

中央大学博士論文

確率限界法検定を基礎とした極値降雨量の統計的解析

Keita Shimizu

清水 啓太

博士（工学）

中央大学大学院  
理工学研究科  
都市人間環境学専攻

令和2年度

2021年3月



## 目次

<b>第1章</b>	序論	6
1-1	はじめに	6
1-2	統計的推定・予測手法概説	9
1-3	水文頻度解析および極値統計理論の歴史	11
1-4	極値理論の数理的基礎	12
1-5	従来の水文頻度解析における課題	15
1-6	信頼区間・予測区間の導入による従来の水文頻度解析における諸課題の解決	18
1-7	本論文の構成	19
	第1章の参考文献	20
<b>第2章</b>	確率限界法検定の理論	23
2-1	はじめに	23
2-2	確率限界法検定の概説	24
2-3	Kolmogorov-Smirnov 検定の理論	24
2-4	確率限界法検定の理論の詳説	33
2-5	Kolmogorov-Smirnov 検定と確率限界法検定の検定力の比較	42
2-6	確率限界法検定による $p$ 値の算出手法	44
2-7	第2章のまとめ	50
	第2章の参考文献	51
<b>第3章</b>	確率限界法検定に基づく信頼区間・予測区間の構成手法と当該区間を導入した水文頻度解析	53
3-1	はじめに	53
3-2	確率限界法検定に基づく信頼区間・予測区間の構成手法	54
3-3	確率限界法検定に基づく信頼区間を導入した水文頻度解析手法	60
3-4	確率限界法検定に基づく予測区間を導入した水文頻度解析手法	62
3-5	確率限界法検定に基づく信頼区間・予測区間の構成プログラム	64
3-6	統計的モンテカルロ法による確率限界法検定に基づく信頼区間の精度検証	71
3-7	確率分布モデルと信頼区間の関係	73
3-8	サンプリング数と信頼区間の関係	75
3-9	確率限界法検定に基づく信頼区間の被覆確率の性質	80

## 目次

3-10 確率降雨量の信頼区間の導入した流出解析に基づく確率流量の不確実性評価.....	83
3-10-1 確率降雨量の信頼区間を考慮した降雨流出解析.....	83
3-10-2 確率ピーク流量比と信頼係数の関係.....	90
3-10-3 確率降雨強度に対する降雨流出現象の非線形性.....	91
3-10-4 確率ピーク水深比と信頼係数の関係.....	92
3-11 確率降雨量の信頼区間の導入による総合確率法の拡張.....	94
3-11-1 総合確率法の理論.....	95
3-11-2 総降雨量と洪水ピーク流量の関係の導出.....	102
3-11-3 信頼区間を導入した総合確率法による年最大洪水ピーク流量の不確実性評価.....	104
3-11-4 洪水ピーク流量の確率年に関する信頼区間の構成.....	106
3-12 確率限界法検定に基づく信頼区間の非定常水文頻度解析への導入.....	108
3-12-1 解析対象とする降雨データの非定常性の検証.....	109
3-12-2 非定常極値分布モデルの概要.....	110
3-12-3 非定常極値分布モデルの対象データへの適用.....	112
3-12-4 確率限界法検定に基づく非定常極値分布の信頼区間の構成手法.....	114
3-12-5 確率限界法検定に基づく信頼区間を導入した非定常水文頻度解析手法の適用.....	118
3-13 確率限界法検定に基づく信頼区間の二変量極値統計解析への導入.....	123
3-13-1 解析対象とする降雨データと流量データの相関性の検証.....	124
3-13-2 二変量極値分布モデルの概要.....	125
3-13-3 二変量極値分布モデルの対象データへの適用.....	127
3-13-4 確率限界法検定に基づく二変量極値分布の信頼区間の構成手法.....	128
3-13-5 条件付き確率分布の構成.....	133
3-13-6 同時生起する二変量の確率評価.....	134
3-14 第3章のまとめ.....	136
第3章の参考文献.....	136
第4章 気候変動予測情報を用いた極値降雨量に関する信頼区間・予測区間の将来変化の推定.....	139

## 目次

4-1	はじめに.....	139
4-2	アンサンブル気候予測データベース d4PDF の概要.....	141
4-3	力学的ダウンスケーリング計算の概要.....	141
4-4	マルコフ連鎖モンテカルロを用いた信頼区間・予測区間の更新.....	142
4-4-1	メトロポリス法の概要.....	142
4-4-2	メトロポリス法の適用結果.....	143
4-4-3	将来気候における極値の予測分布の構成.....	144
4-4-4	ベイズ理論の導入による信頼区間の更新.....	145
4-4-5	確率限界法検定に基づく信頼区間の物理的モンテカルロ法による 信頼区間に対する被覆率.....	146
4-4-6	ベイズ理論の導入による予測区間の更新.....	149
4-5	第4章のまとめ.....	154
	第4章の参考文献.....	155
<b>第5章</b>	<b>全球平均気温上昇シナリオ別の極値水文量の将来予測.....</b>	<b>156</b>
5-1	はじめに.....	156
5-2	全球平均気温上昇結果別の極値降雨量に関する信頼区間・予測区間 の算定.....	157
5-3	利根川上流域における最大クラスの降雨量をもたらす気象場の分析...160	
5-4	利根川上流域における d4PDF の降雨流出解析への適用の妥当性に関する 検証.....	166
5-4-1	評価手法.....	167
5-4-2	d4PDF による過去実験の再現性の検証.....	167
5-4-3	d4PDF における過去実験と将来実験の比較.....	168
5-5	d4PDF における大規模豪雨事例を入力降雨とした流出解析.....	169
5-5-1	対象降雨イベント.....	169
5-5-2	降雨流出計算手法.....	169
5-5-3	河道計算手法.....	171
5-5-4	全球平均気温上昇シナリオ別の河道計算結果.....	171
5-5-5	総降雨量値とピーク流量値の関係.....	173
5-6	予測区間による令和元年台風第19号の確率評価.....	175
5-7	第5章のまとめ.....	177
	第5章の参考文献.....	177

## 目次

<b>第 6 章 観測情報と気候変動予測を統合した極値降雨量に関する信頼区間・</b>	
予測区間の将来変化の推定 .....	179
6-1 はじめに.....	179
6-2 d4PDF 過去実験に基づく母数の事前分布の算定 .....	180
6-3 気候変動予測情報に基づく逐次的なベイズ更新の適用 .....	182
6-4 観測情報と気候変動予測情報を用いた極値降雨量の将来変化の推定 ...	186
6-5 第 6 章のまとめ .....	191
第 6 章の参考文献.....	192
<b>第 7 章 結論 .....</b>	<b>194</b>
謝辞 .....	200

# 第1章 序論

## 1-1 はじめに

従来の洪水対策では、過去の降雨観測により蓄積された極値降雨量の標本がある確率分布に従い生起したものと仮定し、その確率分布において、計画超過確率（計画確率年）に相当する降雨量値を計画降雨量と設定してきた。計画降雨量とは、河川計画において設計基準となる降雨量値であり、計画降雨量をもたらす洪水流量・水位に耐えられるように、堤防高や遊水池などの洪水防御施設の検討が行われる。ここで、極値降雨量の標本は一般的に次の2種に大別できる。その一つは降雨量の観測時系列のうち年最大値から構成される標本であり、もう一種は設定した閾値を超過する観測値から構成される標本である。前者を年最大値資料（Annual Maximum Series）、後者を閾値超過資料（Peaks Over Threshold）という。また、上述した統計解析手法は、水文頻度解析と呼ばれる。水文頻度解析手法の多くは、極値理論にその数理的基礎を置く。R.A.Fisher, L.H.C. Tippett (1928) は、標本中の最大値は、サンプル数が多いほど、漸近的に二重指数型の関数形である極値分布に収束することを示し、極値理論の基礎を構築した。極値分布はその母数の正負に応じて、Gumbel 分布、Frechet 分布および負の Weibull 分布に分類される。Jenkinson (1955) は、各3種の極値分布を統一的に表した一般化極値分布を提案した。その後、有限な観測期間で蓄積された年最大値資料を用いることで生じるデータ数の不足を補うために、一般化パレート分布（Pickands, 1975）を用いた閾値超過資料の極値統計解析が発展している。一般的に、計画降雨量を算定する水文頻度解析は、次に示すような手順を経て行われる。まず、頻度解析に使用する確率分布をいくつか候補として挙げ、次に、これらの確率分布を極値降雨資料に当てはめ、母数推定を行う。それらの推定確率分布群に対して、観測データとの適合度および、推定確率降雨量の安定性を評価し、最良の分布形を一つ採用する。当該の唯一つの確率分布において、計画超過確率に相当する降雨量値を計画降雨量として定める。

しかしながら、我が国における降雨の観測期間は、一級水系においても数十年間あ

## 第1章 序論

るいは百数十年間分程度であるため、今日までに蓄積されている極値降雨量の観測値の総数は、計画降雨量の推定には十分な精度とは言えない。年最大降雨量の観測値は数十個から多くとも百数十個程度であるため、従来の水文頻度解析における推定は不確実性を大いに内包している。すなわち、観測極値の不足に起因する不確実性が水文頻度解析による記録的豪雨の評価を困難としている。具体的には、観測極値の不足に起因する困難点として、寶（1998）は、記録的豪雨の観測値の多くが、採用した確率分布モデルから大きく外れ、数千年あるいは数万年といった再現期間を示す場合があることを挙げている。また、藤部（2011）は、データの観測年数を超える長期の再現期間に相当する確率水文量を推定する際、確率分布モデルによる外挿に伴い、推定誤差が増大することを指摘している。また、従来の水文頻度解析は、水文量の定常性を仮定している。ここで、定常性とは、水文量を支配する確率法則が時間的に変化しないことである。すなわち、従来手法では、水文量が従う確率分布を時間的に変化しないものとして扱ってきた。しかしながら、近年では、地球温暖化に伴う気候変動の影響による水文量の非定常性が指摘されてきている。ここで、非定常性とは、水文量の時系列がトレンドや周期をもつことあるいはそれらが従う確率分布が時間的に変化することをいう。我が国においては、地球温暖化に伴う気候変動により、将来期間において、降雨の規模ならびに洪水の発生頻度が増加をするという予測が示されている（国土交通省，2013）。上述したような気候変動に伴う降雨の激甚化を考慮すると、水文量の非定常性を考慮した統計解析手法の構築・発展は、洪水対策を立案する上で、極めて重要である。近年では、水文量の非定常性に着目した研究や報告が多数示されている。例えば、Milly et al. (2008) は、気候変動の影響を踏まえ、水文分野における定常性の仮定に警鐘を鳴らし、計画と管理の在り方に対して、水文量の確率分布の非定常性を考慮すべきであると述べている。加えて、近年、我が国では、過去経験のないような規模の豪雨が多発しており、各地で人命ならびに社会基盤等に対して大規模な被害をもたらしている。このような現状を鑑みると、上述したような近年における降雨の激甚化ならびに地球温暖化に伴う豪雨の頻発傾向を考慮した洪水対策の策定は喫緊の課題である。糸川・山田（2011）はそれまでの既往最大値を更新する、記録破りの大雨の出現頻度を新記録の理論を用いて明らかとした。渋谷（1986）は、新記録の発生個数が従う分布であるスターリング分布を導出し、新記録の理論の発展に寄与した。また、糸川・山田（2011）は、日本各地の日降雨量の年最大値のデータの中からその地点の新記録の発生個数の分布を求め、上記の理論との比較を行い、両者の良好な一致を確認し、この理論の妥当性を示している。また、同洪水対策の構築に向けて、近年では、アンサンブル気候予測データベースを用いた洪水リスク評価手法が



## 第1章 序論

提示されている（例えば，山田・星野ら，2018）．アンサンブル気候予測データベースとは，気象モデルによる過去気候および将来気候の計算結果を格納したデータベースである．このデータは，我々が過去経験する可能性のあった降雨ならびに将来経験する可能性のある降雨の観測値として捉えることができる．従来の洪水対策では，実績として存在するただ一つの観測標本に基づき計画降雨量を設定してきたが，同データを用いることで，計画降雨量の“振れ幅”を合理的に推定することができる．計画外力の振れ幅とは，信頼区間と定義されるものである．従来の水文頻度解析では，信頼区間は，ジャックナイフ法やブートストラップ法等の数値的手法や，確率水文量がある確率分布に従うという仮定に基づくパラメトリックな手法を用いることによって表されてきた．これらの手法は，中心極限定理を用いて，推定量（例えば，確率水文量）に正規分布を仮定する．しかしながら，確率水文量の分布を正規分布として扱うことには困難があると考えられる．これは，既述したように，限られた観測極値の下で，確率水文量を始めとした各統計量に正規性を仮定することは難しいためである．これらのことを受け，本論では，確率限界法検定（森口，1995）の理論を応用し，このような仮定を設定せず，可能な限り解析的に構成可能な信頼区間を提案する．加えて，当該信頼区間の精度が極めて高いことを示す．

信頼区間と混合しやすい概念として予測区間がある．予測区間は，将来期間において生じうる観測値が存在する範囲と定義されるものである．この定義を踏まえると，極値の予測区間は，将来期間に実現する最大値を確率変数とみなして，この確率変数の分布がある割合で含まれる範囲を表すものである．予測区間の理論体系の多くは竹内（1975）により示されている．一方，極値の予測区間に関する既往研究は，著者の知る限りさほど多くはない．従来の水文頻度解析では，極値の予測区間は，将来期間に生起する極値あるいはその極値に関する統計量が正規分布あるいはt分布に従うとして，構築されてきた．しかしながら，北野ら（2013）が指摘するように，将来期間に生起する極値あるいはその極値に関する統計量に従う確率分布は正規分布やt分布ではなく，一般的に極値分布とすることが妥当と考えられる．ここで，観測極値の個数が十分ならば，中心極限定理により，正規性の仮定を置くことは妥当であると考えられる．しかしながら，現在我々が利用可能なデータは正規性の仮定を設定するには不十分である．近年では，北野ら（2016）がベイズ法を用いて将来期間における極値の予測区間を構成する手法を示している．北野らの手法では，生起率の従う確率分布をガンマ分布とし，観測標本に対して正規性の仮定を設定せずに予測区間を構成できる．本論では，確率限界法検定の理論に基づいて予測区間を構成する手法を示すとともに，同検定に基づく予測区間を用い，将来期間における激甚現象の生起リスクを算

## 第1章 序論

出する理論的枠組みを提示する。

従来の水文頻度解析手法は、定常仮定の下で、過去の観測実績のみを採用しており、気候変動に伴う降雨量の非定常性を考慮していないということは既述した通りである。一方、ベイズ統計理論を確率限界法検定に基づく水文頻度解析手法に導入することで、気候変動予測結果の情報を取り込み、気候変動に伴う降雨量の非定常性に対応した信頼区間・予測区間が算定可能となる。すなわち、ベイズ統計理論を用いることで、アンサンブル気候予測データベースの将来気候予測実験結果を取り込み、採用確率分布とその信頼区間・予測区間を地球温暖化進行時のそれらに更新することができる。本研究では、マルコフ連鎖モンテカルロ法 (Markov Chain Monte Carlo method, MCMC 法) を用いて、過去数十年間分の観測実績から算定した採用確率分布とその信頼区間・予測区間に、将来気候予測実験結果を取り込み、それらを逐次的に更新する手法を構築した。同手法の適用は、地球温暖化進行時における確率雨量の評価・検討の実現可能性を提示するものであり、本論ではその詳細を示す。

### 1-2 統計的推定・予測手法概説

本節では、統計的推定および予測の方法を述べるとともに、信頼区間および予測区間の概念を詳説する。

#### (1) 統計的推定の方法

統計的推定とは、一般的に、利用可能な標本  $X=\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  に基づき、母集団の特性値 (母数あるいはパラメータという) を推定することである。母数の例としては、位置母数、尺度母数、形状母数、母平均、母分散、母集団分布のパーセンタイル値 (水文頻度解析における確率水文量) 等が挙げられる。

統計的推定の方法としては、主に点推定と区間推定がある。点推定とは、母数  $\theta$  を標本  $X$  から推定した唯一の統計量  $\hat{\theta}$  で指定する方法である。このとき、 $\hat{\theta}$  を推定量という。一方、区間推定とは、母集団分布の未知母数  $\theta$  を推定するときに、標本  $X$  を用いて、下側信頼限界値  $L_{C.I.}(X)$ 、上側信頼限界線  $U_{C.I.}(X)$  を求め、これらの信頼限界値から構成される区間  $[L_{C.I.}(X), U_{C.I.}(X)]$  の中に、母数  $\theta$  が  $1-p$  以上の確率で含まれていることを保証するという推定方法である。ここで、 $p$  は有意水準であり、母数  $\theta$  が信頼区間に入らない確率を表す。このとき、区間  $[L_{C.I.}(X), U_{C.I.}(X)]$  を信頼係数  $1-p$  の信頼区間あるいは  $100(1-p)\%$  信頼区間という。なお、有意水準  $p$  が取りうる値の範囲は  $0 < p < 1$  である。次に、母数  $\theta$  に関する信頼区間の定義式を式(1-1)に示す。

$$P(L_{C.I.}(X) \leq \theta \leq U_{C.I.}(X)) \geq 1 - p \quad (1-1)$$

## 第1章 序論

ここで、 $1-p$  は信頼係数を表す。

信頼区間の具体的意味は、母集団から大きさ  $n$  の標本を任意の回数  $N$  だけ抽出した場合に、得られる  $N$  個の信頼区間のうち  $100(1-p)\%$ 以上が母数  $\theta$  を含むことである。

次に、数理モデル（回帰直線、確率分布モデル等）に関する信頼区間の定義及び用法等を詳述する。確率分布モデル  $D(X;\hat{\theta})$  の信頼区間の定義を、確率変数を  $X$ 、確率分布の母数を  $\theta$ 、観測値の総数を  $n$  として次に示す。確率分布モデル  $D(X;\hat{\theta})$  の信頼区間とは、同一条件の下で、同様な観測・実験を  $N$  回実施した際、得られる  $N$  個の標本  $X^{j_{ens}}$ （アンサンブルデータ）に確率分布モデル  $D(X;\theta)$  を当てはめ、母数推定を行い、求まる  $N$  個の確率分布モデル  $D(X;\hat{\theta}^j)$  ( $j=1,2,\dots,N$ ) が存在する範囲である。ここで、各アンサンブルデータ  $X^{j_{ens}}$  ( $j=1,2,\dots,N$ ) の標本の大きさは  $n$  とする。例えば、確率分布モデル  $D(X;\hat{\theta})$  の 95% 信頼区間とは、上述した手順に基づき求めた  $N$  個の確率分布モデル  $D(X;\hat{\theta}^j)$  のうち、95% 程度が存在する範囲である。ここに、 $j$ : 標本の番号、 $\hat{\theta}$ : 母数  $\theta$  の推定値である。

標本  $X$  を当てはめた確率分布の累積分布関数を  $F(X)$  と表す。このとき、累積分布関数  $F(X)$  の信頼区間を式(1-2)に示す

$$P(L_{C.I.}(X) \leq F(X) \leq U_{C.I.}(X)) \geq 1 - \alpha \quad (1-2)$$

### (2) 統計的予測の方法

統計的予測とは、利用可能なデータ（標本） $X=\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  に基づき、将来期間に発生する未知量  $Y$  を予測することである。ここで、 $Y$  は将来観測値を表す確率変数である。竹内（1975）は、上述したような統計的予測問題を定式化する理論を構築するとともに、それらを著者「統計的予測論」に記した。

河川・水文分野における統計的予測の一例としては、「過去の極値降水量の観測系列(=X)を用いて、将来期間において発生する極値降水量(=Y)を予測すること」等が挙げられる。

統計的予測の方法としては、点予測と区間予測等がある。点予測とは、標本  $X$  から求めた予測値  $\hat{Y}$  により、 $X$  から  $Y$  の値そのものを予測する方法である。一方、区間予測とは、標本  $X$  から下側予測限界値  $L_{P.I.}(X)$ 、上側予測限界値  $U_{P.I.}(X)$  を求め、将来観測値  $Y$  が  $L_{P.I.}(X)$  と  $U_{P.I.}(X)$  の間に、ある確率をもって存在するという形式で予測を行う方法である。将来観測値  $Y$  に対する予測区間を式(1-3)に示す。

$$P(L_{C.I.}(X) \leq Y \leq U_{C.I.}(X)) \geq 1 - p \quad (1-3)$$

このとき、 $Y$  が  $1-p$  以上の確率で含まれていることを保証する区間  $[L_{P.I.}(X), U_{P.I.}(X)]$  を信頼係数  $1-p$  の予測区間あるいは  $100(1-p)\%$  予測区間という。例えば、95% 予測区間と

## 第1章 序論

は、将来の観測値のうち95%程度が入る区間である。

確率分布の振れ幅を推定したい場合は信頼区間を使用し、将来期間に生起する極値そのものを予測したい場合は予測区間を使用する必要がある。

### 1-3 水文頻度解析および極値統計理論の歴史

水文頻度解析の目的は、一般的に、河川計画において対象とする外力を推定することであり、同手法の構築・発展は河川計画の策定において極めて重要である。本節では、水文頻度解析ならびにその数理的基礎となる極値統計理論の歴史を概説する。

水文頻度解析の基礎が構築されたのは、1910年代のアメリカにおいてである。この時代において、洪水や渇水などの発生頻度は稀であるが、一度発生すれば非常に深刻な被害をもたらす現象の規模および生起可能性を、確率統計理論に基づき、推定するという研究がなされた（例えば、Feller (1914), Hazen (1914)）。具体的には、極値水文諸量が従う確率分布を推定し、当該確率分布に基づき、所与の再現期間で生起しうる降雨量や洪水流量の規模を算定するという研究がなされた。このような研究を通して、水文頻度解析手法の基礎が構築されていった。このような水文頻度解析の考え方は、岩井・石原 (1949) により、我が国の河川計画への導入が提案された。岩井・石原らの先駆的な研究を一つの契機として、確率洪水の概念が、建設省“河川砂防技術基準（案）”（1958年）における計画高水流量の決定方法として採用された。確率洪水の概念は、今日の我が国の河川計画に定着するに至った。

水文頻度解析手法の多くは、極値統計理論にその数理的基礎を置いている。極値統計理論とは、観測標本中の最大値あるいは最小値の統計的特性を明らかにするものである。極値統計理論により、今後生じうるような激甚現象の規模や生起確率を推定することが可能となる。ここで、極値統計理論の歴史を次に概説する。R.A.Fisher と L.H.C. Tippett (1928) は、標本中の最大値は、サンプル数が多いほど、漸近的に3種類の極値分布のいずれかに従うことを示し、極値理論の基礎を構築した。後に、各種極値分布は、それぞれ Gumbel 分布、Frechet 分布および負の Weibull 分布と呼ばれるようになった。また1941年には、Gumbel が、Fisher と Tippett が提案した第一種最大値漸近分布を、洪水流量を表す確率分布モデルとして採用した。この Gumbel の研究は、Fisher と Tippett が構築した極値理論を初めて水文頻度解析に導入した先駆的なものである。さらに、Gnedenko (1943) は、各種極値分布の吸引領域に母集団分布が属するための必要十分条件を明らかにした。また、Jenkinson (1955) は、各3種の極値分布を統一的に表した一般化極値分布を提案した。1958年には、Gumbel が、それまでに行われてきた極値理論に関する研究を集大成させ体系づけたものに加えて、種々の新理論を

## 第1章 序論

掲載した著書“Statistics of Extremes”を公表した。これは、世界初となる極値理論に関する専門書である。

年最大値資料に対する統計解析は、上述した極値分布が頻繁に用いられる。一方、年最大値資料のデータ数の不足を補うために、閾値超過資料を用いた統計解析が水文頻度解析の発展過程で研究されるようになった。閾値超過資料に用いられる確率分布としては、一般化パレート分布がある。一般化パレート分布は、Balkema and de Haan (1974) と Pikands (1975) により導出された。

次に、上述したような極値統計理論を基礎として構築された我が国における水文頻度解析手法の歴史を示す。角屋 (1962) は、3母数対数正規分布の適用法を確立した。3母数対数正規分布は実務において多用される一方、母数推定法により得られる確率水文量が大きく異なるため、母数推定法の吟味が重要となる。後に、角屋は、1964年に、当時における水文頻度解析を詳述した専門書“水文統計論”を公表した。これは、我が国における水文統計学に関する最初期の専門書である。岩井・石黒は角屋の研究成果を取り入れ、当時の水文統計学の集大成的内容を記載した“応用水文統計学”を公表した (1970)。これらの研究成果により、今日に至るまでの水文頻度解析手法の体系が構築された。さらに、寶・高棹 (1988) は、確率分布モデルの適合度基準として、SLSC (最小二乗基準, Standard Least Squares Criterion) を提案するとともに、SLSCが異なる確率分布モデルの適合度の比較 (相対評価) に用いることができることを示した。また、寶・高棹は、確率水文量の推定精度を評価するためにリサンプリング手法を導入した。リサンプリング手法は、確率降雨量の推定に使用したデータ群から、新たにデータを抽出 (リサンプリング) していき、複数のリサンプリング標本を作成した後、リサンプリング標本に観測標本と同様の確率分布形を当てはめ、確率降雨量の振れ幅 (推定誤差) を定量化するものである。この誤差が最小となる確率分布は、新たなに観測されたデータ群を考慮するなど、データの変動が発生した際に、計画降雨量値の変動が小さく、安定した計画降雨量値を与えるものとなるため、河川計画望ましいとされている。寶・高棹らが導入した SLSC およびリサンプリング手法は、河川計画における設定外力の決定に活用されている (例えば、建設省河川局監修：改訂新版河川砂防技術基準 (案) 同解説, 調査編, 1997.)。

### 1-4 極値理論の数理的基礎

本節では、極値統計理論の数理的基礎を略述する。

#### (1) 極値統計量と極値分布

## 第1章 序論

独立で同一分布に従う  $n$  個の確率変数  $X$  から成る確率変数列を考える。この確率変数列を以下に示す。また、本研究では、これを極値水文量の観測系列として扱っている。

$$X_1, X_2, \dots, X_n$$

各確率変数  $X$  が従う確率分布の累積分布関数を

$$F(x) = P(X_i \leq x), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

とする。

上記した  $n$  個の確率変数を大きさの順に並び替えたものを順序統計量という。

順序統計量を

$$X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$$

とする。なお、括弧内の数字は、 $n$  個の確率変数を大きさの順に並び替えた際の小さい方からの順位を表している。

次に、極値統計量  $Z_n$  を

$$Z_n = X_{(n)} = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\} = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$$

と定義する。水文頻度解析では、一般的に、1年間で得られる  $n$  個の観測値の最大値、すなわち、年最大値を極値統計量として扱うことが多い。

極値統計量  $Z_n$  の累積分布関数は次のように表される。

$$\begin{aligned} P(Z_n \leq x) &= P(\max_{1 \leq i \leq n} X_i \leq x) \\ &= P(X_i \leq x, i = 1, 2, \dots, n) \\ &= P(X_1 \leq x) \times P(X_2 \leq x) \times \dots \times P(X_n \leq x) \\ &= F(x)^n \end{aligned}$$

標本の大きさ  $n$  の増加により、極値統計量  $Z_n$  の累積分布関数  $F(x)^n$  が退化分布となることを防ぐために、パラメータによる基準化を行う。基準化を行った極値統計量を以下に示す。

$$\frac{Z_n - b_n}{a_n}$$

ここに、 $a_n > 0$ ,  $b_n \in \mathbf{R}$  (実数の全体) である。

基準化した極値統計量の累積分布関数を、以下に示す。

$$P\left(\frac{Z_n - b_n}{a_n} \leq x\right) = P(Z_n \leq a_n x + b)$$

$$= F(a_n x + b)^n$$

ここで、 $n \rightarrow \infty$ のとき、上式は、以下に示すように、極値分布  $G(x)$ に収束する ( $\forall x: G$ の連続点)

$$F(a_n x + b)^n \rightarrow G(x)$$

このとき、各確率変数が従う確率分布  $F$  は極値分布  $G$  の吸引領域に属するといひ、このことを記号で  $F \in D(G)$ と記述する。

## (2) 極値分布の関数形

本研究では、Gumbel 分布や一般化極値分布を多用しているため、これらの関数形を以下に示す。これらの確率分布の確率密度関数を  $f(x)$ 、累積分布関数を  $F(x)$ 、確率表現関数を  $\chi(u)$ と記述する。なお、確率表現関数とは、累積分布関数の逆関数である (森口 (1995) )。

### 【Gumbel 分布】

$$f(x) = \frac{1}{\sigma} \exp\left\{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right\} \exp\left[-\exp\left\{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right\}\right]$$

$$F(x) = \exp\left[-\exp\left\{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right\}\right]$$

$$\chi(u) = \mu - \sigma \log[-\log(u)]$$

### 【一般化極値分布】

$$f(x) = \frac{1}{\sigma} \exp\left\{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right\} \exp\left[-\exp\left\{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right\}\right] \quad (\xi = 0)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma} \exp\left[-\left(1 + \frac{\xi(x-\mu)}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}}\right] \left(1 + \frac{\xi(x-\mu)}{\sigma}\right)^{-1-\frac{1}{\xi}} \quad \left(\xi \neq 0, 1 + \frac{\xi(x-\mu)}{\sigma} > 0\right)$$

$$F(x) = \exp\left[-\exp\left\{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right\}\right] \quad (\xi = 0)$$

$$F(x) = \exp\left[-\left(1 + \frac{\xi(x-\mu)}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}}\right] \quad \left(\xi \neq 0, 1 + \frac{\xi(x-\mu)}{\sigma} > 0\right)$$

$$\chi(u) = \mu - \sigma \log[-\log(u)] \quad (\xi = 0)$$

$$\chi(u) = \mu - \frac{\sigma(1 - (-\log(u))^{-\xi})}{\xi} \quad (\xi \neq 0, 1 + \frac{\xi(x - \mu)}{\sigma} > 0)$$

ここに、 $\mu$ ：位置母数， $\sigma$ ：尺度母数， $\xi$ ：形状母数である。

一般化極値分布は、形状母数 $\xi$ が0に等しいとき、Gumbel分布となる。

### 1-5 従来の水文頻度解析における課題

今日までに蓄積されている極値水文量の観測値（観測極値）は数十個から多くとも百数十個程度であるため、従来の水文頻度解析における推定は不確実性を大いに内包している。すなわち、観測極値の不足に起因する不確実性が水文頻度解析による記録的豪雨の評価を困難としている。観測極値の不足に起因する困難点として、寶（1998）は、記録的豪雨の観測値の多くが、採用した確率分布モデルから大きく外れ、数千年あるいは数万年といった再現期間を示す場合があることを挙げている。また、藤部（2011）は、データの観測年数を超える長期の再現期間に相当する確率水文量を推定する際、確率分布モデルによる外挿に伴い、推定誤差が増大することを指摘している。

ここで、どの程度のデータ数があれば、それらのデータに基づき算出した統計量の推定誤差が減少するのか、ということの数値実験により検証する。具体的な検証内容を次に示す。利根川八斗島上流域における1943年から2002年に亘る60年間分の年最大流域平均3日雨量に当てはめたGumbel分布を母集団分布として仮定し、その母集団分布に従う標本サイズ $n$ の標本を合計5000個作成する。次に、これら5000個のアンサンブル標本（各標本のサイズは $n$ ）それぞれに最尤法により当てはめたGumbel分布を求める。当該流域における計画降雨量である、200年確率年最大流域平均3日雨量を、仮定した母集団分布と5000個のアンサンブル標本に当てはめたGumbel分布で算出する。仮定母集団分布が与える200年確率年最大流域平均3日雨量を真値として、各アンサンブル標本に当てはめたGumbel分布群の200年確率年最大流域平均3日雨量と真値との相対誤差を算出していく。これにより、標本サイズ $n$ と相対誤差の関係が求められる。図1-1は、標本サイズ $n$ と当該の真値に対する相対誤差を示したものである（標本 $n$ が{10, 30, 50, 100, 150, 200, 250, 300, 350, 400, 450, 500, 550, 600, 650, 700, 750, 800, 850, 900, 950, 1000}の場合における相対誤差群ならびに、それらの95%信頼限界値が同図にプロットされている）。なお、信頼限界値については、標本サイズ $n$ 別のアンサンブル標本に当てはめたGumbel分布群が与える5000個の200年確率年最大流域平均3日雨量の経験分布において、2.5%ile値を95%下側信頼限界



## 第1章 序論

値, 97.5%ile 値を 95%上側信頼限界値とした. 同図において, 横軸は仮定母集団分布から生成した各アンサンブル標本がもつ標本サイズ, 縦軸は母集団分布が与える 200 年確率年最大流域平均 3 日雨量を真値とした際の相対誤差を示している. なお, 相対誤差は,

$$\left( \frac{\text{真値}-\text{計算値}(n)}{\text{真値}} \right) \times 100 [\%]$$

として算出する. ここで, 真値は仮定母集団分布が与える 200 年確率年最大流域平均 3 日雨量, 計算値は仮定母集団分布から生成した標本 (標本サイズ  $n$ ) に当てはめた Gumbel 分布が与える 200 年確率年最大流域平均 3 日雨量である. 同図より, 横軸を現在までに蓄積されている観測極値の総数 ( $n$ ) と考えると,  $n$  が 10 から 200 までの範囲では, 相対誤差が極めて大きくなることが分かる. 特に,  $n$  が 100 の場合は, 一級河川における降雨観測年数や年最大降雨量の総数と類似しているため, この箇所に着目すると, 相対誤差は, [-20%~+20%]となることが分かる. これは計画降雨量には±20%程度の不確実性 (推定誤差) が内在していることを意味している. さらに, この結果は, 現在までに蓄積されている観測極値を用いて, 頻度解析モデルの母数を安定して推定することは極めて困難であることを示唆している. 次に,  $n=1000$  の場合, 相対誤差はおよそ[-10%~+10%]の範囲に収束し, 推定の信頼性が向上することが分かる. 上述した数値実験の結果は, 頻度解析モデルの母数を安定して推定し, 信頼性の高い推論を行うためには, 数千年間分の観測極値 (年最大値) が必要となることを示唆している.

前述した数値実験結果および極値統計学的観点から, 今日, 我々が利用可能な観測極値は限られており, 安定した推論を行うためには, 不十分なサンプリング数であることが分かる. 現代の水文頻度解析は利用できる観測極値が限られていることに起因する種々の困難点をもつ. その問題の一つとして, 上述したように, 記録的豪雨の確率年を正当に評価できないことが挙げられる. 具体的には, 記録的豪雨の観測値は採用した確率分布モデルから大きく外れ, 当該値の確率年をモデルにより算出すると, 数千年以上となることが挙げられる. この具体例を平成 27 年関東・東北豪雨を例として図 1-2 に示す. この図は, 利根川水系五十里観測所における 36 年間分の年最大日降水量, 関東・東北豪雨時の観測値, 関東・東北豪雨以前における年最大日降水量の観測値に当てはめた Gumbel 分布を示したものである. 同図より, 関東・東北豪雨の観測値はそれまでに蓄積された観測値に当てはめた Gumbel 分布から大きく外れ, 当該値の確率年は 1000 年と成ることが分かる. 一級水系における洪水対策が, 通常 100 年から 200 年といった確率規模で策定されているため, 上述したような大規模豪雨はしばしば“想定外”あるいは“異常値”といった評価が下される場合がある. し

## 第1章 序論

かしながら、仮に、数千個の観測極値が得られているならば、想定外と見なされてきた値周辺にもデータが散らばり、現在までのデータ数に基づく評価が誤りとなることが大いにありうる。すなわち、現在までのデータ数では、極値水文事象の全容を十分に把握することは困難といえる。

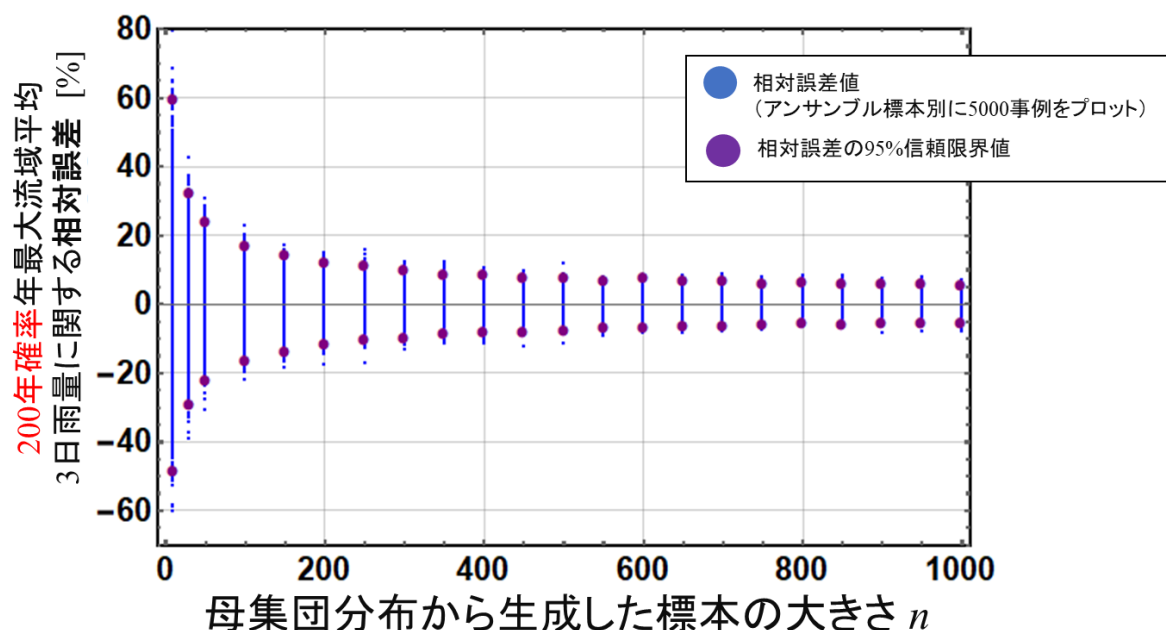


図 1-1 標本サイズ  $n$  と相対誤差の関係

仮定母集団分布が与える 200 年確率年最大流域平均 3 日雨量を真値として、仮定母集団分布から生成したアンサンブル標本に当てはめた Gumbel 分布群の 200 年確率年最大流域平均 3 日雨量と真値との相対誤差を算出した。図 1-1 は、標本サイズ  $n$  と当該の真値に対する相対誤差を示したものである（標本  $n$  が {10, 30, 50, 100, 150, 200, 250, 300, 350, 400, 450, 500, 550, 600, 650, 700, 750, 800, 850, 900, 950, 1000} の場合における相対誤差群ならびに、それらの 95%信頼限界値が同図にプロットされている）。なお、信頼限界値については、標本サイズ  $n$  別のアンサンブル標本に当てはめた Gumbel 分布群が与える 5000 個の 200 年確率年最大流域平均 3 日雨量の経験分布において、2.5%ile 値を 95% 下側信頼限界値、97.5%ile 値を 95% 上側信頼限界値とした。

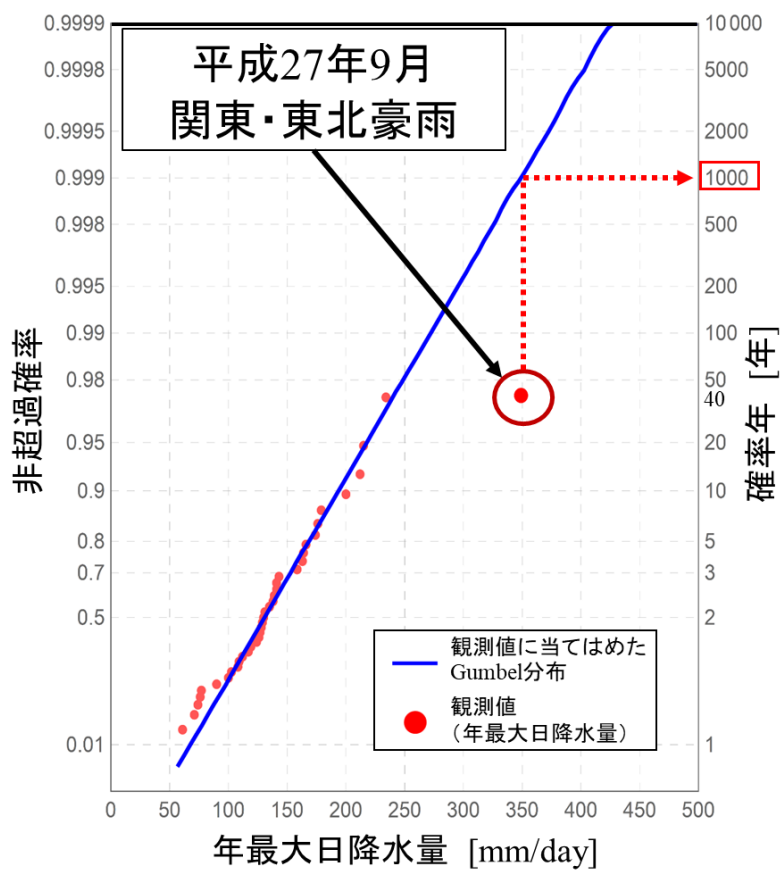


図 1-2 平成 27 年関東・東北豪雨時の年最大日降水量の観測値を除いた 35 個の年最大日降水量の観測値に当てはめた Gumbel 分布，上記観測所における 36 年間分の年最大日降水量の観測値

- ・使用データ：五十里観測所における 36 年間分の年最大日降水量
- ・観測年数：59 年間（1957 年～2015 年）
- ・年最大日降水量の観測値が欠測している年：1957 年～1977 年，2008 年

### 1-6 信頼区間・予測区間の導入による従来の水文頻度解析における諸課題の解決

観測極値の不足に起因する水文頻度解析上の困難点を改善するための手法の一つとして d4PDF を始めとしたアンサンブル気候予測データベースの活用が挙げられる。アンサンブル気候予測データベースとは、海面水温などの境界条件に微小な摂動を与えた気象シミュレーションにより、出力された計算結果を格納したものである。アンサンブル気候予測データベースにより、過去気候（現在までの気候）および将来気候（地球温暖化進行時の気候）下での気候データが利用可能となる。洪水リスク評価にこのデータを用いる利点は、計画規模に相当する確率降雨量の振れ幅（信頼区間）を求め、従来では想定外として扱われるような大規模降雨の発生確率を把握可能とする点にある。信頼区間を構成する手法としては、上述したような大量アンサンブルデータによる方法に加え、数理統計理論による方法がある。このことは、前節においても

## 第1章 序論

示している。本研究では、確率限界法検定を用い、信頼区間ならびに予測区間を構成する理論を示すとともに、従来の水文頻度解析における困難点の改善を行う。

### 1-7 本論文の構成

上述したように、従来の水文頻度解析では、過去数十年間分程度の水文観測に基づいて確率水文量の推定を実施してきたが、この推定には観測データ数の不足に起因する不確実性が大いに含まれている。このような限られた極値水文データの下で合理的な統計的推定を実施する手法の一つとして、信頼区間・予測区間がある。本論文では、確率限界法検定に基づいた信頼区間・予測区間の構成理論ならびにその応用法を示し、これらの導入による水文頻度解析における不確実性評価手法を提示する。

第1章では、水文頻度解析の困難性として、観測極値の不足があり、これを改善し、合理的な統計的推定を行うために、さまざまな手法・理論が構築されてきたことを水文頻度解析の歴史を通して紹介した。また、近年では、大量アンサンブルデータに基づいた信頼区間の洪水対策への導入可能性が指摘されており、本研究が構築した数理統計理論に基づく信頼区間は同対策の理論的根拠となることを述べた。

第2章では、確率限界法検定の理論を詳述した。同章では、理論の背景にあるKolmogorov-Smirnov 検定の概説をするとともに、両検定の検定力を比較し、確率限界法検定の極値統計解析に対する有用性を示す。確率限界法検定は、仮定した母集団分布の裾野に対する検定力が強く、任意の有意水準において、仮定した母集団分布の下で生じうる低頻度かつ極端な値の推定を可能とするものである。さらに、同章では、確率限界法検定における  $p$  値の算出方法を詳説した。

第3章では確率限界法検定に基づいた信頼区間の構成手法を詳説するとともに、当該信頼区間を導入した水文頻度解析手法を提示する。確率限界法検定に基づく信頼区間は、激甚な水文現象の生起リスクを推定可能とするものである。さらに、同章では、確率限界法検定の理論を応用することで、将来期間において生起する極値水文量に関する予測区間の構成手法を示すとともに、当該予測区間を導入した水文頻度解析手法を提示する。また、予測区間の導入により、従来の水文頻度解析では“外れ値”あるいは“異常値”として扱われてきた豪雨を合理的な確率年で評価するとともに、当該豪雨の生起リスクが算出可能となることを示す。

第4章では、マルコフ連鎖モンテカルロ法により、気候変動予測結果を取り込み、信頼区間・予測区間を更新する手法を構築する。本研究が開発した手法は、気候モデルによる物理的予測とそれを統計理論によって、極値降雨量の将来変化を推定するものである。具体的には、同章では、将来気候における計画降雨量ならびに、発生する

## 第1章 序論

可能性のある豪雨の規模が推定可能となることの数理を詳述する。

第5章では、本研究が開発した、マルコフ連鎖モンテカルロ法を用いた、将来気候における年最大降雨量の極値分布ならびに、その信頼区間・予測区間の推定手法を利根川上流域に適用し、気温上昇実験ごとに、信頼区間・予測区間の将来変化を求めた。さらに、将来気候下における最大クラスの降雨パターンを分析し、当該流域における洪水対策上、考慮すべき降雨パターンや気象場を明らかとした。さらに、アンサンブル気候予測データベース d4PDF 内の最大クラスの降雨イベントに対し、極値降雨量の予測区間を考慮することで、これらの最大クラスの降雨量を計画確率降雨量の分布の実現値として評価できることを示した。さらには、利根川上流域を対象に、温暖化進行時における降雨の将来変化が極値河川流量に及ぼす影響を推定するとともに、これらの極値河川流量をもたらす大規模豪雨の分析を行った。将来気候下において、現在定められている基本高水を超える、流量の規模やその発生リスクを定量化する。

第6章では、観測と気候変動予測情報の双方を考慮した、確率降雨量の統計的予測手法を示す。本手法の有意性は、過去のデータを基に、長期先の予測を行う際、確率降雨量の予測精度が劣化していくという実態を統計的情報量の観点からモデル化し、その推定不確実性の増大を信頼区間・予測区間により定量化した点にあると考える。

第7章では、本論文のまとめを詳述する。

## 参考文献

- ・北海道地方における気候変動予測（水分野）技術検討委員会 ([https://www.hkd.mlit.go.jp/ky/kn/kawa\\_kei/splaat000000vdyw.html](https://www.hkd.mlit.go.jp/ky/kn/kawa_kei/splaat000000vdyw.html))
- ・気候変動リスク上方創生プログラム：地球温暖化に資するアンサンブル気候予測データベース
- ・山田朋人，星野剛ら：北海道における気候変動に伴う洪水外力の変化，河川技術論文集，第24巻，pp.391-396，2018.
- ・森口繁一：確率表現関数の検定について—Kolmogorov-Smirnov 検定を考え直す—，pp.233-244，日本統計学会，第25巻，1995.
- ・森口繁一：確率表現関数，東京大学出版，1995
- ・Fuller, W.E. : Flood Flows, Trans. ASCE, Vol.77, pp. 565-694, 1914.
- ・Hazen, A. : Storage to Be Provided in Impounding Reservoirs for Municipal Water Supply, Trans. ASCE, Vol.77, pp.1539-1669, 1914.
- ・石原藤次郎・岩井重久：水文統計学上より見た本邦河川計画の合理化について，土

## 第1章 序論

木学会誌, 第34巻第4号, pp.24-29, 1949.

・ Fisher, R.A. and L.H.C. Tippett: Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample, *proc. Cambridge Philos. Soc.*, Vol.24, pp.180-190, 1928.

・ E.J. Gumbel: The return period of flood flows, *Ann. Math. Stat.* Vol. 12, pp.163-190., 1941.

・ B.V. Gnedenko: Sur La Distribution Limite Du Terme Maximum D'Une Serie Aleatoire, *Annals of Mathematics, Second Series*, Vol. 44, No. 3, pp. 423-453., 1943.

・ A.F. Jenkinson: The Frequency Distribution of the Annual Maximum (or Minimum) Values of Meteorological Elements, 1955.

・ A. A. Balkema and L. de Haan: Residual life time at great age, *The Annuals of Probability* Vol.2, No.5, pp.792-804, 1974.

・ Pickands, J.: Statistical inference using extreme order statistics. *Ann. Statist.* 3, pp.119–131,1975.

・ 角屋睦：数正規分布の適用範囲，定数について，農業土木研究，別冊第3号，pp.12-16., 1962.

・ 寶馨，高棹琢馬：水文頻度解析における確率分布モデルの評価規準，土木学会論文集，第393号/II-9，pp.151-160，1988.

・ 寶馨：水文頻度解析の進歩と将来展望，pp.740-756 水文・水資源学会誌，1998.

・ 藤部文昭：回答「極端な豪雨の再現期間推定精度に関する検討」，*天気* 58(2)，pp.147-151，2011.

・ 国土交通省 国土技術政策総合研究所 気候変動適応研究本部：気候変動適応策に関する研究（中間報告），国総研資料 749号，II-112-154，2013.

・ Milly, P.C.D., Betancourt, J., Falkenmark, M., Hirsch, R. M., Kundzewicz, Z.W., Lettenmaier, D.P. and Stouffer, R.J. : Stationarity Is Dead: Whither Water Management ?, *Science*, 319, 573-574, 2008.

・ 佐渡公明，杉山一郎，中尾隆志：平均値と分散のジャンプ検出による確率水文量の更新—北海道内 22 気象官署の年最大日雨量と年最大無降雨連続日数への適用—，*水工学論文集*, Vol. 52, pp. 199–204, 2008.

・ 寒川典昭，鈴木将史:日本列島 20 世紀の降水量時系列の経年的非定常性とその確率降水量の評価値に及ぼす影響，*自然災害科学*, No. 26(4), pp. 355–365, 2008.

・ 葛葉泰久：これからの確率統計水文学の役割，*水文・水資源学会誌*，第31巻，第6号，pp.541-542，2018.

