb{C}\wp^{[23]} \oplus \mathbb{C}\wp^{[33]} \\ & \oplus \mathbb{C}\partial_1Q_{1333} \oplus \mathbb{C}\partial_2Q_{1333} \oplus \mathbb{C}\partial_3Q_{1333}. \end{aligned}$$

⁴⁶[5] で定義された函数である.

\wp 函数による基底の優れた点の一つは、もとの曲線が自己同型を持つとき、それから引き起こされる J や Λ の自己準同型について \wp が固有函数になることが容易く見えるからである。これは $\sigma(u)$ がその様な自己同型について固有函数になるからであるが、そもそも $\Theta^{[g-1]}$ が曲線の自己同型で不変なので、そこにのみ零点を持つ $\sigma(u)$ は固有函数になるのである。

10.3 \wp 函数に関する代数的加法公式

繰り返しになるが、前節の結果を含めて、やや一般的に結果を述べる。

命題 10.20 $(2, 2g+1)$ 曲線については、 $\frac{\sigma(u+v)\sigma(u-v)}{\sigma(u)^2\sigma(v)^2}$ は $g(g+1)$ 個の函数 $\wp_{ij}(u)$, $\wp_{ij}(v)$ の \mathbb{Q} 上の多項式として表される。たとえば

(1) $g=1$ のときは

$$\frac{\sigma(u+v)\sigma(u-v)}{\sigma(u)^2\sigma(v)^2} = \wp_{11}(u) - \wp_{11}(v),$$

(2) $g=2$ のときは

$$\frac{\sigma(u+v)\sigma(u-v)}{\sigma(u)^2\sigma(v)^2} = \wp_{11}(u) - \wp_{11}(v) + \wp_{12}(u)\wp_{22}(v) - \wp_{12}(v)\wp_{22}(u),$$

(3) $g=3$ のときは

$$\begin{aligned} \frac{\sigma(u+v)\sigma(u-v)}{\sigma(u)^2\sigma(v)^2} &= (\wp_{31}(u) - \wp_{31}(v))^2 - (\wp_{33}(u) - \wp_{33}(v))(\wp_{11}(u) - \wp_{11}(v)) \\ &\quad + (\wp_{21}(u) - \wp_{21}(v))(\wp_{23}(u) - \wp_{23}(v)) - (\wp_{22}(u) - \wp_{22}(v))(\wp_{31}(u) - \wp_{31}(v)). \end{aligned}$$

(4) $g=4$ のときは

$$\begin{aligned} \frac{\sigma(u+v)\sigma(u-v)}{\sigma(u)^2\sigma(v)^2} &= (\wp_{14}(u)\wp_{24}(v) - \wp_{14}(v)\wp_{24}(u) + \wp_{11}(u) - \wp_{11}(v)) \\ &\quad \cdot (\wp_{34}(u)\wp_{44}(v) - \wp_{34}(v)\wp_{44}(u) - \wp_{24}(u) + \wp_{24}(v) + \wp_{33}(u) - \wp_{33}(v)) \\ &\quad - (\wp_{14}(u)\wp_{34}(v) - \wp_{14}(v)\wp_{34}(u) + \wp_{12}(u) - \wp_{12}(v)) \\ &\quad \cdot (\wp_{24}(u)\wp_{44}(v) - \wp_{24}(v)\wp_{44}(u) - \wp_{14}(u) + \wp_{14}(v) + \wp_{23}(u) - \wp_{23}(v)) \\ &\quad + (\wp_{14}(u)\wp_{44}(v) - \wp_{14}(v)\wp_{44}(u) + \wp_{13}(u) - \wp_{13}(v)) \\ &\quad \cdot (\wp_{24}(u)\wp_{34}(v) - \wp_{24}(v)\wp_{34}(u) + \wp_{22}(u) - \wp_{22}(v) - \wp_{13}(u) + \wp_{13}(v)). \end{aligned}$$

証明 (1) については [61], p.141 を, (2) と (3) [4] を参照されたい. (4) を含む一般論は [9], pp.111-113. \square

系 10.21 各 $\wp_{ij\dots r}(u+v)$ は $\{\wp_{ij}(u), \wp_{ij}(v), \wp_{hij}(u), \wp_{hij}(v)\}$ 達の $\mathbb{Q}(\mu_2, \dots, \mu_{4g+2})$ 上の有理式として表される.