・ 北野利一，高橋倫也，田中茂信：水文頻度解析における推定誤差の回折効果 ～ 50年確率は50年間有効であり続けるか？，*土木学会論文集 B1(水工学)* Vol.68, No.4,

## 第1章 序論

I\_1375-I\_1380, 2012.

- ・北野利一，森瀬喬士，喜岡渉，高橋倫也：確率波高に対する推定の可否を決定づける新たな指標の提案，海岸工学論文集，第55巻，pp.141-145，2008.
- ・Coles, S. : An Introduction to Statistical Modeling of Extreme Values, Springer, Chapter 6, Extremes of Non-stationary Sequences, pp.105-123, 2001.
- ・林 敬大，立川康人，椎葉充晴：時変母数による非定常水文頻度解析手法のモデル選択に関する考察，土木学会論文集 B1(水工学)，Vol.71, No.1, 28-42, 2015.
- ・北海道地方における気候変動予測（水分野）技術検討委員会 ([https://www.hkd.mlit.go.jp/ky/kn/kawa kei/splaat000000vdyw.html](https://www.hkd.mlit.go.jp/ky/kn/kawa%20kei/splaat000000vdyw.html))
- ・山田朋人，星野剛ら：北海道における気候変動に伴う洪水外力の変化，河川技術論文集，第24巻，pp.391-396，2018.
- ・竹内啓：統計的予測論，培風館，1975.
- ・北野利一，高橋倫也，田中茂信：降水量の極値の予測区間 ～ 確率降水量の信頼区間を誤解していませんか？，土木学会論文集 B1（水工学），69(4), pp.I\_271-I\_276., 2013.
- ・Coles, S. : Anticipating catastrophes through extreme value modelling, Appl. Statist. 52, Part 4, pp. 405–416, 2003.
- ・北野利一，高橋倫也，田中茂信：ベイズ手法による降水量の極値の予測分布～最尤法による相違と相互補完，土木学会論文集 B1（水工学），72(4), pp.I\_463-I\_468, 2016.
- ・森口繁一：確率表現関数の検定について—Kolmogorov-Smirnov 検定を考え直す—，pp.233-244，日本統計学会，第25巻，1995.

## 第2章 確率限界法検定の理論

### 2-1 はじめに

採択域や信頼区間・予測区間を数理的に構成する方法の一つとして、仮説検定理論に基づく方法がある。仮説検定理論に基づく方法は、パラメトリック検定 (parametric test) による方法とノンパラメトリック検定 (nonparametric test) による方法に大別される。パラメトリック検定による採択域や信頼区間・予測区間は、検定統計量が従う母集団分布を仮定することにより構成される。例えば、パラメトリック手法を用いて、95%信頼区間を算出する場合、信頼区間は、検定統計量が従うと仮定した確率分布の2.5%ile 値および97.5%ile 値により構成される。

ノンパラメトリック検定とは、母集団分布に関して、正規分布などのある特定の確率分布を仮定せずに統計的検定を行う方法である。ノンパラメトリック検定の利点は、どのような母集団分布からのデータであっても適用可能なことである。一方、ノンパラメトリック検定方法の弱点としては、分布に関する情報を用いないので、特定の分布の下での最良の検定 (正規母集団に従う標本に対する  $t$  検定など) に比べ検定力 (誤った仮説を棄却する確率) が低下することがある。

パラメトリック手法とノンパラメトリック手法のどちらが優れているかは一意的に決めることができず、データや推定量等を十分に分析したうえで、統計的推測に用いる手法を決める必要がある。

採用した仮説検定理論がもつ検定力が大きいほど、採択域と信頼区間・予測区間の幅は狭まり、推定精度は向上する。激甚災害に伴う観測データは異常に大きな (または小さな) 値となることが常であり、災害の可能性や規模の予測には、観測データの平均ではなくデータの中で大きな値をとる極値データの挙動が重要となる。極値データは激甚現象に起因するものであり、これは確率分布の裾部に相当する現象である。したがって、激甚現象の統計的推定や予測を行う場合、仮定した確率分布の裾部に関して高い検定力をもつ仮説検定理論を選定し、その仮説検定理論に基づく採択域と信



## 第2章 確率限界法検定の理論

頼区間・予測区間を構成する必要がある。このことを踏まえ、本研究では、確率降雨量の不確実性評価のため、仮定した確率分布の裾部に対して極めて高い検定力を有する確率限界法検定を採用した。本章では、確率限界法検定の理論の詳細および、その水文頻度解析への適用手法を示す。

### 2-2 確率限界法検定の概説

確率限界法検定は、Kolmogorov-Smirnov 検定の弱点である“仮定した確率分布の裾部に対する検定力の低さ”を改善した検定理論である。ここで、検定力とは、既述したように、誤った仮説を棄却する確率を表し、検定力が高いほど、採択域や信頼区間・予測区間は狭まり、推定・予測の精度が向上する。同検定では、仮定した確率分布の確率表現関数の両側に確率限界線（確率限界法検定における棄却限界線）を構成し、観測値が両線により定まる区間（採択域）の外部に存在する場合、有意な差があると判定する。ここで、確率表現関数とは累積分布関数の逆関数である（森口，1995）。

確率限界法検定では、仮定した母集団分布から算定される順序統計量の累積確率がベータ分布に従うことを利用し、母集団分布の下で生じうるデータの振れ幅の限界値（棄却限界値）を算定するために、その値をもたらす累積確率の分布を構成する。

以降では、仮定した確率分布を  $D(X;\theta)$ 、 $D(X;\theta)$  の累積分布関数を  $F_X(X)$ 、 $D(X;\theta)$  の確率表現関数を  $\chi_X(u)$  と表記する。ここで、 $X$  は確率変数を表し、 $F_X(X)$  により求まる  $X$  の累積確率を確率変数  $U(=F_X(X))$  と表記する。

確率分布  $D(X;\theta)$  の累積分布関数の関数形  $F_X(x)$  を式(2-1)、確率表現関数の関数形  $\chi_X(u)$  を式(2-2)により表す。

$$u = F_X(x) \quad (2-1)$$

$$x = \chi_X(u) \quad (2-2)$$

ここに、 $x$  : 確率変数  $X$  の実現値、 $u$  : 累積確率（確率変数  $U$  の実現値）である。

### 2-3 Kolmogorov-Smirnov 検定の理論

Kolmogorov (1933) は、仮定した確率分布の累積分布関数  $F(x)$  と標本  $X$  から定まる経験的累積分布関数との距離を検定統計量として提案した。また、Smirnov (1939) は、当該検定量の実現値を一覧にした表を示した。これらの研究により、Kolmogorov-Smirnov 検定（以降 K-S 検定とも表記する。）の理論体系が構築された。

Kolmogorov-Smirnov 検定とは、標本  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  を連続な累積分布関数  $F_T(x)$  をもつ未知の母集団分布から生成された独立標本とし、仮定した確率分布の累積分布

## 第2章 確率限界法検定の理論

関数  $F_X(x)$  の標本  $X$  に対する当てはまりの良さを検定するものである。ここで、帰無仮説  $H_0$  と対立仮説  $H_1$  はそれぞれ次のように表す。

$$H_0 : F_T(x) = F_X(x)$$

$$H_1 : F_T(x) \neq F_X(x)$$

なお、Kolmogorov-Smirnov 検定は、ノンパラメトリックな適合度検定であるため、どのような連続分布を仮定してもよい。

Kolmogorov-Smirnov 検定では、仮定した確率分布の累積分布関数  $F_X(x)$  と標本から定まる経験的累積分布関数  $F_n(x)$  との最大差を検定統計量 (Kolmogorov-Smirnov 検定量) として、この検定統計量が棄却限界値を超過した際、仮説の棄却を行う。なお、このことは、観測値が採択域の外部に存在するときに仮説を棄却することと同義である。経験的累積分布関数とは、標本  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  が連続な独立同一分布に従うとき、各標本値  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  を昇順に並び替えることで得られる順序統計量  $\{x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}\}$  について、式(2-3)により定義される関数である。

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & x < x_{(1)} \\ i/n & x_{(i)} \leq x < x_{(i+1)} \\ 1 & x_{(n)} \leq x \end{cases} \quad (2-3)$$

ここに、 $n$  : 標本の大きさ、 $i$  : 標本値を小さい順に並び替えた場合における小さい方からの順位である。

両側検定の場合における Kolmogorov-Smirnov 検定統計量を式(2-4)に示す。

$$d_n = \sup_x |F_X(x) - F_n(x)| \quad (2-4)$$

ここに、 $F_X(x)$  : 仮定した確率分布の累積分布関数、 $F_n(x)$  : 標本  $X$  から求まる経験的累積分布関数、 $d_n$  : Kolmogorov-Smirnov 検定統計量である。

標本の大きさ  $n$  が十分大きいとき、Kolmogorov-Smirnov 検定量の極限分布は式(2-5)により表される (Kolmogorov (1933), Smirnov (1939), Feller (1948))。

$$P\left(d_n \leq zn^{-1/2}\right) \rightarrow 1 - 2 \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} \exp(-2r^2 z^2) \quad (2-5)$$

以降では、同検定における棄却限界値  $zn^{-1/2}$  を  $\xi_n$  と表記する。Massey (1950), Birnbaum (1952), Miller (1956) は、 $n$  が有限の場合における棄却限界値および棄却確率 ( $P(d_n \leq zn^{-1/2})$  の値) を掲載した表を示している。

両側確率  $p$  で Kolmogorov-Smirnov 検定を行う場合、棄却限界値を  $\epsilon_{n,\alpha}$  と表記すると、標本  $X$  から求まる第  $i$  順序統計量  $X_{(i)}$  の採択域は、式(2-6)により表すことができる。

## 第2章 確率限界法検定の理論

ここで、 $p$  は有意水準、 $(1-p)$  は信頼係数を表す ( $0 < p < 1$ )。同検定では、上述した棄却方法より、第  $i$  順序統計量  $X_{(i)}$  の実現値  $x_{(i)}$  が当該区間の外部に存在する際、仮説を棄却する。ここで、 $X_{(i)}$  の累積確率  $u_i$  は、式(2-7)に示すプロットイング・ポジション公式等により与える。

$$\chi_X(u - \varepsilon_{n,(1-p)}) \leq \chi_X(u) \leq \chi_X(u + \varepsilon_{n,(1-p)}) \quad (2-6)$$

$$u_i = \frac{i - a}{n + 1 - 2a} \quad (2-7)$$

ここに、 $a$  はプロットイング・ポジション定数であり、 $a=0$  は Weibull 公式、 $a=0.5$  は Hazen 公式、 $a=0.4$  は Cunnane 公式にそれぞれ対応する。また、 $\chi_X(u - \varepsilon_{n,(1-p)})$  は下方棄却限界値、 $\chi_X(u + \varepsilon_{n,(1-p)})$  は上方棄却限界値である。

プロットイング・ポジション公式等を用いると、棄却限界値は、仮定した確率分布の確率表現関数の両側にそれぞれ  $n$  個プロットすることができる。なお、本章では、上述した手順により、得られる点を棄却限界点と表記する。Kolmogorov-Smirnov 限界線は、各棄却限界点を連ねることで構築することができる。Kolmogorov-Smirnov 検定の具体的な検定方法は、仮定した確率分布の両側に、設定した有意水準に応じた限界線を作成し、この限界線から構成される区間の外部に観測値が存在する場合、仮説の棄却を行うというものである。次に、両側確率 5% で、仮定した確率分布の確率表現関数に対する Kolmogorov-Smirnov 検定の一例を示す。

両側確率 5% の場合における棄却限界値は、Kolmogorov-Smirnov 検定統計量の極限分布における 95%ile 値に相当する。このとき、両側確率 5% の場合における棄却限界値を  $\varepsilon_{n,0.95}$  と記述すると、式(2-8)が成立する。

$$P(d_n \leq \varepsilon_{n,0.95}) = 0.95 \quad (2-8)$$

Birnbaum (1952) によると、両側確率 5% の場合、棄却限界値  $\varepsilon_{n,0.95}$  は式(2-9)で表すことができる。

$$\varepsilon_{n,0.95} = 1.3581n^{-1/2} \quad (2-9)$$

このとき、 $X_{(i)}$  の採択域は式(2-10)により表される。

$$\chi_X(u - 1.3581n^{-1/2}) \leq \chi_X(u) \leq \chi_X(u + 1.3581n^{-1/2}) \quad (2-10)$$

次に、Kolmogorov-Smirnov 検定の検定統計量の確率分布の導出過程を記す。この導出過程では、Kolmogorov-Smirnov 検定統計量  $K_n^+$  を式(2-11)として定義する。

$$K_n^+ = \frac{1}{\sqrt{n}} \max_{i=1, \dots, n} \{i - nF_X(X_{(i)})\} = \sqrt{n} \max \left\{ \frac{i}{n} - F_X(X_{(i)}) \right\} \quad (2-11)$$

この導出証明では、Kolmogorov-Smirnov 検定統計量を経験分布と仮定した母集団分布の双方が与える累積確率の最大差( $\max\{i/n - F_X(X_{(i)})\}$ )を $\sqrt{n}$ 倍したものとする。Kolmogorov-Smirnov 検定統計量  $K_n^+$  の累積分布関数は式(2-12)より表される。

$$P(K_n^+ \leq \frac{t}{\sqrt{n}}) = P(i - nF_X(X_{(i)}) \leq t) \quad , \forall i \quad (2-12)$$

ここで、 $t$  は観測値から構成した経験分布と仮定した母集団分布の双方が与える累積確率の最大差( $\max\{i/n - F(X_{(i)})\}$ )の実現値を  $n$  倍したものを表す。次に、 $nF_X(X_{(i)})$  を  $U_{K(i)}$  と表記し、 $a_i = \max\{i - t, 0\}$  とおく。  $\{nF_X(X_{(1)}), \dots, nF_X(X_{(n)})\}$  は区間  $[0, n]$  上で一様分布する独立な  $n$  の確率変数  $U_{K1}, U_{K2}, \dots, U_{Kn}$  の順序統計量と同じ性質を持つ。

$P(U_{K(i)} \geq a_{(i)}) = P(U_{K(n)} \geq a_{(n)}, U_{K(n-1)} \geq a_{(n-1)}, \dots, U_{K(1)} \geq a_{(1)})$  が成立する。ここで、 $P(U_{K(n)} \geq a_{(n)}, U_{K(n-1)} \geq a_{(n-1)}, \dots, U_{K(1)} \geq a_{(1)})$  は、同時確率であり、図 2-1 で示す事象の生起確率を表す。

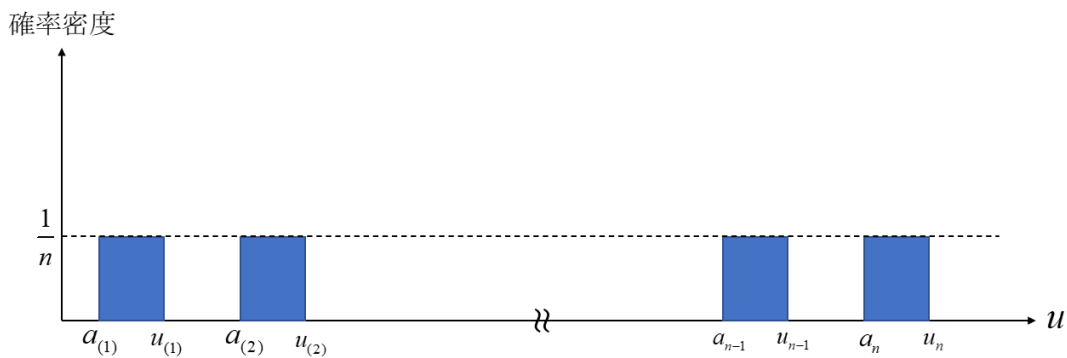


図 2-1 事象  $P(U_{K(i)} \geq a_{(i)}) = P(U_{K(n)} \geq a_{(n)}, U_{K(n-1)} \geq a_{(n-1)}, \dots, U_{K(1)} \geq a_{(1)})$  の概念図

なお、 $u(j)$  は 0 以上である。以下に示す事象  $A$  を

$$A_1 = (U_{(1)} \geq a_{(1)}), \quad A_2 = (U_{(2)} \geq a_{(2)}), \quad A_3 = (U_{(3)} \geq a_{(3)})$$

と定義する。

$$P(U(i) \geq a(i)) = P(A_1, A_2, A_3)$$

$$= P(A_3 | A_1 \cap A_2) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot P(A_1) \quad \text{※ } P(A_1 \cap A_2) = P(A_2 | A_1) \cdot P(A_1)$$

$P(U(i) \geq a(i)) = P(A_1, A_2, A_3)$  が表す事象を図 2-2 に示す。

## 第2章 確率限界法検定の理論

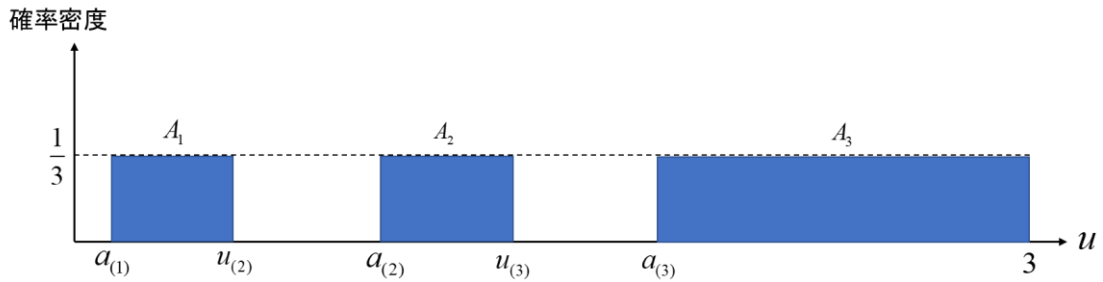


図2-2 事象  $P(U(i) \geq a(i)) = P(A_1, A_2, A_3)$  の概念図

なお、 $A_1 = (U_{(1)} \geq a_{(1)})$ ,  $A_2 = (U_{(2)} \geq a_{(2)})$ ,  $A_3 = (U_{(3)} \geq a_{(3)})$  である。

ここで、 $P(A_2 | A_1)$  は事象  $A_1$  の発生を考慮した場合における事象  $A_2$  の発生確率を表す。次に、これらの同時確率を以下の通り式展開する。

$$P(A_1) = P(U_{(1)} \geq a_{(1)}) = \frac{\int_{a_{(1)}}^{u_2} \frac{1}{3} du_1}{\int_0^{u_2} \frac{1}{3} du_1}$$

$$P(A_2 | A_1) = \frac{P(A_2 \cap A_1)}{P(A_1)}$$

$$= \frac{\int_{a_2}^{u_3} \frac{1}{3} du_2 \cdot \int_{a_1}^{u_2} \frac{1}{3} du_1}{\int_0^{u_3} \frac{1}{3} du_2 \cdot \int_0^{u_2} \frac{1}{3} du_1} \bigg/ P(A_1)$$

したがって、

$$P(A_2 | A_1) \cdot P(A_1) = \frac{\int_{a_2}^{u_3} \frac{1}{3} du_2 \cdot \int_{a_1}^{u_2} \frac{1}{3} du_1}{\int_0^{u_3} \frac{1}{3} du_2 \cdot \int_0^{u_2} \frac{1}{3} du_1} = P(A_1 \cap A_2)$$

が成立する。事象  $A_1$  と事象  $A_2$  が生じたのち事象  $A_3$  が生起する確率は以下の通り表される。

$$P(A_3 | A_1 \cap A_2) = \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{P(A_1 \cap A_2)}$$

$$P(A_3 | A_1 \cap A_2) \cdot P(A_1 \cap A_2) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

$$= \frac{\int_{a_3}^3 \frac{1}{3} du_3 \cdot \int_{a_2}^{u_3} \frac{1}{3} du_2 \cdot \int_{a_1}^{u_2} \frac{1}{3} du_1}{\int_0^3 \frac{1}{3} du_3 \cdot \int_0^{u_3} \frac{1}{3} du_2 \cdot \int_0^{u_2} \frac{1}{3} du_1}$$

$P(U(i) \geq a(i))$  の式展開を以下に示す。

第2章 確率限界法検定の理論

$$\begin{aligned}
 & P(U(i) \geq a(i)) \\
 &= \frac{\int_{a_n}^n \frac{1}{n} du_n \int_{a_{n-1}}^{u_n} \frac{1}{n} du_{n-1} \cdots \int_{a_1}^{u_2} \frac{1}{n} du_1}{\int_0^n \frac{1}{n} du_n \int_0^{u_n} \frac{1}{n} du_{n-1} \cdots \int_0^{u_2} \frac{1}{n} du_1}
 \end{aligned}$$

( $P(U(i) \geq a(i))$  の分子)

$$= \frac{1}{n^n} \int_{a_n}^n du_n \int_{a_{n-1}}^{u_n} du_{n-1} \cdots \int_{a_1}^{u_2} du_1$$

( $P(U(i) \geq a(i))$  の分母)

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{n^n} \int_0^n du_n \int_0^{u_n} du_{n-1} \cdots \int_0^{u_2} du_1 \\
 &= \frac{1}{n^n} \int_0^n du_n \int_0^{u_n} du_{n-1} \cdots \int_0^{u_3} du_2 \cdot u_2 \\
 &= \frac{1}{n^n} \int_0^n du_n \int_0^{u_n} du_{n-1} \cdots \int_0^{u_4} \frac{u_3^2}{2} du_3 \\
 &= \frac{1}{n^n} \int_0^n du_n \int_0^{u_n} du_{n-1} \cdots \int_0^{u_5} \frac{u_4^2}{6} du_4 \\
 &= \frac{1}{n^n} \cdot \frac{1}{n!}
 \end{aligned}$$

確率  $P(U(i) \geq a(i))$  の分母について、 $n=3$  のとき

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{3^3} \int_0^3 du_3 \int_0^{u_3} du_2 \int_0^{u_2} du_1 \\
 &= \frac{1}{3^3} \int_0^3 du_3 \int_0^{u_3} du_2 \cdot u_2 \\
 &= \frac{1}{3^3} \int_0^3 du_3 \cdot \frac{u_3^2}{2} \\
 &= \frac{1}{3^3} \cdot \frac{[u_3^2]_0^3}{6} = \frac{1}{3^3} \cdot \frac{3^3}{6} = \frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

が成立する。これを一般化すると、確率  $P(U(i) \geq a(i))$  の分母は以下の関数形となる。

第2章 確率限界法検定の理論

$$= \frac{1}{n^n} \int_0^n du_n \int_0^{u_n} du_{n-1} \cdots \int_0^{u_2} du_1$$

$$= \frac{1}{n!}$$

$$P(U(i) \geq a(i)) = \frac{n!}{n^n} \int_{a_n}^n du_n \int_{a_{n-1}}^{u_n} du_{n-1} \cdots \int_{a_1}^{u_2} du_1$$

次に  $a_i = i - t$  とおく

この変形より、以下の式を得る.

$$P_{ni}(n) = \int_{a_n}^n du_n \int_{a_{n-1}}^{u_n} du_{n-1} \cdots \int_{a_{i+1}}^{u_{i+2}} du_{i+1} \int_{a_i}^{u_{i+1}} du_i \cdots \int_{a_1}^{u_2} du_1$$

$$P_{ni}(x) = \int_{a_n}^x du_n \int_{a_{n-1}}^{u_n} du_{n-1} \cdots \int_{a_{i+1}}^{u_{i+2}} du_{i+1} \int_{a_i}^{u_{i+1}} du_i \cdots \int_{a_1}^{u_2} du_1$$

$$= \int_{h-t}^x du_n \int_{h-1-t}^{u_n} du_{n-1} \cdots \int_{i+1-t}^{u_{i+2}} du_{i+1} \int_{i-t}^{u_{i+1}} du_i \cdots \int_{a_1}^{u_2} du_1$$

ここで、 $a_i = \max\{i - t, 0\}$  である.

$$\text{これにより } K_n^+ = \frac{1}{\sqrt{n}} \max\{i - nF(X_{(i)})\} = \sqrt{n} \max\{\frac{i}{n} - F(X_{(i)})\} \leq \frac{t}{\sqrt{n}} \text{ となる.}$$

$t$ の最大値は  $\max\{\frac{i}{n} - F(X_{(i)})\} = 0$  のとき、 $t_{\max} = n$  となる.

$$0 \leq \frac{i}{n} \leq 1, \quad 0 \leq F(X_{(i)}) \leq 1$$

$i \leq t \leq i+1$  のとき、 $i-t \leq 0$  が成立する.

このため、 $a_i = \max\{i - t, 0\} = 0$  となる.

したがって、

第2章 確率限界法検定の理論

$$P_{ni}(x) = \int_{n-t}^x du_n \int_{n-1-t}^{u_n} du_{n-1} \cdots \int_{i+1-t}^{u_{i+2}} du_{i+1} \int_0^{u_{i+1}} du_i \cdots \int_0^{u_2} du_1$$

が得られる。

このため、

$$P(U_{(i)} \geq a_{(i)}) = \frac{n!}{n^n} P_{ni}(n) \quad i \leq t \leq i+1$$

が成立する。

次に、 $v_i = u_i + t$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) という変数変換をすれば、

$$P_{ni}(x) = \int_n^{x+t} dv_n \int_{n-1}^{v_n} dv_{n-1} \cdots \int_{i+1}^{v_{i+2}} dv_{i+1} \int_t^{v_{i+1}} dv_i \cdots \int_t^{v_2} dv_1$$

と表される。まず、 $P_{n0}(x) = \frac{(x+t)^n}{n!} - \frac{(x+t)^{n-1}}{(n-1)!}$  である。なぜならば、

$$\int_1^{v_2} dv_1 = v_2 - 1$$

$$\int_2^{v_3} dv_2 \int_1^{v_2} dv_1 = \frac{(v_3 - 1)^2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{v_3^2}{2} - v_3$$

$$\int_3^{v_4} dv_3 \int_2^{v_3} dv_2 \int_1^{v_2} dv_1 = \frac{v_4^3}{3!} - \frac{3^3}{3!} - \left( \frac{v_4^2}{2!} - \frac{3^2}{2!} \right) = \frac{v_4^3}{3!} - \frac{v_4^2}{2!}$$

などが成り立つからである。次いで、

$$\begin{aligned} P_{n1}(x) &= \int_n^{x+t} dv_n \int_{n-1}^{v_n} dv_{n-1} \cdots \int_2^{v_3} dv_2 \int_t^{v_2} dv_1 \\ &= \int_n^{x+t} dv_n \int_{n-1}^{v_n} dv_{n-1} \cdots \int_2^{v_3} dv_2 \left( \int_1^{v_2} dv_1 + \int_t^1 dv_1 \right) \\ &= P_{n0}(x) + (1-t)P_{n-1,0}(x-1) \end{aligned}$$

3番目の等式右辺第2項は、

$$\int_n^{x+t} dv_n \int_{n-1}^{v_n} dv_{n-1} \cdots \int_2^{v_3} dv_2$$



## 第2章 確率限界法検定の理論

で,  $u_i = u_{i+1} - 1$  ( $i=1, 2, \dots, n-1$ ) という変数変換をすると,  $P_{n-1,0}(x-1)$  に一致するからである. 同様に,

$$\begin{aligned} P_{n2}(x) &= \int_n^{x+t} dv_n \int_{n-1}^{v_n} dv_{n-1} \cdots \int_3^{v_4} dv_3 \int_t^{v_3} dv_2 \int_t^{v_2} dv_1 \\ &= \int_n^{x+t} dv_n \int_{n-1}^{v_n} dv_{n-1} \cdots \int_3^{v_4} dv_3 \left( \int_2^{v_3} dv_2 + \int_t^2 dv_2 \right) \int_t^{v_3} dv_2 \int_t^{v_2} dv_1 \\ &= P_{n1}(x) + \frac{(2-t)^2}{2} P_{n-2,0}(x-2) \end{aligned}$$

などが導かれ,

$$P_{ni}(x) = P_{n,i-1}(x) + \frac{(i-t)^i}{i!} P_{n-i,0}(x-i)$$

が成り立つ. これを  $i=1, 2, \dots, k$  について足して,  $x=n$  とおくと,

$$\begin{aligned} P_{nk}(n) &= \sum_{i=0}^k \frac{(i-t)^i}{i!} \left( \frac{(n+t-i)^{n-i}}{(n-i)!} - \frac{(n+t-i)^{n-i-1}}{(n-i-1)!} \right) \\ &= t \sum_{i=0}^k \frac{(i-t)^i}{i!} \cdot \frac{(n+t-i)^{n-i-1}}{(n-i)!} \\ &= \frac{t}{n!} \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} (i-t)^i \cdot (n+t-i)^{n-i-1} \end{aligned}$$

が得られる.

$$P(U_{(i)} \geq a_{(i)}) = \frac{n!}{n^n} P_{ni}(n) \quad (i \leq t \leq i+1) \text{ より,}$$

$$P(K_n^+ \leq \frac{t}{\sqrt{n}}) = \frac{t}{n^n} \sum_{k=0}^i \binom{n}{k} (k-t)^k (n+t-k)^{n-k-1} \quad (2-13)$$

が成立する. 式(2-13)が Kolmogorov-Smirnov 検定統計量  $K_n^+$  の確率分布である.

式(2-13)により構成される Kolmogorov-Smirnov 検定の採択域の適用事例を次に示す. 図 2-3 は, 草木ダム流域における 1977 年から 2017 年に渡る 41 年間分の年最大総降雨量の観測値, これら 41 個の観測値が従うと仮定した Gumbel 分布および Kolmogorov-Smirnov 検定の両側確率 5% 棄却限界線を示したものである. なお, 本論では, 年最大

## 第2章 確率限界法検定の理論

総降雨量は72時間を継続時間とする継続時間内総降雨量として定義した. 同図から, 採択域は, 仮定した確率分布の中央部付近で狭まる一方, 両端部付近(裾部付近)では無限大の大きさとなることが分かる. これは, Kolmogorov-Smirnov 検定が仮定した確率分布の両端部に対して検定力が弱いことを示している. すなわち, Kolmogorov-Smirnov 検定は, 仮定した確率分布の中央部付近に対して高い検定力をもつ一方, 両端部付近に対する検定力は弱い.

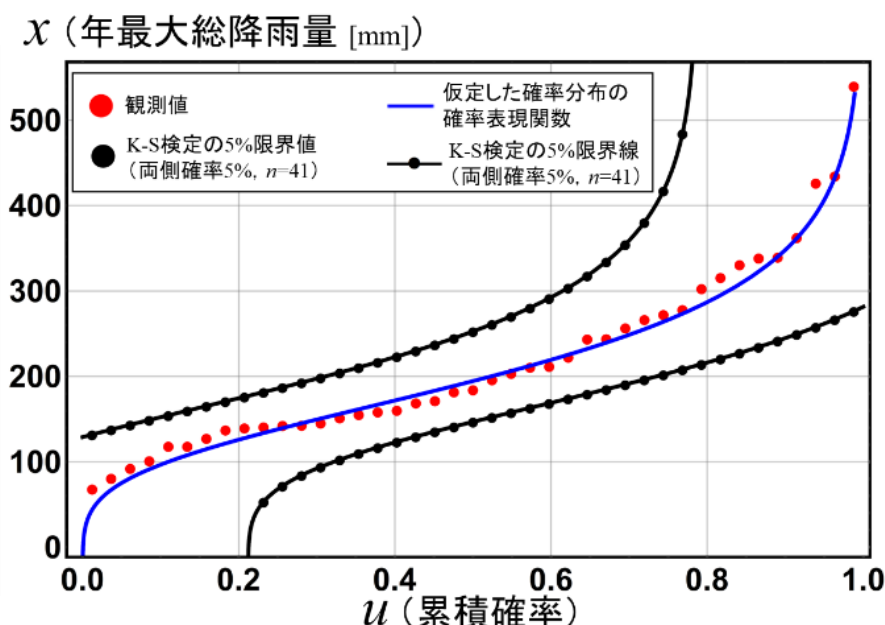


図 2-3 草木ダム流域における 1977 年から 2017 年に渡る 41 年間分の年最大総降雨量の観測値, これら 41 個の観測値が従うと仮定した Gumbel 分布および Kolmogorov-Smirnov 検定の両側確率 5%棄却限界線

Kolmogorov-Smirnov 検定の採択域は, 仮定した確率分布の中央部分で, 狭まっており, 検定力が高いことが分かる. 一方, Kolmogorov-Smirnov 検定の採択域は, 両端部で, 極めて大きな範囲となっており, 自然現象がもたらす有界性を超過する事象に対しても, 許容可能とする検定結果を生み出すため, 検定力が弱いことが分かる.

### 2-4 確率限界法検定の理論の詳説

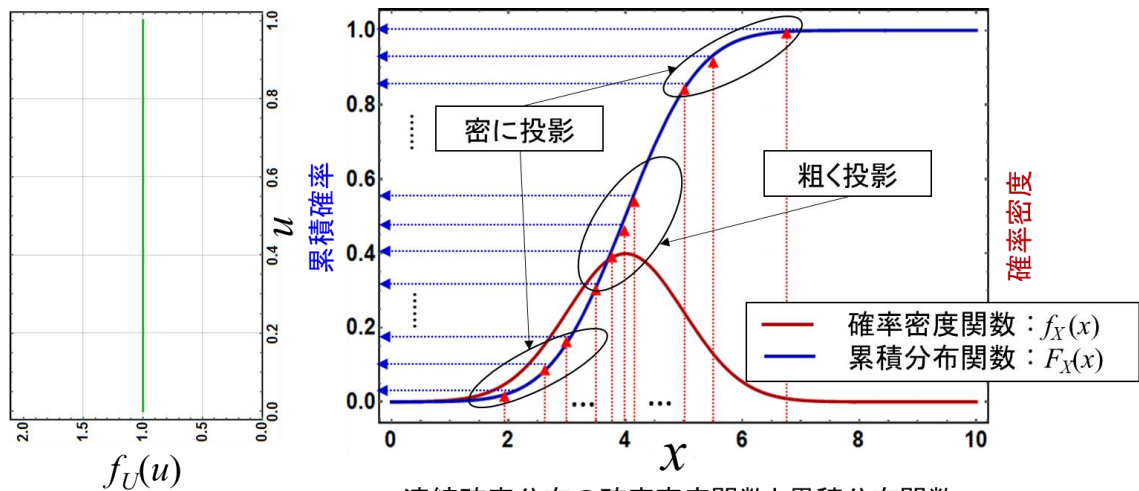
本節では, 確率限界法検定の理論を詳説する. その理論の前提にはまず, 累積確率(累積分布関数値)  $U(=F_X(X))$  が区間  $[0,1]$  の一様分布(以降, 標準一様分布あるいは  $U[0,1]$  と表記)に従うという自明の事実がある. 図 2-4 は, この事実を図示したものであり, 同図にはある確率分布の確率密度関数と累積分布関数が示されている. 同図より, 高い確率密度値をもつ観測値は実現しやすく, 低い確率密度値をもつ観測値は

## 第2章 確率限界法検定の理論

実現しにくい、一方で、それらの累積確率は、確率密度値の値を問わず、累積分布関数によって、縦軸（累積確率値）に一樣にプロットされることが分かる。このため、観測されるデータには、確率密度関数で表される実現頻度がある一方で、それらのデータの累積確率は、標準一樣分布に従う。以降では、この自明の事実の数理を示す。累積確率  $U(=F_X(X))$  を確率変数として扱い、その確率変数  $U$  の累積分布関数  $F_U(u)$  について、

$$\begin{aligned}
 F_U(u) &= F_{F_X(X)}(u) \quad (0 \leq u \leq 1) \\
 &= P(F_X(X) \leq u) \\
 &= P(X \leq F_X^{-1}(u)) \\
 &= P(X \leq x) = F_X(x) \\
 &= u
 \end{aligned}$$

が成立する。このため、累積確率値  $F_U(u)$  はその確率変数の実現値  $u$  ( $0 \leq u \leq 1$ ) に等しいという、標準一樣分布の累積分布関数形が導出される。このため、連続な確率変数  $X$  とその累積確率  $U(=F_X(X))$  について、 $U(=F_X(X))$  は区間  $[0,1]$  の一樣分布（標準一樣分布）に従う。



区間  $[0,1]$  の一樣分布  
 (標準一樣分布) の確率密度関数  $f_U(u)$

連続確率分布の確率密度関数と累積分布関数

図 2-4 累積分布関数値が従う確率分布である標準一樣分布

$U$  の実現値群  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  から構成された順序統計量  $\{u_{(1)}, u_{(2)}, \dots, u_{(n)}\}$  に関して、第  $i$  順序統計量  $U_{(i)}$  の確率分布は母数  $(i, n-i+1)$  のベータ分布となる。ここに、括弧内の

## 第2章 確率限界法検定の理論

数値は、各標本値を小さい順に並び替えた際の順位である。具体的には、 $u_{(1)}$ は標本 $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ の最小値、 $u_{(n)}$ は標本 $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ の最大値である。

上記の第  $i$  順序統計量  $U_{(i)}$  の確率分布であるベータ分布の導出過程は以下の通りである。まず、確率変数  $U$  の累積分布関数を  $F_U(u)$  と表記すると、第  $i$  順序統計量  $U_{(i)}$  の累積分布関数  $F_{U_{(i)}}(u)$  は式(2-14) はより表される。

$$F_{U_{(i)}}(u) = \sum_{j=i}^n nC_j F_U(u)^j (1 - F_U(u)) \quad (2-14)$$

この関数形は、 $F_{U_{(i)}}$  は  $P(U_{(i)} \leq u)$  と同義であることから、 $P(U \leq u) (=F_U(u))$  が  $i$  回以上出現することを意味しており、このため、組み合わせを用いて、 $F_U(u)$  が  $i$  回以上出現する確率の総和を表現するものとなっている。次に、確率変数  $U$  の確率密度関数を  $f_U(u)$  と表記すると、第  $i$  順序統計量  $U_{(i)}$  の確率密度関数  $f_{U_{(i)}}(u)$  は以下の式展開より求められる。

$$f_{U_{(i)}}(u) = \frac{dF_{U_{(i)}}(u)}{du} \quad (2-15)$$

$$= nf_U(u) \sum_{j=i}^n \left\{ \frac{(n-1)!}{(n-j)!(j-1)!} F_U(u)^{j-1} (1 - F_U(u))^{n-j} - \frac{(n-1)!}{(n-j-1)!j!} F_U(u)^j (1 - F_U(u))^{n-j-1} \right\}$$

ここで、式(2-16)を用いて式(2-15)を整理する。

$$P(j, n) = \frac{n!}{j!(n-j)!} F_U(u)^j (1 - F_U(u))^{n-j} \quad (2-16)$$

式(2-16)を用いて変形した式(2-15)を式(2-17)として以下に示す。

$$f_{U_{(i)}}(u) = nf_U(u) \sum_{j=i}^n \{P(j-1, n-1) - P(j, n-1)\} \quad (2-17)$$

式(2-17)に対して、以下の式展開を行い、式(2-18)を得る。

$$\begin{aligned} f_{U_{(i)}}(u) &= nf_U(u) \sum_{j=i}^n \{P(j-1, n-1) - P(j, n-1)\} \\ &= nf_U(u) \left\{ P(i-1, n-1) - P(i, n-1) + P(i, n-1) - P(i+1, n-1) + \dots \right. \\ &\quad \left. + P(n-1, n-1) - P(n, n-1) + P(n, n-1) - P(n, n-1) \right\} \\ &= nf_U(u) P(i-1, n-1) \\ &= nf_U(u) \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} F_U(u)^{i-1} (1 - F_U(u))^{n-i} \end{aligned}$$

$$f_{U_{(i)}}(u) = nf_U(u) \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} F_U(u)^{i-1} (1 - F_U(u))^{n-i} \quad (2-18)$$

ここで、確率変数  $U$  は、標準一様分布に従うため、累積分布関数  $F_U(u)=u$ 、確率密度関数  $f_U(u)=1$  となる。また、式(2-18)は式(2-19)に変形することができる ( $0 \leq u \leq 1$ )。

第2章 確率限界法検定の理論

$$f_{U(i)}(u) = nf_U(u) \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} u^{i-1} (1-u)^{n-i} \quad (2-19)$$

$$f_{U(i)}(u) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} u^{i-1} (1-u)^{n-i} f_U(u)$$

ここで、母数 $(\alpha, \beta)$ のベータ分布の確率密度関数 $f_{Beta}(u; \alpha, \beta)$ は式(2-20)により表される ( $\alpha, \beta$ はともに正の実数である) .

$$f_{Beta}(u; \alpha, \beta) = \frac{(\alpha + \beta - 1)!}{(\alpha - 1)!(\beta - 1)!} u^{\alpha-1} (1-u)^{\beta-1} f_U(u) \quad (0 \leq u \leq 1) \quad (2-20)$$

このベータ分布の母数について、 $(\alpha, \beta) = (i, n-i+1)$ のとき、式(2-19)と式(2-20)は一致する. したがって、

$$f_{U(i)}(u) = f_{Beta}(u; i, n-i+1) \quad (2-21)$$

の関係が成立し、標準一様分布から構成した順序統計量 $U(i)$ の分布が母数 $(i, n-i+1)$ のベータ分布となることが導かれる.

以上より、式(2-22)が成立する.

$$F_{U(i)}(u) = P(U(i) \leq u) \quad (2-22)$$

$$= I_u(i, n-i+1)$$

ここに、 $F_{U(i)}(u)$  : 第 $i$ 順序統計量 $U(i)$ の累積分布関数、 $I_u(i, n-i+1)$  : 母数 $(i, n-i+1)$ のベータ分布の累積分布関数である. ここで、確率 $\alpha$ を「確率限界値を求めるための確率 (極端な $U(i)$ が生起する確率, すなわち、母数 $(i, n-i+1)$ のベータ分布が与える標本中の $U(i)$ すべての非超過確率値と超過確率値のうち最小の確率値)」、 $F_{U(i)}(u) = \alpha$ の解 $u$ を「標準一様分布における下方確率限界値 $z_L(i)$ 」および $F_{U(i)}(u) = 1 - \alpha$ の解 $u$ を「標準一様分布における上方確率限界値 $z_U(i)$ 」として定義する (森口, 1995). すなわち、 $z_L(i)$ は母数 $(i, n-i+1)$ のベータ分布の $100\alpha\%$ ile値、 $z_U(i)$ は母数 $(i, n-i+1)$ のベータ分布の $100(1-\alpha)\%$ ile値である. ここに、確率限界値とは確率限界法検定における棄却限界値である. また、確率限界法検定における検定統計量である確率 $\alpha_{min}$ は式(2-23)により定義される. 確率 $\alpha_{min}$ は、離散的に算出される. この確率 $\alpha_{min}$ を連続した値として表し、一般的化したものが確率 $\alpha$ である.

$$\alpha_{min} = \min_{1 \leq i \leq n} \left\{ \text{Min} \left[ I_u(i, n-i+1), I_{1-u}(i, n-i+1) \right]_{u=u(i)} \right\} \quad (2-23)$$

ここに、 $I_u(i, n-i+1)|_{u=u(i)}$  : 第 $i$ 順序統計量 $u(i)$ の非超過確率、 $I_{1-u}(i, n-i+1)|_{u=u(i)}$  : 第 $i$ 順序統計量 $u(i)$ の超過確率である. これら $u(i)$ が有する非超過確率および超過確率は、母

## 第2章 確率限界法検定の理論

数 $(i, n-i+1)$ のベータ分布により与えられる。

式(2-23)は「順序統計量 $\{u_{(1)}, u_{(2)}, \dots, u_{(n)}\}$ が有する非超過確率および超過確率をそれぞれ比較し、どちらか小さい方を抽出することで、 $n$ 個の確率を得る。このとき、求めた $n$ 個の確率のうち、最小値を $\alpha_{min}$ とする。」という数学的操作を表す。順序統計量 $\{u_{(1)}, u_{(2)}, \dots, u_{(n)}\}$ は、観測標本 $\mathbf{X}=\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ から構成した順序統計量 $\{x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}\}$ を仮定した母集団分布の累積分布関数 $F_X(x) (=u)$ に代入することで得られる。ここで、前述した $n$ 個の確率を $\{\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_n\}$ と記述すると、 $\alpha_{min} = \text{Min}\{\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_n\}$ となる。

次に、式(2-23)に示される確率 $\alpha_{min}$ の分布の構成方法および特性を詳述する。まず、標準一様分布に従う乱数 $u^j$ を $n$ 個発生させ、これらの乱数から構成される標本 $U_{ens.}^j = \{u^j_1, u^j_2, \dots, u^j_n\}$ を作成する。この操作を $N$ 回行い、 $N$ 個の標本 $\{U_{ens.}^1, U_{ens.}^2, \dots, U_{ens.}^N\}$ を得る。ここで、 $j$ は作成した標本の番号を表す( $j=1, 2, \dots, N$ )。標本 $U_{ens.}^j$ において、第 $i$ 順序統計量 $U^j_{(i)}$ は、母数 $(i, n-i+1)$ のベータ分布に従うため、当該分布の最端部近傍に生起した $u^j_{(i)}$ の非超過確率あるいは超過確率を求めることができる。以降の説明を簡単にするため、当該の $u^j_{(i)}$  (標本 $U_{ens.}^j$ 中で母数 $(i, n-i+1)$ のベータ分布の最端部近傍に生起した $u^j_{(i)}$ ) を $u^{j(i)}$ と表記する。 $u^{j(i)}$ が母数 $(i, n-i+1)$ のベータ分布の左裾部に存在する場合、 $u^{j(i)}$ の非超過確率を抽出し、この非超過確率を $\alpha_{min}(j)$ とする。一方、 $u^{j(i)}$ が母数 $(i, n-i+1)$ のベータ分布の右裾部に存在する場合、 $u^{j(i)}$ の超過確率を抽出し、この超過確率を $\alpha_{min}(j)$ とする。

式(2-23)が示す操作を $N$ 個の標本 $\{U_{ens.}^1, U_{ens.}^2, \dots, U_{ens.}^N\}$ に対して実行し、 $\{\alpha_{min}(1), \alpha_{min}(2), \dots, \alpha_{min}(N)\}$ を得る。ここで、 $\alpha_{min}$ はオーダーが小さく(例えば、 $N=1000$ の場合、 $\alpha_{min}$ の平均値は $10^{-2}$ オーダーである。)、これらの値を扱いやすくするため、 $N$ 個の $\alpha_{min}$ をそれぞれ $-\log_{10}(2\alpha_{min})$ という関数形に変形する。図2-5は $N=1000$ の場合、1000個の $-\log_{10}(2\alpha_{min})$ を、この値を与える $u_{(i)}$ の累積確率 $F(u_{(i)}) (=i/n)$ を用いて、プロットしたものである。この図において、 $\alpha_{min}$ が $I_u(i, n-i+1)$ により与えられた場合、すなわち、 $\alpha_{min}$ が非超過確率となる場合、対応する $-\log_{10}(2\alpha_{min})$ を「×」で示す。一方、 $\alpha_{min}$ が $I_{1-u}(n-i+1, i)$ により与えられた場合、すなわち、 $\alpha_{min}$ が超過確率となる場合、対応する $-\log_{10}(2\alpha_{min})$ を「●」で示す。この図から、 $\alpha_{min}$ はほぼ一様に分布しており、 $\alpha_{min}$ が非超過確率である割合と $\alpha_{min}$ が超過確率である割合は同程度であることが分かる。なお、非超過確率を表す $\alpha_{min}$  (同図における「×」)の総数と超過確率を表す $\alpha_{min}$  (同図における「●」)の総数は同程度となることが示されている(森口, 1995)。

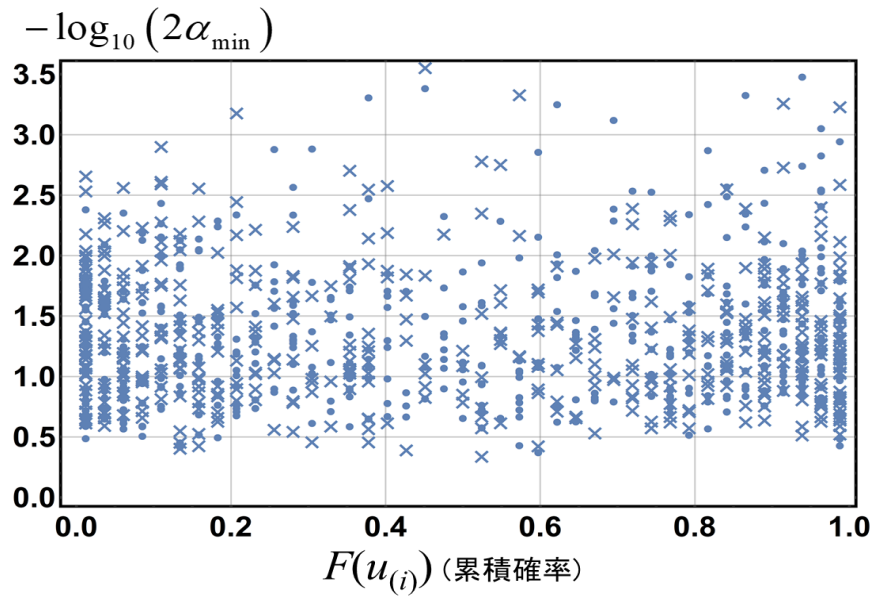


図 2-5  $\alpha_{min}$  を与える第  $i$  順序統計量  $u_{(i)}$  の累積確率  $F(u_i)$  と  $-\log_{10}(2\alpha_{min})$  の関係

観測順序統計量が有する累積確率の振れ幅は、その累積確率が従うベータ分布の情報を用いて算定可能である。具体的には、観測順序統計量が有する累積確率に対応するベータ分布の右裾部に落ちれば、その超過確率を抽出し、左裾部に落ちるのであれば、その非超過確率を抽出することで、観測順序統計量が有する累積確率の極大値の超過確率および極小値の非超過確率が得られる。上図では、これらの累積確率の極値に相当する確率が非超過確率である割合と超過確率である割合は、同等であることを示している。

上記を踏まえ、 $\alpha_{min}$  の導出過程をまとめる。

(1) 標準一様分布に従う乱数  $u^j$  を  $n$  個発生させ、これらの乱数から構成される標本  $U_{ens.}^j = \{u^j_1, u^j_2, \dots, u^j_n\}$  を作成する。この操作を  $N$  回行い、 $N$  個の標本  $\{U_{ens.}^1, U_{ens.}^2, \dots, U_{ens.}^N\}$  を得る。

$$\begin{aligned}
 U_{ens.}^1 &= \{u^1_1, u^1_2, \dots, u^1_n\} \\
 U_{ens.}^2 &= \{u^2_1, u^2_2, \dots, u^2_n\} \\
 &\vdots \\
 U_{ens.}^N &= \{u^N_1, u^N_2, \dots, u^N_n\} \\
 \\ 
 U_{ens.}^1 Less &= \{u^1_{(1)}, u^1_{(2)}, \dots, u^1_{(n)}\} \\
 U_{ens.}^2 Less &= \{u^2_{(1)}, u^2_{(2)}, \dots, u^2_{(n)}\} \\
 &\vdots \\
 U_{ens.}^N Less &= \{u^N_{(1)}, u^N_{(2)}, \dots, u^N_{(n)}\}
 \end{aligned}$$

各標本を構成する一様乱数を昇順に並び替え、順序統計量  $U_{ens.}^j Less$  を作成。



図 2-6 確率  $\alpha_{min}$  の導出過程 (1)

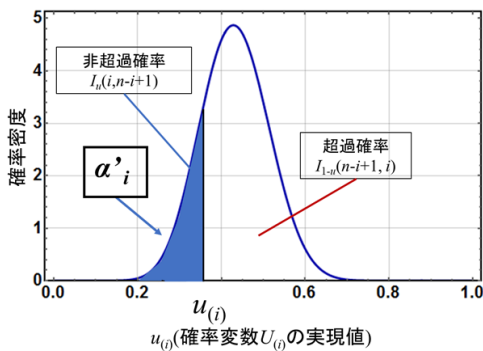
## 第2章 確率限界法検定の理論

(2) 順序統計量  $U_{ens.Less}^j (= \{u_{(1)}^j, u_{(2)}^j, \dots, u_{(n)}^j\})$  がもつ非超過確率及び超過確率をそれぞれ比較し、どちらか小さい方を抽出することで、 $n$  個の確率  $data\_a(j) = (\{\alpha^j_1, \alpha^j_2, \dots, \alpha^j_n\})$  を得る。次に、これらの  $n$  個の確率  $data\_a(j)$  の最小値を  $\alpha_{min}(j)$  とする。この  $\alpha_{min}(j)$  の算出手順は式(2-23)で表されている。

順序統計量  $U_{ens.Less}^j (= \{u_{(1)}^j, u_{(2)}^j, \dots, u_{(n)}^j\})$  がもつ非超過確率及び超過確率をそれぞれ比較し、どちらか小さい方を抽出することで、 $n$  個の確率  $data\_a(j) = (\{\alpha^j_1, \alpha^j_2, \dots, \alpha^j_n\})$  を得る。

$$\begin{aligned} U_{ens.Less}^1 &= \{u_{(1)}^1, u_{(2)}^1, \dots, u_{(n)}^1\} \\ U_{ens.Less}^2 &= \{u_{(1)}^2, u_{(2)}^2, \dots, u_{(n)}^2\} \\ &\vdots \\ U_{ens.Less}^N &= \{u_{(1)}^N, u_{(2)}^N, \dots, u_{(n)}^N\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} data\_a'(1) &= \{\alpha'^1_1, \alpha'^1_2, \dots, \alpha'^1_n\} \\ data\_a'(2) &= \{\alpha'^2_1, \alpha'^2_2, \dots, \alpha'^2_n\} \\ &\vdots \\ data\_a'(N) &= \{\alpha'^N_1, \alpha'^N_2, \dots, \alpha'^N_n\} \end{aligned}$$



第*i*順序統計量  $U_{(i)}$  が従う母数  $(i, n-i+1)$  ベータ分布の確率密度関数

(STEP1)において、求めた  $n$  個の確率のうち、最小値を  $\alpha_{min}$  とする。

$$\begin{aligned} \alpha_{min}(1) &= \text{Min}\{\alpha'^1_1, \alpha'^1_2, \dots, \alpha'^1_n\} \\ \alpha_{min}(2) &= \text{Min}\{\alpha'^2_1, \alpha'^2_2, \dots, \alpha'^2_n\} \\ &\vdots \\ \alpha_{min}(N) &= \text{Min}\{\alpha'^N_1, \alpha'^N_2, \dots, \alpha'^N_n\} \end{aligned}$$

図 2-7 確率  $\alpha_{min}$  の導出過程 (2)

任意の有意水準に応じた確率  $\alpha$  を決定するために、 $N$  個の  $-\log_{10}(2\alpha_{min})$  を用いて、経験的表現関数  $\chi_{emp.}(u)$  (経験分布の確率表現関数) を構成する。この確率分布が確率限界法検定における検定統計量  $\alpha_{min}$  の確率分布となる。 $N=1000$  の場合、この経験的表現関数の一例を図 2-8 に示す。この図に示す経験的表現関数において累積確率  $u$  が 1 に近い範囲に相当する確率  $\alpha$  ほど、母数  $(i, n-i+1)$  のベータ分布の最端部付近に生起する第  $i$  順序統計量  $U_{(i)}$  の非超過確率あるいは超過確率を表す。ここで、確率  $\alpha$  が非超過確率である割合と超過確率である割合はほぼ同程度であるため、両側確率  $p$  に対応する確率  $\alpha$  は、非超過確率としての  $\alpha_{min}$  のうち値の小さい  $\alpha_{min}$  を  $100(p/2)\%$  分だけ除いたものを表すとともに、超過確率としての  $\alpha_{min}$  のうち値の小さい  $\alpha_{min}$  を  $100(p/2)\%$  分だけ除いたものを表す (森口, 1995)。



## 第2章 確率限界法検定の理論

次に、両側確率  $p$  で確率限界法検定を行う場合における確率  $\alpha$  の導出方法を示す。両側確率  $p$  に相当する確率  $\alpha$  は図 2-8 に示す経験的表現関数（経験分布の確率表現関数） $\chi_{emp.}(u)$  の  $100(1-p)\%$ ile 値について、成立する方程式  $\chi_{emp.}(1-p)=-\log_{10}(2\alpha)$  を  $\alpha$  について解くことで求まる。例えば、両側確率 5% の場合における確率  $\alpha$  は、 $\chi_{emp.}(0.95)=-\log_{10}(2\alpha) \doteq 2.5$  より、約  $1.5 \times 10^{-3}$  となる。

上述した手順に基づき算出した確率  $\alpha$  を用いて  $U[0,1]$  における下方確率限界値  $z_L(i)$  および上方確率限界値  $z_U(i)$  を求める。ここで、式(2-22)において、事象  $(U_i \leq u)$  とは  $n$  回の独立な試行において  $u$  以下の値が  $i$  回以上発生することに等しいため、式(2-24)が成立する。

$$F_{U(i)}(u) = \sum_{j=i}^n \binom{n}{j} u^j (1-u)^{n-j} \quad (2-24)$$

$U[0,1]$  における確率限界値の算出には、式(2-24)による方法が数値計算上便利である。両側確率  $100p\%$  の場合における下方確率限界値は、観測データと同図の一樣乱数値から構成した順序統計量を取りうる値のうち、極端に小さい値が発生する確率を  $100(p/2)\%$  分除いたものであり、上方確率限界値は極端に大きな値が発生する確率を  $100(p/2)\%$  分除いたものである。確率限界値に適切な累積確率  $F_U(u_{(i)})$  を与えることで定まる実験点を下方確率限界点  $(F_U(u_{(i)}), z_L(i))$  および上方確率限界点  $(F_U(u_{(i)}), z_U(i))$  とする。ここでは、 $F_U(u_{(i)})$  は  $i/n$  としている。標準一樣分布の場合、 $i=1, 2, \dots, n$  について、 $(F_U(u_{(i)}), z_L(i))$  を連ねた線を下方確率限界線、 $(F_U(u_i), z_U(i))$  を連ねた線を上方確率限界線とする。図 2-9 は両側確率 5%、 $n=41$  の場合における標準一樣分布における確率限界線を示したものである。この図は、上記した条件の下で、同一の確率  $F_U(u_{(i)})$  において、累積確率  $U_{(i)} (=F_X(X_{(i)}))$  が取りうる幅  $[z_L(i), z_U(i)]$  を示している。

次に、仮定した確率分布  $D(X; \theta)$  における確率限界値の導出手順を示す。 $U$  は標準一樣分布に従うため、標準一樣分布における確率限界値を累積確率として扱うことができる。したがって、仮定した確率分布  $D(X; \theta)$  における下方確率限界値は  $\chi_X(z_L(i))$ 、上方確率限界値は  $\chi_X(z_U(i))$  となる。

図 2-10 は、草木ダム流域における 1977 年から 2017 年に亘る 41 年間分の年最大総降雨量の観測値に従うと仮定した Gumbel 分布に対して、この分布に対する両側確率 5% 確率限界線の構成過程を示したものである。この図から、累積確率の限界値  $z_L(i)$  および  $z_U(i)$  が仮定した確率分布の確率表現関数を介して降雨量  $X_{(i)}$  に対する推定区間（採択域） $[\chi_X(z_L(i)), \chi_X(z_U(i))]$  が構成されていることが分かる。なお、本研究で扱う草木ダムの年最大総降雨量は、72 時間の期間内に生起した草木ダムにおける流域平均降雨量の年最大値である。

## 第2章 確率限界法検定の理論

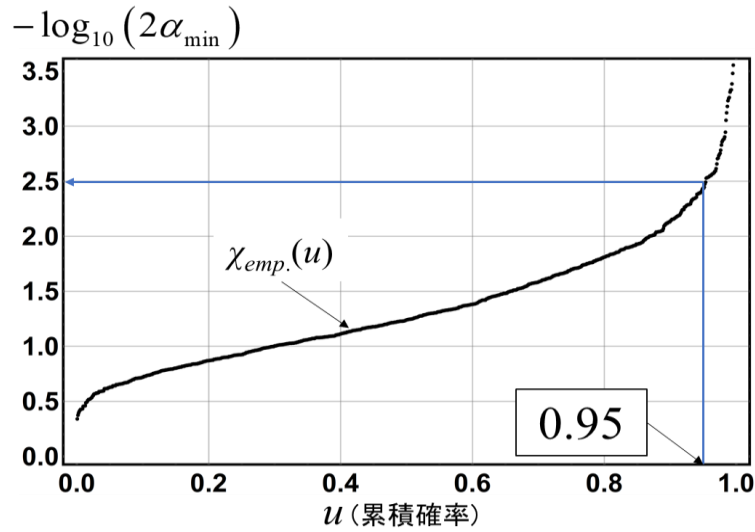


図 2-8 1000 個の  $-\log_{10}(2\alpha_{\min})$  から構成した経験的表現関数  $\chi_{emp}(u)$

観測順序統計量が有する累積確率について、その極大値の超過確率ならびに極小値の非超過確率を対数変換し、それらから構成される経験分布を上図に示す。図 2-2 から、その極大値の超過確率ならびに極小値の非超過確率は同程度の割合で存在するため、例えば両側確率 5% で確率限界法検定を行う場合、上図に記入した様に、当該経験分布の 95%ile 値に着目し、これに関する方程式を  $\alpha$  について解く。その  $\alpha$  に基づき、累積確率の振れ幅（標準一様分布における棄却限界値）を決定する。

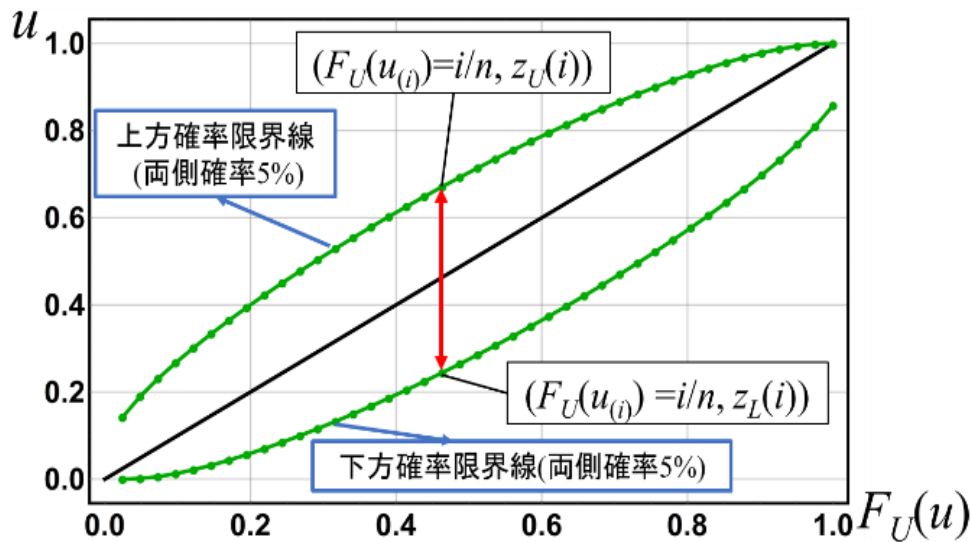


図 2-9 標準一様分布における確率限界線（両側確率 5%、 $n=41$  の場合）

標準一様分布における採択域（両限界線の幅）は、設定した有意水準の下で、仮定した確率分布に従う順序統計量  $X_{(i)}$  がとり得る累積確率  $U_{(i)}$  の幅を表す。この幅は、観測値の総数に応じて決定するものであり、換言すると、我々の観測期間が有限であることに起因する、推定の不確実性を定量的に表していると言える。

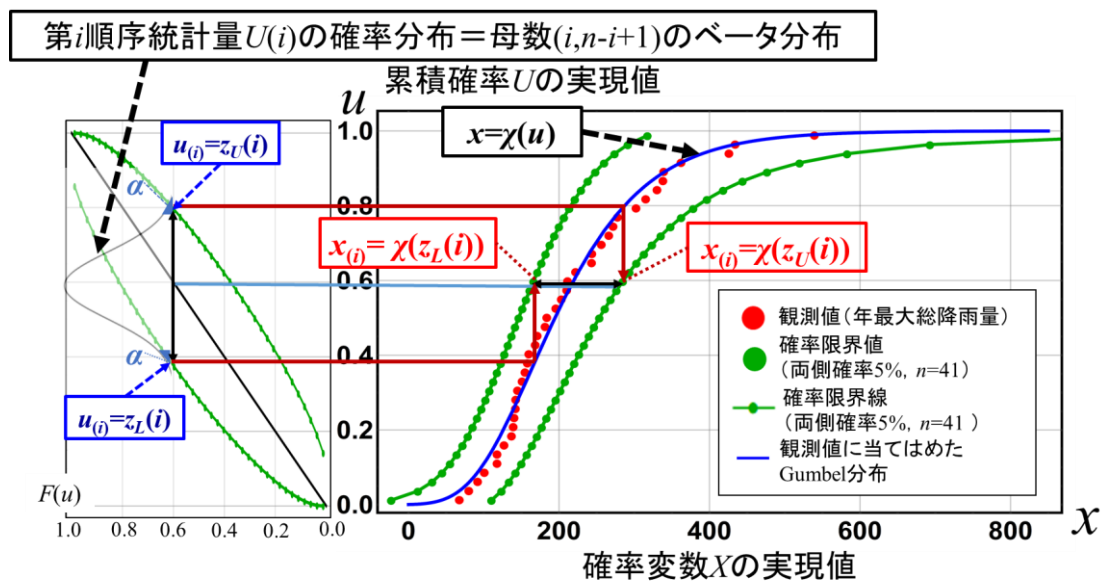


図 2-10 確率限界線の構成過程 (両側確率 5%,  $n=41$  の場合)

仮定した確率分布の下で、順序統計量  $X_{(i)}$  の累積確率  $U_{(i)}$  の幅が標準一様分布における採択域という形で理論的に求まる点が確率限界法の傑出した特徴である。  $X_{(i)}$  の採択域は、標準一様分布における採択域の上限値および下限値を仮定した確率分布を介して、順序統計量  $X_{(i)}$  自体の上限値および下限値を算出することで、構成される。換言すれば、我々の観測期間が有限であることに起因する、順序統計量  $X_{(i)}$  に対する推定の不確実性がまず標準一様分布における採択域という形で定量化され、その幅により順序統計量  $X_{(i)}$  の採択域が得られる。

確率  $\alpha_{min}$  は、標準一様分布において、区間  $[0,1]$  の一様乱数値の順序統計量が、それが従うベータ分布に対して外れる確率を表すため、当該の一様乱数値を仮定した母集団分布  $F_X(x)$  上で、累積確率として扱い、その累積確率に対応する確率変数値  $x$  に変換することで、仮定した母集団分布における棄却限界値を算出できる。なお、観測値が採択域の外部に存在するとき、仮定の有意性が検討される。仮定した母集団分布の下で、棄却限界値を標準一様分布という確定した関数形を用い、それらの限界値の生起確率の分布 (例えば、図 2-8 が示すように、観測データの総数  $n$  が 41 ならば、そのデータ総数に応じた関数形がほぼ確定的に算出される。) を確定させることで、算出可能とした点が確率限界法検定の傑出した特徴である。

### 2-5 Kolmogorov-Smirnov 検定と確率限界法検定の検定力の比較

森口 (1995) は、Kolmogorov-Smirnov 検定と確率限界法検定における検定力の比較を行い、確率限界法検定の Kolmogorov-Smirnov 検定に対する優位性を示している。本節では、この有意性を両検定の採択域を描画することで確認する。図 2-11 は上述したデータおよび確率分布に加えて両検定の両側確率 5% 限界線を示したものである。同図より、確率限界法による限界線から構成される区間は、Kolmogorov-Smirnov 検定

## 第2章 確率限界法検定の理論

のそれよりも仮定した確率分布の両端部で狭まり，当該部に対して高い検定力をもつことが分かる。

採択域（棄却限界線から成る区間）とは，選定した仮説検定の下では，どの程度データが散らばっているのかを示すものである。同図より，Kolmogorov-Smirnov 検定では，仮定した確率分布の両端部において，幅が無限大の大きさとなっていることが分かる。これは，Kolmogorov-Smirnov 検定の下では，無限大の雨量や流量も存在するということである。無限大の雨量や流量の存在は，我々の認識に照らし合わせてみると，それらの存在はあり得ないことである。一方，同図より，確率限界法検定の採択域は，Kolmogorov-Smirnov 検定のそれとは異なり，仮定した確率分布の両端部で狭まっていることが分かる。これは，確率限界法検定の下では，雨量や流量はある有限の幅の中に存在するということを意味しており，このことは我々の認識とも整合性が取れている。また，検定力と採択域・信頼区間・予測区間は互いに関連している。一般的に，検定力が高いほど，その仮説検定理論に基づく採択域・信頼区間・予測区間は，狭まり高い精度をもつ。計画規模相当の水文量の値は，水文頻度解析に採用する確率分布の裾部の形状によって変動する。このため，本研究では，計画規模相当の水文量を適切に評価するために，確率分布の裾部に対して高い検定力を有する確率限界法検定に基づく信頼区間・予測区間を構成した。

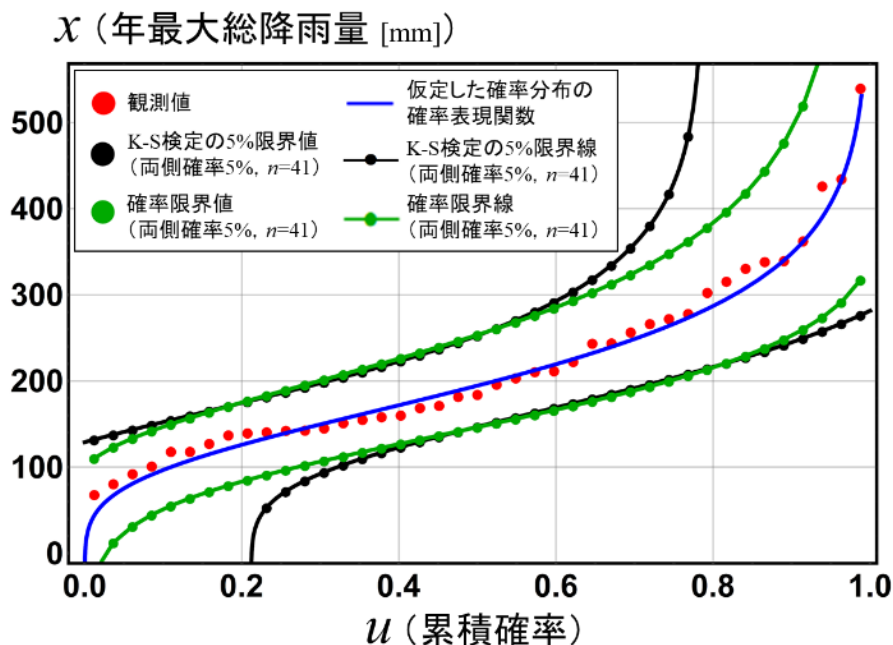


図 2-11 Kolmogorov-Smirnov 検定と確率限界法検定の検定力の比較（両側確率 5%，観測値の総数  $n=41$  の場合）

確率限界法検定の採択域は，Kolmogorov-Smirnov 検定の採択域とは異なり，仮定した確率分布の両端部で狭まっていることが分かる。これは，確率限界法検定の下では，雨量や流量はある有限の幅の中に存在するということを意味しており，このことは我々の認識とも整合性が取れている。

### 2-6 確率限界法検定による $p$ 値の算出手法

仮説検定における  $p$  値 (Probability value) とは、特定の統計モデルのもとで、データの統計的要約 (例えば、2 グループ比較での標本平均の差) が観察された値と等しいか、それよりも極端な値をとる確率である (Wasserstein RL and Lazar NA. Editorial, 2016) .  $p$  値が大きければ、対象データが仮定した母集団分布によりもたらされた可能性は高いとする一方、 $p$  値が小さければ、対象データが仮定した母集団分布によりもたらされた可能性は低いと考える. 先ず、本研究では、 $N$  個の  $-\log_{10}(2\alpha_{min})$  に極値分布  $D_{Ext.}(\theta_{\alpha})$  を当てはめ、母数推定を行った当該分布  $D_{Ext.}(\hat{\theta}_{\alpha})$  を用いて、確率  $\alpha$  を求めている. この点で、森口 (1995) が定義した確率  $\alpha$  と本研究における確率  $\alpha$  は異なるものである. なお、上述した母数推定には最尤法を採用している. ここで、 $N$  個の  $-\log_{10}(2\alpha_{min})$  に極値分布を当てはめた理由を次に示す. 前述した  $n$  個の確率  $\{\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_n\}$  を変形し、標本  $\{-\log_{10}(2\alpha'_1), -\log_{10}(2\alpha'_2), \dots, -\log_{10}(2\alpha'_n)\}$  を得る. このとき、 $-\log_{10}(2\alpha_{min}) = \text{Max}\{-\log_{10}(2\alpha'_1), -\log_{10}(2\alpha'_2), \dots, -\log_{10}(2\alpha'_n)\}$  が成立するため、 $-\log_{10}(2\alpha_{min})$  はこの標本中の最大値となる. 標本中の最大値は、サンプリング数が多いほど、極値分布に漸近的に従うため、 $N$  個の  $-\log_{10}(2\alpha_{min})$  に極値分布を当てはめることは妥当であり、本研究では、Gumbel 分布を採用した. 図 2-12 は、50,000 個の  $-\log_{10}(2\alpha_{min})$  に当てはめた Gumbel 分布の確率表現関数  $\chi_{\alpha}(u)$  を示したものである (各  $U_{ens.}$  の標本サイズは 41, 試行回数  $N$  は 50,000 である).

確率限界法検定における検定統計量は、一様乱数により構成された標本において、その順序統計量の非超過確率あるいは超過確率の最小値  $\alpha_{min}$  である.  $\chi_{\alpha}(u)$  により表される、標準一様分布上での検定統計量の確率分布は、後述する式展開により、対象データ自体に関しても構成可能である. この方法が実際に検定を行う際、便利であるため、以降ではその詳細を示す. 加えて、本節では、具体的な例題を通して、確率限界法検定における  $p$  値の算出方法を示す.

確率限界法検定における検定統計量の分布は、

$$\chi_{\alpha}(u) = -\log_{10}(2\alpha) \tag{2-25}$$

により表される. これを確率  $\alpha$  自体について解き、

$$\alpha(u) = 10^{-\chi_{\alpha}(u)} / 2 \tag{2-26}$$

を得る. 標本サイズ  $n$  が 31 の場合における確率  $\alpha$  の分布を図 2-13 に示す. なお、関数  $\alpha(u)$  における累積確率  $u$  は、信頼係数に相当する. 確率  $\alpha$  の関数が求まったことで、これを母数  $(i, n-i+1)$  のベータ分布の確率表現関数に代入し、任意の有意水準に相当す

## 第2章 確率限界法検定の理論

る標準一様分布における確率限界値の関数が得られる。標準一様分布における上方確率限界値  $z_U(u,i)$  は,

$$z_U(u;i) = \chi_{Beta}(1-\alpha(u);(i,n-i+1)) \quad (2-27)$$

より得られ、下方確率限界値  $z_L(u,i)$  は

$$z_L(u;i) = \chi_{Beta}(\alpha(u);(i,n-i+1)) \quad (2-28)$$

により求まる。ここに、 $\chi_{Beta}(u;(i,n-i+1))$  : 母数  $(i,n-i+1)$  のベータ分布の確率表現関数である。

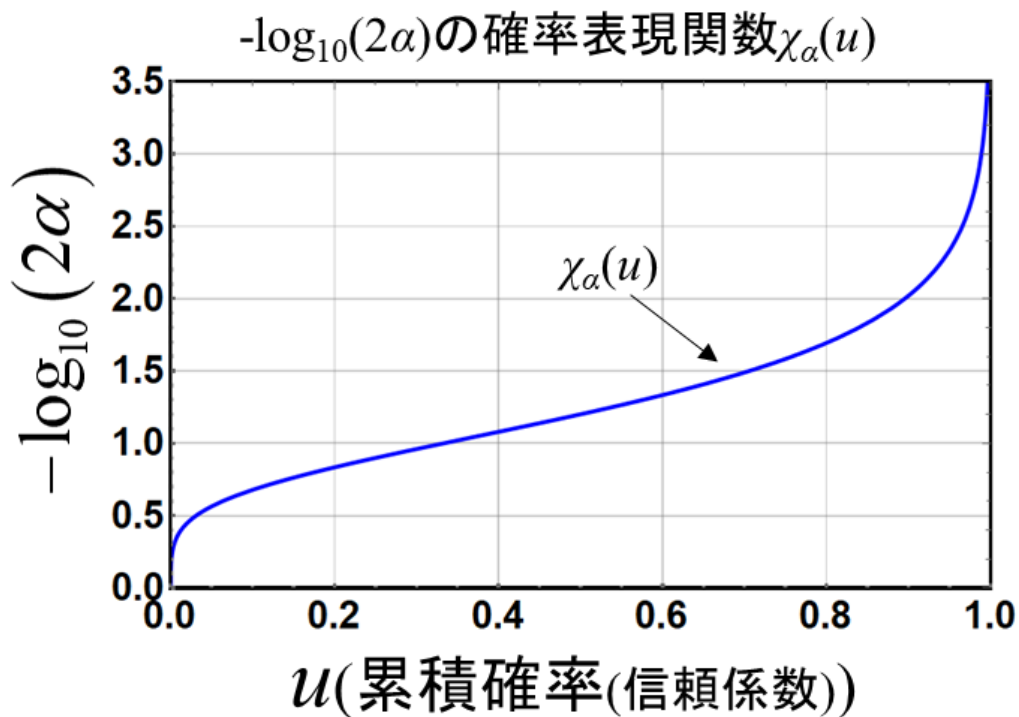


図 2-12  $-\log_{10}(2\alpha_{min})$ に当てはめた Gumbel 分布の確率表現関数  $\chi_\alpha(u)$

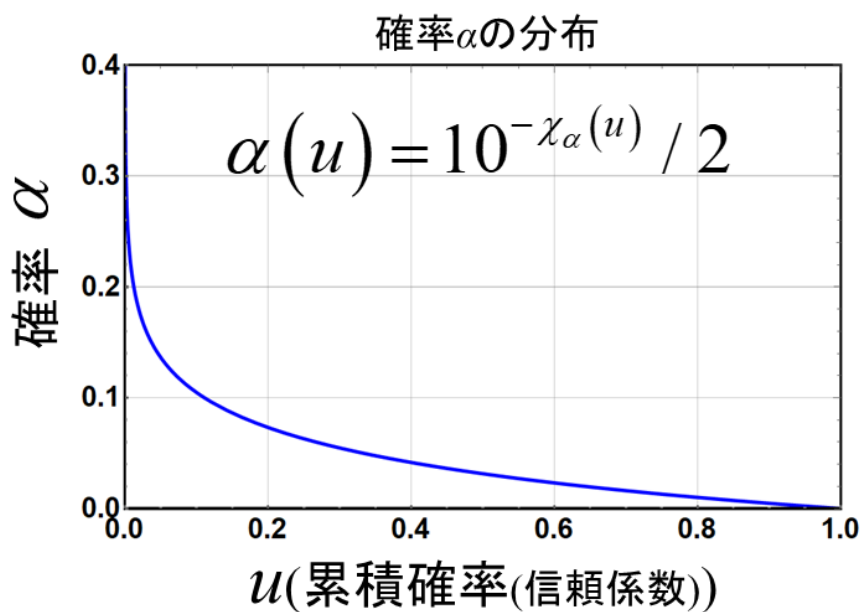


図 2-13 検定統計量である確率  $\alpha$  の分布

標準一様分布における確率限界値の例として、標本サイズ  $n$  が 31、順位  $i$  が 20 の場合におけるものを図 2-14 と図 2-15 に示す。

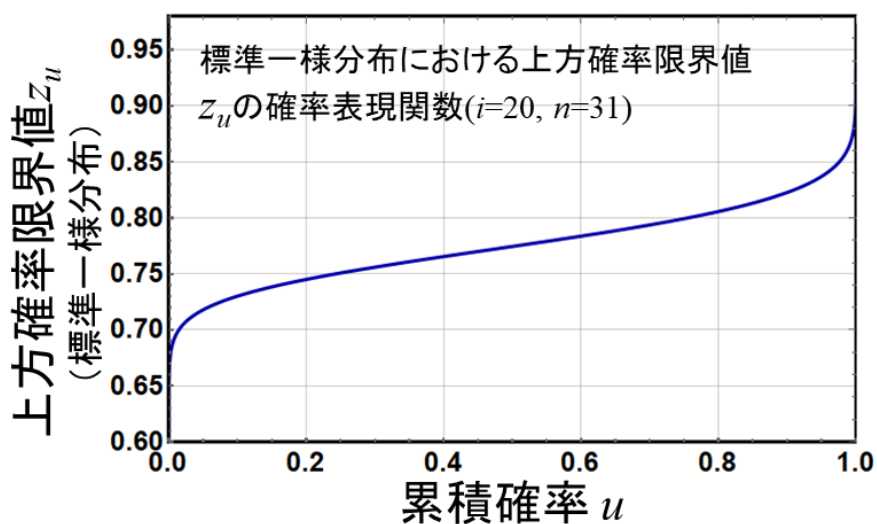


図 2-14 標準一様分布における上方確率限界値  $z_u$  の確率表現関数 ( $i=20, n=31$ )

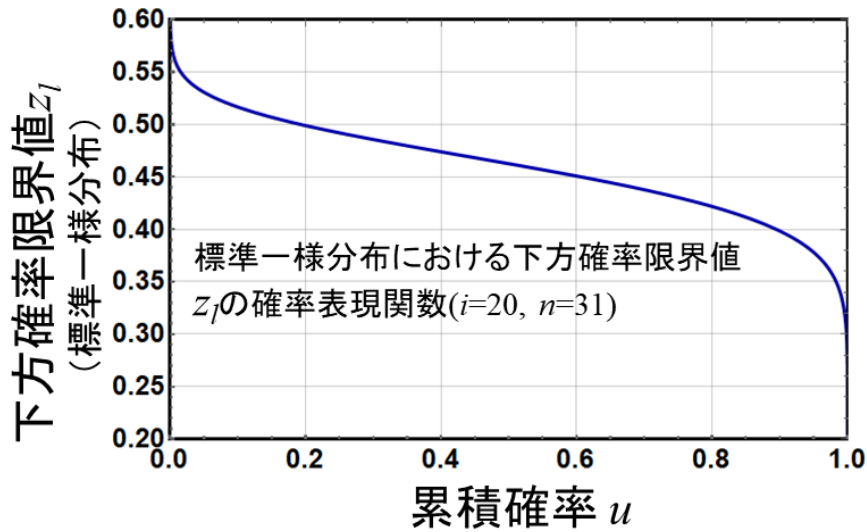


図 2-15 標準一様分布における下方確率限界値  $z_L$  の確率表現関数 ( $i=20, n=31$ )

次に、標準一様分布における確率限界値の関数が求めれたことから、これらの関数を仮定した母集団分布の確率表現関数に代入することで、仮定した母集団分布における確率限界値の関数が得られる。本節では、観測値を基に母集団分布に対する仮定を立てるため、この分布の確率表現関数を  $\chi_{Obs.}(u)$  と表記すると、当該分布における上方確率限界値  $\chi_X(z_U(u;i))$  は、

$$\chi_X(z_U(u;i)) = \chi_{Obs.}(z_U(u;i); \hat{\theta}) \quad (2-29)$$

となり、下方確率限界値  $\chi_X(z_L(u;i))$  は、

$$\chi_X(z_L(u;i)) = \chi_{Obs.}(z_L(u;i); \hat{\theta}) \quad (2-30)$$

となる。本節では、気象庁地上観測地点「京都」における 1951 年から 2010 年に亘る 60 年間分の年最大日降雨量に当てはめた Gumbel 分布を帰無仮説とする。標本サイズ 31 の疑似的な年最大日降雨量のデータを対象とした仮説検定を行う。図 2-16 および図 2-17 のそれぞれに、標本サイズ  $n$  が 31、順位  $i$  が 20 の場合における、観測値に当てはめた Gumbel 分布における上方確率限界値および下方確率限界値の確率分布を示す。検定を行うデータの第  $i$  順序統計量値を  $x_{(i)}$  と表記すると、順位  $i$  の確率限界値の分布から、当該値の超過確率を算出できる。順位 1 から  $n$  までの全ての順位について、この超過確率を算出していき、算出された超過確率群の最小値が確率限界法検定における  $p$  値となる。



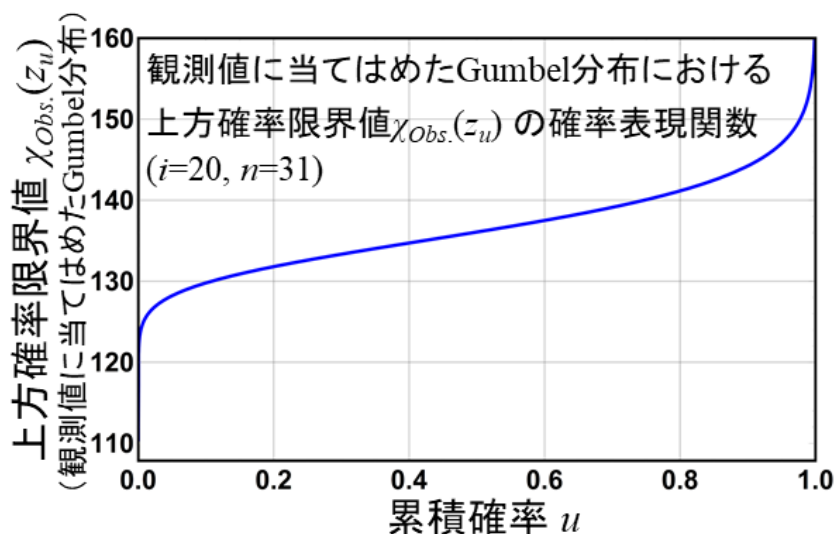


図 2-16 気象庁地上観測地点「京都」における 1951 年から 2010 年に亘る 60 年間分の年最大日降雨量に当てはめた Gumbel 分布における上方確率限界値の確率表現関数  $\chi_X(z_U(u; i))$  ( $i=20, n=31$ )

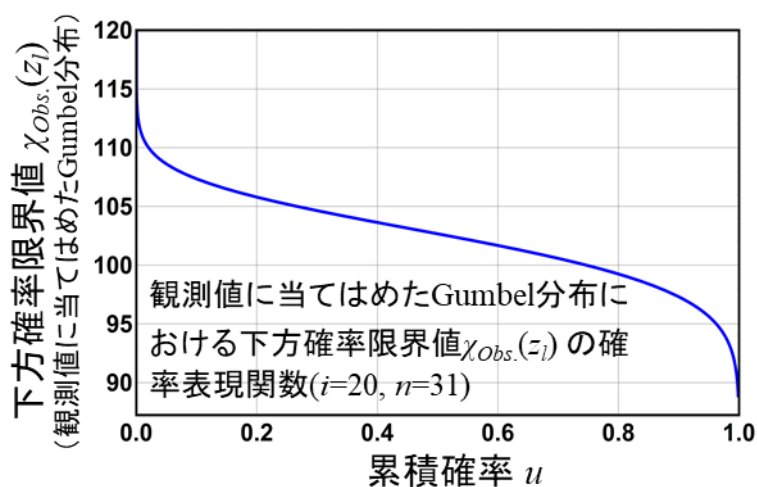


図 2-17 気象庁地上観測地点「京都」における 1951 年から 2010 年に亘る 60 年間分の年最大日降雨量に当てはめた Gumbel 分布における下方確率限界値の確率表現関数  $\chi_X(z_L(u; i))$  ( $i=20, n=31$ )

検定対象となる標本の年最大日降雨量の標本（標本サイズ：31）に対する適合度検定の結果を示す。図 2-18 は、順位 31 の上方確率限界値の確率分布である。同図に示すように、対象データの第 31 順位統計量が 337.5mm の場合、この値の超過確率は 0.2 となる。さらに、この超過確率は、標本中の順序統計量のうち最小値となる場合、 $p$  値となる。図 2-19 は、気象庁地上観測地点「京都」における 1951 年から 2010 年に亘

## 第2章 確率限界法検定の理論

る 60 年間分の年最大日降雨量に当てはめた Gumbel 分布における確率限界値である。同図において、赤点は観測値、青線は観測値に当てはめた Gumbel 分布、青点群はこの Gumbel 分布に近い方から、有意水準 5%、有意水準 1% の確率限界値、黒点が検定対象のデータ（標本サイズ 31）である。確率限界法検定における検定統計量は、仮定した母集団分布の累積分布関数  $F_X(x)$  が与える、対象データの順序統計量  $x_{(i)}$  の累積確率値  $F_X(x_{(i)})$  がその順位  $i$  におけるベータ分布の最端部に位置する場合、その順序統計量  $x_{(i)}$  が検定統計量である。なぜならば、当該の順序統計量  $x_{(i)}$  の累積確率  $F_X(x_{(i)})$  に対して、 $i$  番目のベータ分布が与える非超過確率あるいは超過確率のうち、いずれか小さい方の値が確率  $\alpha_{\min}$  の実現値と扱われるためである。この例題に示すように、極値に対して高い検定力をもつ確率限界法検定を用いることで、対象データが仮定した母集団分に属するかの検証が可能となる。

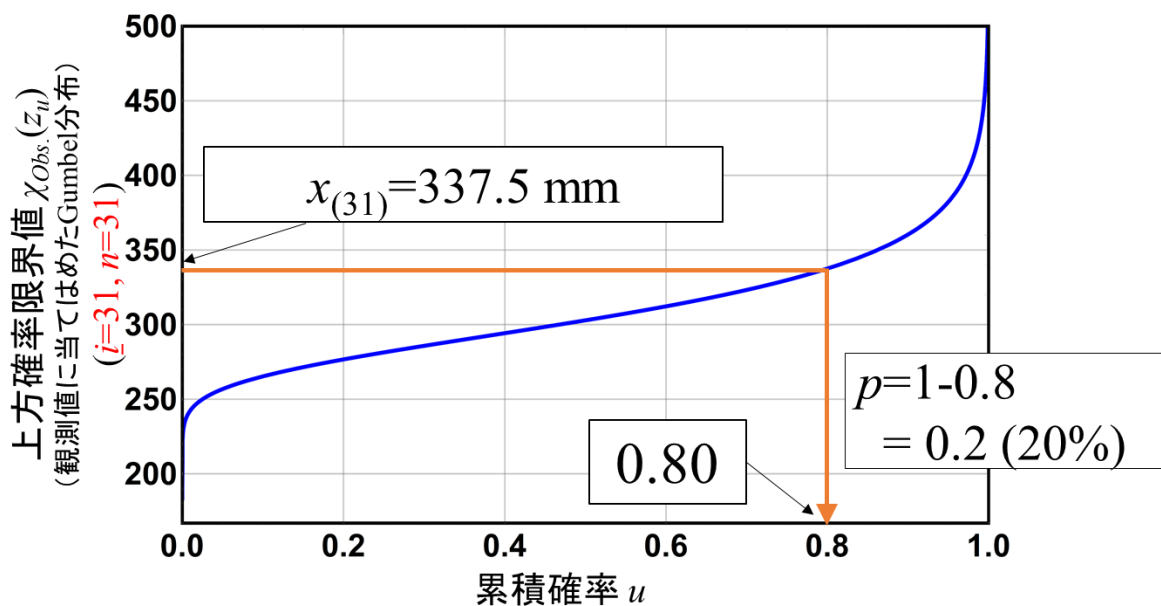


図 2-18 気象庁地上観測地点「京都」における 1951 年から 2010 年に亘る 60 年間分の年最大日降雨量に当てはめた Gumbel 分布における上方確率限界値の確率表現関数  $\chi_X(z_U(u; i))$  ( $i=31, n=31$ )

## 第2章 確率限界法検定の理論

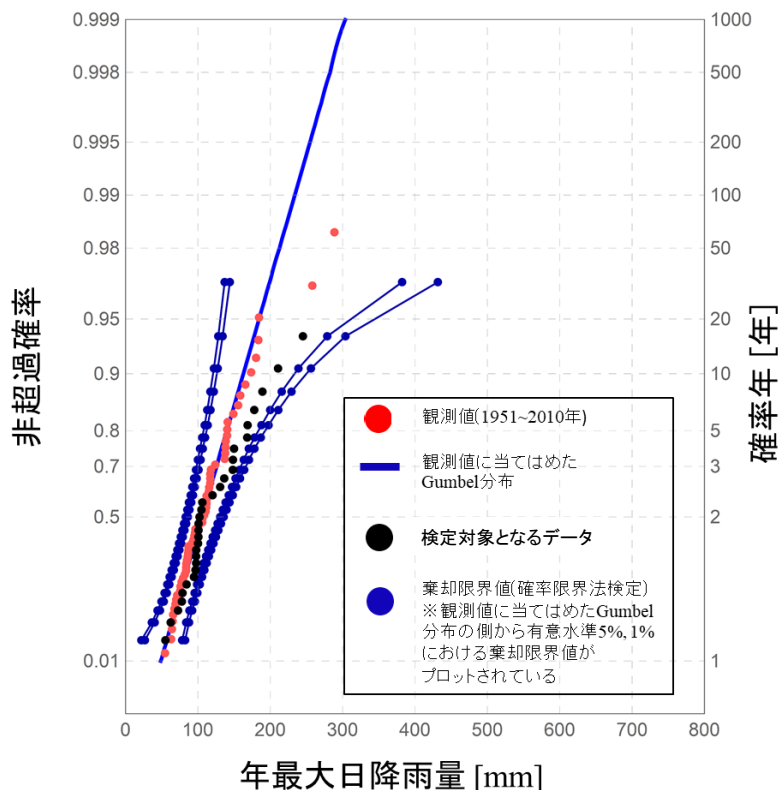


図 2-19 気象庁地上観測地点「京都」における 1951 年から 2010 年に亘る 60 年間分の年最大日降雨量に当てはめた Gumbel 分布における確率限界値

※赤点は観測値，青線は観測値に当てはめた Gumbel 分布，青点群はこの Gumbel 分布に近い方から，有意水準 5%，有意水準 1%の確率限界値，黒点が対象データにおける年最大日降雨量の実験値である。

### 2-7 第2章のまとめ

本章では，森口により提案された確率限界法検定の理論の詳細やその水文頻度解析への導入の必要性を示した。確率限界法検定は，仮定した母集団分布の裾野に対する検定力が強く，任意の有意水準において，仮定した母集団分布の下で生起しうる低頻度かつ極端な値の推定を可能とするものである。さらに，同章では，確率限界法検定における  $p$  値の算出方法を詳説した。これにより，気候変動予測により得られた極値降雨量の標本が過去の観測情報から推定した母集団分布に属するものであるか否かをこれまでの検定理論による適合度評価よりも高精度に行える可能性を示した。これにより，確率限界法検定の理論により，検定対象とするデータが仮定した母集団分布に属するかについて，極値領域に特に重きを置き，検討できる。

本章において示した重要事項を以下に列挙する。

(1) 確率限界法検定における検定統計量の確率分布に極値分布を当てはめることの理論的背景を明らかとするとともに，当該検定における  $p$  値の算出方法を詳述した。検

## 第2章 確率限界法検定の理論

定統計量の確率分布に極値分布を当てはめることで、検定統計量 $-\log_{10}(2\alpha)$ の生起確率と検定の有意水準の関係を確立した。このことによって、任意の有意水準での採択域、信頼区間および予測区間の構成が可能となる。

(2) 確率限界法検定が仮定した母集団分布の裾野に対して検定力が高いことをKolmogorov-Smirnov 検定における採択域の範囲との比較により示した。

(3) 検定統計量分布の関数形を極値分布と仮定することで、検定対象のデータにおいて、仮定した母集団分布から最も外れる値を検定統計量として、それが当該の母集団分布に属するか否かを判定可能とする、検定統計量の確率分布の構成手法を詳述した。

### 参考文献

・清水啓太, 山田朋人, 山田 正: 確率限界法検定に基づく確率分布モデルの信頼区間を導入した新しい水文頻度解析手法, 土木学会論文集 B1(水工学) Vol.74, No.4, I\_331-I\_336, 2018.

・清水啓太, 山田 正, 山田朋人: 信頼区間・予測区間を導入した水文頻度解析における不確実性評価, 河川技術論文集, Vol.25, pp.13-18, 2019.

・森口繁一: 確率表現関数, 東京大学出版, 1995.

・森口繁一: 確率表現関数の検定について—Kolmogorov-Smirnov 検定を考え直す—, pp.233-244, 日本統計学会, 第25巻, 1995.

・Birnbaum, Z. W. : Numerical tabulation of the distribution of Kolmogorov's statistic for finite sample size, J. Amer. Statist. Assoc. 47, pp.425-441, 1952.

・Feller, W. : On the Kolmogorov-Smirnov limit theorems for empirical distributions. Annals of Math. Stat. 19, pp.177-189, 1948.

・Kolmogorov, A. : Sulla Determinazione Empirica di una Legge di Distribuzione. Inst. Ital. At-tuari, Giorn, 4, 83-91, 1933.

・Massey, F. J., Jr. : A note on the estimation of a distribution function by confidence limits. Annals of Math. Stat. 21, pp.116-119, 1950.

・Miller, L. H. : Table of Percentage Points of Kolmogorov Statistics. Journal of the American Statistical Association. Vol. 51, No. 273, pp. 111-121, 1956.

・Ryo Mizuta, Akihiko Murata, and Masayoshi Ishii : Over 5,000 Years of Ensemble Future Climate Simulations by 60-km Global and 20-km Regional Atmospheric Models, Bull.Am. Meteorol. Soc., pp.1383-1393, 2016.

・Smirnov, N. : Ob uklonenijah empiriceskoi krivoi raspredelenija, Recueil Mathematique(Mathmaticseskii Sbornik), N.S.6 (48), pp.3-26, 1939.

## 第 2 章 確率限界法検定の理論

- Wasserstein RL, Lazar NA. Editorial: The ASA's statement on p-values: Context, process, and purpose. *The American Statistician* 2016; 70: 129-133.