証明 10.13 の式を u と v のそれぞれに関して対数微分したあと、その両者を辺々加えると $2(\log \sigma(u+v) - 2 \log \sigma(u) - 2 \log \sigma(v))$ の $\wp_{ij}(u)$, $\wp_{ij}(v)$, $\wp_{hij}(u)$. および $\wp_{hij}(v)$ 達による式が得られる. それに $\frac{\partial^2}{\partial u_i \partial u_j}$ を施せば $\wp_{ij}(u+v)$ が $\wp_{ij}(u)$, $\wp_{ij}(v)$, $\wp_{hij}(u)$, $\wp_{hij}(v)$, $\wp_{ijkl}(u)$, $\wp_{ijkl}(v)$, $\wp_{ijklm}(u)$ および $\wp_{ijklm}(v)$ 達の有理式として表される. あとは後述の 9.23 の等式達を用いて結論を得る. これらについて $g=2$ の時の詳しい議論が [20] にある. \square

注意 10.22 最も一般的な (3, 4) 曲線

$$y^3 + (\mu_1 x + \mu_4) y^2 + (\mu_2 x^2 + \mu_5 x + \mu_7) y = x^4 + \mu_3 x^3 + \mu_6 x^2 + \mu_9 x + \mu_{12}$$

について, 以上の様な前加法公式や後の §9.2 に述べる方程式系の詳しい結果が [15] にある.

11 触れられなかつた話題や残されてゐる問題等について

ここでは、これまで述べてきたこととに関連したいくつかの問題を述べる。現在、研究がかなり進行してゐるものもあればほぼ夢想を述べたに過ぎないものもある。

1. Kummer 曲面, Kummer 多様体について

種数 2 の平面三浦曲線の Jacobi 多様体 $J = \mathbb{C}^2/\Lambda$ において $u \in \mathbb{C}^2 \bmod \Lambda$ と $-u$ を同一視することで得られる代数曲面を Kummer 曲面と呼ぶ。(2, 5) 曲線の場合は、これの座標として偶函数 \wp_{ij} を取れば良く、その定義方程式は行列式で書くことができる。このことは、[6], p.40 辺りで述べられてゐるが、それをもつと systematic に展開したのが [11] や [8] である。この 2 つは荒削りの部分が多いが、ここから大いに発展が望まれる論文である。種数 3 の場合 ((2, 7) 曲線と (3, 4) 曲線) の場合に Kummer 多様体の \wp 函数のみを用いた定義方程式系は、種数 2 のときの様には決定できてゐない。しかし、Coble の仕事 [13] を、(2, 5) 曲線や (3, 4) 曲線の場合に実行すると非常に美しい結果が得られる。これについては準備中の論文 [16] を参照されたい。Coble の仕事は現代的には、compact な Riemann 面上の安定 vector 束の moduli の研究に翻訳されるが、今後、この方面の具体的な記述に資するものと思はれる。

2. Sigma 函数の theta 函数による定義

題 6.6 節で述べた sigma 函数の theta 級数による記述は計算実験をする際には便利である。一般の三浦曲線について、Riemann 定数をもつと容易に計算する方法が見つかると思ふ。

3. Sigma 函数の展開の Hurwitz 整性について

第 7.3 節で述べた sigma 函数の原点での冪級数展開の Hurwitz 整性に関して、古くは $g = 1$ の場合に、部分的な結果として [52] がある。未発表であるが、非常に詳しい結果が安田正大によつて得られてゐる。一般の (2, 3) 曲線についても、別の角度からの解説が [43] にある。高い種数の場合の定理 7.7 はその拡張である。また $g = 1$ の場合に canonical p -adic height との関連等について Mazur-Tate や Stein による [32], [33] などの論文を参照されたい。

4. Hermite-Frobenius-Stickelberger 型の定理の周辺

Hermite-Frobenius-Stickelberger 型の定理について、さらに詳しく知りたい場合は、まづ [17] の p.33 にある公式を参照されたい。この講義録に述べたものや、[42], [29], [44] 等に述べた結果は、これの具体例 (基点 ∞ において標準 theta 輪体が特異性を持つので少し計算を要するが) と見做される。これに関して、松谷・Peviato の論文 [30] も参照されたい。Hermite-Frobenius-Stickelberger 型の定理ですべての変数を同一の 1 点に近づけた極限は、Kiepert が楕円函数について与へた公式 [24] の種数の高い場合への拡張となる。これについても上記の文献に述べてある。

5. 一般 Bernoulli-Hurwitz 数

三角函数の冪級数展開から Bernoulli 数が得られ、楕円函数の冪級数展開から Hurwitz 数が得られるが、類似の数がこれを高い種数の代数函数でも得られる。これについては多くの研究があるが、その一部分は例へば [58], [45] から辿ることができる。

6. 超楕円曲線以外での Riemann 定数の計算

($2, 2g + 1$) 劣型曲線以外の場合に, Riemann 定数の計算をきちんと書き切れることが望まれる. (3, 4) 曲線の場合は志賀 [49], それと密接に関連する結果が松本・寺杣 [31] にある.