## 第3章 確率限界法検定に基づく信頼区間・予測区間の構成手法と当該区間を導入した水文頻度解析

### 3-1 はじめに

本章では、第2章にて示した確率限界法検定の理論を用いて、確率分布の信頼区間、ならびに将来生起しうる観測値に対する予測区間の構成手法を示す。さらに、確率限界法検定に基づく信頼区間・予測区間を導入した水文頻度解析の具体的手法を示す。

従来の洪水対策では、実績として存在するただ一つの観測標本に基づき計画降雨量を設定してきたが、我が国の観測期間が一級河川流域においても数十年から百数十年間分という有限なものであるため、観測情報の不足に伴う計画降雨量は不確実性を大いにもつ。したがって、計画降雨量値の不確実性の幅を定量化することは、観測情報の不足に伴う推定不確実性の明示化につながり、その幅は信頼区間と定義されるものである。信頼区間は、観測値を用いて、母集団分布が持つ唯一の定数（真値）を推定する際、その推定値がもつ推定誤差を表すものである。当然ながら、有限な観測情報を基に推定した確率降雨量についても、その真値が定数として存在するが、その値を断定的に知ることは出来ず、不確実としての確率分布を持つ。従来の水文頻度解析では、信頼区間は、ジャックナイフ法やブートストラップ法等の数値的手法や、確率降雨量がある確率分布に従うという仮定に基づくパラメトリックな手法を用いることによって表されてきた（(Stedinger, 1993), (Efron, 1982)）。これらの手法の多くは、中心極限定理を用いて、推定量（例えば、確率水文量）に正規分布を仮定する。しかしながら、確率水文量の分布を正規分布として扱うことには困難があると考えられる。これは、既述したように、限られた観測極値の下で、確率水文量を始めとした各統計量に正規性を仮定することは難しいためである。これらのことを受け、本論では、確率限界法検定（森口, 1995）の理論を応用し、このような仮定を設定せず、可能な限

### 第3章 確率限界法検定に基づく信頼区間・予測区間の構成手法と当該区間を導入した水文頻度解析

り解析的に構成可能な信頼区間を提案する．加えて，当該信頼区間の精度が極めて高いことを示す．

予測区間は，将来期間において生じうる観測値が存在する範囲であるから，極値の予測区間は，将来期間に実現する最大値を確率変数とみなして，この確率変数の分布がある割合に含まれる範囲を表すものである．竹内（例えば，1975，2020）は，予測区間の解析的導出方法やその適用例を示している．一方，既往研究での極値に関する予測区間の多くは，将来期間に生起する極値あるいはその極値に関する統計量が正規分布あるいはt分布に従うとして，構築されてきた．将来期間に生起する極値あるいはその極値に関する統計量が従う確率分布は正規分布やt分布ではなく，一般的に極値分布とすることが妥当である（北野ら（2013））．観測極値降雨量の個数が安定した推定ができるほど十分であれば，中心極限定理により，正規性の仮定を置くことは妥当であると考えられる．近年では，Coles（2003）や北野ら（2016）がベイズ手法を用いて，将来期間における極値の予測区間を構成する手法を示している．北野ら（2016）の手法は，生起率の従う確率分布をガンマ分布とし，観測標本に対して正規性の仮定を設定せずに予測区間を構成可能とするものである．本研究では，確率限界法検定の理論に基づく信頼区間・予測区間の構築している．本章では，信頼区間による有限な観測情報に起因する計画降雨量の不確実性の定量化手法ならびに，予測区間による将来生起しうる激甚豪雨の規模とその生起リスク算定手法を示す．

なお，確率限界法検定に基づく信頼区間・予測区間の構成にあたり，設定した仮定を以下に示す．

- 1) 降雨量は定常過程に従い生起する．
- 2) 降雨量の物理的上限值および下限値は存在しない．

以降では，当該信頼区間・予測区間の導出過程やその適用手法を詳述していく．

#### 3-2 確率限界法検定に基づく信頼区間・予測区間の構成手法

第2章6節において，示したように，本研究では， $N$ 個の $-\log_{10}(2\alpha_{min})$ に極値分布 $D_{Ext.}(\theta_{\alpha})$ を最尤法により，当てはめ，母数推定を行った当該分布 $D_{Ext.}(\hat{\theta}_{\alpha})$ を用いて，確率 $\alpha$ を求めている．このことが，森口（1995）が定義した確率 $\alpha$ と本研究における確率 $\alpha$ に差異をもたらしている．ここで， $N$ 個の $-\log_{10}(2\alpha_{min})$ に極値分布を当てはめた理由を次に示す．前述した $n$ 個の確率 $\{\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_n\}$ を変形し，標本 $\{-\log_{10}(2\alpha'_1), -\log_{10}(2\alpha'_2), \dots, -\log_{10}(2\alpha'_n)\}$ を得る．このとき， $-\log_{10}(2\alpha_{min}) = \text{Max}\{-\log_{10}(2\alpha'_1), -\log_{10}(2\alpha'_2), \dots, -\log_{10}(2\alpha'_n)\}$ が成立するため， $-\log_{10}(2\alpha_{min})$ はこの標本中の最大値となる．標本中の最大値は，サンプリング数が多いほど，極値分布に漸近的に従うため， $N$ 個の-

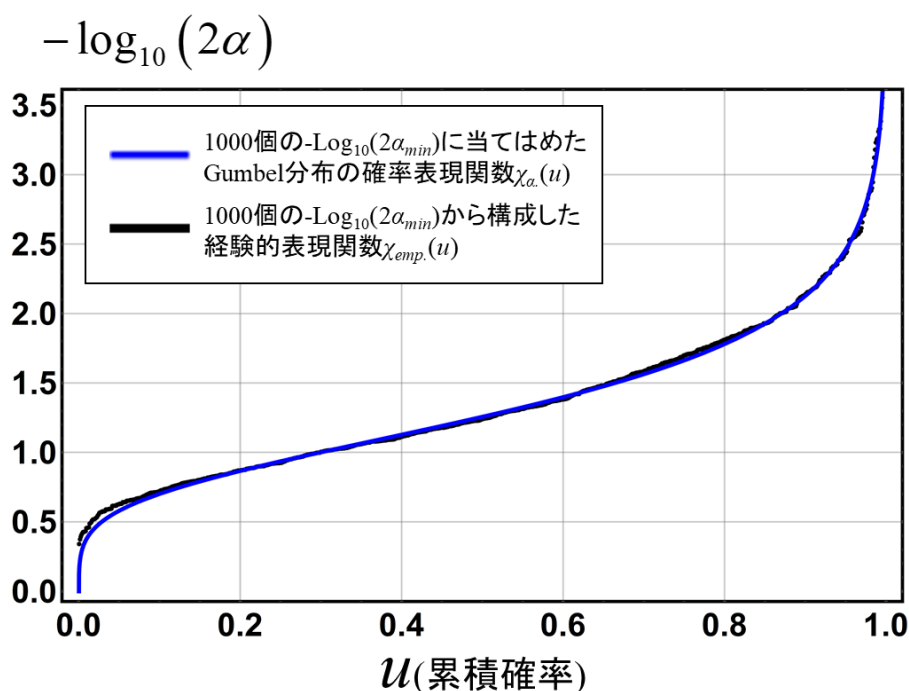


図 3-1 1,000 個の  $-\log_{10}(2\alpha_{min})$  から構成した経験的表現関数  $\chi_{emp}(u)$  とこれら 1,000 個の  $-\log_{10}(2\alpha_{min})$  に当てはめた Gumbel 分布の確率表現関数  $\chi_{\alpha}(u)$

$\log_{10}(2\alpha_{min})$  に極値分布を当てはめることは妥当であり、本研究では、Gumbel 分布を採用した。図 3-1 に 1000 個の  $-\log_{10}(2\alpha_{min})$  に当てはめた Gumbel 分布の確率表現関数  $\chi_{\alpha}(u)$  を示す。同図より  $\chi_{\alpha}(u)$  と 1000 個の  $-\log_{10}(2\alpha_{min})$  から作成した経験的表現関数  $\chi_{emp}(u)$  はほとんど一致していることが分かる。 $\chi_{\alpha}(u)$  を求めることにより、任意の有意水準に応じた信頼区間を構成することが可能となる。例えば、両側確率 5% の場合、95% 信頼区間の構成に必要な確率  $\alpha$  は、 $\chi_{\alpha}(0.95) = -\log_{10}(2\alpha) \doteq 2.5$  より、 $\alpha \doteq 1.5 \times 10^{-3}$  となる。

次に、確率分布の信頼区間を構成する方法を示す。区間  $[z_L(i), z_U(i)]$  は、確率変数列  $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  から求まる第  $i$  順序統計量  $X_{(i)}$  の累積確率  $U_{(i)} (=F_X(X_{(i)}))$  が数学上取りうる幅である。確率表現関数  $\chi_X(u)$  に標準一様分布における確率限界値を代入することで  $X_{(i)}$  の推定区間  $[\chi_X(z_L(i)), \chi_X(z_U(i))]$  を構成することができる。すなわち、 $\chi_X(z_L(i))$  および  $\chi_X(z_U(i))$  は採用した確率分布に従う  $X_{(i)}$  が取りうる値の下限值および上限値である。次に、 $100p\%$  信頼限界線を構成する手順を示す。採用した確率分布  $D(X; \theta)$  を、「下方確率限界値から構成される標本  $X_L = \{\chi_X(z_L(1)), \chi_X(z_L(2)), \dots, \chi_X(z_L(n))\}$ 」および「上方確率限界値から構成される標本  $X_U = \{\chi_X(z_U(1)), \chi_X(z_U(2)), \dots, \chi_X(z_U(n))\}$ 」に当てはめ、母数  $\theta$  を推定する。 $X_L$  から推定した母数を  $\hat{\theta}_L$ 、 $X_U$  から推定した母数を  $\hat{\theta}_U$  とすると、これらの推定値から求まる確率分布  $D(X; \hat{\theta}_L)$  は  $D(X; \theta)$  に対する下側信頼限界となり、かつ、



第3章 確率限界法検定に基づく信頼区間・予測区間の構成手法と当該区間を導入した水文頻度解析

確率分布  $D(X; \hat{\theta}_U)$  は  $D(X; \theta)$  に対する上側信頼限界となる。したがって、本研究では、 $D(X; \hat{\theta}_L)$  を 100p% 下側信頼限界線、 $D(X; \hat{\theta}_U)$  を 100p% 上側信頼限界線とし、両限界線から構成される区間を  $D(X; \theta)$  の 100p% 信頼区間と定義した。図 3-2 は、草木ダム流域における 41 年間分の年最大総降雨量の観測値に当てはめた Gumbel 分布の 95% 信頼区間の構成過程を示したものである。同図から、標本  $X_L$  および標本  $X_U$  に採用確率分布を当てはめ、信頼限界線が構成されていることが分かる。なお、本研究では、採用確率分布は Gumbel 分布である。

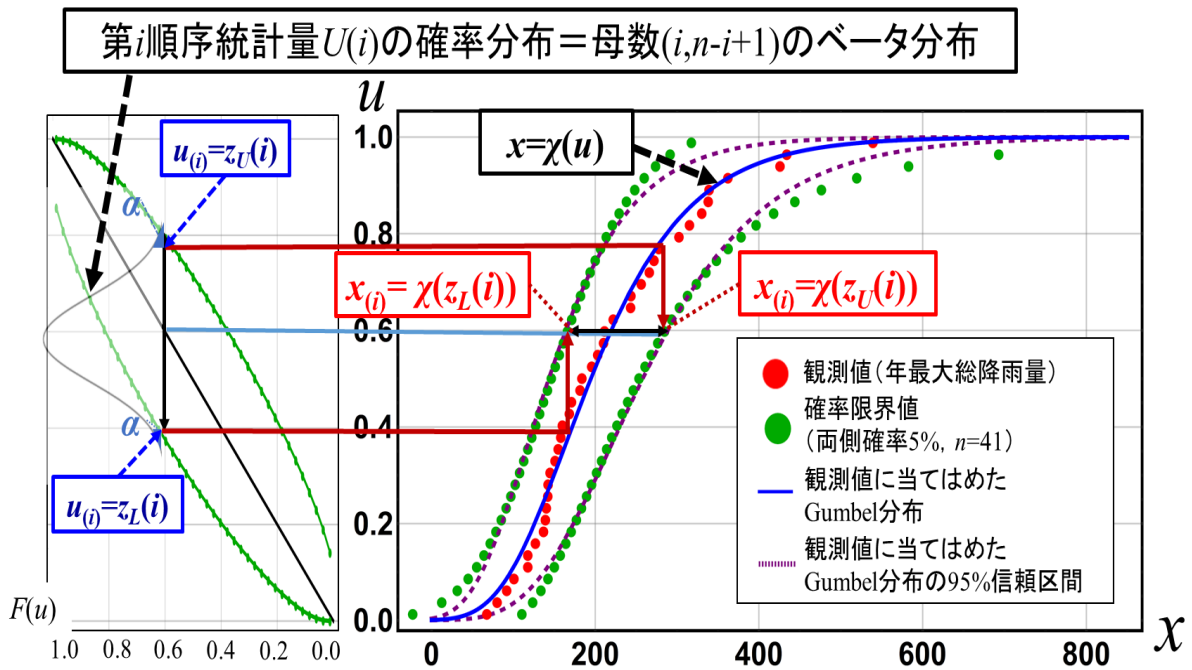


図 3-2 確率限界法検定に基づく信頼区間の構成過程

次に、確率限界法検定の理論に基づいて予測区間を構成する手法を示すとともに、同検定に基づく予測区間を用い、将来期間における激甚現象の生起リスクを算出する理論的枠組みを提示する（清水ら，2019）。加えて、確率限界法検定に基づく予測区間の適用例を紹介する。具体的には、名古屋地方気象台における 1901 年から 1999 年までの年最大日降水量の観測値を用いて、確率限界法検定に基づく予測区間を構成し、このことにより、2000 年に生じた東海豪雨が統計的に予測可能であることを示す。

予測区間の構成において、その理論的根拠となる確率限界法検定における棄却限界値（確率限界値）の性質を示す。

図 3-3 は、名古屋地方気象台における 99 年間分の年最大日降水量の観測値（1901

### 第3章 確率限界法検定に基づく信頼区間・予測区間の構成手法と当該区間を導入した水文頻度解析

年～1999年), これら99個の観測値に当てはめた Gumbel 分布, 両側確率 90%, 80%, 70%, 60%, 50%, 40%, 30%, 20%, 10%, 5%, 1%の確率限界値を示したものである。また, 図 3-4 は, 第 99 順序統計量の確率分布と確率限界法検定における両側確率 90%, 80%, 70%, 60%, 50%, 40%, 30%, 20%, 10%, 5%, 1%の採択域との関係を示したものである。次に, 確率限界法検定における採択域の被覆率を算出し, この被覆率を順位  $i$  ごとに比較した。ここでの被覆確率は, 第  $i$  順序統計量の確率分布が採択域に含まれる割合とする。図 3-5 は, 信頼係数と被覆確率の関係を順位  $i$  ごとに示したものである。同図では, 99 個の信頼係数と被覆確率の関係を順位  $i$  別にプロットしている。ここで, 信頼係数とは,  $(1-p)$ により表されるものである ( $p$  は有意水準あるいは両側確率である。 ( $0 < p < 1, i = 1, 2, \dots, 99$ ))。なお, 上記した各順序統計量の確率分布は, 観測値に当てはめた Gumbel 分布の累積分布関数  $F_X(x)$ と確率密度関数  $f_X(x)$ を用いて求めた。任意の順位  $i$  に応じた, 第  $i$  順序統計量  $X_{(i)}$ の累積分布関数  $F_{X_{(i)}}(x)$ は式(3-1)により表される。

$$F_{X_{(i)}}(x) = \sum_{k=i}^n \binom{n}{k} F_X^k(x) \{1 - F_X(x)\}^{n-k} \quad (3-1)$$

図 3-5 より, 信頼係数と被覆率の関係は, 順位  $i$  にほとんど依存せず, ほぼ同じものとなることが分かる。また, 同図から, 信頼係数の増加に伴い, 信頼係数と被覆率の値が近づいていくことが分かる。これは, 信頼係数  $(1-p)$ として 1 に近い値を採用した場合, その信頼係数に相当する上方確率限界値の超過確率を  $p/2$  として近似可能であることを示している。上述したように, いずれの順位  $i$  においても信頼係数と被覆率の関係の変化は目視での判別が不可能なほど小さい。これは, 確率限界法検定における採択域の精度は順位  $i$  に依存せず一定の精度であることを示している。換言すれば, 確率限界法検定による採択域は順序統計量の分布により表される観測値の存在範囲を高精度で推定するものである。このことは, 確率限界値を外挿することにより, 観測期間の外部, すなわち, 将来期間においても未知観測値の存在範囲を推定できることを示している。

次に, 確率限界法検定を用いて極値の予測区間を構成する手法を示す。図 3-6 は, 名古屋地方気象台における 99 年間分の年最大日降水量の観測値 (1901 年～1999 年), これら 99 個の観測値に当てはめた Gumbel 分布, 標準一様分布と当該 Gumbel 分布の両側確率 1%の確率限界値および 99%予測区間を示したものである。

採択域は, 採用した仮説検定理論の下では, どの程度の値まで許容可能であるかを表す範囲である。ここで, 採択域は, データが存在しうる範囲として扱えることを再記しておく。確率限界法検定は, 仮定した確率分布の裾部に対して極めて高い検定力を

第3章 確率限界法検定に基づく信頼区間・予測区間の構成手法と当該区間を導入した水文頻度解析

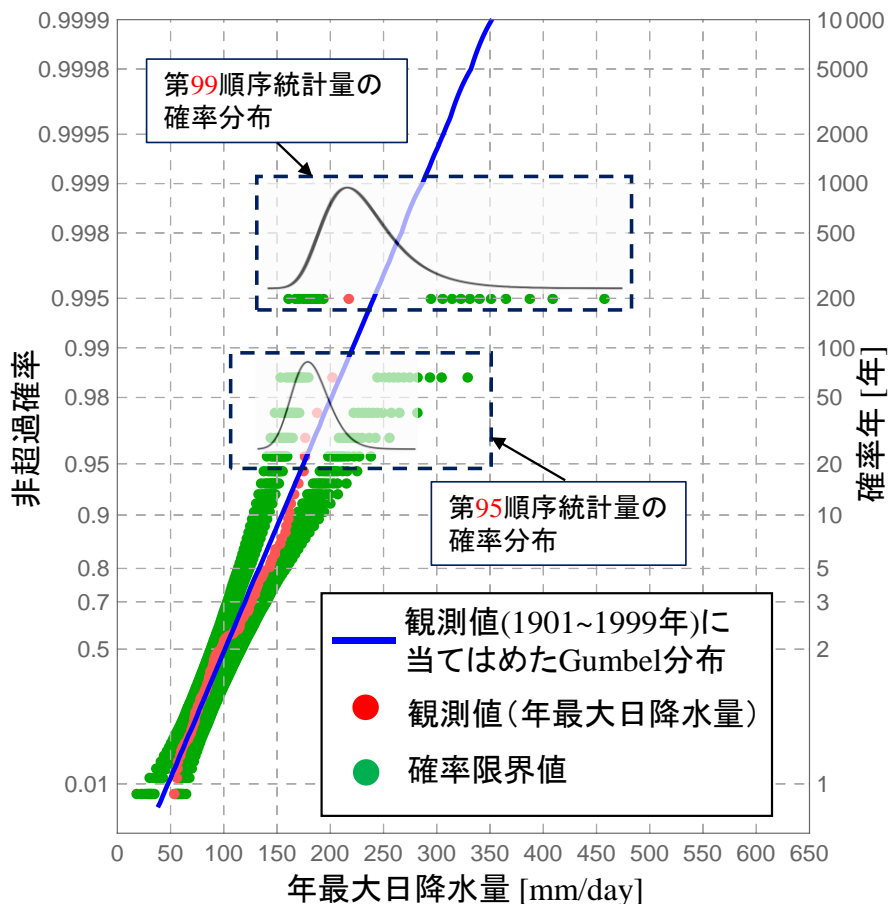


図 3-3 順序統計量の確率分布と確率限界値の関係

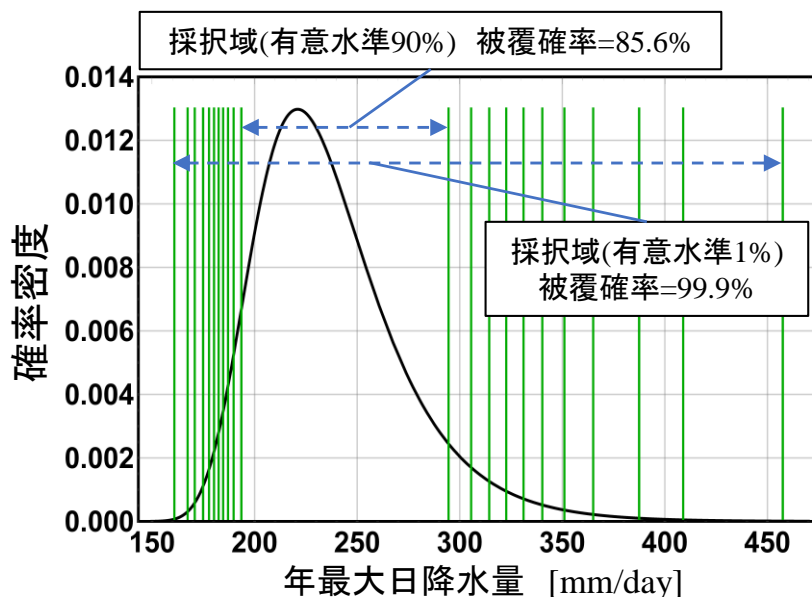


図 3-4 第 99 順序統計量の確率分布と確率限界法検定における採択域の関係

### 第3章 確率限界法検定に基づく信頼区間・予測区間の構成手法と当該区間を導入した水文頻度解析

有しているため、裾部に対して採択域が狭まっている。

確率限界法検定の採択域は、我々が過去経験しえた大雨の振れ幅を高精度で推定するものであるため、確率限界値を大雨の振れ幅の限界値として捉えることができる。したがって、確率限界値の標本に対して、高い適合度を有する確率分布モデルを選定することにより、当該確率分布モデルは、データの振れ幅の限界値を与えるものとして捉えることができる。加えて、当該確率分布モデルにより、使用したデータの外部に対しても、外挿値という形で値を得ることができる。このことは、将来期間に対しても、データの振れ幅の限界値を予測していることを表している。したがって、本研究では、当該確率分布モデルを予測限界線と定義した。加えて、**図 3-6** は、両側確率 1%の確率限界値の標本に一般化極値分布を当てはめ、99%予測限界線が構成される過程を示している。当該予測限界線と確率限界値の適合度を、SLSC（寶・高棹，1988）（標準最小二乗規準）により評価すると、上側予測限界線の SLSC は 0.006，下側予測限界線の SLSC は 0.008 であった。この結果は、一般化極値分布が確率限界値に極めて良好に適合し、一般化極値分布を予測限界線として採用することの妥当性を示すものである。

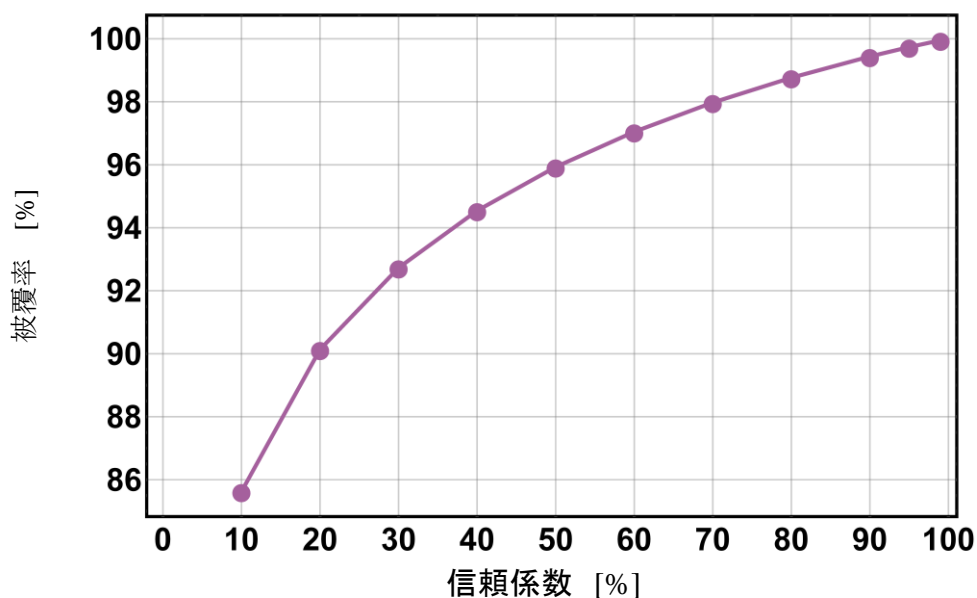


図 3-5 信頼係数と確率限界法検定における被覆率の関係

第3章 確率限界法検定に基づく信頼区間・予測区間の構成手法と当該区間を導入した水文頻度解析

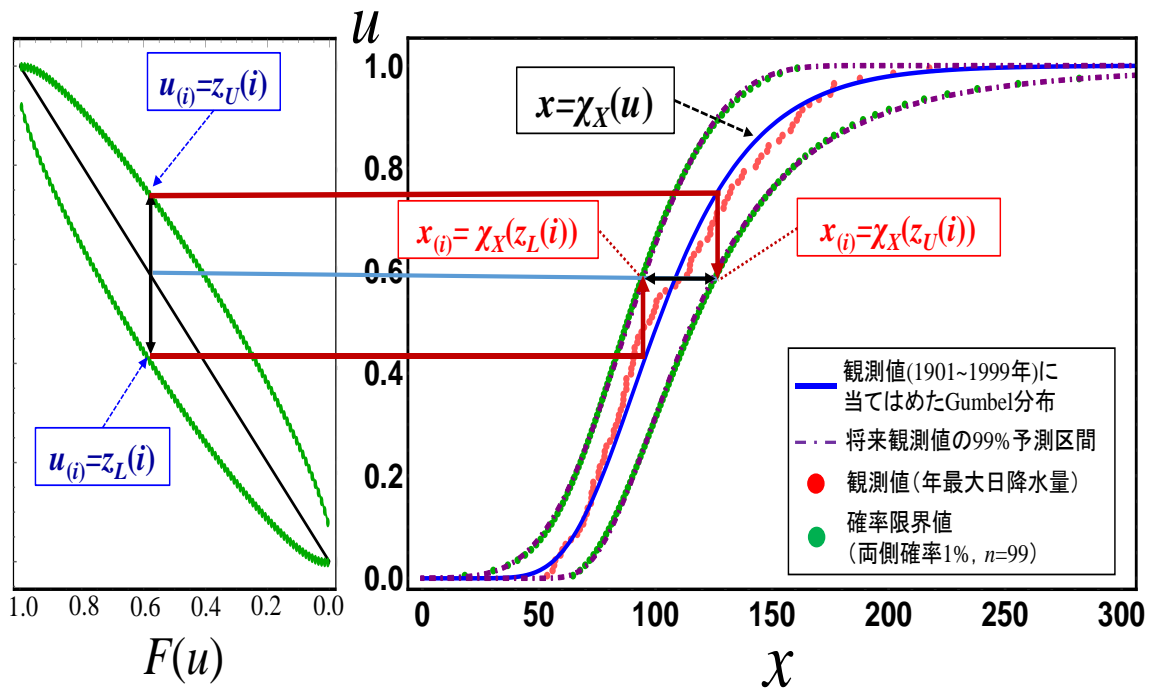


図 3-6 確率限界法検定に基づく予測区間の構成過程

### 3-3 確率限界法検定に基づく信頼区間を導入した水文頻度解析手法

前章において述べたように、利用可能な水文量の観測極値は限られているため、これらのデータを基に推定した水文統計量（確率水文量、モデル母数等）に内在する不確実性は、数理統計学的観点から極めて大きいといえる。本節では、信頼区間を導入した水文頻度解析の具体的手法を示す。図 3-7 は、草木ダム流域における 41 年間分の年最大総降雨量の観測値、これら 41 個の観測値に当てはめた Gumbel 分布および確率限界法検定を応用し導出した当該 Gumbel 分布の 95%信頼区間を示したものである。信頼区間の導入により、確率水文量が取りうる値が理論的に推定可能となり、従来採用してきた観測実績に基づく確率分布は平均曲線として捉えることができる。従来では、上述した平均曲線のみを用いて水文量の確率年を評価してきたが、このような従来手法は記録的豪雨の確率年を合理的に評価できないという困難点をもつ。信頼区間を導入することにより、 $T$  年確率規模の洪水対策において、 $T$  年確率水文量の振れ幅が求まり、上述したような記録的豪雨をその振れ幅の中の現象として捉えることができるようになる。すなわち、信頼区間は、記録的豪雨の確率年の合理的評価を可能とするものである。上側信頼限界値の超過確率は、「対象確率年」と「信頼区間の超過確率」との積により求まる。 $T$  年確率規模を対象とした洪水対策において、 $\beta\%$  上側信頼限界値を超える降雨量が発生するリスクは、 $(1/T) \times (100 - \beta) / 2$  [%]により表すことができる（清水ら，2018）。この具体例について、図 3-7 を用いて示す。同図にお

第3章 確率限界法検定に基づく信頼区間・予測区間の構成手法と当該区間を導入した水文頻度解析

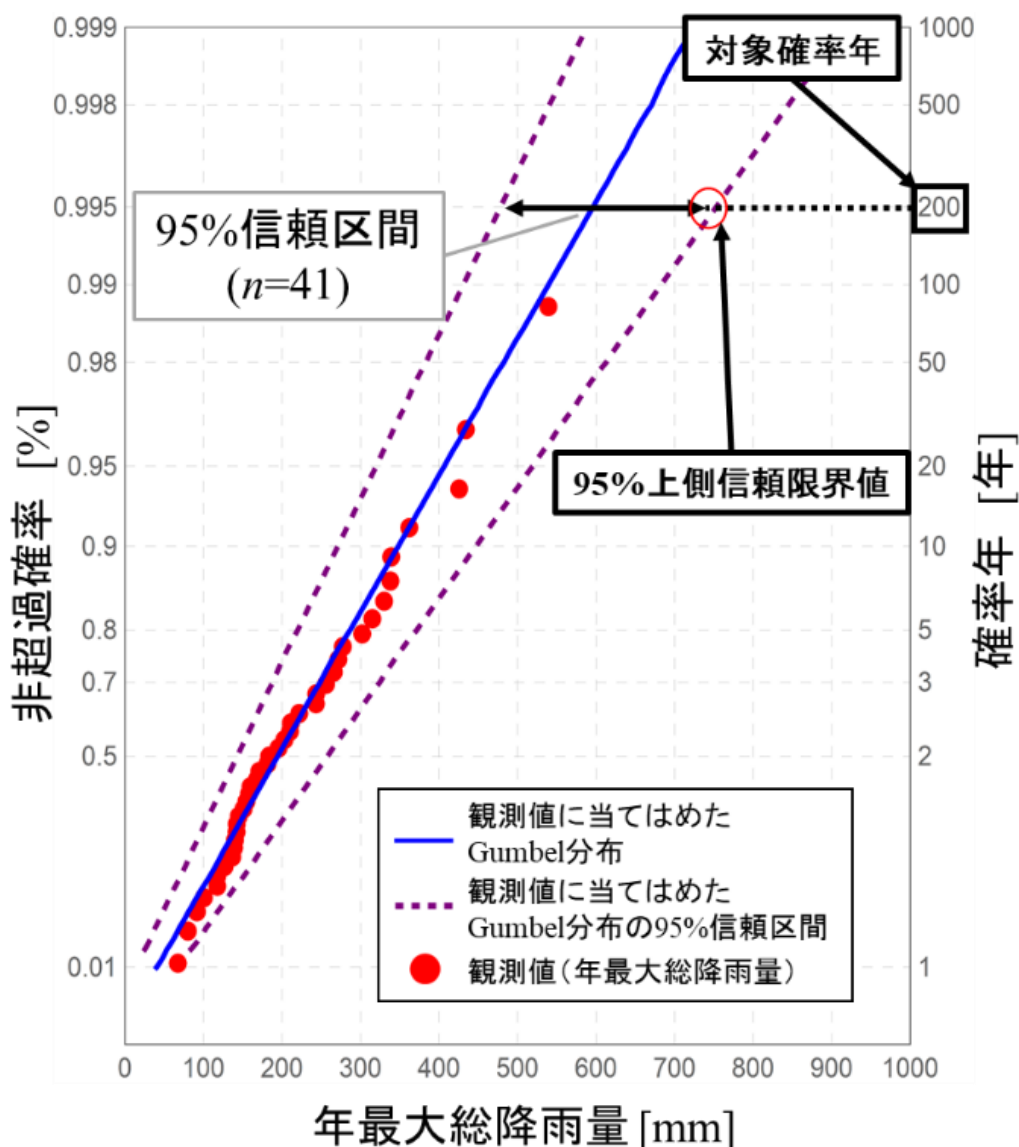


図 3-7 草木ダム流域における 41 年間分の年最大総降雨量の観測値，これらの観測値に当てはめた Gumbel 分布および当該 Gumbel 分布の 95%信頼区間  
 ※ $n$  は観測値の総数を表す。

いて、200 年確率年最大総降雨量の 95%上側信頼限界値の超過確率は、上式より 1/8000 となる。このように、信頼区間の導入により、従来では考慮されなかった規模の激甚豪雨が生起するリスクを定量的に求めることが可能となる。加えて、上記の枠組みにより算出されるリスクは他分野におけるリスク（例えば、交通事故で死亡する割合である 1/2 万，飛行機事故で死亡する割合である 1/50 万等）と同程度のオーダーとなる。すなわち、激甚豪雨が生起するリスクを他分野におけるリスクと比較・評価することができるようになる。中西（2004）はリスクの程度を相対的に比較することで、

### 第3章 確率限界法検定に基づく信頼区間・予測区間の構成手法と当該区間を導入した水文頻度解析

合理的な対策が実現することに言及しており、この結果は、洪水対策において、リスクの相対評価が実現する可能性を示唆するものである。従来の水文頻度解析では、信頼区間はプロファイル尤度 (Patrick, R, 2007) を用いる方法あるいはパラメトリック手法などにより算定されてきた。前者はプロファイル対数尤度から構成した統計量が漸近的にカイ二乗分布に従うという仮定を用い、後者は確率水文量がある確率分布に従うという仮定を用いる。著者らが提案する確率限界法検定による方法は、上述したような仮定を設定せずに出来るだけ解析的に信頼区間を導出できる点で有用性をもつと考える。なお、上述した信頼区間を導入した水文頻度解析手法は、降雨流出解析ならびに総合確率法に適用可能である。これらの詳細については、著者らの既往論文を参照されたい (清水ら, 2018, 2019)。

#### 3-4 確率限界法検定に基づく予測区間を導入した水文頻度解析手法

図 3-8 は、名古屋地方気象台における 99 年間分の年最大日降水量の観測値 (1901 年～1999 年)、これら 99 個の観測値に当てはめた Gumbel 分布、東海豪雨 (2000 年) の観測値、確率限界法検定に基づく将来観測値の 99% 予測区間を示したものである。99% 予測限界線は、両側確率 1% (信頼係数 99%) の確率限界値の標本に当てはめた一般化極値分布である。同図から、確率年が長期になるにつれて、将来期間における観測値が取りうる範囲を表す予測区間が広がっていくことが分かる。また、上側予測限界線は下側予測限界線よりも広い範囲を取ることから、将来観測値の確率分布は右に歪むことが推定される。これは極値の性質の表したものであると考えられる。

予測区間の導入により、従来では“想定外”として扱われるような規模の豪雨を 100 年あるいは 200 年といった計画規模相当の確率年で評価できる。その具体例を次に示す。図 3-8 において、東海豪雨の観測値は、99% 上側予測限界線上にプロットされ、かつ、当該豪雨の確率年は 200 年として扱うことができる。加えて、予測区間の導入により、激甚豪雨が将来期間において発生するリスクを定量化することができる。すなわち、上述したリスク (上側予測限界値の超過確率) は、「対象確率年」と「予測区間の片側確率」との積により表される。なお、Knight (1921) は、確率分布が把握可能な事象をリスクとして数学的に定義している。この定義を踏まえ、本論では、“リスク”を採用確率分布から大きく外れ、従来では想定外として扱われるような豪雨の“発生確率”として扱う。次に、このリスク評価手法を用いて、東海豪雨級の激甚豪雨が生起するリスクの算出例を示す。図 3-8 において、東海豪雨の観測値は 200 年確率年最大日降水量の 99% 上側予測限界値となるため、当該値の超過確率は、上記したリスクの算出式より、 $(1/200) \times 0.005 = 1/40000$  となる。すなわち、東海豪雨級の激甚豪雨

第3章 確率限界法検定に基づく信頼区間・予測区間の構成手法と当該区間を導入した水文頻度解析

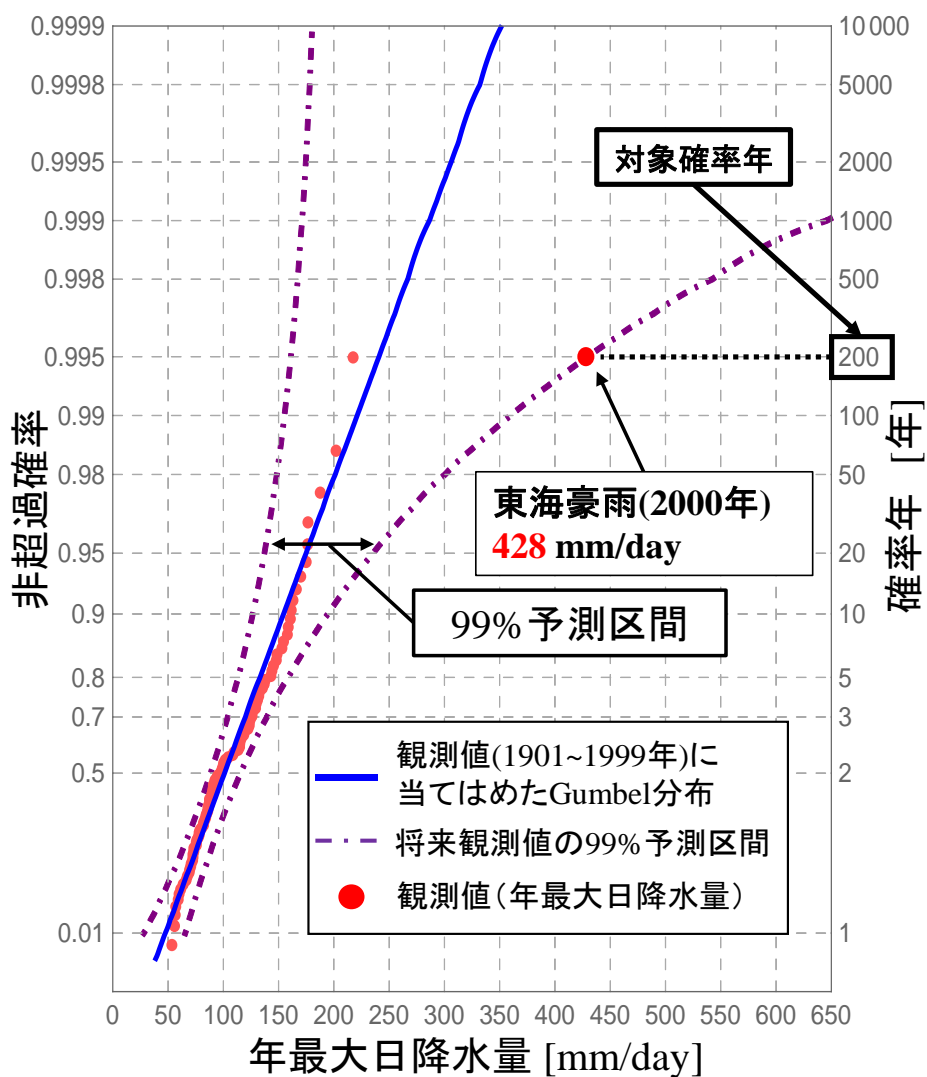


図 3-8 名古屋地方気象台における 1901 年から 1999 年に亘る 99 年間分の年最大日降水量の観測値、これらの観測値に当てはめた Gumbel 分布、当該 Gumbel 分布に関する 99%予測区間および東海豪雨 (2000 年) による年最大日降水量の観測値

が将来生起するリスクは 1/4 万となる。なお、信頼係数(1-p)として 1 に近い値を採用した場合、その信頼係数に相当する上方確率限界値の超過確率を  $p/2$  として近似可能となる。このため、「対象確率年」と「予測区間の片側確率」の積により激甚豪雨（上側予測限界値）の生起リスクを算定するという手法は、1 に近い信頼係数を選定するほど、その精度が向上する。すなわち、「対象確率年」と「予測区間の片側確率」の積により表される激甚豪雨の生起リスクが同じ値であっても、その外力値としては、高い信頼係数を有する予測区間上の値がより妥当なものとなる。予測区間の導入により、将来期間における激甚豪雨の規模ならびに生起リスクが算定可能となる。



### 3-5 確率限界法検定に基づく信頼区間・予測区間の構成プログラム

#### (1) 信頼区間・予測区間の構成プログラムのフローおよびスクリプト

信頼区間・予測区間の構成プログラムにおけるフロー図を図3-9に示す。同図に示す当該プログラムは、実用上の便宜を考慮するため、「標準一様分布における確率限界値の導出」、「観測値に当てはめた確率分布における確率限界値の導出」、「信頼限界線の母数推定」、「予測限界線の母数推定」の4つのものに大別し、作成した。また、このプログラムは、数式処理ソフト Mathematica(Version 11.3)により作成されており、このスクリプトを表3-1に示す。

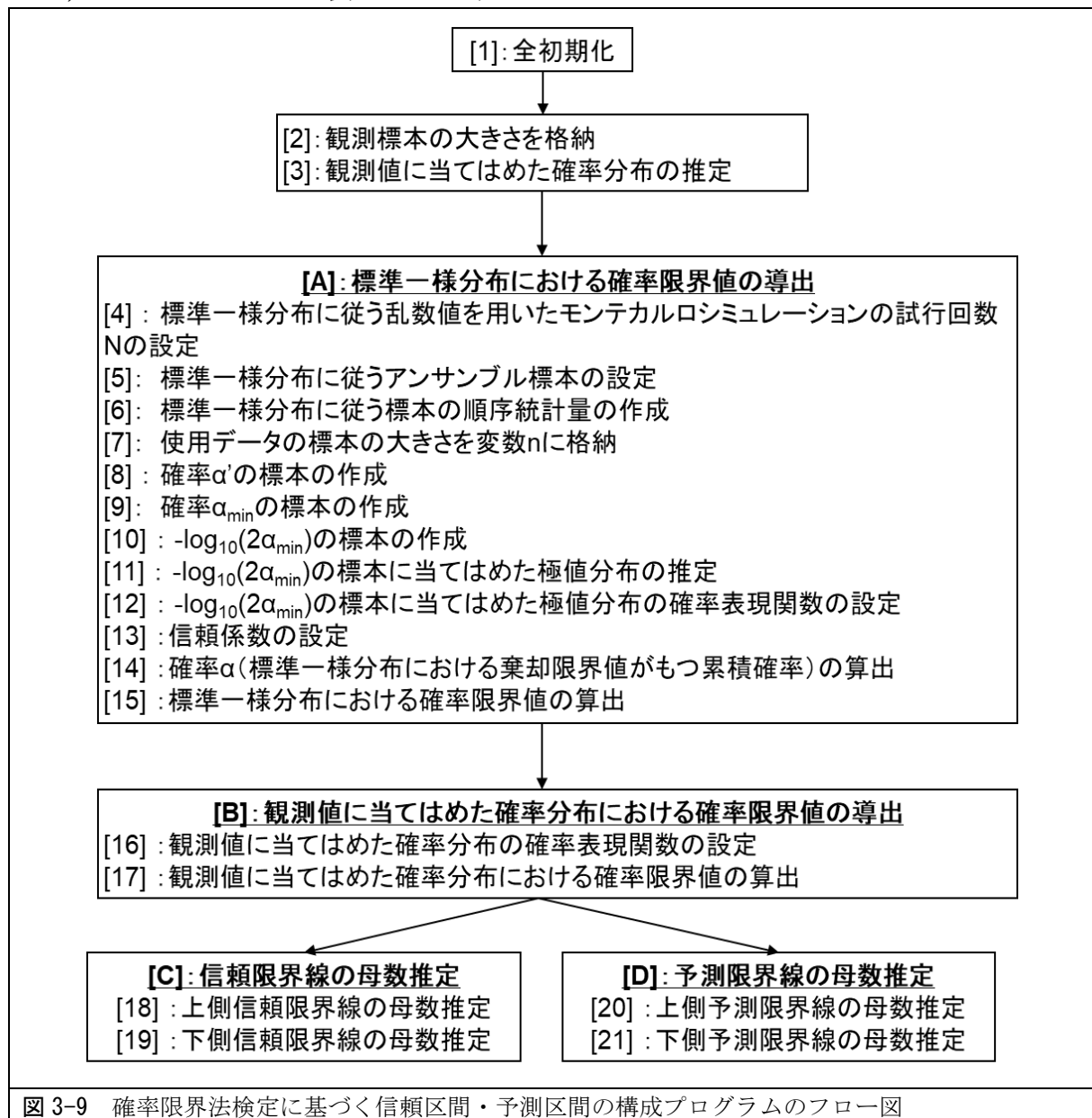


図3-9 確率限界法検定に基づく信頼区間・予測区間の構成プログラムのフロー図

第3章 確率限界法検定に基づく信頼区間・予測区間の構成手法と当該区間を導入した水文頻度解析

[1] 全初期化 <b>Remove["Global*"]</b>
[2] 観測標本の大きさを格納 <b>sampleSizeObsExtremeData = Length[obsExtremeData]</b>
[3] 観測値に当てはめた確率分布の推定 <b>parObs = FindDistributionParameters[obsExtremeData, ExtremeValueDistribution[<math>\mu</math>,<math>\sigma</math>], ParameterEstimator -&gt; "MaximumLikelihood"]</b> <b><math>\mu</math>Obs = <math>\mu</math> /. parObs;</b> <b><math>\sigma</math>Obs = <math>\sigma</math> /. parObs;</b>
[4] 標準一様分布に従う乱数値を用いたモンテカルロシミュレーションの試行回数 $N$ の設定 <b>icyclenum = N</b>
[5] 標準一様分布に従うアンサンブル標本の設定 <b>Table[uniformDistDat[ic] = RandomVariate[UniformDistribution[], sampleSizeObsExtremeData], {ic, 1, icyclenum}];</b>
[6] 標準一様分布に従う標本の順序統計量の作成 <b>Table[uniformDistDatLess[ic] = Sort[uniformDistDat[ic], Less], {ic, 1, icyclenum}];</b>
[7] 使用データの標本の大きさを変数 $n$ に格納 <b>n = sampleSizeObsExtremeData;</b>
[8] 確率 $\alpha_{min}$ ([5]で作成したアンサンブル標本の一様乱数値がもつ片側確率のうち、最小となるもの) の標本の作成 <b><math>\alpha := i</math>; <math>\beta := n - \alpha + 1</math>;</b> <b>Table[<math>\alpha</math>datmin[ic] =</b> <b>Table[{i, uniformDistDatLess[ic][[i]],</b> <b>Min[CDF[BetaDistribution[<math>\alpha</math>, <math>\beta</math>], x] /.</b> <b>x -&gt; uniformDistDatLess[ic][[i]], 1 - CDF[BetaDistribution[<math>\alpha</math>, <math>\beta</math>], x] /. x -&gt;</b> <b>uniformDistDatLess[ic][[i]]}, {i, 1, n}], {ic, 1, icyclenum}];</b>
[9] 確率 $\alpha_{min}$ から成る標本の順序統計量の作成 <b><math>\alpha</math>minMin =</b> <b>Table[Sort[<math>\alpha</math>datmin[ic], #1[[3]] &lt; #2[[3]] &amp;][[1]], {ic, 1, icyclenum}];</b>
[10] $-\log_{10}(2\alpha_{min})$ の標本の作成 <b>grdataminMinonly =</b> <b>Table[-Log[10, 2 <math>\alpha</math>minMin[[it]][[3]]], {it, 1, icyclenum}];</b>
[11] $-\log_{10}(2\alpha_{min})$ の標本に当てはめた極値分布の推定 <b>ClearAll[a,b,<math>\mu</math>,<math>\sigma</math>]</b> <b>parProba=FindDistributionParameters[grdataminMinonly,</b> <b>ExtremeValueDistribution[a,b]]</b> <b>probaAve=a /. parProba;</b> <b>probaPar=b /. parProba;</b>
[12] $-\log_{10}(2\alpha_{min})$ の標本に当てはめた極値分布の確率表現関数の設定 <b>probaPRF[u_] :=</b> <b>InverseCDF[</b>

第3章 確率限界法検定に基づく信頼区間・予測区間の構成手法と当該区間を導入した水文頻度解析

<p><b>ExtremeValueDistribution[prob<math>\alpha</math>Ave, prob<math>\alpha</math>Par], u]</b></p>
<p>[13] 信頼係数の設定  <b>accuracyOfPrediction = {0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 0.95, 0.99};</b>  <b>length<math>\alpha</math> = Length[accuracyOfPrediction];</b></p>
<p>[14] 確率 <math>\alpha</math> (標準一様分布における棄却限界値がもつ累積確率) の算出  <b>prob<math>\alpha</math> =</b>  <b>Table[(10<sup>-</sup>prob<math>\alpha</math>PRF[accuracyOfPrediction[[i]])/2, {i, 1,</b>  <b>Length[accuracyOfPrediction]}];</b></p>
<p>[15] 標準一様分布における棄却限界値の算出  <b>zul = Table[Table[{i, {lower =</b>  <b>InverseCDF[</b>  <b>BetaDistribution[i, sampleSizeObsExtremeData - i + 1,</b>  <b>prob<math>\alpha</math>[[j]]],</b>  <b>upper =</b>  <b>InverseCDF[</b>  <b>BetaDistribution[i, sampleSizeObsExtremeData - i + 1,</b>  <b>1 - prob<math>\alpha</math>[[j]]}], {i, 1,</b>  <b>sampleSizeObsExtremeData}], {j, 1, length<math>\alpha</math>};</b></p>
<p>[16] 観測値に当てはめた確率分布の確率表現関数の設定  <b>prfAdoptedFrequencyAnalysisModel[u_] :=</b>  <b>InverseCDF[frequencyAnalysisModel[<math>\mu</math>Obs, <math>\sigma</math>Obs], u]</b></p>
<p>[17] 観測値に当てはめた確率分布における確率限界値の算出  <b>ClearAll[u]</b>  <b>datimportantgreatgaisou =</b>  <b>Table[Table[</b>  <b>prfAdoptedFrequencyAnalysisModel[zul[[j]][[i]][[2]][[2]], {i, 1,</b>  <b>sampleSizeObsExtremeData}], {j, 1,</b>  <b>length<math>\alpha</math>};</b>  <b>datimportantsmallgaisou =</b>  <b>Table[Table[</b>  <b>prfAdoptedFrequencyAnalysisModel[zul[[j]][[i]][[2]][[1]], {i, 1,</b>  <b>sampleSizeObsExtremeData}], {j, 1,</b>  <b>length<math>\alpha</math>};</b></p>
<p>[18] 上側信頼限界線の母数推定  <b>coefgreatgaisou =</b>  <b>Table[FindDistributionParameters[datimportantgreatgaisou[[j]],</b>  <b>frequencyAnalysisModel[<math>\mu</math>, <math>\sigma</math>], {j, 1, length<math>\alpha</math>}]</b>  <b>upperConfidenceLimitFunc<math>\mu</math> =</b>  <b>Table[<math>\mu</math> /. coefgreatgaisou[[j]], {j, 1, length<math>\alpha</math>};</b>  <b>upperConfidenceLimitFunc<math>\sigma</math> =</b>  <b>Table[<math>\sigma</math> /. coefgreatgaisou[[j]], {j, 1, length<math>\alpha</math>};</b></p>
<p>[19] 下側信頼限界線の母数推定  <b>coefsmallgaisou =</b>  <b>Table[FindDistributionParameters[datimportantsmallgaisou[[j]],</b>  <b>frequencyAnalysisModel[<math>\mu</math>, <math>\sigma</math>], {j, 1, length<math>\alpha</math>}]</b>  <b>lowerConfidenceLimitFunc<math>\mu</math> =</b></p>

第3章 確率限界法検定に基づく信頼区間・予測区間の構成手法と当該区間を導入した水文頻度解析

<pre> Table[μ /. coefsmallgaisou[[j]], {j, 1, lengthα}]; lowerConfidenceLimitFuncσ = Table[σ /. coefsmallgaisou[[j]], {j, 1, lengthα}]; </pre>
<pre> [20] 上側予測限界線の母数推定 coefgreatgaisou = Table[FindDistributionParameters[datimportantgreatgaisou[[j]], MaxStableDistribution[μ, σ, ξ]], {j, 1, lengthα}] upperPredictionLimitFuncμ = Table[μ /. coefgreatgaisou[[j]], {j, 1, lengthα}]; upperPredictionLimitFuncσ = Table[σ /. coefgreatgaisou[[j]], {j, 1, lengthα}]; upperPredictionLimitFuncξ = Table[ξ /. coefgreatgaisou[[j]], {j, 1, lengthα}]; </pre>
<pre> [21] 下側予測限界線の母数推定 coefgreatgaisou = Table[FindDistributionParameters[datimportantgreatgaisou[[j]], MaxStableDistribution[μ, σ, ξ]], {j, 1, lengthα}] upperPredictionLimitFuncμ = Table[μ /. coefgreatgaisou[[j]], {j, 1, lengthα}]; upperPredictionLimitFuncσ = Table[σ /. coefgreatgaisou[[j]], {j, 1, lengthα}]; upperPredictionLimitFuncξ = Table[ξ /. coefgreatgaisou[[j]], {j, 1, lengthα}]; </pre>
<p>表 3-1 確率限界法検定に基づく信頼区間・予測区間の構成プログラムの Mathematica スクリプト</p>

(2) 信頼区間・予測区間の構成プログラムの解説

以降では、表 3-1 に示した Mathematica スクリプトに付記してある括弧内の数字とそれに該当するプログラムの内容やその中の変数定義を詳説する。

[1]では、初期設定を行う。すなわち、このコマンドを実行することで、変数に格納されている値をクリアにすることができる。

[2]では、観測標本の大きさは、変数 **sampleSizeObsExtremeData** に格納している。なお、本研究では、観測標本として年最大値資料を用いている。

[3]では、最尤法を用いて、観測標本に当てはめた確率分布の母数推定を行っている。このスクリプトでは、当該確率分布として、Gumbel 分布 (**ExtremeValueDistribution[μ,σ]**) を採用している。なお、推定された Gumbel 分布の位置母数は変数 **μObs**、尺度母数は変数 **σObs** に格納される。

### 第3章 確率限界法検定に基づく信頼区間・予測区間の構成手法と当該区間を導入した水文頻度解析

[4]から[15]までは、確率限界法検定における標準一様分布の確率限界値を導出する過程（図3-9における[A]）を記述したスクリプトである。

[4]では、標準一様分布に従う乱数値を用いたモンテカルロシミュレーションの試行回数 **icyclenum** を決定する。**icyclenum** には、任意の値  $N$  を与える。すなわち、式(2-23)の試行回数  $N$  を決定する。

[5]では、標準一様分布に従う  $N$  個の標本  $\{U_{ens.1}, U_{ens.2}, \dots, U_{ens.N}\}$  を設定する。すなわち、先ず、 $N$  回中の  $ic$  回目の当該モンテカルロシミュレーションにおいて、標準一様分布に従う乱数  $u^{ic}$  を観測値の総数（変数 **sampleSizeObsExtremeData** の値、以降  $n$  と表記する）と同じだけ発生させ、これらの乱数から構成される標本  $U_{ens.}^{ic} = \{u^{ic}_1, u^{ic}_2, \dots, u^{ic}_n\}$  を作成する ( $ic=1, 2, \dots, N$ )。  $U_{ens.}^{ic}$  は、プログラム中では、**uniformDistDat[ic]** により表されている。この操作を  $N$  回行うことで得られる、 $N$  個の標本が  $\{U_{ens.1}, U_{ens.2}, \dots, U_{ens.N}\}$  である。

[6]では、[5]で作成した  $\{U_{ens.1}, U_{ens.2}, \dots, U_{ens.N}\}$  の順序統計量を求めている。すなわち、標本  $U_{ens.}^{ic}$  (**uniformDistDat[ic]**) の順序統計量は、**uniformDistDatLess[ic]** に格納される。ここで、**uniformDistDatLess[ic]** は  $\{u^{ic}_{(1)}, u^{ic}_{(2)}, \dots, u^{ic}_{(n)}\}$  により構成される。

[7]では、観測標本の大きさ（変数 **sampleSizeObsExtremeData** の値）は、変数  $n$  に改めて格納されている。この処理の目的は、以降のプログラムのスクリプトの量を削減することである。

[8]では、確率  $\alpha'$  を算出している。ここで、 $u^{ic}_{(i)}$  がもつ非超過確率と超過確率のうち、どちらか小さい方を確率  $\alpha'$  と定義する ( $i=1, 2, \dots, n$ )。[8]では、この操作を順序統計量 **uniformDistDatLess[ic]** に対して実行する。この操作で得られる **adatmin[ic]** は、{順序統計量の順位  $i$ , 順序統計量  $u^{ic}_{(i)}$  の実現値, 順序統計量  $u^{ic}_{(i)}$  がもつ確率  $\alpha'$ } という3つの要素をもつリストである。

[9]では、確率  $\alpha_{min}$  の標本を作成している。[8]で作成したリスト変数の **adatmin[ic]** のうち、確率  $\alpha'$  に相当する要素のみを抽出する。これにより、標準一様分布からのアンサンブル標本  $U_{ens.}^{ic}$  (**uniformDistDat[ic]**) ごとに  $n$  個の確率  $\alpha'$  を抽出できる。これら  $n$  個の確率のうち最小値を  $\alpha_{min}$  と定義する ( $\alpha_{min} = \text{Min}\{\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_n\}$ )。ここで、スクリプト中の **aminMin** は、 $N$  個の  $\alpha_{min}$  を格納するリストである。

[10]では、 $-\log_{10}(2\alpha_{min})$  の標本を作成している。 $\{\alpha_{min}(1), \alpha_{min}(2), \dots, \alpha_{min}(N)\}$  を得る。ここで、前章でも言及した通り、 $\alpha_{min}$  はオーダーが小さく（例えば、 $N=1000$  の場合、 $\alpha_{min}$  の平均値は  $10^{-2}$  オーダーである。）、これらの値を扱いやすくするため、 $N$  個の  $\alpha_{min}$  をそれぞれ  $-\log_{10}(2\alpha_{min})$  という関数形に変形する。プログラム中では、

### 第3章 確率限界法検定に基づく信頼区間・予測区間の構成手法と当該区間を導入した水文頻度解析

**grdataminMinonly** が  $N$  個の  $-\log_{10}(2\alpha_{min})$  すなわち、 $-\log_{10}(2\alpha_{min})$  の標本である。

[11]では、 $-\log_{10}(2\alpha_{min})$  の標本に当てはめた極値分布を求めている。 $-\log_{10}(2\alpha_{min})$  に極値分布を当てはめた理由を次に再記する。前述した  $n$  個の確率  $\{\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_n\}$  を変形し、標本  $\{-\log_{10}(2\alpha'_1), -\log_{10}(2\alpha'_2), \dots, -\log_{10}(2\alpha'_n)\}$  を得る。このとき、 $-\log_{10}(2\alpha_{min}) = \text{Max}\{-\log_{10}(2\alpha'_1), -\log_{10}(2\alpha'_2), \dots, -\log_{10}(2\alpha'_n)\}$  が成立するため、 $-\log_{10}(2\alpha_{min})$  はこの標本中の最大値となる。標本中の最大値は、サンプリング数が多いほど、極値分布に漸近的に従うため、 $N$  個の  $-\log_{10}(2\alpha_{min})$  に極値分布を当てはめることは妥当である。プログラム中では、最尤推定を実行可能なコマンド「**FindDistributionParameters**」を用いて、対象確率分布（本研究では、Gumbel 分布）の母数の最尤推定を求め、 $-\log_{10}(2\alpha_{min})$  の標本に当てはめた Gumbel 分布の位置母数を **probaAve**、尺度母数を **probaPar** に格納している。

[12]では、 $-\log_{10}(2\alpha_{min})$  の標本に当てはめた極値分布の確率表現関数の設定している。コマンド **InverseCDF** により、**probaPRF[u\_]** で表される  $-\log_{10}(2\alpha_{min})$  の標本に当てはめた Gumbel 分布 (**ExtremeValueDistribution[probaAve, probaPar]**) の確率表現関数を設定することができる。

[13]では、信頼係数の設定をしている。信頼係数の値は、リスト **accuracyOfPrediction** に格納されている。なお、**lengtha** は設定した信頼係数の総数である。

[14]では、確率  $\alpha$  (標準一様分布における棄却限界値がもつ累積確率) の算出している。両側確率  $(1-p)$  の場合、 $100(1-p)\%$  信頼区間の構成に必要な確率  $\alpha$  は、 $\chi_{\alpha}(p) = -\log_{10}(2\alpha)$  より、 $10^{\chi_{\alpha}(p)/2}$  となる。プログラム中において、確率  $\alpha$  はリスト **proba** に格納される。

[15]では、標準一様分布における確率限界値の算出している。ここで、 $F_{U(i)}(u) = \alpha$  の解  $u$  を「標準一様分布における下方確率限界値  $z_L(i)$ 」および  $F_{U(i)}(u) = 1 - \alpha$  の解  $u$  を「標準一様分布における上方確率限界値  $z_U(i)$ 」として定義する。すなわち、 $z_L(i)$  は母数  $(i, n-i+1)$  のベータ分布の  $100\alpha\%$  ile 値、 $z_U(i)$  は母数  $(i, n-i+1)$  のベータ分布の  $100(1-\alpha)\%$  ile 値である。プログラム中では、標準一様分布における下方確率限界値  $z_L(u)$  を **lower** というリストに格納し、上方確率限界値  $z_U(u)$  を **upper** というリストに格納している。両リストは、**zul** というリストに格納される。

[16]から[17]までは、観測値に当てはめた確率分布における確率限界値の導出する過程 (図 3-9 における[B]) を記述したスクリプトである。

[16]では、観測値に当てはめた確率分布の確率表現関数の設定している。**frequencyAnalysisModel** とは、観測値に当てはめを行う確率分布であり、本研究では、Gumbel 分布を採用している。コマンド **InverseCDF** により、任意の確率分布の確率表

### 第3章 確率限界法検定に基づく信頼区間・予測区間の構成手法と当該区間を導入した水文頻度解析

関数を設定することができる。

[17]では、観測値に当てはめた確率分布における確率限界値を算出している。区間 $[z_L(i), z_U(i)]$ は、確率変数列 $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ から求まる第 $i$ 順序統計量 $X_{(i)}$ の累積確率 $U_{(i)} (=F_X(X_{(i)}))$ が数学上取りうる幅である。確率表現関数 $\chi_X(u)$ に標準一様分布における確率限界値を代入することで $X_{(i)}$ の推定区間 $[\chi_X(z_L(i)), \chi_X(z_U(i))]$ を構成することができる。プログラム中では、観測値に当てはめた確率分布における上方確率限界値の標本は、**datimportantgreatgaisou** というリストに格納され、下方確率限界値の標本は、**datimportantsmallgaisou** というリストに格納される。

[18]から[19]までは、信頼限界線の母数を推定する過程（図3-9における[C]）を記述したスクリプトである。これらの手順により、信頼区間を導出することができる。

[18]では、上側信頼限界線の母数推定を行う。プログラム中では、上方確率限界値の標本（**datimportantgreatgaisou**）に、観測実績に当てはめた確率分布と同じ関数形で最尤推定（**FindDistributionParametes**）を行い、上側信頼限界線の母数を推定している。

[19]では、下側信頼限界線の母数推定を行う。プログラム中では、下方確率限界値の標本（**datimportantsmallgaisou**）に、観測実績に当てはめた確率分布と同じ関数形で最尤推定（**FindDistributionParametes**）を行い、下側信頼限界線の母数を推定している。

[18]と[19]を実行することで、任意の信頼係数（有意水準）に応じた信頼区間を構成することができる。

[20]から[21]までは、予測限界線の母数を推定する過程（図3-9における[D]）を記述したスクリプトである。これらの手順により、予測区間を導出することができる。

[20]では、上側予測限界線の母数推定を行う。プログラム中では、上方確率限界値の標本（**datimportantgreatgaisou**）に、良好な適合度を示す確率分布（本研究では、一般化極値分布）を当てはめ、上側予測限界線の母数を求めている。上側予測限界線の母数は、リスト **coefgreatgaisou** に格納される。

[21]では、下側予測限界線の母数推定を行う。プログラム中では、下方確率限界値の標本（**datimportantsmallgaisou**）に、良好な適合度を示す確率分布（本研究では、一般化極値分布）を当てはめ、下側予測限界線の母数を求めている。下側予測限界線の

### 第3章 確率限界法検定に基づく信頼区間・予測区間の構成手法と当該区間を導入した水文頻度解析

母数は、リスト **coefsmallgaisou** に格納される。

#### 3-6 統計的モンテカルロ法による確率限界法検定に基づく信頼区間の精度検証

本研究が提案する確率限界法検定による信頼区間の精度を検証するために、当該信頼区間と統計的モンテカルロ法により構成した信頼区間との比較を行った。なお、統計的モンテカルロ法による信頼区間は、仮定した確率分布に従う乱数を観測値の総数と同じ数だけサンプリングし、これらの乱数から構成される“統計的アンサンブルデータ”に当てはめた確率分布が与えるクオンタイル値（確率水文量）の分布から求めることができる。具体例を挙げると、同クオンタイル値の分布の 2.5%ile 値と 97.5%ile 値から成る区間が統計的モンテカルロ法による 95%信頼区間である。精度検証にあたり、実施した統計的モンテカルロ法の手順を次に示す。

(手順 1) : 利根川水系八斗島観測所における 54 年間分の年最大日降水量の観測値に当てはめた Gumbel 分布を求める。

(手順 2) : 観測値に当てはめた Gumbel 分布に従う乱数を 54 個（実際の観測値と同数）だけ発生させ、これら 54 個の乱数に当てはめた Gumbel 分布を求める。

(手順 3) : (手順 2)を 5000 回だけ繰り返す。この操作により、統計的アンサンブルデータに当てはめた Gumbel 分布を 5000 組得る。ここで、**図 3-9** は以上の手順で示した諸量を記入した確率紙を示したものである。

(手順 4) : 統計的アンサンブルデータに当てはめた Gumbel 分布が与えるクオンタイル値を用いて、対象確率年における確率水文量の分布を得る

(手順 5) : 確率水文量の分布が信頼区間に含まれる割合を算出する。なお、以降ではこの割合を被覆確率と表記する。

本研究では、確率年を 100 年、200 年、500 年、1000 年、5000 年および 10000 年とした場合における被覆確率を算出した。**図 3-10** は、信頼係数と被覆確率の関係を確率年別に示したものである。この図から、任意の信頼係数に着目し、被覆確率を比較すると、いずれの場合も、数%程度の変化が存在することが分かる。この結果は、本研究が提案する信頼区間の精度が確率年にほとんど依存しないことを示している。

**図 3-11** は 100 年確率水文量の分布と信頼区間の関係を示したものである。同図から、信頼限界値は、信頼係数  $p$  ( $0 < p < 1$ ) を大きくするほど、確率水文量の分布の 100  $((1-p)/2)$ %ile 値および 100  $(1-(1-p)/2)$ %ile 値に漸近するという特徴を有することが分かる。ここで、**図 3-10** より信頼区間の精度は確率年にほとんど依存しないことが示されており、この特徴は任意の確率年において成立することが分かる。以上の結果は、信頼係数  $p$  が 0.9 以上の場合、確率限界法検定による信頼区間と統計的モンテカルロ



第3章 確率限界法検定に基づく信頼区間・予測区間の構成手法と当該区間を導入した水文頻度解析

法による信頼区間はほとんど一致することを示すものである。すなわち、確率限界法検定を用いることで、極めて精度の良い信頼区間を構成可能であり、 $100p\%$ 上側信頼限界線上の確率水文量がもつ超過確率を $(1-p)/2$ として近似可能であることが示された。

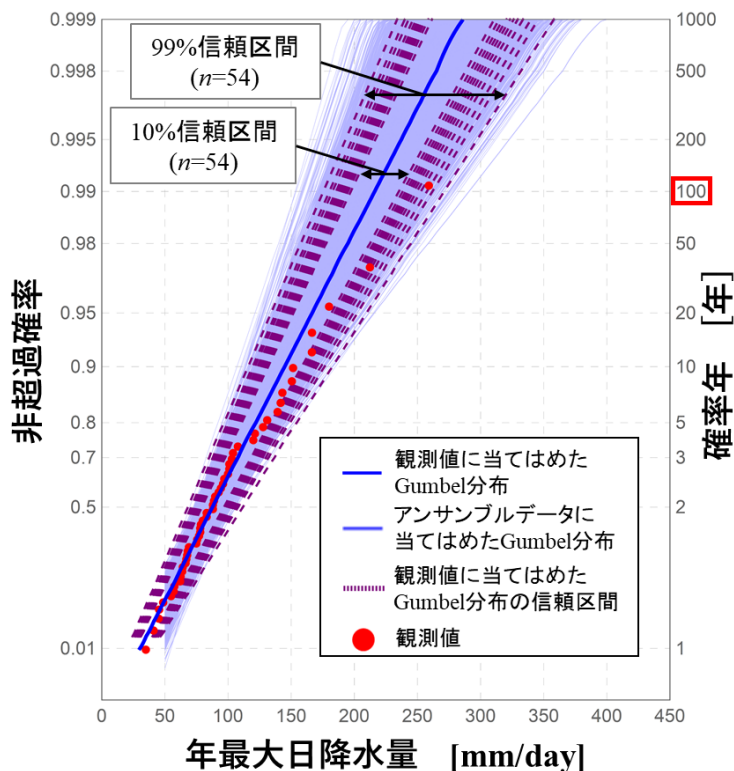


図 3-9 八斗島観測所における 54 年間分の年最大日降水量の観測値，これら 54 個の観測値に当てはめた Gumbel 分布（太実線），10,20,30,40,50,60,70,80,90,95,99%信頼区間（破線）および統計的アンサンブルデータに当てはめた Gumbel 分布（細実線，5000 組） ※ $n$  は観測値の総数である。

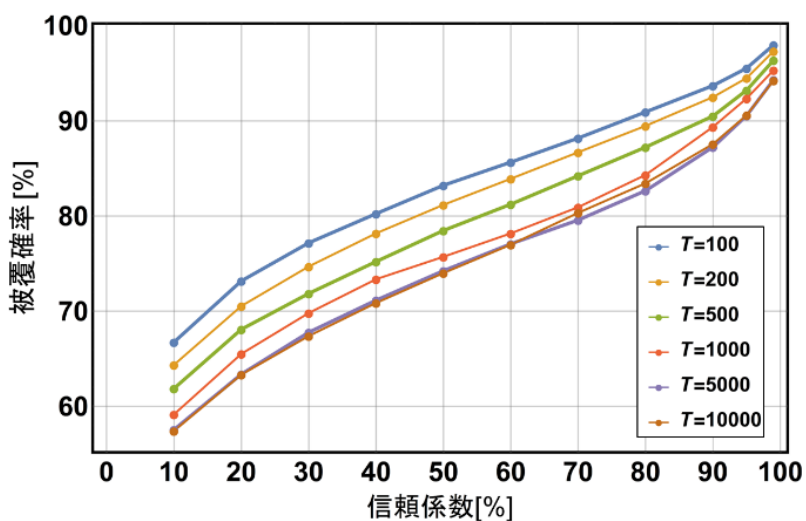


図 3-10 信頼係数と被覆確率の関係 ※凡例は確率年を表している。

### 第3章 確率限界法検定に基づく信頼区間・予測区間の構成手法と当該区間を導入した水文頻度解析

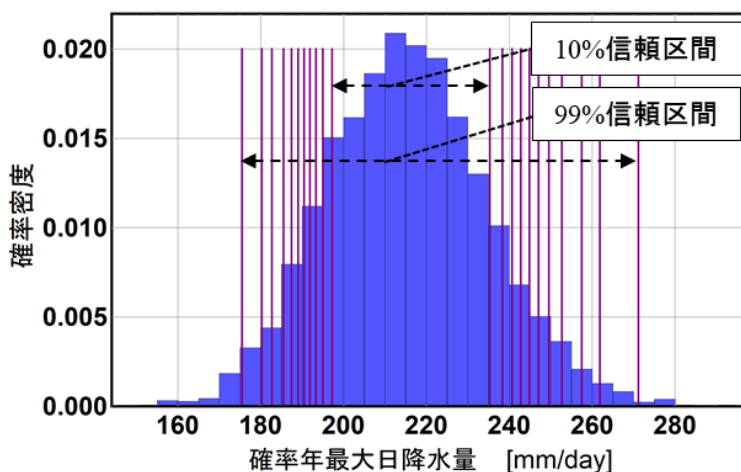


図 3-11 100 年確率水文学量の分布と信頼区間の関係

※同図には、10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 95, 99%信頼区間が示されている。

#### 3-7 確率分布モデルと信頼区間の関係

2-3 節では、Kolmogorov-Smirnov 検定の採択域は、仮定した確率分布の両端部で無限大の大きさとなることを示した。このため、Kolmogorov-Smirnov 検定に基づく信頼区間は、両端部で広がり、精度が甘くなる。このことに対して、本研究では確率限界法検定を用いた信頼区間を構成し、当該信頼区間が両端部に対して極めて高い精度を有することを示した。

本節では、確率分布モデルの選定が確率限界法検定に基づく信頼区間に及ぼす種々の影響を詳述する。また、本章では、利根川水系八斗島観測所における 54 年間分の年最大日降水量の観測値を解析用データと表記する。

図 3-12 は、解析用データおよび解析用データに当てはめた Gumbel 分布、確率限界法検定による当該 Gumbel 分布の 95 % 信頼区間を記入した確率紙を示したものである。また、図 3-13 は、解析用データおよび解析用データに当てはめた一般化極値分布、確率限界法検定による当該一般化極値分布の 95 % 信頼区間を記入した確率紙を示したものである。両図を用いて、確率分布モデルと信頼区間の関係を示す。図 3-12 から、Gumbel 分布は、解析用データ中の平均的値および下位データに対して良い適合度を示すが、上位データ（4 位～1 位）に対する適合度は良好でないことが分かる。換言すれば、Gumbel 分布は、標本の平均的値から外れる値に“引っ張られる”ことがないため、安定性が高い。Gumbel 分布の信頼区間は、一般化極値分を選定した場合のそれよりも狭まる。これは、Gumbel 分布の信頼限界線が確率限界値から構成される標本  $X_L = \{\chi_X(z_L(1)), \chi_X(z_L(2)), \dots, \chi_X(z_L(n))\}$  および  $X_U = \{\chi_X(z_U(1)), \chi_X(z_U(2)), \dots, \chi_X(z_U(n))\}$  の平均的値および下位データに適合するような分布形状となるためである。一

第3章 確率限界法検定に基づく信頼区間・予測区間の構成手法と当該区間を導入した水文頻度解析

方, 図 3-13 は, 一般化極値分布を採用した際の諸量を記入した確率紙を示したものである. 一般化極値分布は Gumbel 分布よりも母数が一つ多いため, Gumbel 分布では十分に当てはめることができなかつた上位データに対しても良好な適合度を示す. 一般化極値分布の信頼限界線は, 確率限界値から構成される標本  $X_L = \{\chi_X(z_L(1)), \chi_X(z_L(2)), \dots, \chi_X(z_L(n))\}$  と  $X_U = \{\chi_X(z_U(1)), \chi_X(z_U(2)), \dots, \chi_X(z_U(n))\}$  中の上位データにも良く適合するため, 広くなる.

上述した信頼区間の性質を踏まえ, 本研究が提案する確率分布モデル選択の考え方を次に示す. 我が国において蓄積されている水文量の観測極値は数十個多くとも百数十個程度である. 一方, 洪水対策の計画確率年は, 観測期間を大きく上回るものである. すなわち, 我々は, 現在までに蓄積されている限られたデータ数の下で, データが得られた期間よりもはるかに長い確率年に対する推定を行わなければならない. 上述したような限られたデータ数の下では, 標本中の上位データへの適合度を重視した確率分布モデルは, 過剰適合 (overfitting) となり, 計画確率年に対する推定誤差を大きくする可能性があると考えられる. したがって, 著者らは, 標本中の平均的値および下位データ (標本中に比較的好くある値) に対して当てはまりの良い確率分布モデルを選定することが極値統計学上自然であると考えている.

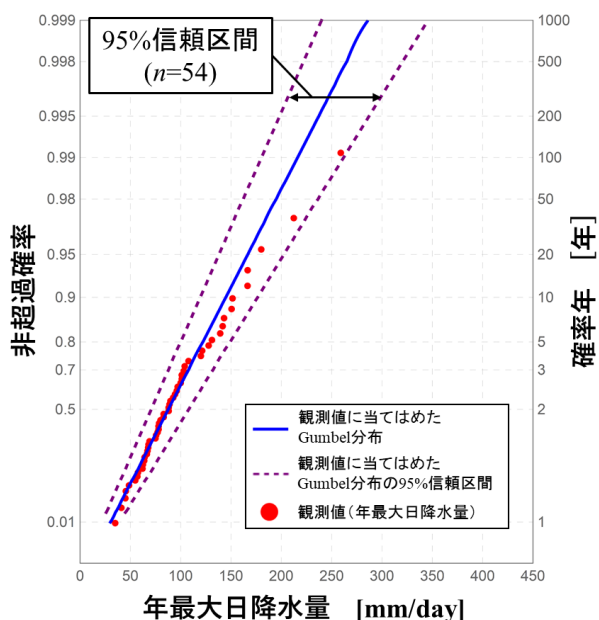


図 3-12 利根川水系八斗島観測所における 54 年間分の年最大日降水量の観測値, これら 54 個の観測値に当てはめた Gumbel 分布および確率限界法検定による当該 Gumbel 分布の 95%信頼区間 ※図中の  $n$  は観測値の総数を表す.

第3章 確率限界法検定に基づく信頼区間・予測区間の構成手法と当該区間を導入した水文頻度解析

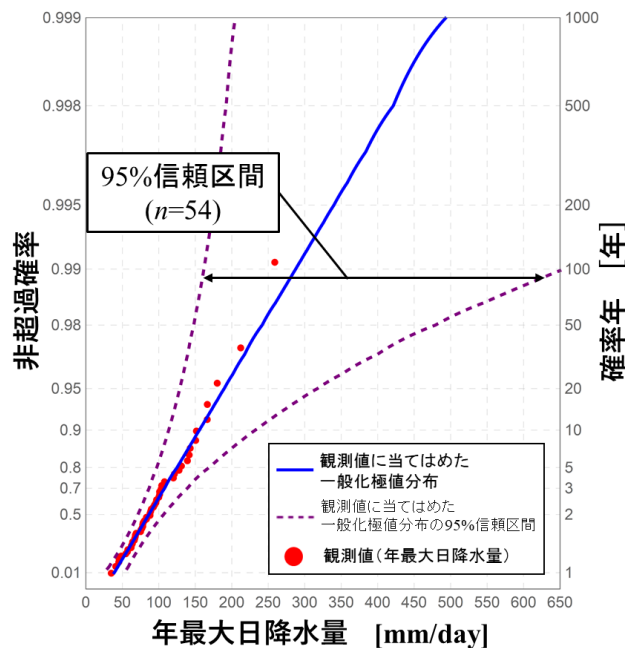


図 3-13 利根川水系八斗島観測所における 54 年間分の年最大日降水量の観測値，これら 54 個の観測値に当てはめた一般化極値分布および確率限界法検定による当該一般化極値分布の 95%信頼区間 ※図中の  $n$  は観測値の総数を表す。

### 3-8 サンプル数と信頼区間の関係

本節では，確率限界法検定に基づく信頼区間とサンプル数の関係を以下に示すモンテカルロシミュレーションを通して明らかにする．実施したモンテカルロシミュレーションの概要を以下に示す．

#### 【モンテカルロシミュレーション手順】

##### 【手順(1)】

利根川水系八斗島観測所における年最大日降水量の観測値に確率分布モデル  $D(X;\theta)$  を当てはめ，母数の推定値  $\hat{\theta}_{obs}$  を求め， $D(X;\hat{\theta}_{obs})$  を得る．

##### 【手順(2)】

$D(X;\hat{\theta}_{obs})$  に従う乱数を  $n$  個抽出し，これらの乱数から構成される標本を作成する．本章では，これらの乱数により構成される標本を“解析用データ”と表記する．本シミュレーションでは，サンプル数  $n=\{50, 100, 500, 1000, 5000\}$  の場合における解析用データを作成した．各サンプル数に応じた解析用データ群を  $\{X_①, X_②, X_③, X_④, X_⑤\}$  と表記する．以降では，便宜上， $\{n_{[1]}, n_{[2]}, n_{[3]}, n_{[4]}, n_{[5]}\}=\{50, 100, 500, 1000, 5000\}$  と表記する．このことにより， $X_①$  の標本サイズは  $n_{[1]}$ ， $X_②$  の標本サイズは  $n_{[2]}$ ， $X_③$  の標本サイズは  $n_{[3]}$ ， $X_④$  の標本サイズは  $n_{[4]}$ ， $X_⑤$  の標本サイズは  $n_{[5]}$  である．

### 第3章 確率限界法検定に基づく信頼区間・予測区間の構成手法と当該区間を導入した水文頻度解析

上記手順において、 $D(X; \hat{\theta}_{obs.})$ に従う乱数は、疑似的な年最大日降水量の観測値と捉えることができる。なお、手順(2)において、年最大降水現象の物理的条件を考慮するために、 $D(X; \hat{\theta}_{obs.})$ に従う乱数の上限値は450mm、下限値は30mmとした。

#### 【手順(3)】

確率分布モデル  $D(X; \theta)$  を上記解析用データ群  $\{X_{①}, X_{②}, X_{③}, X_{④}, X_{⑤}\}$  に当てはめ、母数の推定値  $\{\hat{\theta}_{[1]}, \hat{\theta}_{[2]}, \hat{\theta}_{[3]}, \hat{\theta}_{[4]}, \hat{\theta}_{[5]}\}$  を求める。

手順(3)により、各解析用データに当てはめた確率分布モデル  $\{D(X; \hat{\theta}_{[1]}), D(X; \hat{\theta}_{[2]}), D(X; \hat{\theta}_{[3]}), D(X; \hat{\theta}_{[4]}), D(X; \hat{\theta}_{[5]})\}$  を得る。

#### 【手順(4)】

$D(X; \hat{\theta}_{[i]})$  に従う乱数を  $n_{[i]}$  個抽出し、これらの乱数から構成される標本  $X^{j_{ens.}[i]} = \{x^j_{1,} x^j_{2,} \dots, x^j_{n_{[i]}}\}$  を得る。なお、以降では、 $X^{j_{ens.}}$  を統計的アンサンブルデータと表記する。上記操作を5000回試行し、5000個の統計的アンサンブルデータ  $\{X^1_{ens.}[i], X^2_{ens.}[i] \dots, X^{5000}_{ens.}[i]\}$  を得る。各統計的アンサンブルデータ  $X^{j_{ens.}[i]} (j=1, 2, \dots, 5000)$  に採用した確率分布モデル  $D(X; \theta)$  に当てはめ、母数  $\hat{\theta}^j_{ens.}[i] (j=1, 2, \dots, 5000)$  を推定し、 $D(X; \hat{\theta}^j_{ens.}[i] (j=1, 2, \dots, 5000))$  を得る。

#### 【手順(5)】

手順(4)を  $i=1 \sim 5$  に対して実行する。

上述したモンテカルロシミュレーションにおいて、確率分布モデル  $D(X; \theta)$  としては、Gumbel 分布および一般化極値分布を採用した。

以下の図群（図3-14～図3-18）は、八斗島観測所における54年間分の年最大日降水量の観測値に当てはめた確率分布  $D(X; \hat{\theta}_{obs.})$  に従う乱数、これらの乱数から成る解析用データ、解析用データに当てはめた確率分布  $D(X; \hat{\theta}_{[i]})$ 、統計的アンサンブルデータに当てはめた確率分布  $D(X; \hat{\theta}^j_{ens.}[i] (j=1, 2, \dots, 5000))$  および確率限界法検定に基づく10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 95, 99%信頼区間を示したものである。

以下の図群より、解析用データに当てはめた確率分布の周辺に統計的アンサンブルデータによる確率分布が引かれており、これらの確率分布群から成る幅は、サンプリング数  $n$  の増加に伴い収束していくことが分かる。このことは、サンプル数が多いほど、推定に内包される不確実性が減少し、推定精度が向上することを示している。例

### 第3章 確率限界法検定に基づく信頼区間・予測区間の構成手法と当該区間を導入した水文頻度解析

例えば、サンプリング数  $n=5000$  とすると、極めて安定した推論が可能となることを示しており、この結果は前述したサイコロを用いた数値実験の結論と一致する。一方で、現在までに蓄積されている観測極値の代表的値である  $n=50$  や  $n=100$  に着目すると、推定に内在する不確実性は依然として大きいことが分かる。この結果は、例えば、仮に気候が定常状態ならば、5000年後の水文学者は、信頼区間を考慮せずとも観測実績のみを用い、十分信頼性の高い推論が可能であることを示している。一方、現在、我々が利用可能なサンプリング数は限られていることから、推定に内在する不確実性を信頼区間により定量化することで合理的な評価が可能となることが分かる。

また、上記したモンテカルロシミュレーションにより、解析用データに当てはめた確率分布  $D(X; \hat{\theta}_{[i]})$  の振れ幅を表すことができる。この振れ幅は、統計的モンテカルロ法による信頼区間である。当該図群より、信頼係数の増加に伴い、確率限界法検定に基づく信頼区間は、統計的モンテカルロ法により表した信頼区間と適合していくことが分かる。これは、確率限界法検定に基づく信頼区間の精度は、サンプリング数にほとんど依存しないということを示している。

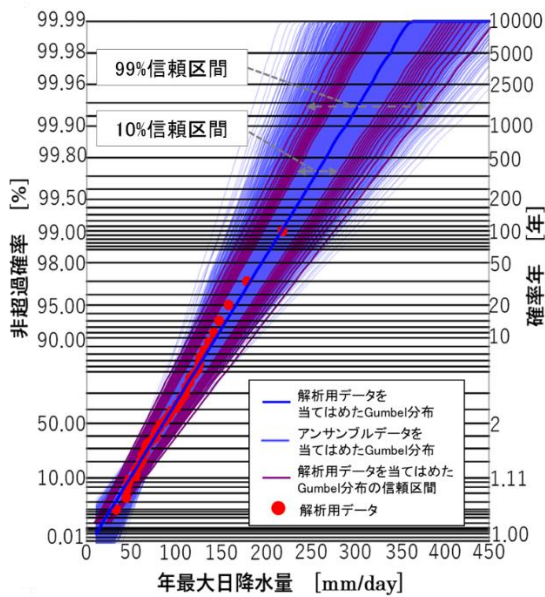


図 3-14(a) Gumbel 分布を採用した場合

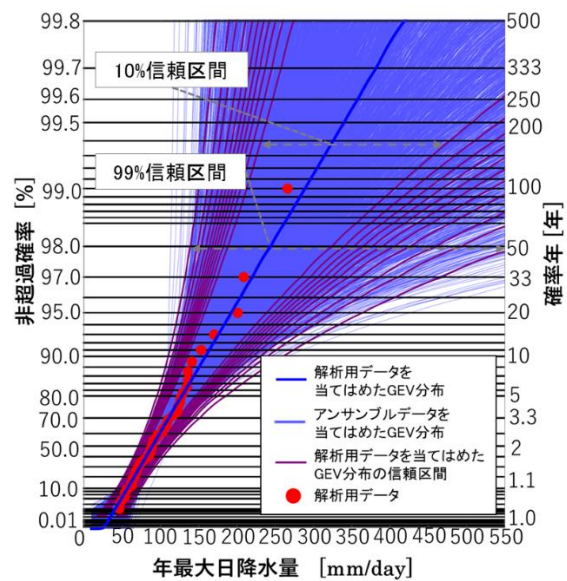


図 3-14(b) 一般化極値分布を採用した場合

図 3-14 サンプル数  $n=50$  の場合における確率分布モデルと信頼区間の関係

同図には、八斗島観測所における 54 年間分の年最大日降水量の観測値に当てはめた確率分布  $D(X; \hat{\theta}_{obs})$  に従う 50 個の乱数、これらの乱数から成る解析用データに当てはめた確率分布  $D(X; \hat{\theta}_{[i]})$ 、統計的アンサンブルデータに当てはめた確率分布  $D(X; \hat{\theta}_{ens.}^j [1]_{(j=1,2,\dots,5000)})$  および確率限界法検定に基づく 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 95, 99% 信頼区間を記入した。

※図 3-14 (a)は  $D(X; \theta)$  として Gumbel 分布を採用した場合、図 3-14 (b)は  $D(X; \theta)$  として一般化極値分布を採用した場合における水文頻度解析結果を示している。

第3章 確率限界法検定に基づく信頼区間・予測区間の構成手法と当該区間を導入した水文頻度解析

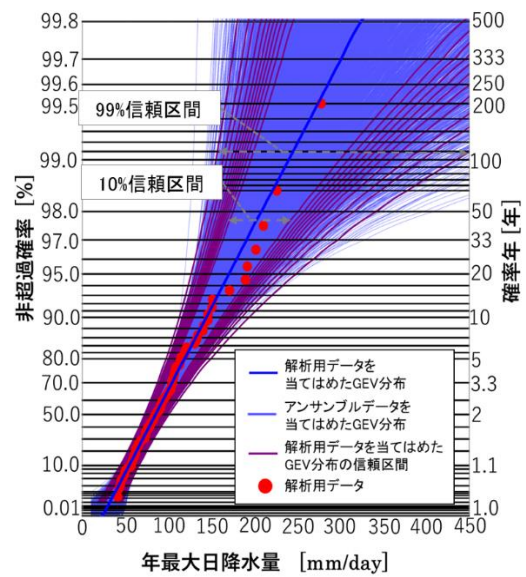
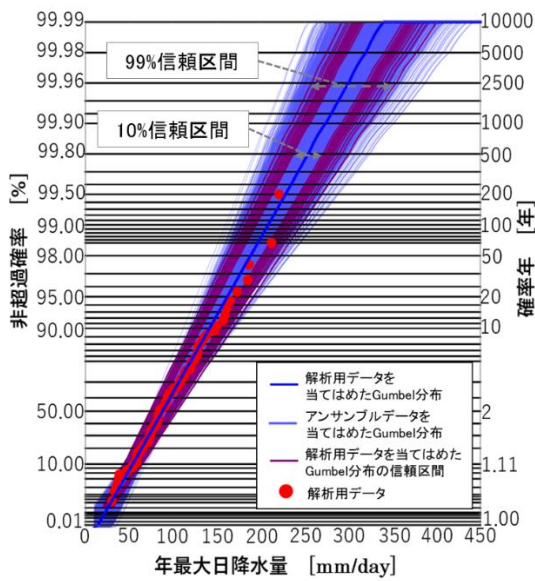


図 3-15(a) Gumbel 分布を採用した場合

図 3-15(b) 一般化極値分布を採用した場合

図 3-15 サンプル数  $n=100$  の場合における確率分布モデルと信頼区間の関係

同図には、八斗島観測所における 54 年間分の年最大日降水量の観測値に当てはめた確率分布  $D(X; \hat{\theta}_{obs})$  に従う 100 個の乱数、これらの乱数から成る解析用データに当てはめた確率分布  $D(X; \hat{\theta}_{[2]})$ 、統計的アンサンブルデータに当てはめた確率分布  $D(X; \hat{\theta}_{ens.}^j [2]_{(j=1,2,\dots,5000)})$  および確率限界法検定に基づく 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 95, 99% 信頼区間を記入した。

図 3-15(a) は  $D(X; \theta)$  として Gumbel 分布を採用した場合、図 3-15(b) は  $D(X; \theta)$  として一般化極値分布を採用した場合における水文頻度解析結果を示している。

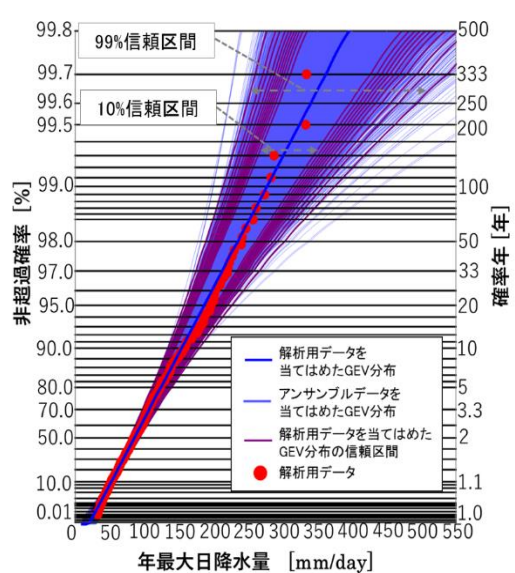
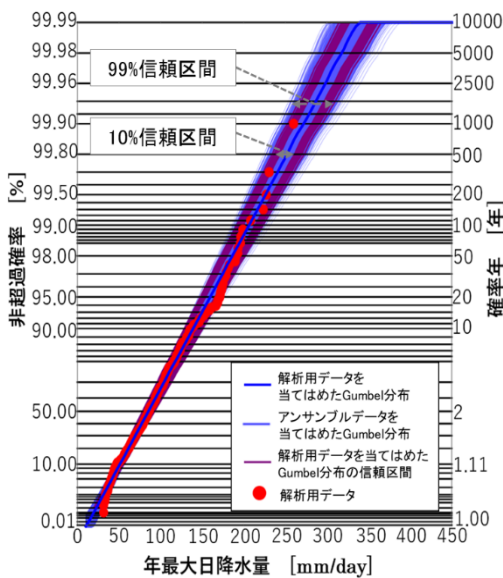


図 3-16(a) Gumbel 分布を採用した場合

図 3-16(b) 一般化極値分布を採用した場合

図 3-16 サンプル数  $n=500$  の場合における確率分布モデルと信頼区間の関係

同図には、八斗島観測所における 54 年間分の年最大日降水量の観測値に当てはめた確率分布  $D(X; \hat{\theta}_{obs})$  に従う 500 個の乱数、これらの乱数から成る解析用データに当てはめた確率分布  $D(X; \hat{\theta}_{[3]})$ 、統計的アンサンブルデータに当てはめた確率分布  $D(X; \hat{\theta}_{ens.}^j [3]_{(j=1,2,\dots,5000)})$  および確率限界法検定に基づく 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 95, 99% 信頼区間を記入した。

図 3-16(a) は  $D(X; \theta)$  として Gumbel 分布を採用した場合、図 3-16(b) は  $D(X; \theta)$  として一般化極値分布を採用した場合における水文頻度解析結果を示している。

### 第3章 確率限界法検定に基づく信頼区間・予測区間の構成手法と当該区間を導入した水文頻度解析

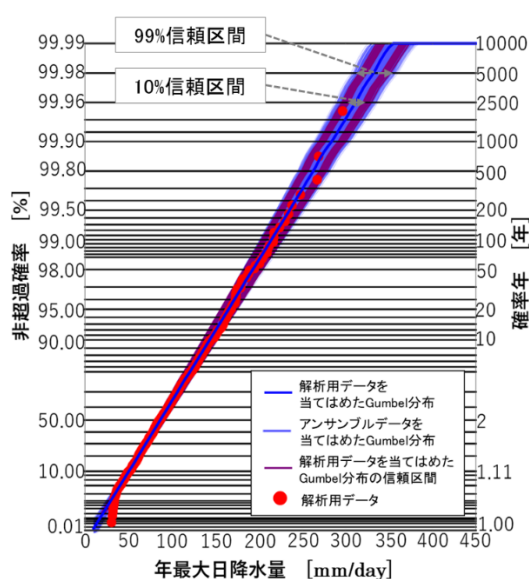


図 3-17(a) Gumbel 分布を採用した場合

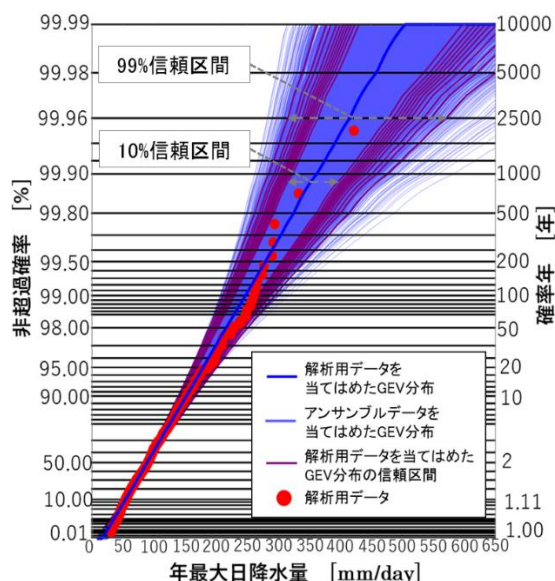


図 3-17(b) 一般化極値分布を採用した場合

図 3-17 サンプル数  $n=1000$  の場合における確率分布モデルと信頼区間の関係

同図には、八斗島観測所における 54 年間分の年最大日降水量の観測値に当てはめた確率分布  $D(X; \hat{\theta}_{obs})$  に従う 1000 個の乱数、これらの乱数から成る解析用データに当てはめた確率分布  $D(X; \hat{\theta}_{[4]})$ 、統計的アンサンブルデータに当てはめた確率分布  $D(X; \hat{\theta}_{ens}^j [4]_{(j=1,2,\dots,5000)})$  および確率限界法検定に基づく 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 95, 99% 信頼区間を記入した。

図 3-17(a) は  $D(X; \theta)$  として Gumbel 分布を採用した場合、図 3-17(b) は  $D(X; \theta)$  として一般化極値分布を採用した場合における水文頻度解析結果を示している。

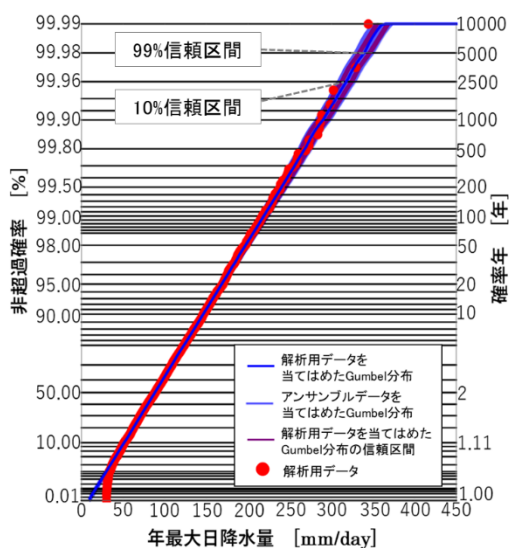


図 3-18(a) Gumbel 分布を採用した場合

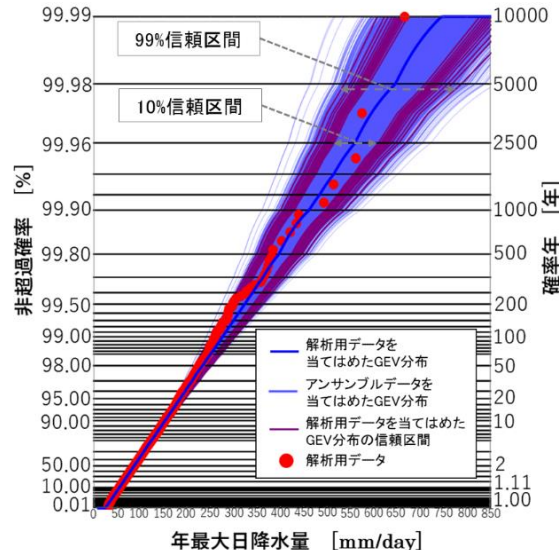


図 3-18(b) 一般化極値分布を採用した場合

図 3-18 サンプル数  $n=5000$  の場合における確率分布モデルと信頼区間の関係

同図には、八斗島観測所における 54 年間分の年最大日降水量の観測値に当てはめた確率分布  $D(X; \hat{\theta}_{obs})$  に従う 5000 個の乱数、これらの乱数から成る解析用データに当てはめた確率分布  $D(X; \hat{\theta}_{[5]})$ 、統計的アンサンブルデータに当てはめた確率分布  $D(X; \hat{\theta}_{ens}^j [5]_{(j=1,2,\dots,5000)})$  および確率限界法検定に基づく 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 95, 99% 信頼区間を記入した。

図 3-18(a) は  $D(X; \theta)$  として Gumbel 分布を採用した場合、図 3-18(b) は  $D(X; \theta)$  として一般化極値分布を採用した場合における水文頻度解析結果を示している。



### 3-9 確率限界法検定に基づく信頼区間の被覆確率の性質

本節では、サンプリング数及び確率分布モデルが信頼区間の“被覆確率（以降では被覆率とも表記する）”に与える影響を明らかにする。そのために、3-8節の図群に示している各確率紙において、100年確率、200年確率、500年確率、1000年確率における確率水文量の分布が信頼区間に含まれる割合（被覆確率）を算出した。表3-2～表3-5は、Gumbel分布を頻度解析モデルとして採用した際、上記した確率年における被覆確率をサンプリング数別に示したものである。表3-6～表3-9は、一般化極値分布を頻度解析モデルとして採用した際、上述した確率年における被覆確率をサンプリング数別に示したものである。