7. 空間 $\Gamma(J, \mathcal{O}(n\Theta^{[g-1]}))$ の自然な基底

この空間だけでなく, 環

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} \Gamma(J, \mathcal{O}(n\Theta^{[g-1]}))$$

の $\mathbb{C}[\frac{\partial}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial u_g}]$ 加群としての構造については中屋敷氏, 趙氏らによる [12], [37] を見られたい. [14] には種数が 3 の場合に, 具体的な函数で n が小さい場合を記述してある.

8. 高次元 Theta 函数の無限積表示の可能性について

楕円曲線の場合の σ 函数は有名な無限積表示を持つ:

$$\sigma(u) = u \prod_{\substack{\ell \in \Lambda \\ u \neq 0}} \left(1 - \frac{u}{\ell}\right) \exp\left(\frac{u}{\ell} + \frac{u^2}{2\ell^2}\right).$$

これの naive な一般化は困難であらうが, $\sigma_{\sharp}(u)$ の $\kappa^{-1}(\Theta^{[1]})$ 上での無限積分解なら, 定義領域が 1 次元なので可能ではないかと思はれる.

参考文献

- [1] Ahlfors, L.-V., Complex analysis, 3rd ed., McGraw-Hill, 1966.
- [2] Arbarello, E., Cornalba, M., Griffith, P. and Harris, J., Geometry of algebraic curves, vol I, Die Grundlehren der math. Wiss., vol. 267, Springer-Verlag, 1985.
- [3] Baker, H.F., Abelian functions – Abel’s theorem and the allied theory including the theory of the theta functions –, Cambridge Univ. Press, 1897.
- [4] ———, On the hyperelliptic sigma functions, Amer. J. of Math., **XX** (1898), 301–384.
- [5] ———, On a system of differential equations leading to periodic functions, Acta math., **27** (1903), 135–156.
- [6] ———, An introduction to the theory of multiply periodic functions, Cambridge Univ. Press, 1907.
- [7] Barsotti, I., Considerazioni sulle funzioni thêta, Istituto Nazionale di alta matematica, Symposia Mathematica **III** (1970), 247–277.
- [8] Buchstaber, V.M., Enolskii, V.Z. and Leykin, D.V., Uniformization of the Jacobi varieties of trigonal curves, Unpublished working manuscript.
- [9] ———, Kleinian functions, hyperelliptic Jacobians and applications, Reviews in Math. and Math. Physics, **10** (1997), 1–125.
- [10] ———, Rational analogs of Abelian functions, Functional Anal. Appl., **33** (1999), 83–94.
- [11] ———, Uniformization of the Jacobi varieties of trigonal curves and nonlinear differential equations, Func. Anal. Appl., **34** (2000), no. 3, 1–15.
- [12] Cho, K. and Nakayashiki, A., Differential structure of Abelian functions, International Journal of Math. **19** (2008), no. 2, 145–172.
- [13] Coble, A.B., Algebraic geometry and theta functions, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 10, A.M.S., 1929.
- [14] Eilbeck, J.C., England, M., and Ônishi, Y., Abelian functions associated with genus three algebraic curves, London Math. Soc. Jour. of Computation and Math., **14** (2011), 291–326.
- [15] Eilbeck, J.C., Enol’skii, V.Z., Matsutani, S., Ônishi, Y. and Previato, E., Abelian functions for trigonal curves of genus three, International Mathematics Research Notices, **2008** (2008), 102–139.