これらの表から、サンプリング数の増加に伴い、被覆確率が若干ではあるが増加していくことが分かる。また、信頼係数の増加に伴い、その信頼係数の値は、被覆確率に漸近していく。この結果は、信頼係数として1に近い値（例えば、0.9以上の値）を選定した際、その信頼係数に応じた信頼区間は、統計的アンサンブルデータによる確率水文量の振れ幅にほとんど一致することを示している。このことにより、ある程度の信頼係数（例えば、0.9以上の信頼係数）を設定すれば、 $100(1-p)\%$ 信頼区間において、 $100(1-p)\%$ 下側信頼限界線が与える確率水文量を統計的アンサンブルデータにより定まる確率水文量の分布における $100(p/2)\%$ ile値ならびに $100(1-p)\%$ 上側信頼限界線が与える確率水文量を同分布における $100(1-p/2)\%$ ile値として、近似可能であることを示している。このため、信頼限界値の生起リスクの評価手法（ $T$ 年確率信頼限界値の生起リスクを「対象確率年」と「信頼区間の超過確率」との積により表すこと）は、サンプリング数および採用した確率分布モデルにほとんど依存せずに成立することが示された。

信頼係数: 10%		確率年			
		100年	200年	500年	1000年
サン プ リ ン グ 数	50	64.7%	62.2%	58.8%	58.0%
	100	68.0%	67.0%	66.5%	65.4%
	500	72.8%	70.6%	70.6%	68.9%
	1000	79.0%	76.8%	74.9%	73.0%
	5000	81.1%	78.8%	76.6%	74.0%

表3-2 図3-14～図3-18における10%信頼区間の被覆確率  
(頻度解析モデルとしてGumbel分布を選定した場合)

第3章 確率限界法検定に基づく信頼区間・予測区間の構成手法と当該区間を導入した水文頻度解析

信頼係数:50%		確率年			
		100年	200年	500年	1000年
サンプリング数	50	82.0%	79.7%	75.9%	74.3%
	100	84.7%	83.0%	81.6%	80.7%
	500	85.7%	84.5%	84.3%	83.0%
	1000	90.0%	88.5%	86.7%	85.6%
	5000	91.2%	90.1%	88.3%	85.9%

表 3-3 図 3-14~図 3-18 における 50%信頼区間の被覆確率  
(頻度解析モデルとして Gumbel 分布を選定した場合)

信頼係数:95%		確率年			
		100年	200年	500年	1000年
サンプリング数	50	95.1%	93.9%	92.0%	91.4%
	100	95.4%	95.0%	94.0%	93.6%
	500	96.8%	95.8%	96.0%	95.4%
	1000	97.8%	97.3%	96.3%	95.9%
	5000	98.1%	97.6%	96.8%	96.1%

表 3-4 図 3-14~図 3-18 における 95%信頼区間の被覆確率  
(頻度解析モデルとして Gumbel 分布を選定した場合)

信頼係数:99%		確率年			
		100年	200年	500年	1000年
サンプリング数	50	97.4%	96.5%	95.9%	94.7%
	100	97.6%	97.2%	96.8%	96.4%
	500	98.5%	98.5%	98.1%	97.8%
	1000	99.3%	99.0%	98.4%	98.2%
	5000	99.1%	98.8%	98.5%	97.7%

表 3-5 図 3-14~図 3-18 における 99%信頼区間の被覆確率  
(頻度解析モデルとして Gumbel 分布を選定した場合)

第3章 確率限界法検定に基づく信頼区間・予測区間の構成手法と当該区間を導入した水文頻度解析

信頼係数: 10%		確率年			
		100年	200年	500年	1000年
サン プ リ ン グ 数	50	66.9%	63.5%	61.2%	59.8%
	100	70.2%	67.1%	64.4%	62.5%
	500	77.3%	75.0%	72.0%	70.9%
	1000	77.4%	75.6%	71.6%	71.2%
	5000	84.6%	80.0%	79.7%	76.0%

表 3-6 図 3-14~図 3-18 における 10%信頼区間の被覆確率  
(頻度解析モデルとして一般化極値分布を選定した場合)

信頼係数:50%		確率年			
		100年	200年	500年	1000年
サン プ リ ン グ 数	50	83.7%	81.2%	78.7%	77.3%
	100	85.5%	83.1%	80.6%	78.2%
	500	90.4%	88.8%	86.7%	85.5%
	1000	88.3%	88.3%	84.6%	84.5%
	5000	93.3%	90.0%	90.3%	88.2%

表 3-7 図 3-14~図 3-18 における 50%信頼区間の被覆確率  
(頻度解析モデルとして一般化極値分布を選定した場合)

信頼係数:95%		確率年			
		100年	200年	500年	1000年
サン プ リ ン グ 数	50	96.2%	94.0%	93.3%	93.1%
	100	96.9%	95.8%	94.4%	93.3%
	500	98.4%	97.6%	96.6%	96.2%
	1000	97.4%	97.3%	95.5%	95.5%
	5000	99.0%	97.5%	97.7%	96.4%

表 3-8 図 3-14~図 3-18 における 95%信頼区間の被覆確率  
(頻度解析モデルとして一般化極値分布を選定した場合)

第3章 確率限界法検定に基づく信頼区間・予測区間の構成手法と当該区間を導入した水文頻度解析

信頼係数:99%		確率年			
		100年	200年	500年	1000年
サンプリング数	50	98.2%	97.0%	96.2%	95.9%
	100	98.9%	98.1%	97.6%	96.6%
	500	99.4%	99.2%	98.6%	98.1%
	1000	99.1%	99.0%	98.1%	98.0%
	5000	100%	99.2%	99.2%	98.7%

表 3-9 図 3-14~図 3-18 における 99%信頼区間の被覆確率  
(頻度解析モデルとして一般化極値分布を選定した場合)

### 3-10 確率降雨量の信頼区間の導入した流出解析に基づく確率流量の不確実性評価

前章において述べたように、利用可能な水文量の観測極値は限られているため、これらのデータを基に推定した水文統計量（確率水文量、モデル母数等）に内在する不確実性は、数理統計学的観点から極めて大きいといえる。第二章では、確率限界法検定を応用し信頼区間を構成するとともに、当該信頼区間による確率水文量の不確実性評価手法を提示した。本章では、同手法を降雨流出解析に適用し、確率洪水ピーク流量の信頼限界値が生起するリスクを定量化する手法を示す。この手法により、大規模な洪水ピーク流量の生起リスクを定量化することができる。

#### 3-10-1 確率降雨量の信頼区間を考慮した降雨流出解析

本節の概要を次に示す。過去に生起した洪水イベントにおける実測降雨波形を確率年最大総降雨量およびその上側信頼限界値まで引き伸ばし、確率降雨波形を求める。次に、当該確率降雨波形を入力降雨とした流出計算を実施する。なお、対象流域を草木ダム流域である。ここで、草木ダムの流域図を図 3-19 に示す。上述した流出計算により、確率年最大総降雨量の不確実性が確率洪水ピーク流量に及ぼす影響を定量化することができる。

極値統計解析に使用した水文資料は、草木ダム流域において、1977年から2017年に渡る41年間分の年最大総降雨量の観測値であり、これらの観測値の時系列を図 3-20 に示す。また、図 3-21 に対象流域における41年間分の年最大総降雨量の観測値、これら41個の観測値に最尤法を用いて当てはめた Gumbel 分布および確率限界法検定を応用し導出した当該 Gumbel 分布の 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 95, 99%信頼区間を示す。

第3章 確率限界法検定に基づく信頼区間・予測区間の構成手法と当該区間を導入した水文頻度解析

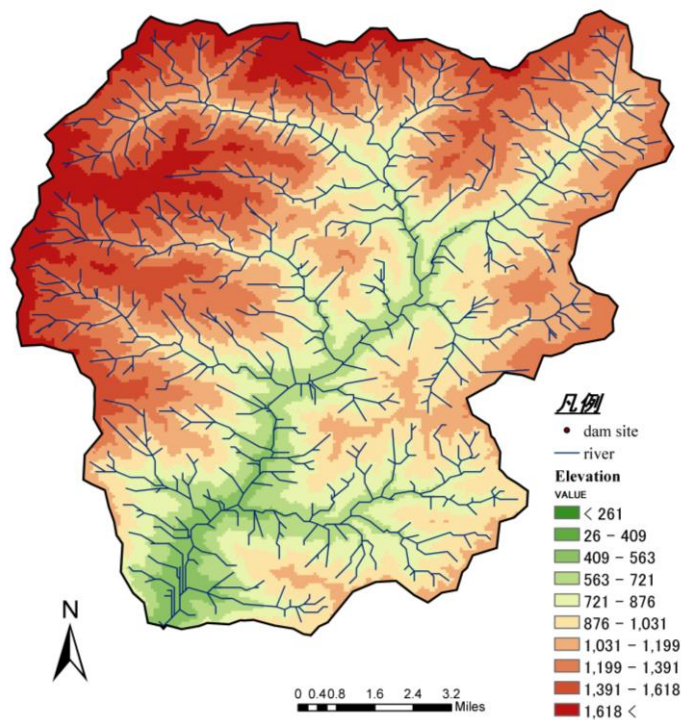


図 3-19 草木ダム流域の流域図 ※草木ダム流域の諸元：流域面積：254 km<sup>2</sup>，標高：440 m (堤頂標高)

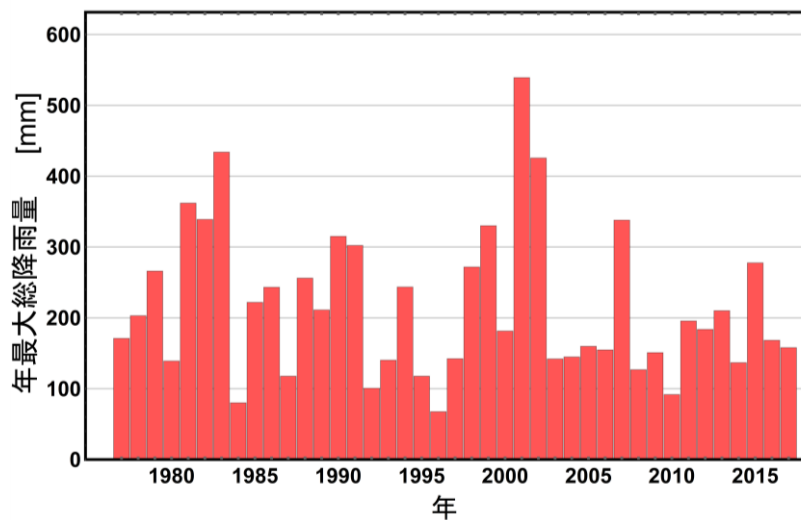


図 3-20 草木ダム流域における 1977 年から 2017 年に渡る 41 年間分の年最大総降雨量の観測値時系列

第3章 確率限界法検定に基づく信頼区間・予測区間の構成手法と当該区間を導入した水文頻度解析

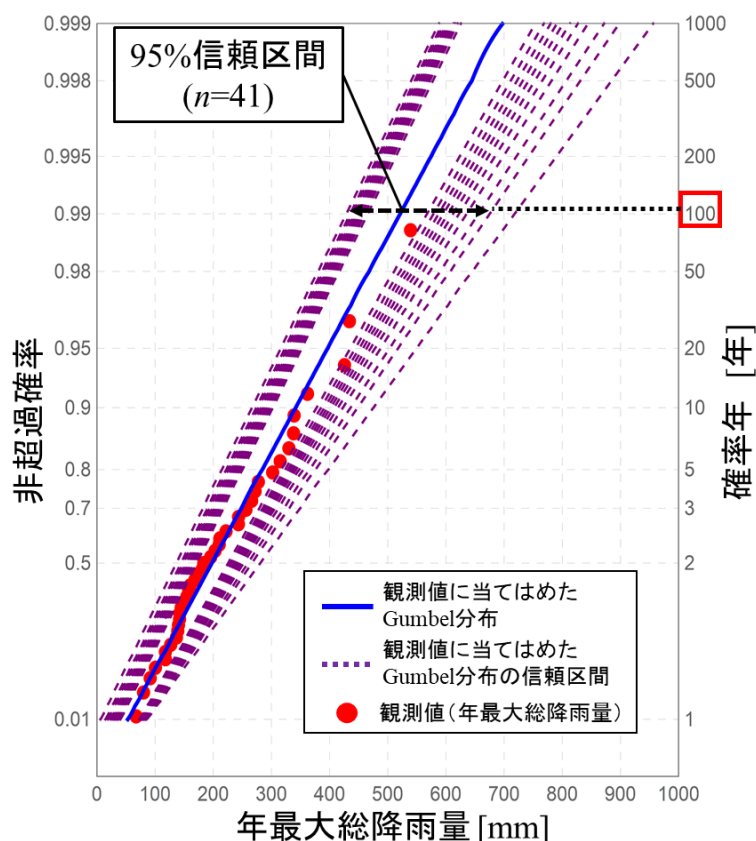


図 3-21 草木ダム流域における 41 年間分の年最大総降雨量の観測値およびこれら 41 個の観測値に当てはめた Gumbel 分布，確率限界法検定に基づく当該 Gumbel 分布の 10%，20%，30%，40%，50%，60%，70%，80%，90%，95%，99%信頼区間

※ $n$  は観測値の総数を表す。また，同図では，観測値に当てはめた Gumbel 分布の側から順に 10%，20%，30%，40%，50%，60%，70%，80%，90%，95%，99%信頼区間が示されている。

(1) 降雨流出計算の概要

流出計算では，吉見・山田（2014）により提案された「鉛直浸透機構を考慮した降雨流出モデル」を用いた。本節では，当該モデルの概要を示す。山田（2003）は流域の最小スケールを単一斜面とみなし，斜面流下方向流れを Kinematic Wave として扱い，単一斜面における一般化した降雨流出の基礎式を導出した。さらに，吉見・山田（2014）は複数の層により山腹斜面が構成されているとして，浸透量および雨量の連続関係に着目し， $n$  層目における鉛直浸透現象を定式化した。その概要を次に示す。 $n-1$  層から  $n$  層目への浸透量  $V_{n-1}(=b_{n-1}s_{n-1})$ ， $n$  層目から  $n+1$  層目への浸透量  $V_n(=b_ns_n)$  と各層における流出に寄与する雨量（流出に寄与する降雨量）の連続関係から式(3-2)が得る。

$$\frac{dS_n}{dt} = V_{n-1} - r_{nm} - V_n \quad (3-2)$$

第3章 確率限界法検定に基づく信頼区間・予測区間の構成手法と当該区間を導入した水文頻度解析

$$\begin{cases} r_{nm} = 0 & (s_n < h_{nm}) \\ r_{nm} = a_{nm}(s_n - h_{nm}) & (s_n > h_{nm}) \end{cases} \quad (3-3)$$

各層の流出に寄与する降雨量は式(3-3)より土層内水位  $s_n$  が各層の保水力  $h_{nm}$  を超えた時点で発生する。また、鉛直方向への浸透量  $V_n$  と土層内水位  $s_n$  には比例関係が成立する。加えて、鉛直浸透機構における各層の側方成分は、流出に寄与する降雨量として式(3-4)の入力降雨として与える。すなわち、式(3-2)における  $r_{nm}$  を式(3-4)に示す基礎式に斜面流出に寄与する降雨として与えることで一連の斜面計算を行う。

$$\frac{dq_{nm}}{dt} = \alpha_{nm} q_{nm}^{\beta_{nm}} (r_{nm} - q_{nm}) \quad (3-4)$$

吉見・山田により提案された鉛直浸透機構は、降雨が流出に寄与するまでの遅れ時間や損失雨量を表現することができる。ここに、 $n$ ：層数、 $m$ ：各層における側方成分の番号、 $q_{nm}$ ：流出高[mm/h]（表層から数えて  $n$  層目の上から  $m$  番目の流出成分）、 $s_n$ ：各層の土壌内水位[mm]、 $a_{nm}$ 、 $b_n$ ：各側方成分、浸透成分の比例定数[1/h]、 $h_{nm}$ ：流出成分発生の際値[mm]、 $r_{nm}$ ：有効降雨量[mm/h]、 $V_n$ ：鉛直浸透量[mm/h]である。

流出計算で用いた「鉛直浸透機構を考慮した流出モデル」の構造は2段3層構造とした。このモデルの概念図を図3-22に示す。また、当該モデルのパラメータとしては、諸岡・山田（2017）により、過去の洪水イベントを対象として同定されたものを用いた。なお、流量  $Q(t)$  は式(3-5)により求めた。

$$Q(t) = (q_{11}(t) + q_{12}(t) + q_{21}(t)) \times A / 3.6 \quad (3-5)$$

ここに、 $(q_{11}(t) + q_{12}(t) + q_{21}(t))$ ：総流出高[mm/h]、 $A$ ：流域面積[km<sup>2</sup>]である。

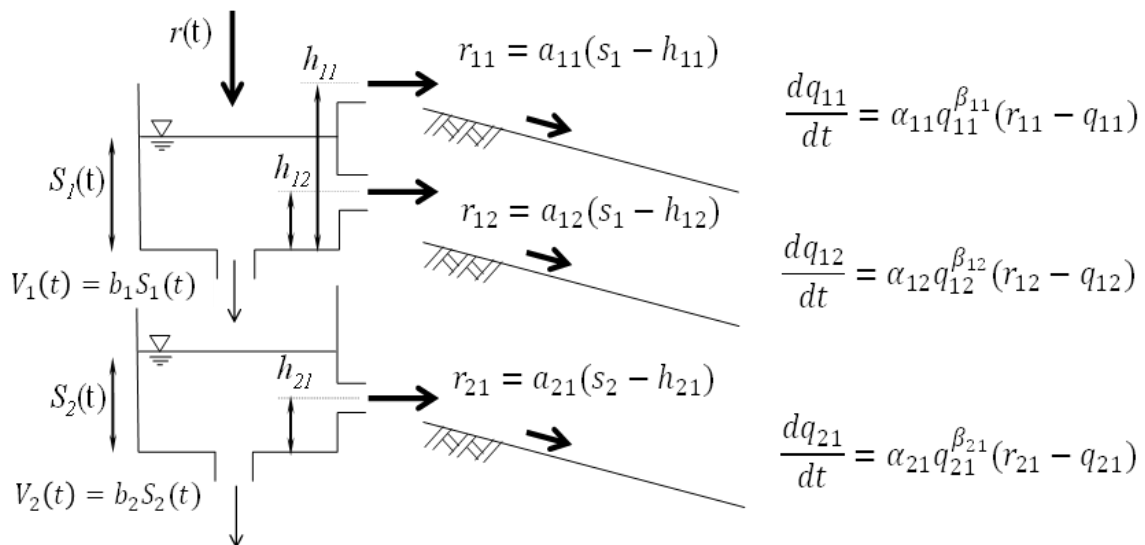


図3-22 鉛直浸透機構を考慮した2段3層構造の降雨流出モデルの概念図

※図中に示す  $r(t)$  は実測降雨強度、 $r_{nm}(t)$  は斜面計算に寄与する雨量を表している。また、当該モデルのパラメータの総数は14である。

## (2) 降雨流出計算の結果

草木ダム流域における過去の洪水イベントでの実測降雨を 100 年確率年最大総降雨量およびその  $100(1-p)\%$  上側信頼限界値まで引き伸ばし、100 年確率降雨強度およびその  $100(1-p)\%$  上側信頼限界値を求め、これらを入力降雨とした流出計算を行った。信頼係数は  $(1-p)$  ( $0 < p < 1$ ) である。ここで、図 3-21 に示す極値統計解析結果より、対象流域における 100 年確率年最大総降雨量は 521.3mm、その 95% 上側信頼限界値は 675.4mm である。図 3-23、図 3-24 および図 3-25 のハイエトグラフはそれぞれ 1983 年 8 月洪水、1990 年 8 月洪水および 2002 年 7 月洪水における実測降雨強度、100 年確率降雨強度およびその 95% 上側信頼限界値を示しており、同図群におけるハイドログラフは上述した各降雨時系列を入力として降雨流出モデルに与え、出力された総流出高より算出した流量、100 年確率流量およびその 95% 上側信頼限界値である。

$T_R$  年確率降雨強度  $r_{prob}(t, T_R)$  は、実測降雨強度  $r(t)$  を当該降雨の総降雨量  $(\sum_{t=1}^T r(t))$  で除した後、 $T_R$  年確率年最大総降雨量  $R_{prob}(T_R)$  を乗ずることで求めた。また、本研究では、 $T_R$  年確率降雨強度の  $100(1-p)\%$  上側信頼限界値を、実測降雨強度  $r(t)$  を当該降雨の総降雨量  $(\sum_{t=1}^T r(t))$  で除した後、 $T_R$  年確率年最大総降雨量の  $100(1-p)\%$  上側信頼限界値  $R_{prob}(T_R, p)$  を乗じ、算出される降雨強度  $r_{prob}(t, T_R, p)$  として定義した。以上より、 $T_R$  年確率降雨強度の  $100p\%$  上側信頼限界値  $r_{prob}(t, T_R, p)$  は式(3-6)より表される。

$$r_{prob}(t, T_R, p) = \frac{r(t)}{\sum_{t=1}^T r(t)} R_{prob}(T_R, p) \quad (3-6)$$

ここに、 $p$  : 有意水準 ( $0 < p < 1$ )、 $t$  : 時間 [hour]、 $T$  : 降雨継続時間 [hour]、 $r(t)$  : 実測降雨強度 [mm/h]、 $R_{prob}(T_R)$  :  $T_R$  年確率年最大総降雨量 [mm]、 $R_{prob}(T_R, p)$  :  $T_R$  年確率年最大総降雨量の  $100(1-p)\%$  上側信頼限界値 [mm]、 $r_{prob}(t, T_R, p)$  :  $T_R$  年確率降雨強度の  $100(1-p)\%$  上側信頼限界値 [mm/h] である。

以下に、各洪水イベントを対象として求めた確率降雨波形と確率ピーク流量の関係を示す。

- ・ 図 3-23 に示すハイエトグラフでは、降雨継続時間が他の洪水イベントのものよりも長期に渡り、短時間で強降雨強度が生起している。ここで、同図が示す降雨波形の形状を「長時間継続型」とする。長時間継続型の確率降雨波形を入力降雨として降雨流出モデルに与え、算出された確率ピーク流量は他の型の確率降雨波形を入力し算出された確率ピーク流量よりも小さくなる傾向がある。

- ・ 図 3-24 に示すハイエトグラフには比較的短い降雨継続時間の後半に強降雨強度帯が存在する。ここで、同図が示す降雨波形の形状を「短時間後方集中型」とする。短



第3章 確率限界法検定に基づく信頼区間・予測区間の構成手法と当該区間を導入した水文頻度解析

時間後方集中型の確率降雨波形を入力として降雨流出モデルに与え算出される確率ピーク流量は、他の型の確率降雨波形を入力降雨として与え算出された確率ピーク流量よりも大きくなる傾向がある。

・図3-25に示すハイエトグラフには強降雨強度帯が局所的に複数存在する。ここで、同図が示す降雨波形の形状を「多峰型」とする。同図から100年確率ピーク流量の生起時刻と100年確率ピーク流量の95%上側信頼限界値の生起時刻が一致していないことが分かる。この事柄は、「多峰型」の降雨波形では、降雨流出現象の非線形のため、確率ピーク流量とその信頼限界値が生起する時刻が変化する場合があることを示唆している。

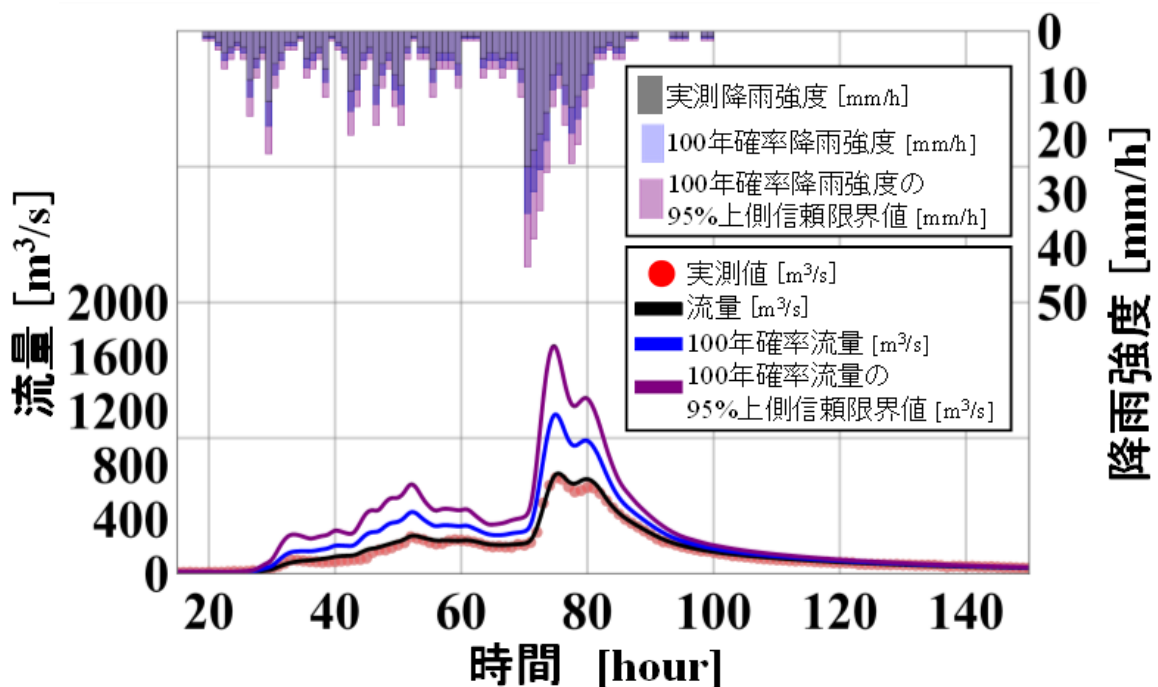


図3-23 草木ダム流域における1983年8月洪水の実績降雨を100年確率年最大総降雨量およびその95%上側信頼限界値まで引き伸ばした確率降雨波形を入力とした際の流出計算の結果  
 ※同図において、算出したピーク流量は731.5 m<sup>3</sup>/s、100年確率ピーク流量は1173.2 m<sup>3</sup>/s、100年確率ピーク流量の95%上側信頼限界値は1663.0 m<sup>3</sup>/sである。

第3章 確率限界法検定に基づく信頼区間・予測区間の構成手法と当該区間を導入した水文頻度解析

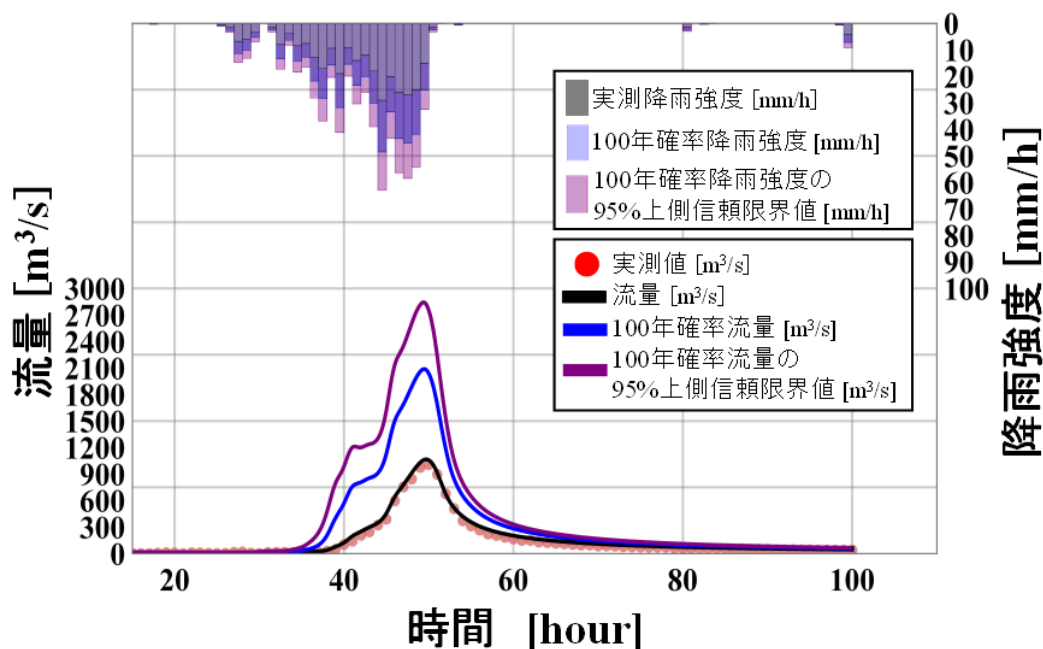


図 3-24 草木ダム流域における 1990 年 8 月洪水の実績降雨を 100 年確率年最大総降雨量およびその 95%上側信頼限界値まで引き伸ばした確率降雨波形を入力とした際の流出計算の結果  
 ※同図において、算出したピーク流量は 1056.9 $m^3/s$ ，100 年確率ピーク流量は 2059.4  $m^3/s$ ，100 年確率ピーク流量の 95%上側信頼限界値は 2815.5  $m^3/s$  である。

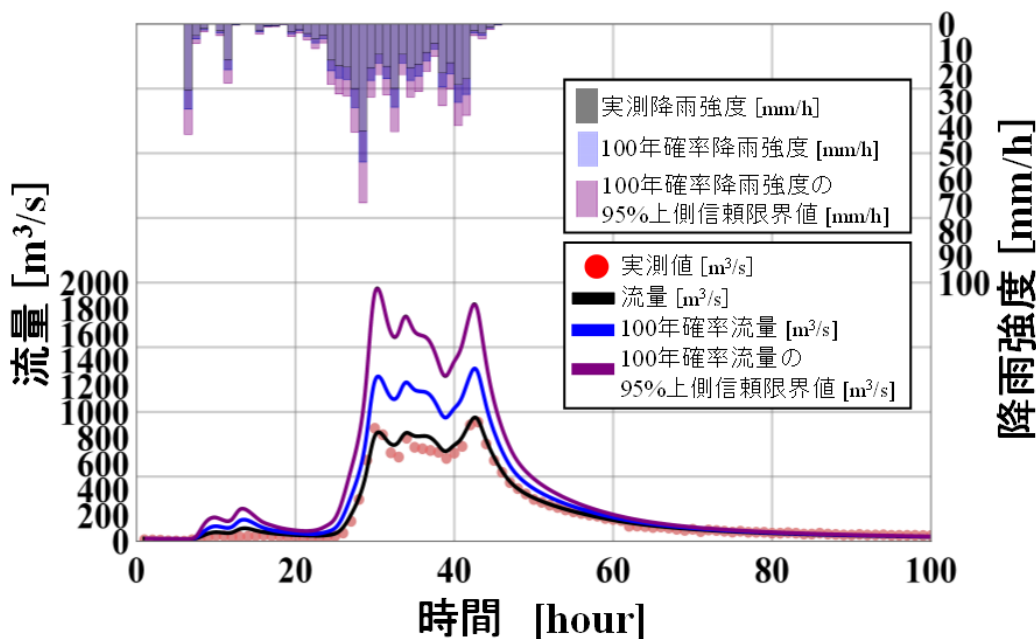


図 3-25 草木ダム流域における 2002 年 7 月洪水の実績降雨を 100 年確率年最大総降雨量およびその 95%上側信頼限界値まで引き伸ばした確率降雨波形を入力とした際の流出計算の結果  
 ※同図において、算出したピーク流量は 937.2  $m^3/s$ ，100 年確率ピーク流量は 1298.0  $m^3/s$ ，100 年確率ピーク流量の 95%上側信頼限界値は 1920.8  $m^3/s$  である。

### 第3章 確率限界法検定に基づく信頼区間・予測区間の構成手法と当該区間を導入した水文頻度解析

#### 3-10-2 確率ピーク流量比と信頼係数の関係

本節では、 $T_R$ 年確率ピーク流量比と信頼係数(1-p)の関係を示す。ここで、 $T_R$ 年確率ピーク流量比とは、「 $T_R$ 年確率ピーク流量の100(1-p)%上側信頼限界値  $Q_{p_{prob}}(T_R, p)$ 」を「 $T_R$ 年確率ピーク流量  $Q_{p_{prob}}(T_R)$ 」で除すことで算出される値  $Ratio_{Q_p}(p)$ と定義する。以上より、各洪水イベントにおける  $T_R$ 年確率ピーク流量比  $Ratio_{Q_p}(T_R, p)$ は式(3-7)より算出した。

$$Ratio_{Q_p}(T_R, p) = Q_{p_{prob}}(T_R, p) / Q_{p_{prob}}(T_R) \quad (3-7)$$

ここに、 $Q_{p_{prob}}(T_R)$  :  $T_R$ 年確率ピーク流量[m<sup>3</sup>/s]、 $Q_{p_{prob}}(T_R, p)$  :  $T_R$ 年確率ピーク流量の100p%上側信頼限界値[m<sup>3</sup>/s]、 $Ratio_{Q_p}(T_R, p)$  :  $T_R$ 年確率ピーク流量比である。

図3-26および図3-27は、各洪水イベントの実績降雨波形を対象として、算出した「100年確率ピーク流量比と信頼係数の関係」および「200年確率ピーク流量比と信頼係数」の関係を示したものである。両図から、信頼係数の増加に伴い、確率ピーク流量比の変動範囲が大きくなることが分かる。これは、信頼係数を増加させると、確率ピーク流量比の分散が大きくなるためである。また、図3-26は、信頼係数を95%とすると、100年確率ピーク流量比はおよそ1.33から1.44の範囲を取ることを示している。すなわち、この事柄は、対象流域において、100年確率ピーク流量の95%上側信頼限界値は100年確率ピーク流量のおよそ1.3倍から1.4倍程度の値となることを示している。同様に、図3-27は、信頼係数を95%とすると、200年確率ピーク流量比はおよそ1.32から1.41程度の範囲を取ることを示しており、200年確率ピーク流量の95%上側信頼限界値は、200年確率ピーク流量のおよそ1.3倍から1.4倍程度の値となることが分かる。

以上に示した研究成果は、確率年最大総降雨量の95%信頼区間を考慮すると、従来手法に基づき算定した  $T_R$ 年確率ピーク流量の1.3倍から1.4倍程度の洪水ピーク流量が生起するというリスクが存在することを示している。さらに、上述した確率洪水ピーク流量の超過確率は、 $(1/T_R) \times (2.5\%)$ より算出することができるため、従来では想定外とみなされるような規模の洪水流量が生起するリスクを定量的に見積もることができる。

第3章 確率限界法検定に基づく信頼区間・予測区間の構成手法と当該区間を導入した水文頻度解析

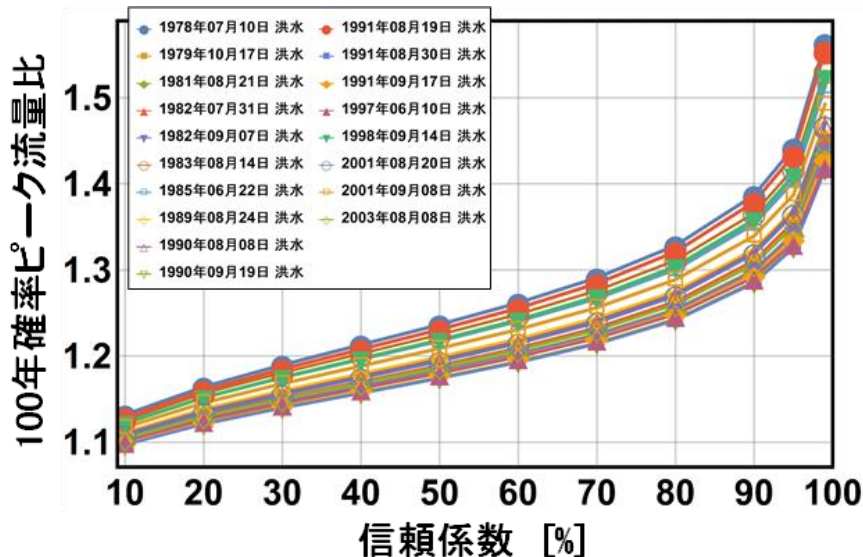


図 3-26 草木ダム流域において発生した 18 個の洪水イベントでの実績降雨波形を対象として算出した 100 年確率ピーク流量比と信頼係数の関係  
 ※100 年確率ピーク流量比は、100 年確率ピーク流量の 100p%上側信頼限界値を 100 年確率ピーク流量で除した値と定義した。

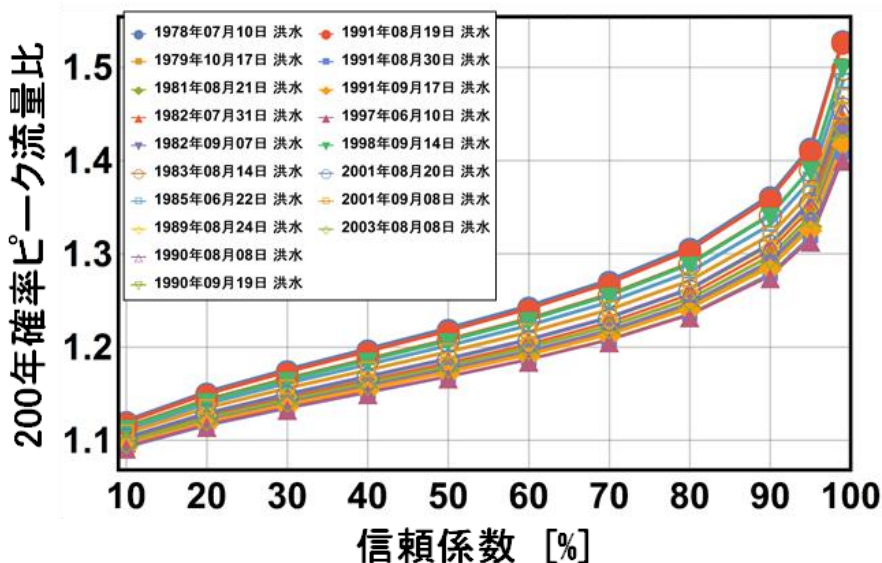


図 3-27 草木ダム流域において発生した 18 個の洪水イベントでの実績降雨波形を対象として算出した 200 年確率ピーク流量比と信頼係数の関係  
 ※200 年確率ピーク流量比は、200 年確率ピーク流量の 100p%上側信頼限界値を 200 年確率ピーク流量で除した値と定義した。

3-10-3 確率降雨強度に対する降雨流出現象の非線形性

本節では、同一の確率年  $T_R$  において、 $T_R$  年確率年最大総降雨量比と  $T_R$  年確率ピーク流量比間に成立する関係を示す。ここで、 $T_R$  年確率年最大総降雨量比とは、「 $T_R$

### 第3章 確率限界法検定に基づく信頼区間・予測区間の構成手法と当該区間を導入した水文頻度解析

年確率年最大総降雨量の  $100(1-p)\%$  上側信頼限界値  $R_{prob}(T_R, p)$  を「 $T_R$  年確率年最大総降雨量  $R_{prob}(T_R)$ 」で除すことで算出される値  $Ratio_R(T_R, p)$  と定義する。以上より、各洪水イベントにおける  $T_R$  年確率年最大総降雨量比  $Ratio_R(T_R, p)$  は式(3-8)より算出した。

$$Ratio_R(T_R, p) = R_{prob}(T_R, p) / R_{prob}(T_R) \quad (3-8)$$

ここに、 $R_{prob}(T_R)$  :  $T_R$  年確率年最大総降雨量[mm],  $R_{prob}(T_R, p)$  :  $T_R$  年確率年最大総降雨量の  $100(1-p)\%$  上側信頼限界値[mm],  $Ratio_R(T_R, p)$  :  $T_R$  年確率年最大総降雨量比である。

図 3-28 は、確率年  $T_R$  を 50 年、100 年、150 年、200 年、250 年とした場合における  $T_R$  年確率年最大総降雨量比と信頼係数の関係を示している。同図から、当該関係は確率年  $T_R$  にほとんど依存しないことが分かる。

図 3-26、図 3-27 および図 3-28 より、信頼係数を 95% とした際、確率年最大総降雨量比は確率年に依存せず約 1.3 倍となるが、確率ピーク流量比は、単純に 1.3 倍となるのではなく、約 1.3 倍から 1.4 倍程度の範囲を取ることが分かる。この事柄は、降雨流出現象の確率降雨強度に対する非線形性を表しているといえる。

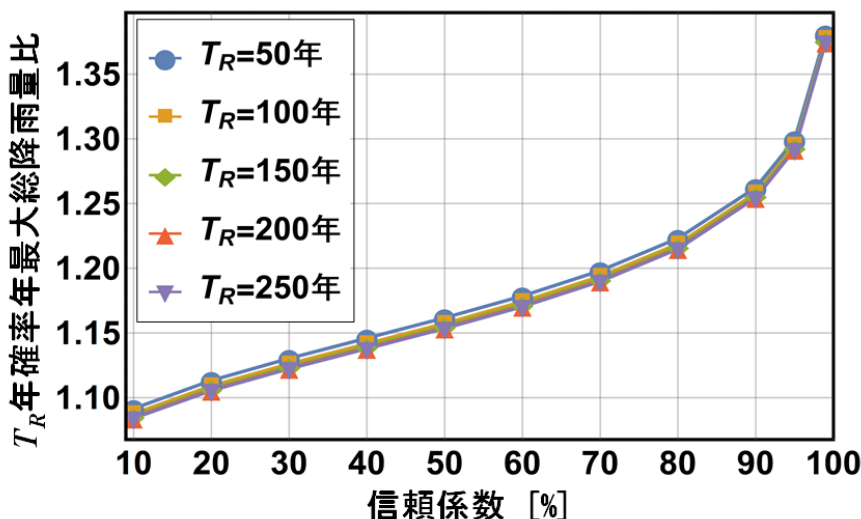


図 3-28 草木ダム流域における 41 年間分の年最大総降雨量の観測値を使用した極値統計解析により算出した  $T_R$  年確率年最大総降雨量比と信頼係数の関係 ※同図は確率年  $T_R$  を 50 年、100 年、150 年、200 年、250 年とした際の当該関係を示す。

#### 3-10-4 確率ピーク水深比と信頼係数の関係

本節では、 $T_R$  年確率ピーク水深比と信頼係数の関係を示す。ここで、 $T_R$  年確率ピーク水深比とは、「 $T_R$  年確率ピーク水深の  $100p\%$  上側信頼限界値  $H_{prob}(T_R, p)$ 」を「 $T_R$  年確率ピーク水深  $H_{prob}(T_R)$ 」で除すことで算出される値  $Ratio_{Hp}(T_R, p)$  と定義する。また、水深の算出に際し、矩形断面の開水路を想定し、かつ、等流近似を行った。このため、水深  $H$  は式(3-9)より得られる。

第3章 確率限界法検定に基づく信頼区間・予測区間の構成手法と当該区間を導入した水文頻度解析

$$H = \left( \frac{n^2 Q^2}{i_0 B^2} \right)^{3/10} \quad (3-9)$$

ここに、 $H$ ：水深[m]， $n$ ：マンニングの粗度係数[m<sup>-1/3</sup>s]， $Q$ ：流量[m<sup>3</sup>/s]， $i_0$ ：河床勾配[-]， $B$ ：川幅[m]である。以上より，各洪水イベントにおける  $T_R$  年確率ピーク水深比  $Ratio_{Hp}(T_R, p)$  は式(3-10)より算出した。

$$Ratio_{Hp}(T_R, p) = Ratio_R(T_R, p)^{0.6} \quad (3-10)$$

ここで，式(3-10)の導出過程を以下に記す。

$$\begin{aligned} Ratio_{Hp}(T_R, p) &= \frac{H_{prob}(T_R, p)}{H_{prob}(T_R)} \\ &= \left\{ \frac{Q_{prob}(T_R, p)^2}{Q_{prob}(T_R)^2} \right\}^{3/10} \\ &= Ratio_{Qp}(T_R, p)^{0.6} \end{aligned}$$

等流の矩形断面開水路を仮定したことで， $T_R$  年確率ピーク水深比は  $T_R$  年確率ピーク流量比を 0.6 乗した値となる。

図 3-29 および図 3-30 は，各洪水イベントの実績降雨波形を対象として，算出した「100 年確率ピーク水深比と信頼係数の関係」および「200 年確率ピーク水深比と信頼係数」の関係を示したものである。これらの図は，確率年最大総降雨量の 95% 信頼区間を考慮した検討を行う場合， $T_R$  年確率ピーク流量時の水深は 1.17 から 1.28 倍程度の値となるリスクが存在することを示している。

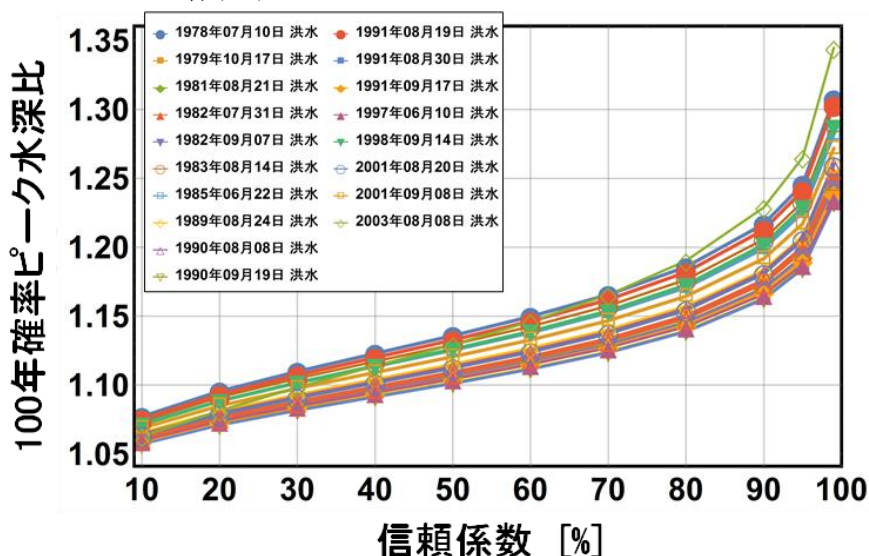


図 3-29 草木ダム流域において発生した 18 個の洪水イベントでの実績降雨波形を対象として算出した 100 年確率ピーク水深比と信頼係数の関係 ※100 年確率ピーク水深比は，100 年確率ピーク水深の 100p% 上側信頼限界値を 100 年確率ピーク水深で除した値と定義した。

第3章 確率限界法検定に基づく信頼区間・予測区間の構成手法と当該区間を導入した水文頻度解析

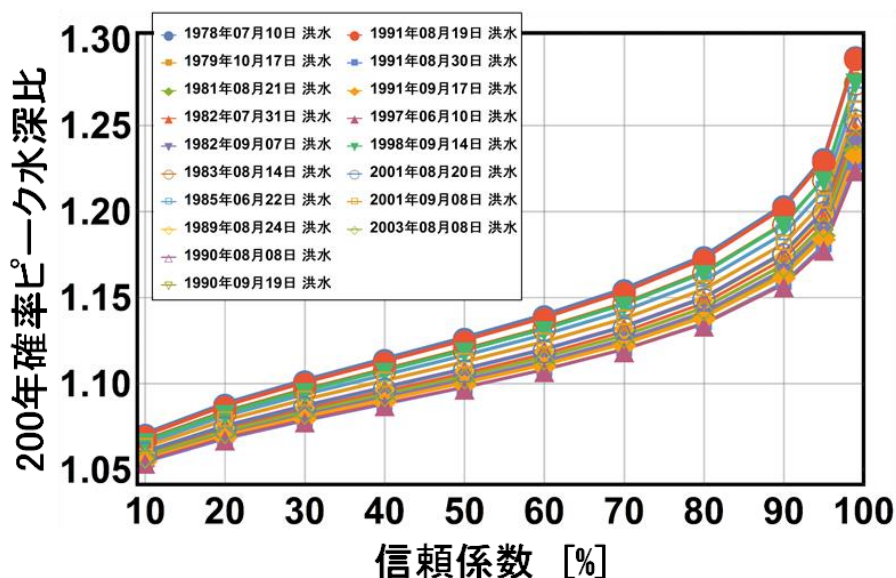


図 3-30 草木ダム流域において発生した 18 個の洪水イベントでの実績降雨波形を対象として算出した 200 年確率ピーク水深比と信頼係数の関係 ※200 年確率ピーク水深比は、200 年確率ピーク流量の 100p%上側信頼限界値を 200 年確率ピーク水深で除した値と定義した。

### 3-11 確率降雨量の信頼区間の導入による総合確率法の拡張

確率流量を推定する手法としては主に次に示すものが挙げられる。その一つは、観測流量資料を極値統計解析する手法である。しかしながら、この手法には、観測流量資料の不足や流域開発に伴う河川流量の統計的性質の変化により推定の信頼性が低下する恐れがある。このため、河川流量に比べて資料数の多い降雨量のデータを用いた手法が考案された。降雨量のデータから確率流量を推定する手法の一つにカバー率を用いた手法がある。この方法は、対象流域における実績降雨波形群を計画総降雨量まで引き伸ばし、引き伸ばした降雨群を入力降雨とした流出計算を行い、算出された洪水ピーク流量群の中から、カバー率という概念を用いて計画流量を決定するというものである。ここで、カバー率とは、採用した洪水ピーク流量値が、算出した洪水ピーク流量群のうちどの程度を充足するのかを表すものである。例えば、カバー率が 80%のピーク流量とは、上述した手順により得られる洪水ピーク流量群の頻度分布の 80%ile 値である。カバー率を用いた方法では、採用した洪水ピーク流量値の確率年は、必ずしも計画確率年に一致するとは限らない。この要因は、洪水ピーク流量自体の確率分布が不明であるためである。洪水ピーク流量の確率分布を推定可能とする手法としては、総合確率法（例えば、土木学会水工学委員会，2012）がある。総合確率法は、計画規模相当の確率流量を統計的に推定する手法として、利根川を始めとした我が国のいくつかの河川流域において適用されている。

### 第3章 確率限界法検定に基づく信頼区間・予測区間の構成手法と当該区間を導入した水文頻度解析

総合確率法では、水文頻度解析により求めた年最大総降雨量の確率分布と降雨流出モデルにより求めた総降雨量と洪水ピーク流量の関係をj用いて年最大洪水ピーク流量の確率分布を推定する。総合確率法の利点は、降雨の時空間分布を考慮したより合理的な年最大洪水ピーク流量の確率分布を得ることができる点である。この確率分布により、任意の再現期間に応じた年最大洪水ピーク流量を算定することができる。