- [16] Eilbeck, J.C., Gibbons, J., Ônishi, Y., and Previato, E., From equations of Jacobians or Kummer varieties to Coble hypersurfaces, in preparation, 2008.
- [17] Fay, J., Theta functions on Riemann surfaces, Lect. Notes in Math., vol. 352, Springer-Verlag, 1973.
- [18] Frobenius, G., Über die Grundlagen der Theorie der Jacobischen Functionen, J. reine angew. Math. **97** (1884), 188–223.
- [19] Frobenius, H. and Stickelberger, L., Zur Theorie der elliptischen Functionen, J. reine angew. Math. **83** (1877), 175–179.
- [20] Grant, D., Formal groups in genus two, J. reine angew. Math. **411** (1990), 96–121.
- [21] Griffiths, P. and Harris, J., Principle of algebraic geometry, Wiley, 1978.
- [22] Houzel, C., 楕円関数と Abel 積分, 数学史, vol. II, ch. VII, pp. 457–581, 岩波書店, 1985, edited by Dieudonné, J.
- [23] Igusa, J.-I., Theta functions, Die Grundlehren der math. Wiss., vol. Bd.194, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1972.
- [24] Kiepert, L., Wirkliche Ausführung der ganzzahligen Multiplikation der elliptischen Funktionen, J. reine angew. Math. **76** (1873), 21–33.
- [25] Klein, F., 19 世紀の数学, 共立出版, 1995.
- [26] Krazer, A., Lerhbuch der Thetafunktionen, B.G. Teubners, 1904.
- [27] Lang, S., An introduction to algebraic and Abelian functions, (2nd ed.) ed., Springer-Verlag, 1982.
- [28] Macdonald, I.G., Symmetric functions and Hall polynomials, Clarendon Press, Oxford, 1995.
- [29] Matsutani, S. and Ônishi, Y., Determinant expression for pentagonal curves of degree six, <http://www.ccn.yamanashi.ac.jp/~yonishi/>, 2008.
- [30] Matsutani, S. and Previato, E., Jacobi inversion on strata of the Jacobian of the C_{rs} curve $y^r = f(x)$, J. Math. Soc. Japan **60** (2008), no. 4, 1009–1044.
- [31] Matumoto, K. and Terasoma, T., Degenerations of triple coverings and Thomae’s formula, <http://arxiv.org/abs/1001.4950>, 2010.
- [32] Mazur, B. and Tate, J., The p -adic sigma function, Duke Math. J., **62** (1991), 663–688.

- [33] Mazur, B., Stein, W. and Tate, J., Computation of p -adic height and log convergence, Documenta math., Extra Volume : John H. Coates' Sixtieth Birthday (2006), 577–614.
- [34] Mumford, D., Abelian varieties, Oxford Univ. Press, 1970.
- [35] Mumford D., Tata lectures on theta I, Prog. in Math., vol. 28, Birkhäuser, 1982.
- [36] Mumford, D., Tata lectures on theta II, Prog. in Math., vol. 43, Birkhäuser, 1984.
- [37] Nakayashiki, A., On hyperelliptic Abelian functions of genus 3, <http://arxiv.org/abs/0809.3303>.
- [38] Nakayashiki, A., Sigma function as a tau function, International Mathematical Research Notices **2010** (2010), no. 3, 373–394.
- [39] Nayakashiki, A., On algebraic expressions of sigma functions for (n, s) curves, Asian J. Math. **14** (2010), no. 2, 175–212.
- [40] Nayakashiki, A. and Yori, K., Derivatives of Schur, tau and sigma functions on Abel-Jacobi images, Preprint <http://arxiv.org/abs/1205.6897>, 2012.
- [41] Ônishi, Y., Complex multiplication formulae for hyperelliptic curves of genus three, Tokyo J. Math., **21** (1998), 381–431, A list of correction is available at <http://www.ccn.yamanashi.ac.jp/~yonishi/>.
- [42] ———, Determinant expression of hyperelliptic functions (with an Appendix by S.Matsutani), Proc. of Edinburgh. Math. Soc., **48** (2005), 705–742.
- [43] ———, Universal elliptic functions, <http://www.ccn.yamanashi.ac.jp/~yonishi/>, 2010.
- [44] ———, Determinant formulae in Abelian functions for a general trigonal curve of degree five, Computational Methods and Function Theory **11** (2011), 547–574.
- [45] ———, Generalized Bernoulli-Hurwitz numbers and the universal Bernoulli numbers, Russian Mathematical Surveys, **66** (2011), 871–932.
- [46] ———, A new construction of the Weierstrass sigma function, <http://www.ccn.yamanashi.ac.jp/~yonishi/>, 2012.
- [47] Rademacher, H., Topics in analytic number theory, Die Grundlehren der math. Wiss., vol. 169, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1973.
- [48] Radó, T., Über den Begriff der Riemannschen Flächen, Acta Szeged. **2** (1925), 101–121.
- [49] Shiga, H., On the representation of the Picard modular function by θ constants I, II, Publ.RIMS, Kyoto Univ. **24** (1988), 311–360.