本章では、確率限界法検定に基づく信頼区間を導入した水文頻度解析手法の応用として、総合確率法の拡張を行い、年最大洪水ピーク流量の確率分布に関する信頼区間を構成するとともに当該信頼区間を用いた確率洪水ピーク流量の不確実性評価手法を示す。

#### 3-11-1 総合確率法の理論

本章の一部では、椎葉・立川（2013）による総合確率法の数学的導出に準拠し、総降雨量および年最大総降雨量を同一の確率変数  $R$ 、洪水ピーク流量と年最大洪水ピーク流量を同一の確率変数  $Q_p$  として表記する。

総合確率法では、洪水ピーク流量の観測値を非毎年資料として扱う。このことに加え、以下に示す仮定を設定することで、年最大洪水ピーク流量の確率分布と年最大総降雨量の確率分布との関係式を導出できる。

- 1) 設定した降雨期間内の総降雨量と降雨の時間的・空間的分布パターンは独立である。
- 2) 降雨パターンを固定し、総降雨量だけを変化させた場合、総降雨量とともに洪水ピーク流量は単調に増加する。
- 3) 降雨の時間的・空間的分布パターン（以下、降雨パターンと表記）を  $\zeta(x, y, t)$  とする。また、降雨パターン  $\zeta(x, y, t)$  は、 $N$  個のパターンのみであるとして、 $i$  番目の降雨パターンを  $\zeta_i(x, y, t)$  と表す。このとき、ある降雨パターン  $\zeta_i(x, y, t)$  の生起確率  $p_i$  は与えられているとする。
- 4) ある定められた閾値を超えるような洪水を生じさせる降雨イベントの発生は、単位時間あたりの発生確率が  $\mu$  であるポアソン過程に従うとする。また、そのような降雨イベントの総降雨量  $R$  の確率分布は発生時点とは独立に同一の累積分布関数  $G_R(R)$  に従う。ここに、降雨イベントとは実際に生起したイベントの事を指し、先の降雨パターンとは異なるので注意されたい。

仮定 1)において、ある降雨パターン  $\zeta_i(x, y, t)$  における位置  $x, y$  で時間  $t$  の降雨強度  $r_i(x,$



第3章 確率限界法検定に基づく信頼区間・予測区間の構成手法と当該区間を導入した水文頻度解析

$y, t$ )は式(3-11)のように表せるとする。

$$r_i(x, y, t) = R\xi_i(x, y, t) \quad (3-11)$$

ただし、 $R$ は降雨期間内の流域平均総降雨量、 $\xi(x, y, t)$ は降雨の時間的・空間的パターンを表す。このとき、 $\xi$ は以下のように正規化されているとする。

$$\iint_B \left( \int_0^{T_r} \xi(x, y, t) dt \right) dx dy = A$$

ここに、 $B$ ：対象とする流域、 $T_r$ ：降雨継続時間、 $A$ ：対象流域の流域面積である。

仮定1)から3)が成立する場合、洪水を生じさせるような降雨イベントが発生したときに洪水ピーク流量  $Q_p$  が、ある閾値  $q_p$  を超過する確率  $\text{Prob}[Q_p > q_p]$  は、 $i$  番目の降雨パターン  $\xi_i(x, y, t)$  が生起する確率  $p_i$  とその降雨パターン  $\xi_i$  によって生起する洪水ピーク流量  $Q_p$  が  $q_p$  を超える確率との積の総和によって求めることができる。すなわち、当該確率は式(3-12)より得ることができる。

$$\begin{aligned} \text{Prob}[Q_p > q_p] &= \sum_{i=1}^N p_i \text{Prob}[Q_p > q_p | \xi = \xi_i] \\ &= \sum_{i=1}^N p_i \text{Prob}[R > r_i(q_p)] \end{aligned} \quad (3-12)$$

ここで、 $r_i(q_p)$ とは、降雨パターン  $\xi_i(x, y, t)$ において、総降雨量  $R$  を変化させたときに  $Q_p$  がちょうど  $q_p$  となる総降雨量を表している。また、右辺の  $\text{Prob}[R > r_i(q_p)]$  は、降雨パターン  $\xi_i(x, y, t)$  ごとに定まる  $r_i(q_p)$  の超過確率を表している。

また、式(3-12)の左辺  $\text{Prob}[Q_p > q_p]$  を  $Q_p$  の累積分布関数  $G_{Q_p}(q_p)$  を使って表すと、当該式は式(3-13)として表すことができる。

$$\begin{aligned} 1 - G_{Q_p}(q_p) &= \sum_{i=1}^N p_i \text{Prob}[R > r_i(q_p)] \\ &= \sum_{i=1}^N p_i (1 - G_R(r_i(q_p))) \end{aligned} \quad (3-13)$$

となる。図3-31は、総合確率法の概念図を示したものである。横軸は年最大総降雨量および総降雨量を表す確率変数  $R$  の実現値を表しており、縦軸は年最大洪水ピーク流量および洪水ピーク流量を表す確率変数  $Q_p$  の実現値を表している。同図中における各実線は仮定2)に示したように各降雨パターン  $\xi_i(x, y, t)$  において総降雨量  $R$  の増加とともに洪水ピーク流量  $Q_p$  が単調に増加していることを表している。それぞれの実

第3章 確率限界法検定に基づく信頼区間・予測区間の構成手法と当該区間を導入した水文頻度解析

線を各降雨パターンで表現しているが、その実線上の×印が降雨イベント、すなわち、実測値を表している。対象流域の流出モデルが既知であるならば、降雨パターン  $R\xi_i(x, y, t)$  を入力降雨として洪水ピーク流量を算出することができ、各実線が描ける。また、 $Q_p$  が  $q_p$  となる総降雨量  $r_i(q_p)$  は降雨パターン  $\xi_i(x, y, t)$  毎に異なり、 $\text{Prob}[R > r_i(q_p)]$  は降雨パターン毎に求まる総降雨量  $r_i(q_p)$  の超過確率を表している。

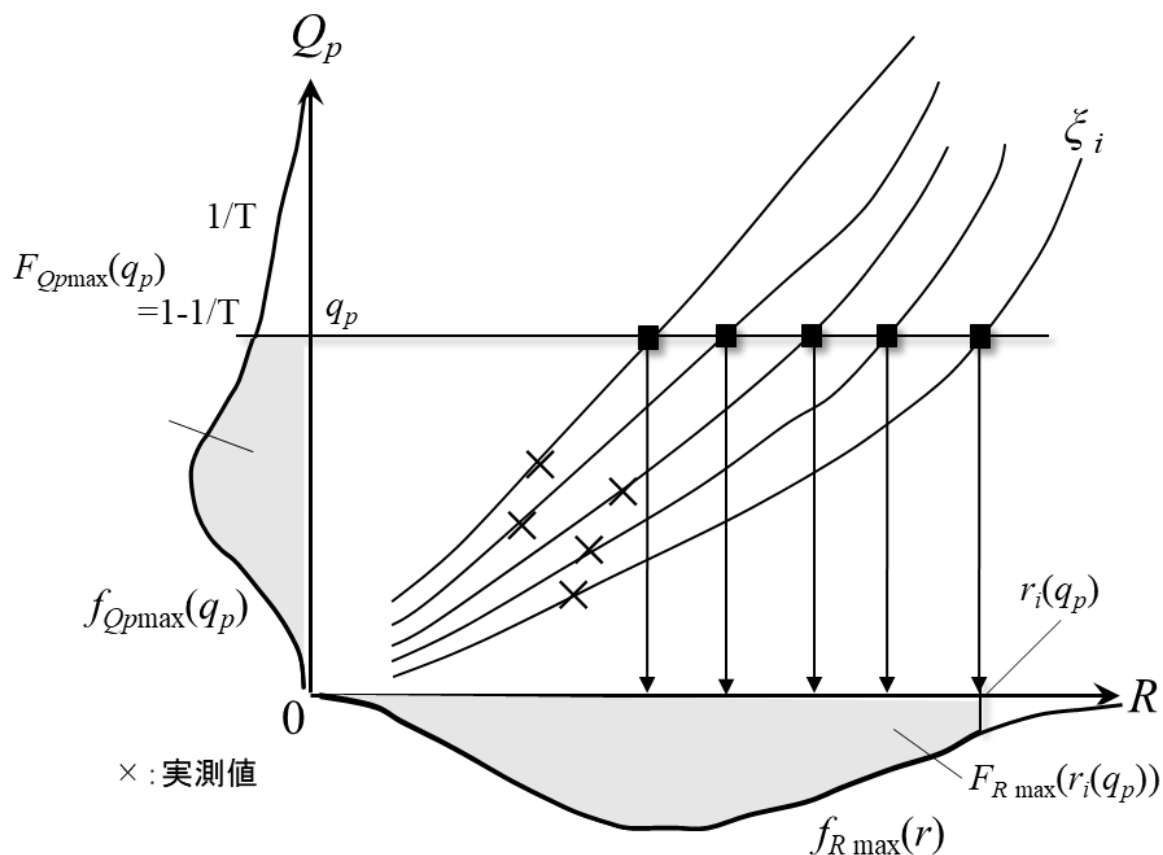


図 3-31 総合確率法の概念図。(椎葉ら 2013,水文学・水工計画学をもとに著者加筆)

同図において、 $\xi_i(x, y, t)$ : 位置  $x, y$ , 時刻  $t$  での  $i$  番目の降雨パターン ( $i=1,2,\dots,N$ )

$R$ : (年最大)総降雨量[mm],  $Q_p$ : (年最大)洪水ピーク流量[m<sup>3</sup>/s],  $T$ : 確率年,  $f_{Xmax}(x)$ : 確率変数  $X$  の確率密度関数,  $F_{Xmax}(x)$ : 確率変数  $X$  の累積分布関数 である。

次に、仮定 4)について考えるが、その前に洪水を生じさせるような降雨イベントの発生がポアソン過程に従う事に立ち返り、洪水イベントの発生も単位時間あたりの発生確率が  $\mu$  のポアソン過程に従うと考えることができることを明記しておく。この議論を円滑に進めるために、以下ではまず、年最大系列という時間の概念を持つ水文量の累積分布関数と、事象の大きさの累積分布関数(上記までの流れで言うと、 $G_{Q_p}(Q_p)$  がそれに対応する)および、その発生頻度の関係式を示す。

### 第3章 確率限界法検定に基づく信頼区間・予測区間の構成手法と当該区間を導入した水文頻度解析

複合ポアソン過程モデルに従う時系列から年最大値の系列を取り出す場合に、その系列が持つ特性を抽出する。すなわち、ある水文量の年最大値の累積分布関数  $F_{X_{max}}(x)$  を求める。ここで、ポアソン過程の成立に必要な仮定を次に示す。

- a) 微小な区間  $(t, t+\Delta t)$  で事象が一度生起する確率は  $\mu\Delta t$  で与えられる。ここに、 $\mu$  は単位時間あたりの事象の発生頻度であり、 $t$  によらず一定値をとる。
- b) 微小な区間  $(t, t+\Delta t)$  で事象が二回以上発生する確率は  $\mu\Delta t$  より小さいので無視できる。
- c) 互いに重ならない時間区間での事象の生起は互いに独立である。

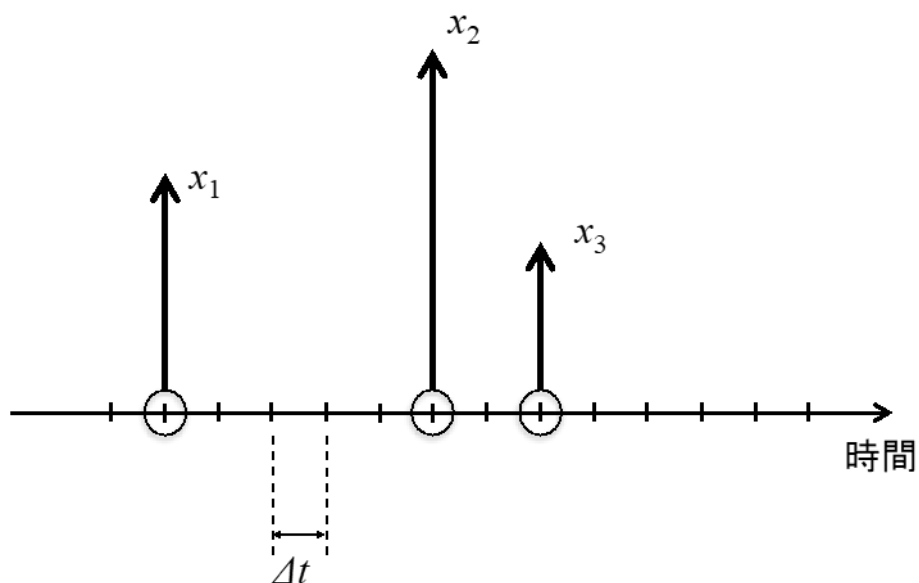


図 3-32 複合ポアソン過程の概念図。ポアソン過程に従って微小区間内でイベントが生起し、かつそのイベントの大きさが区間に依らず同一の分布に従って決まることが概念的に示されている。

ここで、現象が生起したときに図 3-32 に示すように、その時点に確率変数  $X$  を対応させる。このような確率過程を複合ポアソン過程（あるいは marked point process）という。この  $X$  の確率分布は、それが発生する時点に独立で、それぞれが同一の分布  $G_X(x)$  に従う。このように考えると確率変数  $X$  がある閾値  $x$  を超える確率は  $G_X(x)$  を用いて、 $1 - G_X(x)$  で与えられる。

よって、時間軸上のある微小な区間  $(t, t+\Delta t)$  で  $X > x$  であるような事象が発生する確率は、 $\Delta t$  間で事象が発生する確率  $\mu\Delta t$  に確率変数  $X$  がある閾値  $x$  を超える確率  $1 - G_X(x)$  を乗じて、 $\mu\Delta t (1 - G_X(x))$  で与えられる。以降では、

第3章 確率限界法検定に基づく信頼区間・予測区間の構成手法と当該区間を導入した水文頻度解析

$$\mu(1 - G_X(x_u)) = \lambda \quad (3-14)$$

として、時刻0以降で初めて  $X > x$  であるような事象が生起する時間  $T_{first}$  の分布を考える。区間  $(0, t)$  の間に  $X > x$  であるような事象が生起する回数を  $N_t$  と表し、 $N_t = 0$  である確率を  $P_0(t)$  とすると、当該確率は式(3-15)より表される。

$$P_0(t) = Prob[N_t = 0] \quad (3-15)$$

時点  $t + \Delta t$  までに事象が一度も生起しない確率  $P_0(t + \Delta t)$  (つまり、 $N_{t+\Delta t} = 0$ ) は、区間  $(0, t)$  で一度も  $X > x$  であるような事象が生起しない、かつ区間  $(t, t + \Delta t)$  でも一度も  $X > x$  であるような事象が生起しない場合であるので、当該確率は式(3-16)より得ることができる。

$$P_0(t + \Delta t) = P_0(t)(1 - \lambda\Delta t + O(\Delta t)) \quad (3-16)$$

また、 $1 - \lambda\Delta t$  は、 $X > x$  であるような事象が生起しない確率である。つまり、 $\lambda\Delta t$  が  $X > x$  であるような事象が生起する確率である。

仮定2)によって、 $\Delta t$  より高次の微小量である右辺の  $o(\Delta t)$  は無視できるので

$$P_0(t + \Delta t) = P_0(t)(1 - \lambda\Delta t) \quad (3-17)$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_0(t + \Delta t) - P_0(t)}{\Delta t} = -\lambda P_0(t) \quad (3-18)$$

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) \quad (3-19)$$

が成立する。 $P_0(0) = 1$  として、式(3-19)が示す微分方程式を解くと、

$$P_0(t) = \exp[-\lambda t] \quad (3-20)$$

となる。これが区間  $(0, t)$  で  $X > x$  であるような事象が一度も生起しない確率である。ここで、初期生起時間  $T_{first}$  が  $t$  以下であることと、区間  $(0, t)$  で事象  $X > x$  が少なくとも一回生起することは同等であるから、

$$Prob[T_{first} \leq t] = 1 - Prob[N_t = 0] = 1 - P_0(t) = 1 - \exp[-\lambda t] \quad (3-21)$$

が成立する。

ここで、 $\Delta t$  を1年として  $P_0(\Delta t)$  を考える。 $P_0(\Delta t)$  は、 $N_{\Delta t} = 0$  であり、これは  $X > x$  であるような事象が1年間に一度も生起しない確率を表している。つまり、当該確率は、年最大値  $X_{max}$  が  $x$  より小さくなる事象の確率である。

したがって、年最大値の累積分布関数は、式(3-22)より表される。

$$F_{X_{max}}(x) = \exp[-\lambda \Delta t] \quad (3-22)$$

式(3-14)より上式は、式(3-23)より表される。

第3章 確率限界法検定に基づく信頼区間・予測区間の構成手法と当該区間を導入した水文頻度解析

$$F_{X_{max}}(x) = \exp[-\mu\Delta t(1 - G_X(x))] \quad (3-23)$$

つまり、洪水事象の発生が単位時間あたりの発生確率  $\mu$  で、洪水ピーク流量  $Q_p$  が複合ポアソン過程に従うならば、年最大洪水ピーク流量の累積分布関数  $F_{Q_{pmax}}(q_p)$  は、式(3-24)より表すことができる。

$$F_{Q_{pmax}}(q_p) = \exp[-\mu\Delta t(1 - G_{Q_p}(q_p))] \quad (3-24)$$

$\Delta t$  は時間間隔であり、 $\Delta t=1$  年として考える。

次に、式(3-13)を式(3-24)に代入することで、式(3-25)を得る。

$$\begin{aligned} F_{Q_{pmax}}(q_p) &= \exp\left[-\mu\Delta t \sum_{i=1}^N p_i \{1 - G_R(r_i(q_p))\}\right] \\ &= \prod_{i=1}^N \exp\left[-\mu\Delta t \{1 - G_R(r_i(q_p))\}\right]^{p_i} \end{aligned} \quad (3-25)$$

年最大総降雨量の累積分布関数  $F_{Rmax}(R)$  は、複合ポアソン過程を考えることで、式(3-26)より表すことができる。

$$F_{Rmax}(r) = \exp[-\mu\Delta t(1 - G_R(r))] \quad (3-26)$$

したがって、式(3-25)は、式(3-27)より表すことができる。

$$F_{Q_{pmax}}(q_p) = \prod_{i=1}^N F_{Rmax}(r_i(q_p))^{p_i} \quad (3-27)$$

上式の右辺は  $q_p$  が十分大きいと、式(3-28)より表すことができる。

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^N F_{Rmax}(r_i(q_p))^{p_i} &\cong \prod_{i=1}^N \left(1 - p_i \left(1 - F_{Rmax}(r_i(q_p))\right)\right) \\ &\cong 1 - \sum_{i=1}^N p_i \left(1 - F_{Rmax}(r_i(q_p))\right) \end{aligned} \quad (3-28)$$

よって、以下に示す近似式、

$$1 - F_{Q_{pmax}}(q_p) = \sum_{i=1}^N p_i \left(1 - F_{Rmax}(r_i(q_p))\right) \quad (3-29)$$

が得られる。

降雨の時空間分布パターンの生起に関する一般的な確率モデルを構成するのは困難であり、実際に生起した降雨パターンの経験分布がそのまま用いられることが多い

第3章 確率限界法検定に基づく信頼区間・予測区間の構成手法と当該区間を導入した水文頻度解析

め、 $p_i=1/N$ を考えれば、

$$F_{Q_{pmax}}(q_p) \cong \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F_{R_{max}}(r_i(q_p)) \quad (3-30)$$

が得られる。年最大総降雨量の確率分布と年最大洪水ピーク流量の確率分布の関係式である。また、再現期間  $T$  年と  $F_{Q_{pmax}}(q_p)$  との関係が式(3-31)より与えられるので、再現期間が  $T$  年の年最大洪水ピーク流量  $q_p$  は、累積分布関数  $F_{Q_{pmax}}(q_p)$  を用いて得ることができる。

$$F_{Q_{pmax}}(q_p) = 1 - \frac{1}{T} \quad (3-31)$$

【補足】

式(3-25)に示した式展開を以下に詳述する。

$$\begin{aligned} F_{Q_{pmax}}(q_p) &= \exp \left[ -\mu \Delta t \sum_{i=1}^N p_i \{1 - G_R(r_i(q_p))\} \right] \\ &= \exp \left[ -\mu \Delta t \{ p_1 (1 - G_R(r_1(q_p))) + p_2 (1 - G_R(r_2(q_p))) + \dots \right. \\ &\quad \left. + p_N (1 - G_R(r_N(q_p))) \} \right] \\ &= \prod_{i=1}^N \exp \left[ -\mu \Delta t \cdot p_i (1 - G_R(r_i(q_p))) \right] \\ &= \prod_{i=1}^N \exp \left[ -\mu \Delta t (1 - G_R(r_i(q_p))) \right]^{p_i} \end{aligned}$$

第3章 確率限界法検定に基づく信頼区間・予測区間の構成手法と当該区間を導入した水文頻度解析

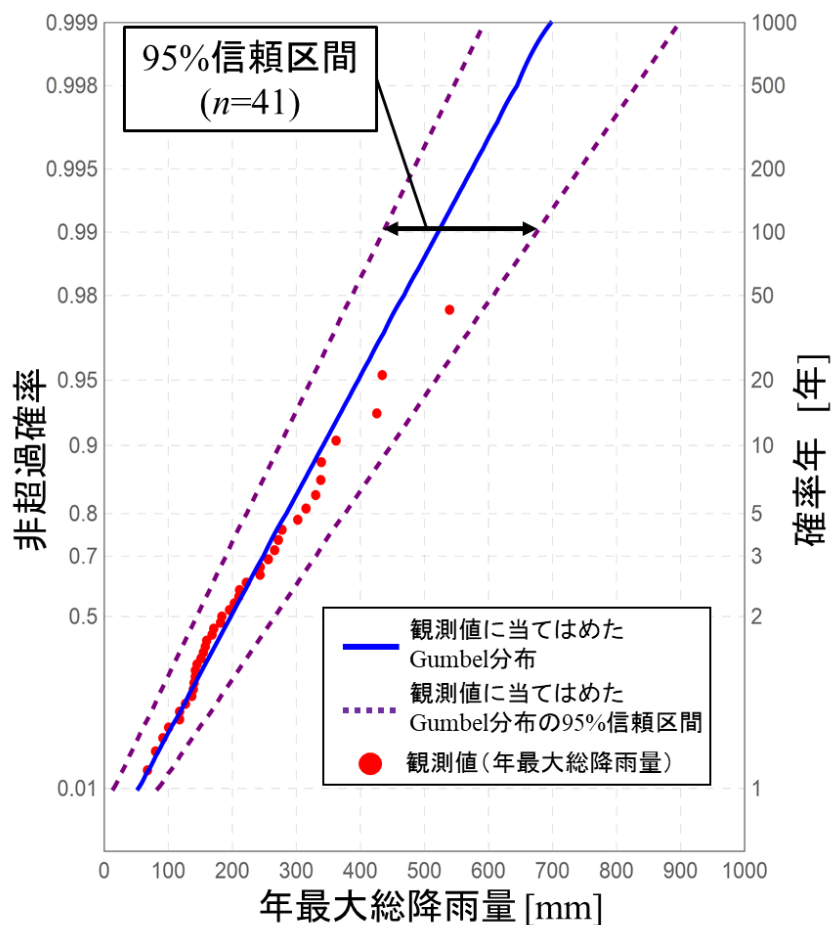


図 3-33 草木ダム流域における 41 年間分の年最大総降雨量の観測値，これら 41 個の観測値に当てはめた Gumbel 分布および確率限界法検定を応用し導出した当該 Gumbel 分布の 95%信頼区間

### 3-11-2 総降雨量と洪水ピーク流量の関係の導出

ここで，図 3-33 に草木ダム流域における 41 年間分の年最大総降雨量の観測値，これら 41 個の観測値に当てはめた Gumbel 分布および確率限界法検定を応用し導出した当該 Gumbel 分布の 95%信頼区間を示す。また，本論では，年最大総降雨量は 72 時間を継続時間とする継続時間内総降雨量として定義した。

総合確率法の適用にあたり，総降雨量と洪水ピーク流量の関係が必要となる。本研究では，草木ダム流域において過去に生起した 19 個の洪水イベントで観測された降雨パターンを対象として，以下の手順(1)～(4)に基づき，当該関係を導出した。なお，当該関係を導出するにあたり，信頼区間から外れる年最大総降雨量を採用するか否かは，従来通り，降雨の引き伸ばし率等を考慮して検討すべき事項である。

### 第3章 確率限界法検定に基づく信頼区間・予測区間の構成手法と当該区間を導入した水文頻度解析

#### 【手順(1)】

$i$  番目の降雨イベントにおける実績降雨を  $j$  番目の降雨イベントにおける総降雨量まで引き伸ばした降雨強度時系列  $r_{i,j}(t)$  [mm/hour] を作成する。手順(1)は式(3-32)より表すことができる。

$$r_{i,j}(t) = \frac{r_i(t)}{R_i} R_j \quad (3-32)$$

ここに、 $t$  : 時間 [hour],  $i(j)$  : 降雨イベントの番号( $i=1, 2, \dots, N$  ( $j=1, 2, \dots, N$ )),  $N$  : 降雨イベントの総数( $N=19$ ),  $r_i(t)$  :  $i$  番目の降雨イベントにおける実測降雨強度時系列 [mm/hour],  $R_{i(j)}$  :  $i(j)$  番目の降雨イベントにおける総降雨量 [mm] である。この手順を  $i=1 \sim N$  および  $j=1 \sim N$  について実施する。

#### 【手順(2)】

$r_{i,j}(t)$  を降雨流出モデルに入力し、洪水ピーク流量  $Q_{p_{i,j}}$  を算出する。この手順を  $i=1 \sim N$ ,  $j=1 \sim N$  について実施する。

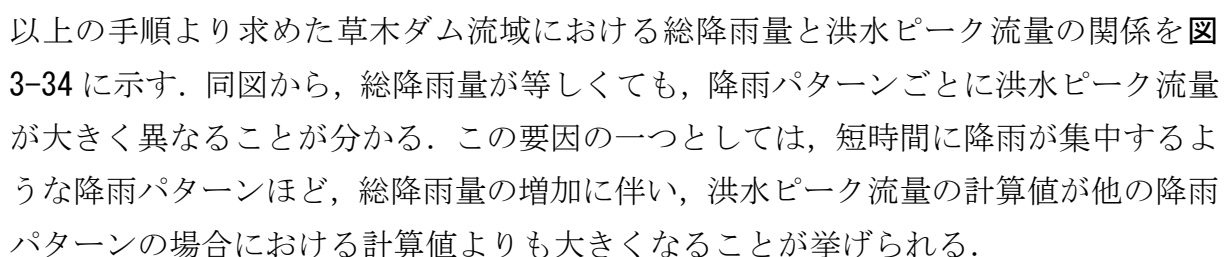
この手順より、 $N \times N$  個のデータ ( $R_{i,j}, Q_{p_{i,j}}$ ) ( $i=1 \sim N, j=1 \sim N$ ) を得る。ここに、 $R_{i,j}$  :  $r_{i,j}(t)$  の総降雨量 [mm],  $Q_{p_{i,j}}$  :  $r_{i,j}(t)$  を降雨流出モデルに入力し、算出される洪水ピーク流量 [ $\text{m}^3/\text{s}$ ] である。また、式(3-32)より、 $R_{i,j}$  は  $R_j$  と同値である。なお、洪水ピーク流量を算出するにあたり、使用した降雨流出モデルの詳細は前章および著者らの既往論文(清水ら (2018)) に示している。

#### 【手順(3)】

$i$  番目の降雨パターンについて、 $N$  個のデータ ( $R_{i,j}, Q_{p_{i,j}}$ ) ( $j=1 \sim N$ ) を線形一次補間した関数  $R_i(Q_p)$  を求める。なお、観測標本中の最大値を超過する総降雨量に対応した洪水ピーク流量は、関数  $R_i(Q_p)$  の外挿値により与えられる。

#### 【手順(4)】

手順(3)を  $i=1 \sim N$  について適用し、 $N$  個の線形一次補間関数  $R_i(Q_p)$  ( $i=1, 2, \dots, N$ ) を求め、総降雨量と洪水ピーク流量の関係を得る。

以上の手順より求めた草木ダム流域における総降雨量と洪水ピーク流量の関係を  図 3-34 に示す。同図から、総降雨量が等しくても、降雨パターンごとに洪水ピーク流量が大きく異なることが分かる。この要因の一つとしては、短時間に降雨が集中するような降雨パターンほど、総降雨量の増加に伴い、洪水ピーク流量の計算値が他の降雨パターンの場合における計算値よりも大きくなることが挙げられる。



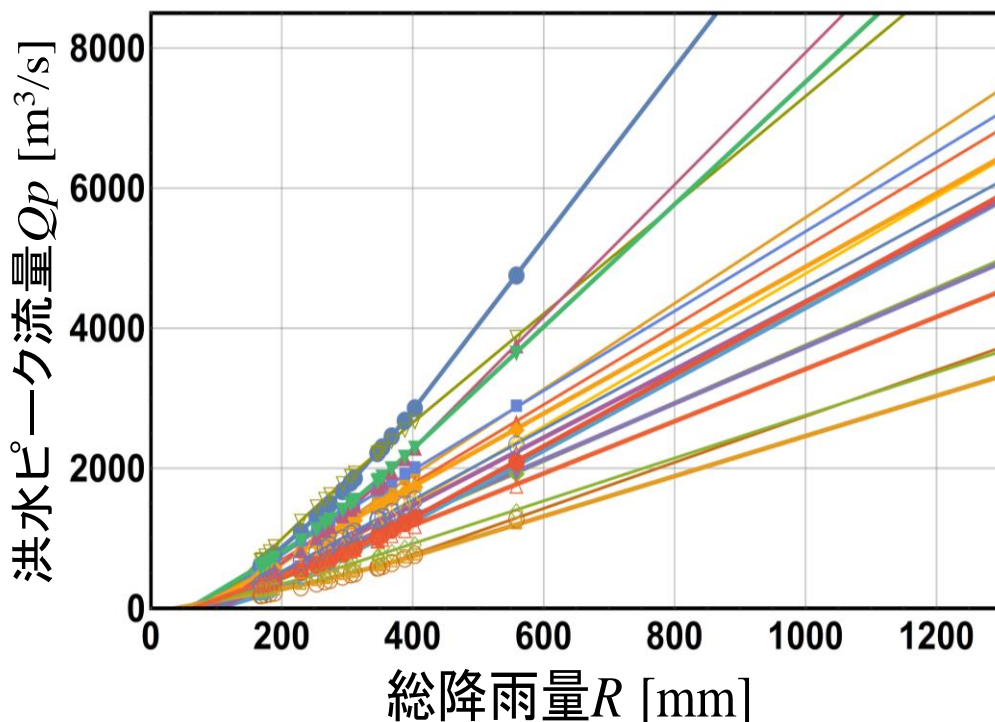


図 3-34 草木ダム流域における総降雨量と洪水ピーク流量の関係図 ※同図において、各実線は過去の洪水イベントで観測された降雨パターンを表している。

### 3-11-3 信頼区間を導入した総合確率法による年最大洪水ピーク流量の不確実性評価

年最大総降雨量の信頼限界線に対して、総合確率法の数学的表現である式(3-33)および式(3-34)を適用することで、年最大洪水ピーク流量の信頼限界線を導出できる。

$$F_{up.Qpmax}(q_p, p) \cong \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F_{up.Rmax}(r_i(q_p), p) \quad (3-33)$$

$$F_{low.Qpmax}(q_p, p) \cong \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F_{low.Rmax}(r_i(q_p), p) \quad (3-34)$$

ここに、 $F_{up.Rmax}(r, p)$  ( $F_{low.Rmax}(r, p)$ ) : 年最大総降雨量の累積分布関数に関する 100p% 上 (下) 側信頼限界線,  $F_{up.Qpmax}(q_p, p)$  ( $F_{low.Qpmax}(q_p, p)$ ) : 年最大洪水ピーク流量の累積分布関数に関する 100p% 上 (下) 側信頼限界線,  $p$  : 信頼係数 ( $0 < p < 1$ ) である。

図 3-35 に当該流域における 41 年間分の年最大洪水ピーク流量の観測値時系列, 図 3-36 に当該流域における 41 年間分の年最大洪水ピーク流量の観測値, 総合確率法により導出した年最大洪水ピーク流量の確率分布および当該分布の 95% 信頼区間を示す。同図から、総合確率法により導出した年最大洪水ピーク流量の確率分布は、観測

### 第3章 確率限界法検定に基づく信頼区間・予測区間の構成手法と当該区間を導入した水文頻度解析

標本中の平均的値および下位データに対して極めて良好な適合度を示すことが分かる。また、同図から、年最大洪水ピーク流量の確率分布と上位データには若干のずれがあり、標本最大値は95%上側信頼限界線の上にプロットされているものの、当該分布は観測標本をおおむね再現しているといえる。なお、上位データが確率分布の左側に外れている要因としては、大町（2004）が指摘しているように、総降雨量と洪水ピーク流量の関係を用いて、年最大総降雨量の確率分布を年最大洪水ピーク流量の確率分布に変換する過程で、短時間集中型の降雨パターンの影響により洪水ピーク流量が過大に評価されたことが考えられる。

信頼区間の導入により、確率水文量が数学上取りうる幅が求まり、従来採用してきた年最大洪水ピーク流量の確率分布は確率的な平均曲線となる。著者らの既往研究（清水ら，2018）より、95%上側信頼限界線が与える確率水文量の超過確率は2.5%として近似できる。このため、 $T$ 年確率水文量の95%上側信頼限界値の超過確率は「平均曲線が与える超過確率、すなわち  $1/T$ 」に「95%上側信頼限界線が与える超過確率、すなわち 2.5%」を乗ずることで算出することができる。上述した概念により、信頼限界線上の確率洪水ピーク流量が生起するリスクが定量的に得られる。このため、信頼区間の導入により、従来では考慮されなかった洪水ピーク流量を河川・水文分野における諸検討に取り込むことが可能となる。

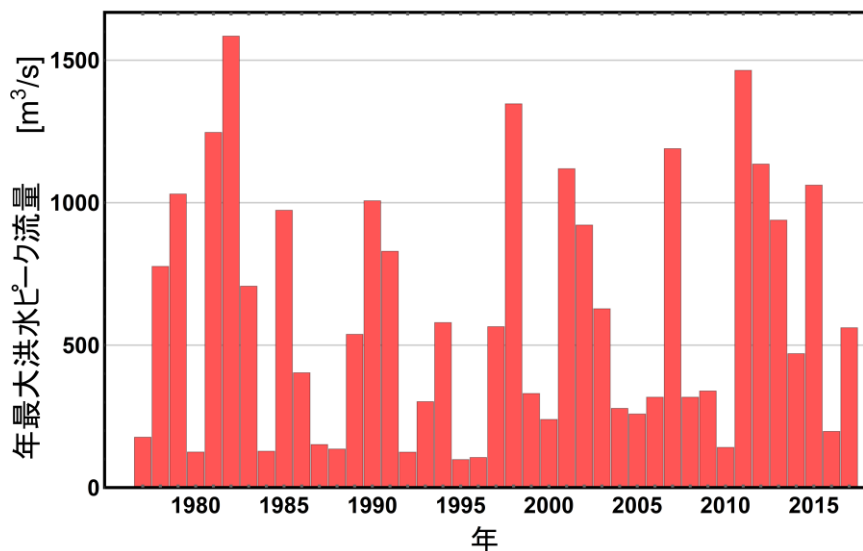


図 3-35 草木ダム流域における 1977 年から 2017 年に渡る 41 年間分の年最大洪水ピーク流量の観測値

第3章 確率限界法検定に基づく信頼区間・予測区間の構成手法と当該区間を導入した水文頻度解析

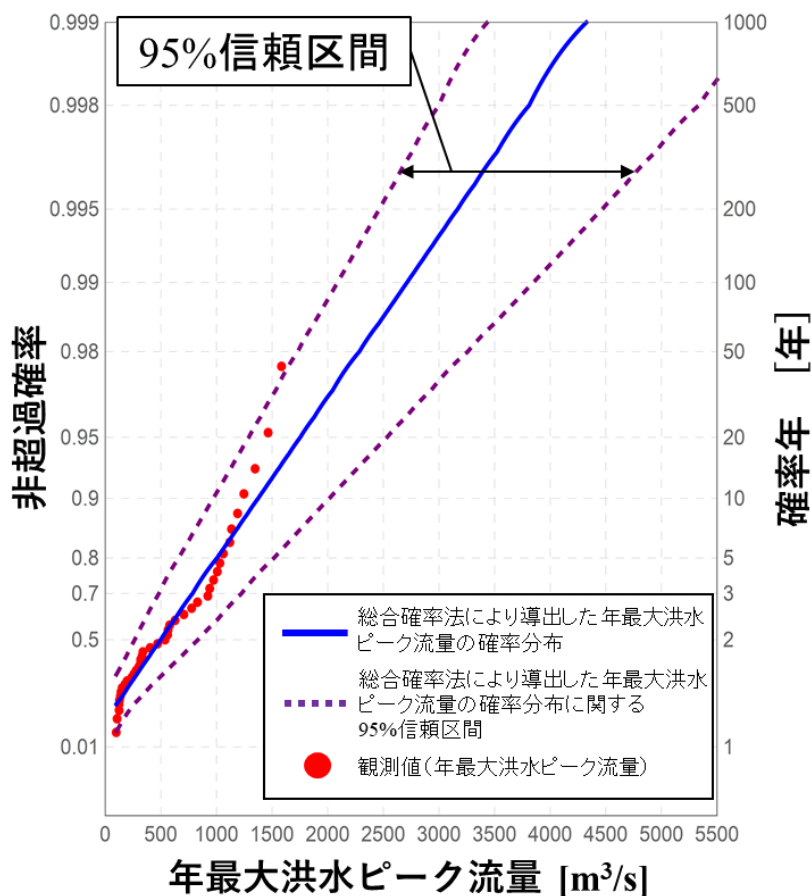


図 3-36 草木ダム流域における 41 年間分の年最大洪水ピーク流量の観測値，総合確率法により導出した年最大洪水ピーク流量の確率分布および当該分布の 95%信頼区間

### 3-11-4 洪水ピーク流量の確率年に関する信頼区間の構成

総合確率法では，各降雨パターンにおいて任意の洪水ピーク流量  $q_p$  を生起させる総降雨量  $r$  に相当する非超過確率の相加平均値は，その洪水ピーク流量  $q_p$  の非超過確率となる．当該確率は式(3-30)より得られる．また，式(3-33)および式(3-34)により，任意の洪水ピーク流量  $q_p$  の非超過確率に関する信頼限界値を求め， $q_p$  の非超過確率に関する信頼区間を構成できる．その信頼区間の構成過程を，洪水ピーク流量値 1000  $m^3/s$  を例として，図 3-37 に示す．ここで，実用上，対象とする洪水ピーク流量の超過確率およびその信頼限界値の逆数を取り，確率年に関する信頼区間を扱うことが望ましいといえる．草木ダム流域において実施した極値統計解析結果を用いて，この具体例を次に示す．洪水ピーク流量値 3000  $m^3/s$  に関する確率年の平均値は 155.7 年となり，その 95%信頼区間は[36.4, 500.0]年である．なお，この方法は，設定した洪水ピーク流量がもつ確率年の信頼区間を算定するものであり，前章で示した確率水文量自体の信頼区間を構成するものではないことに注意されたい．信頼区間の導入により，従

第3章 確率限界法検定に基づく信頼区間・予測区間の構成手法と当該区間を導入した水文頻度解析

来では想定外として扱われるような確率規模の洪水流量を計画に用いられる 100 年あるいは 200 年といった確率年で評価することが可能となる。

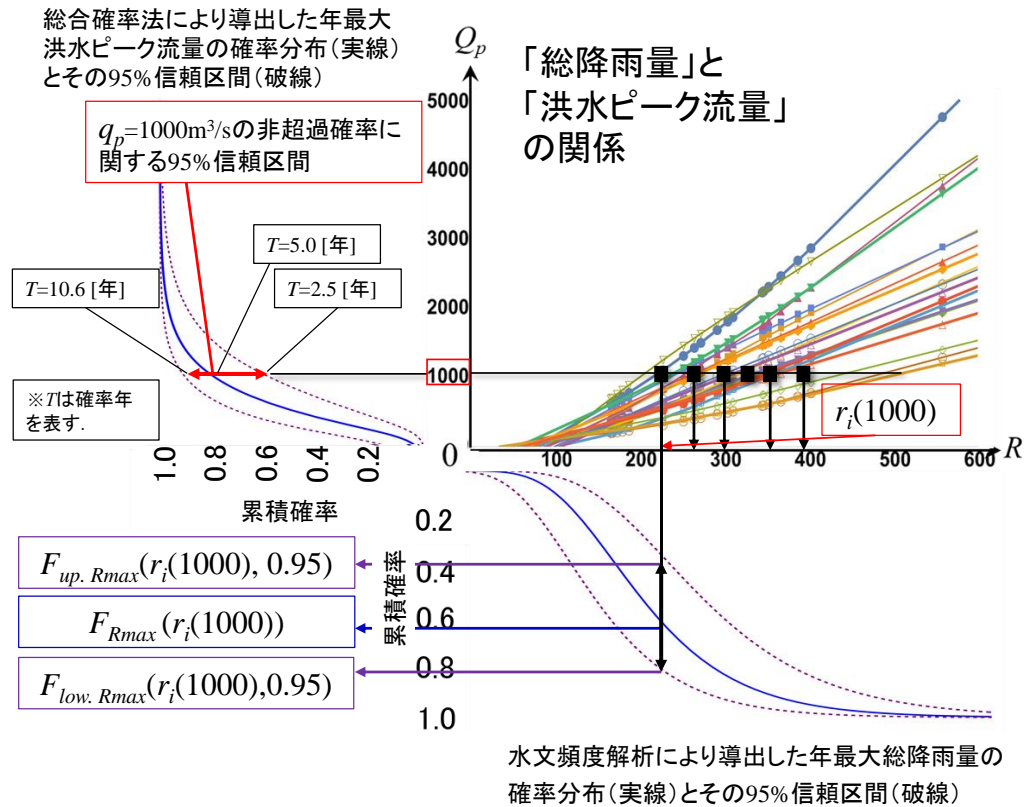


図 3-37 総合確率法による任意の洪水ピーク流量の非超過確率に関する 95%信頼区間を算定する過程の概念図

$q_p=1000[\text{m}^3/\text{s}]$ に関する確率年の平均値は 5.0 年となり，その 95%信頼区間は[2.5, 10.6]年である。

### 3-12 確率限界法検定に基づく信頼区間の非定常水文頻度解析への導入

従来の水文頻度解析は、水文量の定常性を仮定して行われてきた。定常性とは、水文量を支配する確率法則が時間的に変化しないことである。すなわち、従来手法では、水文量が従う確率分布を時間的に変化しないものとして扱ってきた。しかしながら、近年では、地球温暖化に伴う気候変動の影響による水文量の非定常性が指摘されてきている。ここで、非定常性とは、水文量の時系列がトレンドや周期をもつことあるいはそれらが従う確率分布が時間的に変化することをいう。我が国においては、気候変動により、将来期間において、降雨量ならびに洪水の発生頻度が増加をするという予測が示されている。このような予測結果を掲載した報告書の一つとして、国土技術政策総合研究所（2013）のものがある。同報告書では、今世紀末には全国一級水系の計画降雨継続時間での降雨量が1.1～1.3倍に、基本高水を超える洪水の発生頻度が1.8～4.4倍に増加する可能性があることが示されている。上述したような気候変動に伴う降雨の激甚化を考慮すると、水文量の非定常性を考慮した統計解析手法の構築・発展は、洪水対策を立案する上で、極めて重要となる。

近年では、水文量の非定常性に着目した研究や報告が多数示されている。例えば、Milly et al.（2008）は、気候変動の影響を踏まえ、水文分野における定常性の仮定に警鐘を鳴らし、計画と管理の在り方に関して、水文量の確率分布の非定常性を考慮すべきであると述べている。また、我が国において非定常性に着目した研究としては、佐渡ら（2008）や寒川ら（2008）のものがある。佐渡ら（2008）は、北海道地方における年最大日降水量の時系列を、平均値・分散のジャンプの観点から分析し、確率水文量の非定常性の検証を行った。加えて、寒川ら（2008）は、日本各地の年最大日降水量の非定常性を検証するとともに、それが明確に確認できる期間長（標本数）を明らかにした。また、葛葉（2018）は、水文データの非定常性を認めるならば、これまで水文量の定常性を前提として策定されてきた治水計画の考え方を根幹から揺るがす問題があると指摘している。また、水文量の非定常性に関して、北野ら（2012）は経験度を用いて、確率水文量の時間変化を推定する理論を示している。

水文量の非定常性を考慮した統計手法を非定常水文頻度解析をという。具体的な非定常水文頻度手法として、Coles（2001）は、従来慣用されてきた定常極値分布モデルの母数を、時間を説明変数とする多項式で表すことにより、非定常極値分布モデルを構築し、それらの応用例を示している（本論では、このような母数を時変母数と表記する。）。加えて、林ら（2015）は、非定常極値分布モデルのモデル選択基準として、TICやAICが有効であることを解析的に示すとともに、これらを全国の気象官署にお

### 第3章 確率限界法検定に基づく信頼区間・予測手法の構成手法と当該区間を導入した水文頻度解析

ける観測データおよび気象研究所の GCM 出力データに適用し、年最大日降水量の時間変化を明らかにした。

一方、水文頻度解析は、極値資料の不足により、推定量に不確実性が大いに内包されるという困難点を有する。その弊害の一つとしては、記録的豪雨の観測値が採用した確率分布を大きく外れ、従来の水文頻度解析手法に基づいて当該豪雨の確率年を評価すると、その確率年が数千年あるいは数万年となることがある。洪水対策は一般的に 100 年から 200 年程度の計画確率年で策定されるため、従来の水文頻度解析では、上述したような記録的豪雨を合理的に評価する手法が確立されておらず、当該豪雨は“想定外”として扱われる場合がある。このような困難点の解決に寄与する概念として“信頼区間”がある。信頼区間の導入により、確率水文量が取りうる値が理論的に推定可能となり、従来採用してきた観測実績に基づく確率分布を平均曲線として捉えることができる。加えて、信頼区間の導入により、 $T$ 年確率規模の洪水対策において、 $T$ 年確率水文量の振れ幅が求まり、上述したような記録的豪雨をその振れ幅の中の現象として捉えることができるようになる。すなわち、信頼区間は、記録的豪雨の確率年の合理的評価を可能とするものである。本研究は、森口（1995）が提案した「確率限界法検定」の理論を用いて信頼区間を構成する手法（清水ら，2018）を示している。確率限界法検定に基づく信頼区間は、従来慣用されてきた信頼区間に対して、可能な限り、統計量に対する仮定を用いず、解析的に構成可能である点で優位性を有する。また、当該信頼区間の上側信頼限界値が有する生起リスクは、「対象確率年」と「信頼区間の片側確率」との積により求まる。この結果は、当該信頼区間の導入により、激甚豪雨の生起リスクを洪水対策に取り込める可能性を示唆するものである。

本研究では、上述した既往研究により構築された非定常水文頻度解析手法に、確率限界法検定の理論を適用し、非定常極値分布の信頼区間を構成した。信頼区間を非定常水文頻度解析に導入することで、気候変動に伴う極値水文量のトレンドの変化等を考慮した、激甚豪雨の生起リスク評価が可能となる。本章では、その詳細について示す。

#### 3-12-1 解析対象とする降雨データの非定常性の検証

本節では、非定常水文頻度解析に使用したデータの概要を示す。対象データは、気象庁地上観測地点「東京」における 1876 年から 2017 年に渡る 142 年間分の年最大日降水量の観測値である。ここで、これらの観測値の時系列を図 3-38 に示す。同図に示す時系列における最大値は、1958 年に観測された 371.9mm である。この既往最大値（371.9mm）は、1958 年に発生した狩野川台風の影響により生起したものである。

### 第3章 確率限界法検定に基づく信頼区間・予測手法の構成手法と当該区間を導入した水文頻度解析

この時系列データの特徴を捉えるために、当該データに時間を説明変数とする線形モデルを当てはめ、回帰直線を求めた。この回帰直線は、青実線として図 3-38 に示されている。この回帰直線の傾きは、対象地点における年最大日降水量の増加傾向を示唆している。また、回帰直線を用いずとも、目視により年最大日降水量の増加傾向を確認することも可能である。例えば、同図において、1876年（観測開始年）から約40年間分程度の観測値時系列と1980年から2017年までの観測値時系列の挙動を比較すると、明らかに近年における年最大日降水量に増加傾向が見られることが分かる。

以上より、同データに対して、非定常水文頻度解析手法を適用することで、より合理的な確率水文量が推定可能となることが確認された。

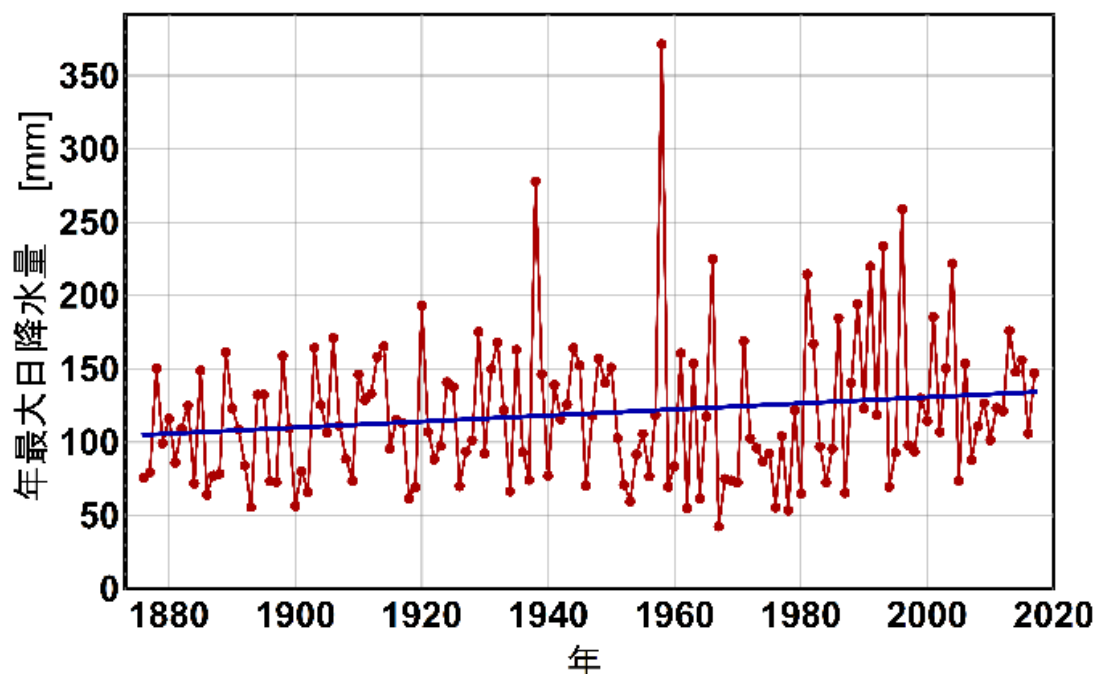


図 3-38 気象庁 地上観測地点「東京」における 1876 年から 2017 年に渡る 142 年間分の年最大日降水量の観測値時系列および当該観測値時系列に当てはめた回帰直線