- [50] Siegel, C.L., Symplectic geometry, Academic Press, 1964, Reprinted from Amer.J. Math., **65**(1943), 1–86.
- [51] Uchida, Y., Division polynomials and canonical local heights on hyperelliptic Jacobians, Manuscripta Math. **134** (2011), 273–308.
- [52] Weierstraß, K., Zur Theorie der elliptischen Functionen, Königl. Akademie der Wissenschaften **27** (1882), (Werke II, pp.245–255).
- [53] Weyl, H., Die Idee der Riemanschen Fläche, Teubner, 1913, 「リーマン面」, 田村二郎訳, 岩波書店, 1974.
- [54] Whittaker, E.T. and Watson, G.N., A course of modern analysis, Cambridge Univ. Press, 1927.
- [55] 三浦 晋示, アフィン代数曲線上の線型符号, 電子情報通信学会誌 A, **J81-A** (1998), 1398–1421.
- [56] 中井 三留, リーマン面の理論, 数学全書, vol. 15, 森北出版, 東京, 1980.
- [57] 中岡 稔, 位相幾何学 – ホモロジー論 –, 共立講座, 現代の数学, vol. 15, 共立出版, 1970.
- [58] 大西 良博, 普遍 Bernoulli 数と円分型代数函数版 Bernoulli-Hurwitz 数, 数理解析研究所講究録「代数的整数論とその周辺」 **1376** (2004), 50–60.
- [59] 岩澤 健吉, 代数函数論, 岩波書店, 1952.
- [60] 楠 幸男, 函数論, 朝倉書店, 1973, (v+408 pages).
- [61] 竹内 端三, 楕圓函数論, 岩波全書, 岩波書店, 1936.

索引

ア

Abel 写像, 40
 Abel 積分, 12
 Abel の定理, 41
 Abel 微分, 12

イ

位相標準形, 11
 一般因子, 38
 一般 Riemann 形式, 15
 因子, 25
 因子群, 25
 因子類群, 25

エ

Hermite-Frobenius-Stickelberger
 の公式, 106

オ

Euler 指標, 10
 重さ, 59

カ

函数, 4
 完全対称式, 93

キ

基底空間, 3
 共役調和函数, 5
 共役微分, 5
 局所径数, 4

ク

空隙値, 36, 58
 Klein の基本 2 形式, 64
 Kummer 曲面, 127
 Kummer 多様体, 109, 127

ケ

K (Riemann 定数), 76
 $K_{\mathcal{C}}$ (標準類), 76

コ

交叉形式, 31
 构造函数系, 3

シ

C^{∞} 級函数, 4
 $\sigma(u)$, 86
 sigma 函数, 87
 Schur 多項式, 92
 Schur-Weierstraß 多項式, 93
 Schur-Weierstraß の空隙値, 58
 周期, 18
 周期行列, 18
 種数, 10

ス

数論的局所径数, 61

セ

整因子, 25
 正規化された基底, 20
 正規化された第 3 種微分形式, 22
 正規化された第 2 種微分形式, 22
 正規多角形, 11
 正則函数, 4
 線形同値, 25

ソ

存在定理, 6

タ

第 1 種積分, 12
 第 1 種微分形式, 12, 13
 第 3 種積分, 12
 第 3 種微分形式, 12
 対称積, 40
 第 2 種積分, 12
 第 2 種微分形式, 12

チ

超楕円曲線, 57, 59

調和関数 (特異性の与へられた), 6
調和函数, 4

テ

Dirichlet 問題, 4
 $\Theta^{[n]}$, 80
theta 函数, 46
theta characteristic, 46
theta 級数, 46
Dedekind の η 函数, 90
 δ', δ'' (Riemann 定数), 76

ト

同値な構造函数系, 3
特殊因子, 38

ハ

剥離法, 103
判別式, 58

ヒ

Picard 群, 25
微分形式の因子, 25
標準 theta 輪体, 80
標準 homology 基底, 11
標準類, 25

フ

Hurwitz 整級数, 59

ヘ

\wp 函数, 109
平面三浦曲線, 57
変数と径数の交換法則, 24

ヤ

Jacobi 多様体, 38
Jacobi の逆問題, 45, 111
Jacobi の定理, 43

ユ

有理型函数, 4

ラ

Λ , 76

リ

Riemann 形式, 86
Riemann 定数, 46
Riemann の存在定理, 3
Riemann の定理, 47
Riemann の特異点定理, 53
Riemann-Hurwitz の公式, 10
Riemann 面, 3
Riemann-Roch の定理, 26

ワ

Weierstraß 点, 36
Weierstraß の ζ 関数, 81
Weierstraß 列, 36