#### 3-12-2 非定常極値分布モデルの概要

本節では、非定常極値分布モデルとして、非定常 Gumbel 分布および非定常一般化極値分布を例として挙げ、これらの概要を示す。また、以降では、上述した非定常極値分布の累積分布関数を  $F_X(x,t)$ 、確率密度関数を  $f_X(x,t)$ 、確率表現関数を  $\chi_X(u,t)$  と表記する。確率表現関数とは、累積分布関数の逆関数である（森口，1995）。

$\mu(t)$  を位置母数、 $\sigma(t)$  を尺度母数、 $\xi(t)$  を形状母数と表記して、両分布モデルの関数形を以下に示す。

第3章 確率限界法検定に基づく信頼区間・予測手法の構成手法と当該区間を導入した水文頻度解析

(1) 非定常 Gumbel 分布モデル

$$f_X(x, t) = \frac{1}{\sigma(t)} \exp \left\{ - \left( \frac{x - \mu(t)}{\sigma(t)} \right) \right\} \times \exp \left[ - \exp \left\{ - \left( \frac{x - \mu(t)}{\sigma(t)} \right) \right\} \right]$$

$$F_X(x, t) = \exp \left[ - \exp \left\{ - \left( \frac{x - \mu(t)}{\sigma(t)} \right) \right\} \right]$$

$$\chi_X(u, t) = \mu(t) - \sigma(t) \log[-\log(u)]$$

(2) 非定常一般化極値分布モデル

$$f_X(x, t) = \frac{1}{\sigma(t)} \exp \left[ - \left( 1 + \frac{\xi(t)(x - \mu)}{\sigma(t)} \right)^{-\frac{1}{\xi}} \right] \times \left( 1 + \frac{\xi(t)(x - \mu)}{\sigma(t)} \right)^{-1 - \frac{1}{\xi(t)}}$$

$$F_X(x, t) = \exp \left[ - \left( 1 + \frac{\xi(t)(x - \mu(t))}{\sigma} \right)^{-1/\xi(t)} \right]$$

$$\chi_X(u, t) = \mu(t) - \frac{\sigma(t)(1 - (-\log(u))^{-\xi(t)})}{\xi(t)}$$

ここで、 $(\xi(t) \neq 0, 1 + \frac{\xi(t)(x - \mu)}{\sigma} > 0)$ である。

なお、非定常一般化極値分布モデルは、形状母数  $\xi(t)=0$  とすると、非定常 Gumbel 分布モデルに一致する。

非定常極値分布モデルの母数は、以下に示すような時間を説明変数とする多項式により表される。ここで、形状母数  $\xi(t)$ は、多項式による表現では、最尤推定が不安定となるため、時間変化をしないと考え、定数として扱うことが多い (Coles., 2001)。

$$\mu(t) = \sum_{k=0}^p \mu_k t^k$$

$$\sigma(t) = \sum_{k=0}^q \sigma_k t^k$$

$$\xi(t) = \xi$$

ここに、 $p, q$  は位置母数  $\xi(t)$ , 尺度母数  $\sigma(t)$ の最高次数である。

なお、最尤法による母数推定を行うにあたり、時間  $t$  は以下に示すような離散化を行う。



### 第3章 確率限界法検定に基づく信頼区間・予測手法の構成手法と当該区間を導入した水文頻度解析

$$t_i = \frac{i}{n+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \dots$$

ここに、 $t_i$ : 離散化した時間、 $i$ : 年数 ( $i=1, 2, \dots, n$ )、 $n$ : 観測年数である。なお、年最大値資料を扱う場合、 $n$  は観測値の総数に一致する。

最尤法とは、式(3-35)に示す尤度関数 $L(\theta)$ を最大にする母数の値を推定値とする母数推定法である。なお、ここでは、時系列データを $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 、母数ベクトルを $\theta$ と表記する。

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f_X(x_i, t_i) \quad (3-35)$$

#### 3-12-3 非定常極値分布モデルの対象データへの適用

本研究では、頻度解析に非定常 Gumbel 分布を採用した。本章では、対象データに当てはめた非定常 Gumbel 分布の概要について示す。図 3-39 は、気象庁地上観測地点「東京」における 142 年間分の年最大日降水量の観測値 (1876 年～2017 年) に当てはめた非定常 Gumbel 分布の確率密度関数を示したものである。同図より、時間経過に伴い、非定常 Gumbel 分布の確率密度関数に変化していくことが分かる。なお、時変母数の最高次数は位置母数、尺度母数はともに 1 とした。これらの時変母数の関数形を以下に示す。

$$\begin{aligned} \mu(t) &= \mu_0 + \mu_1 t \\ \sigma(t) &= \exp[\sigma_0 + \sigma_1 t] \end{aligned}$$

図 3-40 は、1915 年時点および 2017 年時点における、対象データに当てはめた非定常 Gumbel 分布を示したものである。同図において、青実線は 1915 年時点での非定常 Gumbel 分布、赤実線は 2017 年時点での非定常 Gumbel 分布を表している。図 3-39 と図 3-40 より、時間経過に伴い、非定常 Gumbel 分布の右裾部が広がり、かつ、最頻値が増加していくことが分かる。これは、対象データの有する年最大日降水量の増加傾向が、推定した非定常 Gumbel 分布に反映されていることを表している。

第3章 確率限界法検定に基づく信頼区間・予測手法の構成手法と当該区間を導入した水文頻度解析

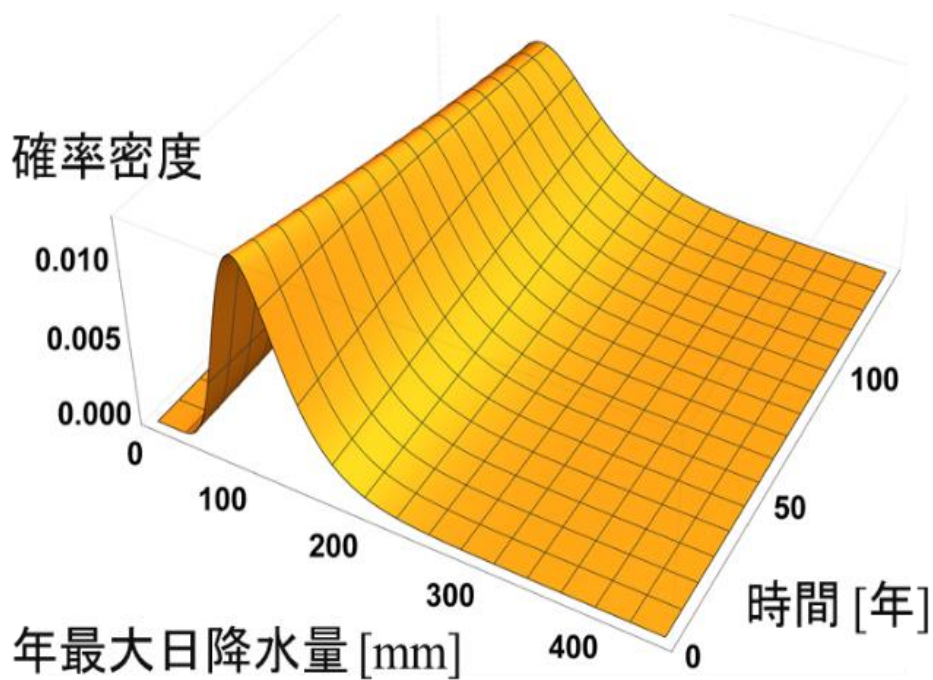


図 3-39 気象庁 地上観測地点「東京」における 142 年間分の年最大日降水量の観測値（1876 年～2017 年）に当てはめた非定常 Gumbel 分布の確率密度関数  
 ※奥行方向の軸は、経過年数を表している。

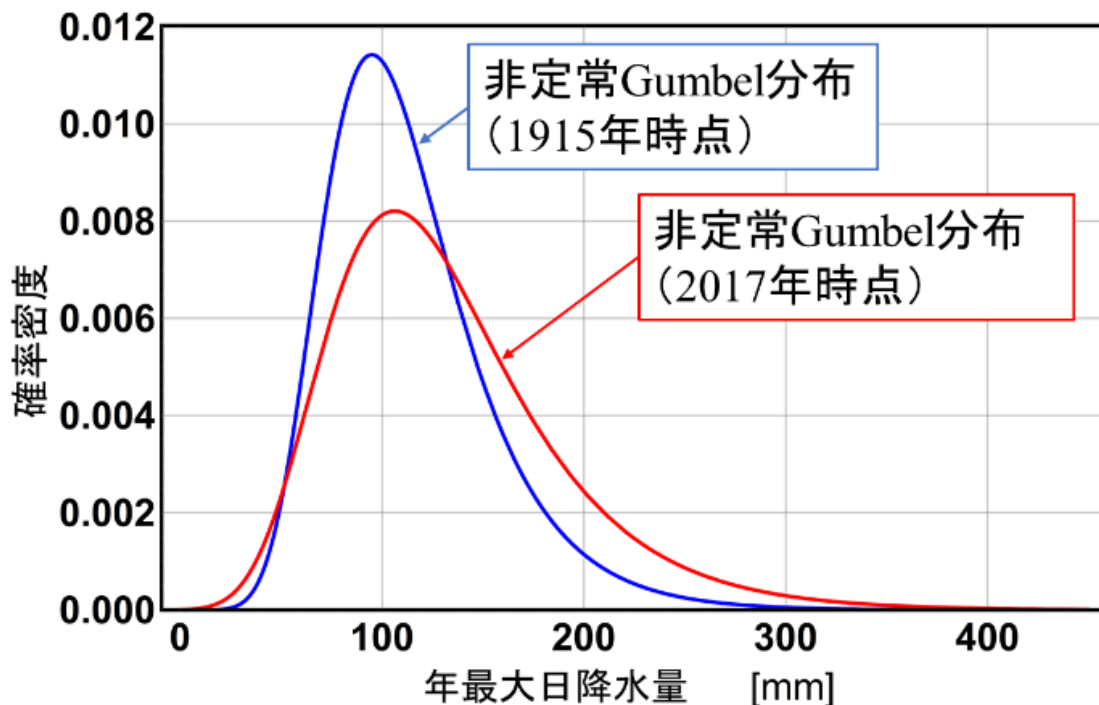


図 3-40 気象庁 地上観測地点「東京」における 142 年間分の年最大日降水量の観測値（1876 年～2017 年）に当てはめた非定常 Gumbel 分布の時間変化  
 ※青実線は 1915 年時点での非定常 Gumbel 分布，赤実線は 2017 年時点での非定常 Gumbel 分布を表している。

### 3-12-4 確率限界法検定に基づく非定常極値分布の信頼区間の構成手法

#### (1) 標準一様分布における確率限界値の算出

観測値に当てはめた非定常極値分布の累積分布関数の関数形  $F_X(x,t)$  を式(3-36)、確率表現関数の関数形  $\chi_X(u,t)$  を式(3-37)により表す。

$$u = F_X(x, t) \quad (3-36)$$

$$x = \chi_X(u, t) \quad (3-37)$$

ここに、 $x$ ：確率変数  $X$  の実現値、 $t$ ：時間[年]、 $u$ ：累積確率（確率変数  $U$  の実現値）である。

確率限界法検定では、まず、標準一様分布（区間[0,1]の一様分布）における棄却限界値を求める。既述したように、森口（1995）は、標準一様分布における棄却限界値の上方限界を  $z_{U(i)}$ 、下方限界を  $z_{L(i)}$  と定めている。本論では、これらを標準一様分布における確率限界値として、 $z_{U(i)}$  を上方確率限界値、 $z_{L(i)}$  を下方確率限界値とも表記する。任意の連続確率分布の累積確率  $U$  は、標準一様分布に従うことが知られている。このことは、定常確率分布および非定常極値分布に共通して成立する。また、標準一様分布からの順序統計量  $U_{(i)}$  は、母数  $(i, n-i+1)$  のベータ分布に従う。このことは式(3-38)により表される。

$$\begin{aligned} F_{U_{(i)}}(u) &= P(U_{(i)} \leq u) \\ &= I_u(i, n-i+1) \end{aligned} \quad (3-38)$$

ここに、 $F_{U_{(i)}}(u)$ ：第  $i$  順序統計量  $U_{(i)}$  の累積分布関数、 $I_u(i, n-i+1)$ ：母数  $(i, n-i+1)$  のベータ分布の累積分布関数、 $n$ ：標本サイズ（観測値の総数）、 $i$ ：標本値を小さい順に並び替えた場合における小さい方からの順位である。

標準一様分布における確率限界値を算出するためには、式(3-39)に示す試行により、“標準一様分布から大きく外れるようなデータの生起確率  $\alpha_{min}$ ” をサンプリングする。

$$\alpha_{min} = \min_{1 \leq i \leq n} \left\{ \text{Min} \left[ \begin{array}{l} I_u(i, n-i+1) \\ I_{1-u}(n-i+1, i) \end{array} \right]_{u=u_{(i)}} \right\} \quad (3-39)$$

ここに、 $I_u(i, n-i+1)|_{u=u_{(i)}}$ ：第  $i$  順序統計量  $u_{(i)}$  の非超過確率、 $I_{1-u}(n-i+1, i)|_{u=u_{(i)}}$ ：第  $i$  順序統計量  $u_{(i)}$  の超過確率である。

式(3-39)が示す試行を繰り返すことで、 $\alpha_{min}$  を任意の個数だけ得ることができる。次に、数値を扱いやすくするため、これらの  $\alpha_{min}$  を  $-\text{Log}_{10}(2\alpha_{min})$  に対数変換する。 $-\text{Log}_{10}(2\alpha_{min})$  の分布は、標準一様分布からの標本中で、標準一様分布から大きく外れるような順序統計量の生起確率の分布ととらえることができる。本研究は、これらの-

第3章 確率限界法検定に基づく信頼区間・予測手法の構成手法と当該区間を導入した水文頻度解析

$-\text{Log}_{10}(2\alpha_{min})$ に対する極値分布の当てはめを提案している(清水ら, 2018)。このことにより, 任意の有意水準に応じた確率限界値を算出することができる。図3-41に,  $-\text{Log}_{10}(2\alpha_{min})$ の標本に当てはめた Gumbel 分布の確率表現関数  $\chi_{\alpha}(u)$ を示す。

例えば, 有意水準 5% (両側確率 5%) で対象データと仮定した確率分布に対する確率限界法検定を行う場合, この有意水準 (両側確率) に対応する  $\alpha$  は, 方程式  $\chi_{\alpha}(0.95) = -\text{Log}_{10}(2\alpha_{min}) = 2.65$  を  $\alpha_{min}$  について解き,  $1.12 \times 10^{-3}$  となる。式(3-38)に示す確率が  $\alpha$  となる  $u$  が  $z_L(i)$ , 当該確率が  $1-\alpha$  となる  $u$  が  $z_U(i)$  である。対象データの標本サイズは 142 であるから, このとき, 上方確率限界値の標本  $U_U$  は  $\{z_U(1), z_U(2), \dots, z_U(142)\}$ , 下方確率限界値の標本  $U_L$  は  $\{z_L(1), z_L(2), \dots, z_L(142)\}$  となる。これらの確率限界値にプロットポジション公式による累積確率  $F_U(u_{(i)})$  を与えることで定まる実験点を, 下方確率限界点  $(F_U(u_{(i)}), z_L(i))$  および上方確率限界点  $(F_U(u_{(i)}), z_U(i))$  とする。ここで,  $(F_U(u_{(i)}), z_L(i))$  を連ねた線を下方確率限界線,  $(F_U(u_i), z_U(i))$  を連ねた線を上方確率限界線とする。図3-42は両側確率 5%,  $n=142$  の場合における標準一様分布における確率限界線を示したものである。両限界線からなる範囲は, 標準一様分布からのデータに対する確率限界法検定における採択域である。

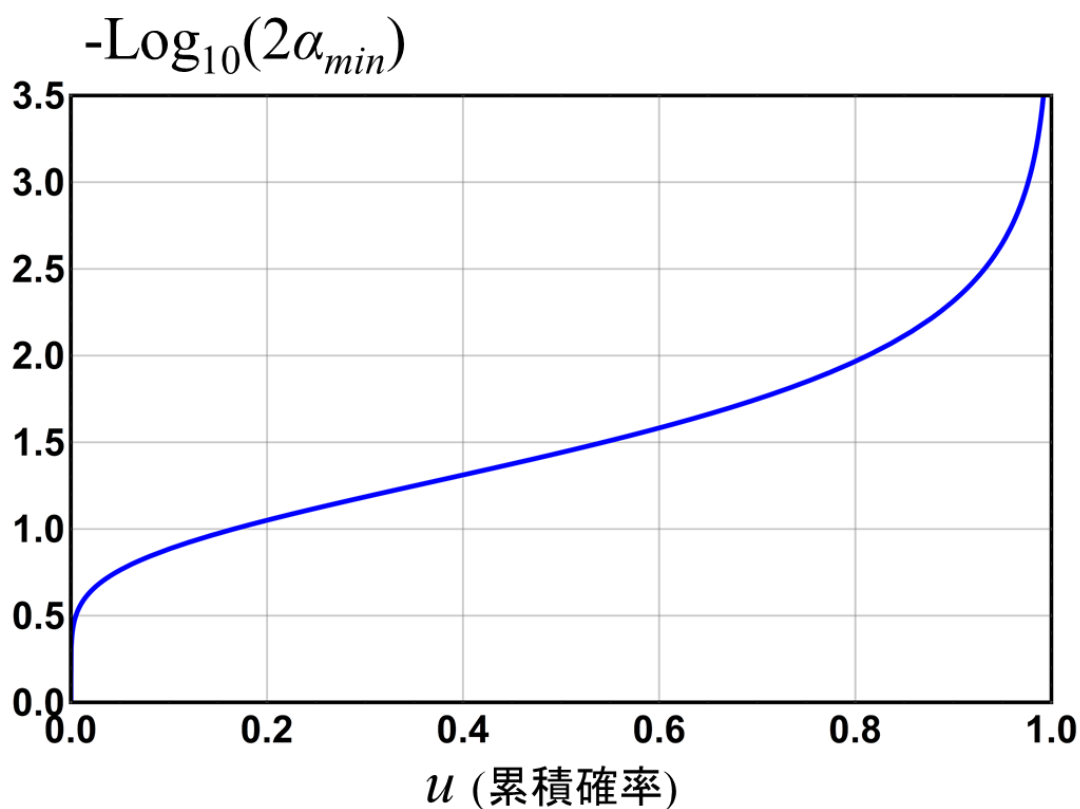


図3-41  $-\text{Log}_{10}(2\alpha_{min})$ の標本に当てはめた Gumbel 分布の確率表現関数  $\chi_{\alpha}(u)$   
 ※本研究では,  $\alpha_{min}$  の分布の安定性を確保するため, 5000 個の  $\alpha_{min}$  をサンプリングした。

$U$  (累積確率  $U$  の実現値)

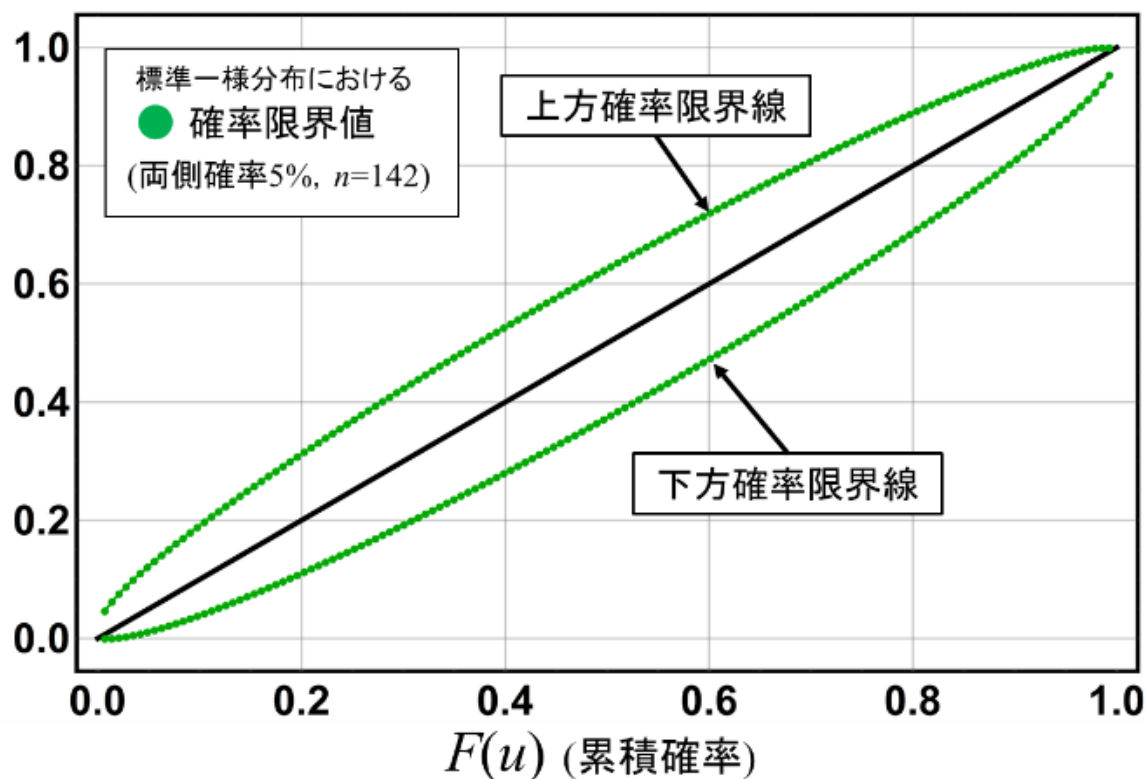


図 3-42 標準一様分布における両側確率 5% の確率限界線  
 ※同図中の  $n$  は、確率限界値の算出にあたり、使用した観測値の総数を表している。

(2) 非定常極値分布における確率限界値の算出および信頼区間の構成

非定常極値分布の確率限界値は、標準一様分布における確率限界値を累積確率として扱い、所与の時間  $t$  における非定常極値分布の確率表現関数に代入することで算出できる。すなわち、観測値に当てはめた非定常極値分布における上方確率限界値は  $\chi_X(z_U(i), t)$ 、下方確率限界値は  $\chi_X(z_L(i), t)$  である。また、観測値に当てはめた非定常極値分布における上方確率限界値の標本  $X_U$  を  $\{\chi_X(z_U(1), t), \chi_X(z_U(2), t), \dots, \chi_X(z_U(n), t)\}$ 、下方確率限界値の標本  $X_L$  を  $\{\chi_X(z_L(1), t), \chi_X(z_L(2), t), \dots, \chi_X(z_L(n), t)\}$  と定める。

次に、任意の時間  $t$  において、非定常極値分布の信頼区間を構成する手順を示す。まず、対象とする時間  $t$  における下方確率限界値の標本  $X_L$  および上方確率限界値の標本  $X_U$  を算出する。次に、採用した非定常極値分布に対応する定常極値分布に、これらの標本を当てはめ、その定常極値分布の母数を推定する。例えば、観測値への当てはめに非定常 Gumbel 分布 (非定常一般化極値分布) を採用した場合、確率限界値への当てはめには、Gumbel 分布 (一般化極値分布) を用いる。なぜならば、時間  $t$  を

### 第3章 確率限界法検定に基づく信頼区間・予測手法の構成手法と当該区間を導入した水文頻度解析

所与のものとして、確率限界値を算出するため、確率限界値への当てはめを行うには定常極値分布が妥当であると考え、本研究では、標本  $X_U$  から推定した母数を有する採用定常極値分布を上側信頼限界線、標本  $X_L$  から推定した母数を有する採用定常極値分布を下側信頼限界線と定義した。したがって、両信頼限界線から構成される区間は、対象とする時間  $t$  における非定常極値分布の信頼区間となる。

図 3-43 は、確率限界法検定を用いた非定常極値分布に関する 95% 信頼区間の構成過程を示したものである。同図において、青実線および青破線は 1885 年時点での非定常 Gumbel 分布およびその 95% 信頼区間、赤実線および赤破線は 2077 年時点での非定常 Gumbel 分布およびその 95% 信頼区間、緑点は標準一様分布における確率限界値、青点は 1885 年時点での非定常 Gumbel 分布における確率限界値、赤点は 2077 年時点での非定常 Gumbel 分布における確率限界値を表している。標準一様分布における確率限界値は観測値の総数に応じて決定するものであり、これらは時間的に変化しない。また、非定常極値分布は時間的に変化をするものである一方、その累積確率は、どのような確率分布形であっても、標準一様分布に従う。このため、標準一様分布における確率限界値を対象とする時点の非定常極値分布の確率表現関数に代入することで、その分布の下での確率限界値を算出することができる。これは、現在までに蓄積されている観測値の総数に応じて、推定量に内包される不確実性が標準一様分布における確率限界値の幅  $[z_L(i), z_U(i)]$  という形で定量化され、この幅により任意の時点  $t$  における年最大日降水量  $X_{(i)}$  の取りうる幅  $[\chi_X(z_L(i), t), \chi_X(z_U(i), t)]$  が算定されることを表している。図 3-43 において、1885 年時点および 2077 年時点を対象として、それらの時点での Gumbel 分布の確率限界値が構成される過程が示されている。信頼限界線は、既述したように、時間  $t$  を所与のものとして、その時点での非定常極値分布（本研究では非定常 Gumbel 分布）における確率限界値に、当てはめた定常極値分布（本研究では Gumbel 分布）である。このように、非定常の場合であっても、累積確率は標準一様分布に従うという性質を用いることで、確率限界法検定による信頼区間を構成することができる。

第3章 確率限界法検定に基づく信頼区間・予測手法の構成手法と当該区間を導入した水文頻度解析

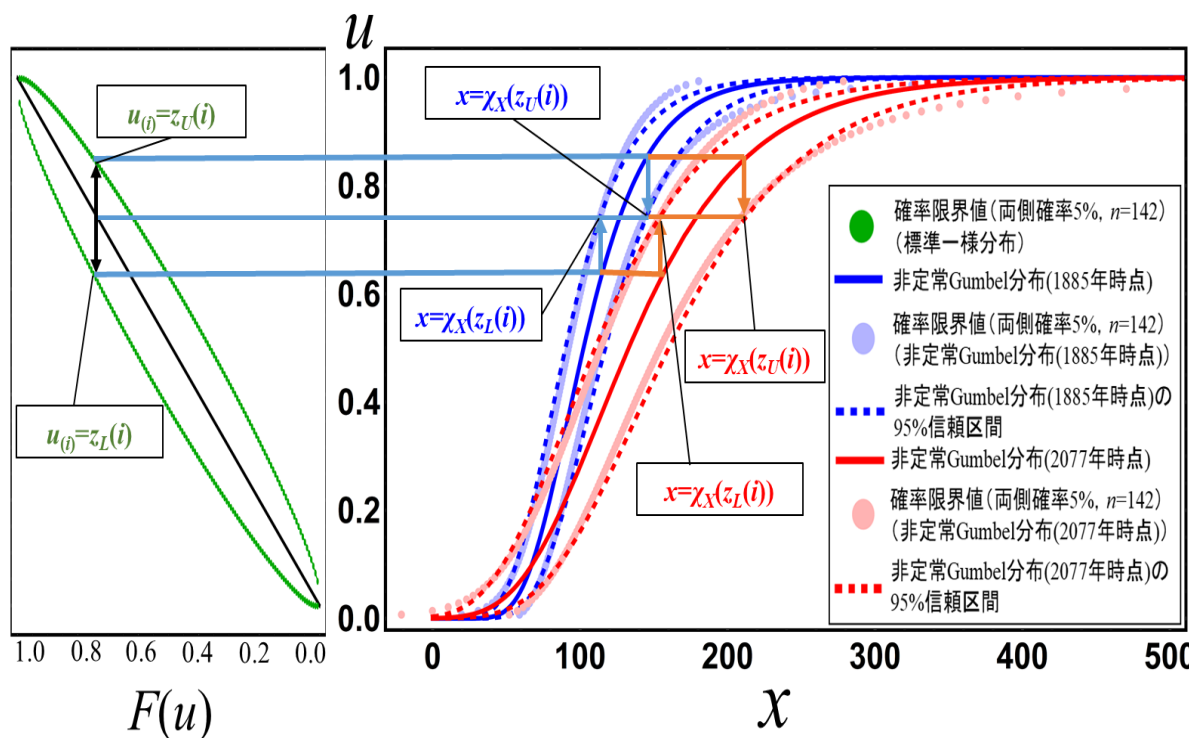


図 3-43 確率限界法検定を用いた非正常極値分布に関する 95%信頼区間の構成過程

※同図における  $n$  は観測値の総数を表している。

※青実線および青破線は 1885 時点（過去期間）での非正常 Gumbel 分布およびその 95%信頼区間，赤実線および赤破線は 2077 年時点（将来期間）での非正常 Gumbel 分布およびその 95%信頼区間である。緑点は標準一様分布における両側確率 5%の確率限界値，青点は 1885 年時点（過去期間）での非正常 Gumbel 分布における両側確率 5%の確率限界値，赤点は 2077 年時点（将来期間）での非正常 Gumbel 分布における両側確率 5%の確率限界値である。

### 3-12-5 確率限界法検定に基づく信頼区間を導入した非正常水文頻度解析手法の適用

前節において示したように，非正常水文頻度解析手法の適用により，時間を説明変数とした，極値水文量の確率分布を推定することができる。これは，同手法により，極値水文量の確率分布の時間発展を記述できるということであり，過去期間ならびに将来期間における極値水文量の確率分布が推定可能であることを表している。

本節では，確率限界法検定に基づく信頼区間を導入した非正常水文頻度解析手法を過去期間ならびに将来期間に適用し，その具体例を示す。また，当該信頼区間の上側信頼限界値の超過確率は，「対象確率年」と「信頼区間の片側確率」との積により求まる。すなわち， $T$  年確率における  $100(1-p)\%$  上側信頼限界値を超える豪雨が発生するリスクは， $(1/T) \times p/2$  により表すことができる（清水ら，2018）。ここで， $p$  は有意水準， $(1-p)$  は信頼係数である ( $0 < p < 1$ )。なお，対象データは 1876 年から 2017 年に

### 第3章 確率限界法検定に基づく信頼区間・予測手法の構成手法と当該区間を導入した水文頻度解析

渡る 142 年間分の年最大値を用いているため、2017 年以前を過去期間、2017 年以後を将来期間と定義する。

#### (1) 過去期間への適用

本節では、信頼区間を導入した非定常水文頻度解析手法を過去期間に適用し、年最大日降水量の時間変化を明らかにする。

図 3-44 は、地上観測地点「東京」における 142 年間分の年最大日降水量の観測値 (1876 年～2017 年)、これら 142 個の観測値に当てはめた非定常 Gumbel 分布および確率限界法検定に基づく当該非定常 Gumbel 分布の 95%信頼区間を示したものである。同図において、黒点は観測値、青実線は 1915 年時点での非定常 Gumbel 分布、青破線は 1915 年時点での非定常 Gumbel 分布の 95%信頼区間、赤実線は 2017 年時点での非定常 Gumbel 分布、赤破線は 2017 年時点での非定常 Gumbel 分布の 95%信頼区間を表している。同図から、時間経過に伴い、非定常 Gumbel 分布が与える確率年最大日降水量は増加していき、その信頼区間は広がっていくことが分かる。また、同図より、狩野川台風時に観測された既往最大値 (371.9mm) は、上位第二位以下の観測値群から大きく外れることが分かる。当該値は、1915 年時点での非定常 Gumbel 分布およびその 95%信頼上側信頼限界線を大きく外れるため、1915 年時点での信頼区間を用いた当該値の評価は極めて困難であることが分かる。一方、当該値は 2017 年時点での 95%上側信頼限界線近傍にプロットされ、信頼区間を用いた当該値に対する確率評価が可能となる。2017 年時点での 95%上側信頼限界線を用いて当該値の確率年を算出すると、その確率年は 123 年となる。このため、当該値を超過するような大雨、すなわち、狩野川台風級の豪雨の生起リスクは、既述したリスク評価の枠組み（「対象確率年」×「信頼区間の片側確率」）により、 $(1/123) \times 2.5\%$  ( $=2.0 \times 10^{-4}$ ) となる。信頼区間の非定常水文頻度解析への導入により、1915 年時点では合理的な確率評価が困難な降雨量は、2017 年時点における信頼区間内の現象、すなわち、洪水対策におけるリスクとして議論可能なものとなる。

この結果は、時間経過に伴い、過去期間において生起した激甚豪雨と同等あるいはそれ以上の豪雨が発生するリスクが増加していくことを示している。また、そのような豪雨の生起リスクは、対象データへの非定常水文頻度解析結果でも述べたように、対象確率年と信頼区間の片側確率との積により定量化可能である。



第3章 確率限界法検定に基づく信頼区間・予測手法の構成手法と当該区間を導入した水文頻度解析

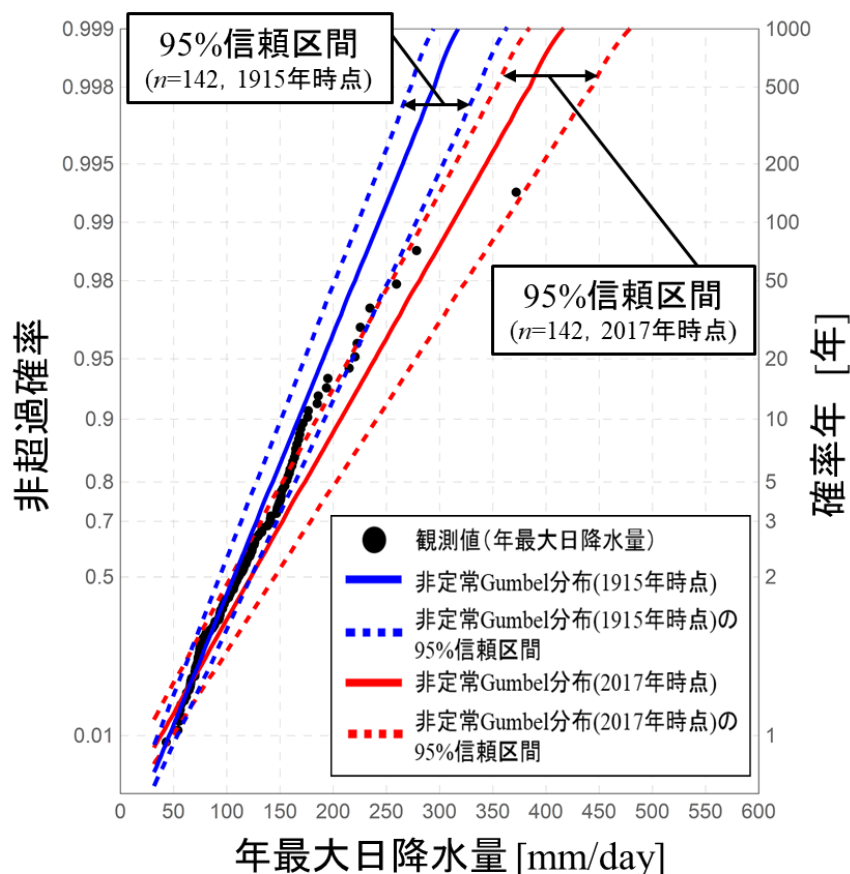


図 3-44 気象庁 地上観測地点「東京」における 142 年間分の年最大日降水量の観測値（1876 年～2017 年），これら 142 個の観測値に当てはめた非定常 Gumbel 分布（青実線：1915 年時点での非定常 Gumbel 分布，赤実線：2017 年時点での非定常 Gumbel 分布）および確率限界法検定に基づく両非定常 Gumbel 分布の 95%信頼区間

※同図における  $n$  は観測値の総数を表している．なお，プロットングポジション公式には，Hazen 公式を使用した．

(2) 将来期間への適用

本節では，信頼区間を導入した非定常水文頻度解析手法を将来期間に適用し，年最大日降水量の将来変化を明らかにする．本研究では，2017 年時点から 60 年経過した時点（2077 年）までの期間を対象として，非定常水文頻度解析を行った．非定常水文頻度解析により，2017 年時点から 2077 年時点に渡る 60 年間において，各年での年最大日降水量の将来分布を推定できる．

図 3-45 は，青実線は 1975 年時点，すなわち，過去期間における非定常 Gumbel 分布，赤実線は 2077 年時点，すなわち，将来期間における非定常 Gumbel 分布を示したものである．同図より，対象データが有する年最大日降水量の増加傾向のため，将来期間における Gumbel 分布（赤実線）は過去期間における Gumbel 分布（青実線）よ

### 第3章 確率限界法検定に基づく信頼区間・予測手法の構成手法と当該区間を導入した水文頻度解析

りも右裾部が広くなり、将来期間では大雨の生起確率が増加することが分かる。

図 3-46 は、地上観測地点「東京」における 142 年間分の年最大日降水量の観測値（1876 年～2017 年）、これら 142 個の観測値に当てはめた非定常 Gumbel 分布および確率限界法検定に基づく当該非定常 Gumbel 分布の 95%信頼区間を示したものである。同図において、黒点は観測値、青実線は 1975 年時点（過去期間）での非定常 Gumbel 分布、青破線は 1975 年時点での非定常 Gumbel 分布の 95%信頼区間、赤実線は 2077 年時点（将来期間）での非定常 Gumbel 分布、赤破線は 2077 年時点での非定常 Gumbel 分布を表している。同図において、過去期間における信頼区間と将来期間における信頼区間が重複する範囲より、将来期間における年最大日降水量は過去期間においても発生する可能性があったことが分かる。また、同図より、既往最大値(371.1mm)は、過去期間における 95%上側信頼限界値を超過しているが、将来期間においては、当該値は平均曲線（赤実線で示す非定常 Gumbel 分布）近傍にプロットされていることが分かる。このことは、将来期間においては、狩野川台風級の豪雨は、対象確率年で生起しうる雨量の期待値となることを示している。

また、どの時点を考えるかによって、「対象確率年×信頼区間の片側確率」で表されるリスクが同じ値であっても、そのリスクで生起する降雨量は変化する。例えば、100 年確率水文量の 95%上側信頼限界値の超過確率（ $=1/4000$ ）に対応する年最大日降水量は、過去期間（1975 年）では 323.9mm であるが、将来期間（2077 年）では 422.4mm となる。このように、信頼区間を非定常水文頻度解析に導入することで、降雨量の増加傾向を考慮した、激甚豪雨の生起リスク評価が可能となる。

非定常水文頻度解析手法の適用により、確率水文量およびその信頼限界値の時間変化を推定することができる。図 3-47 は、対象地点における 100 年確率年最大日降水量とその 95%信頼区間の時間変化を示したものである。同図中において、青実線は過去期間における 100 年確率年最大日降水量、紫実線は過去期間における 95%信頼区間、青破線は将来期間における 100 年確率年最大日降水量および紫破線は将来期間における 95%信頼区間を示している。同図より、時間経過に伴い、上記諸量は線形的に増加することが明らかとなった。このように、非定常水文頻度解析手法の適用により、確率水文量とその信頼限界値の将来変化を推定することができる。

第3章 確率限界法検定に基づく信頼区間・予測手法の構成手法と当該区間を導入した水文頻度解析

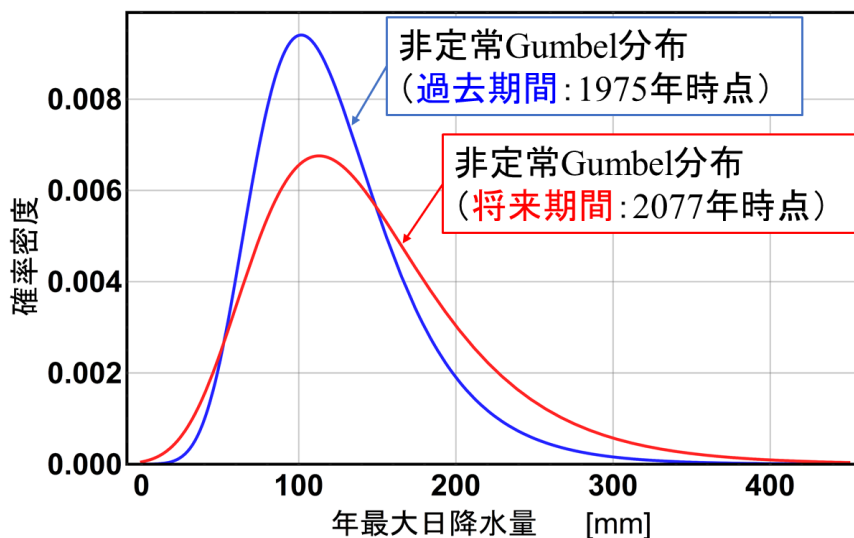


図 3-45 気象庁 地上観測地点「東京」における 142 年間分の年最大日降水量の観測値（1876 年～2017 年）に当てはめた非常常 Gumbel 分布の将来変化 ※青実線は 1975 年時点での非常常 Gumbel 分布，赤実線は 2077 年時点での非常常 Gumbel 分布である。

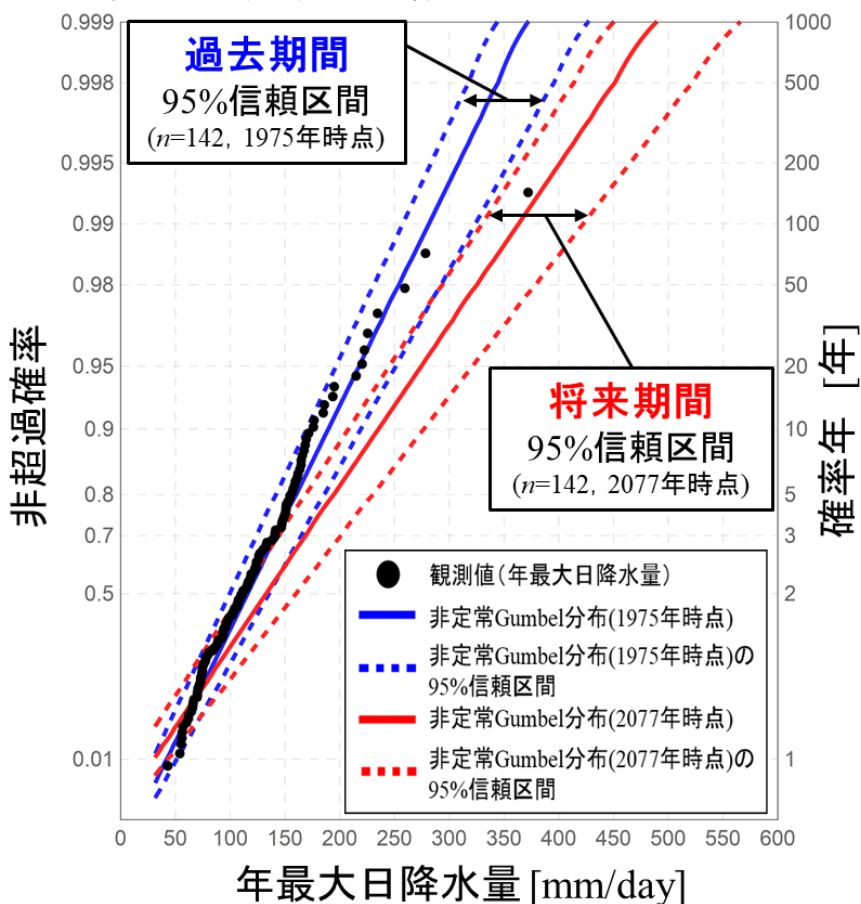


図 3-46 気象庁 地上観測地点「東京」における 142 年間分の年最大日降水量の観測値（1876 年～2017 年），これら 142 個の観測値に当てはめた非常常 Gumbel 分布（青実線：1975 年時点での非常常 Gumbel 分布，赤実線：2077 年時点での非常常 Gumbel 分布）および確率限界法検定に基づく両非常常 Gumbel 分布の 95%信頼区間 ※同図における  $n$  は観測値の総数を表している。なお，プロットングポジション公式には，Hazen 公式を使用した。

第3章 確率限界法検定に基づく信頼区間・予測手法の構成手法と当該区間を導入した水文頻度解析

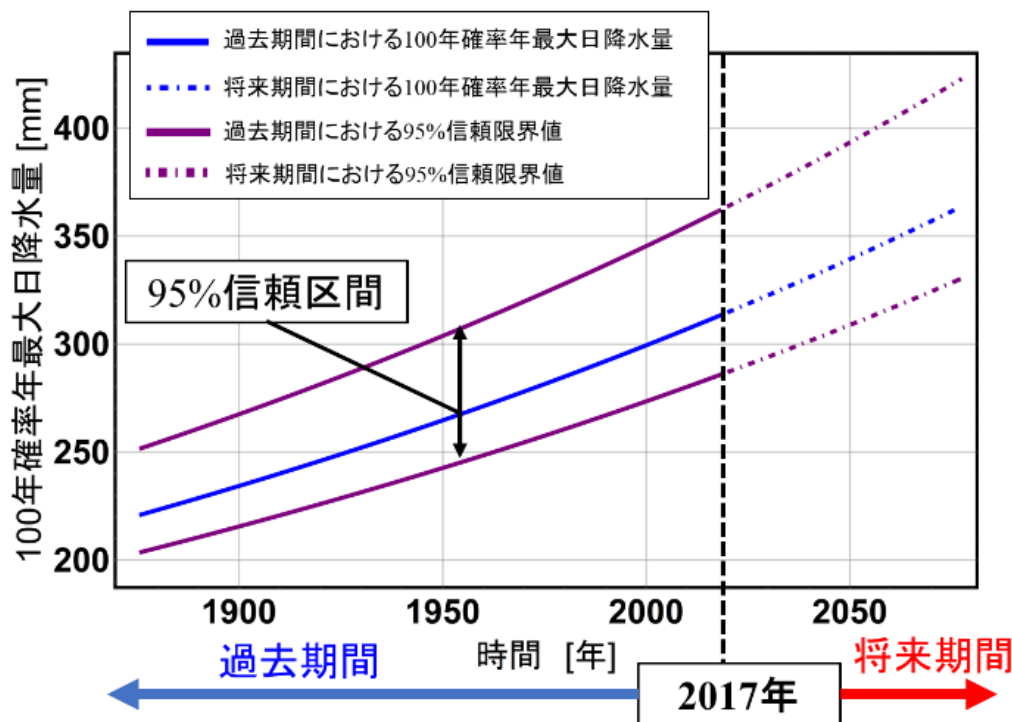


図 3-47 100 年確率年最大日降水量とその 95%信頼区間の時間変化

3-13 確率限界法検定に基づく信頼区間の二変量極値統計解析への導入

防災対策を策定する上で、いくつかの激甚現象が同時に発生するリスクを見積もることは極めて重要である。例えば、我が国の首都圏において、前線などによる集中豪雨と巨大台風に伴う高潮が同時に発生するリスクならびにそれがもたらす被害規模を見積もることは、防災政策において考慮すべき要素である。また、洪水対策の観点からは、いくつかの極値水文量の同時生起頻度を推定することは、有効である。

極値の同時生起頻度を推定するための方法として、多変量極値解析がある。多変量極値解析では、各極値変数が従う確率分布を周辺分布として扱い、それらの極値の同時確率分布を用いることで、極値の同時生起率を推定する。極値変数とは、極値を表す確率変数である。このような極値解析における困難点としては、極値資料の不足により、推定値に不確実性が大いに内包されることがある。洪水対策における計画水文量は、過去数十年間分程度の観測実績を極値解析することで算定されている。一方で、計画確率年は、一級河川の場合、一般的に 100 年から 200 年程度であるため、過去数十年間分の観測実績に基づいて算定された計画水文量に内包される不確実性は極めて大きいといえる。計画水文量を始めとした推定値に内包される不確実性は、信頼区間という形で定量化することができる。このため、信頼区間は、従来では“想定外”として扱われるような規模の水文現象を洪水対策へ導入可能とするものである。本研究は、森口（1995）が提案した「確率限界法検定」に基づく信頼区間を導入した水文

### 第3章 確率限界法検定に基づく信頼区間・予測手法の構成手法と当該区間を導入した水文頻度解析

頻度解析手法（清水ら，2018）を示している．確率限界法検定に基づく信頼区間は，従来水文頻度解析で用いられてきた信頼区間に対して，可能な限り，仮定を設定せず，かつ，解析的に構成可能である点で優位性を有する．また，当該信頼区間上の水文量の生起リスクは，「対象確率年」と「信頼区間の片側確率」との積で表すことができる．この結果は，当該信頼区間の幅をどこまで議論するかにより，洪水対策におけるリスクが表現可能となることを示唆するものである．

前章では，確率限界法検定を用いて，唯一つの極値水文量を確率変数とした場合における信頼区間の構成手法を示した．一方，本研究では，同検定理論を応用することで，多変量の場合においても信頼区間を構成する手法を構築した．確率限界法検定に基づく信頼区間を二変量極値解析に導入することで，激甚な水文現象が同時に生起するリスクを推定することができる．

本章では，年最大総降雨量と年最大洪水ピーク流量を極値変数とし，それらの同時確率分布ならびに当該分布の信頼区間を扱う．このことにより，極めて大きな規模の年最大総降雨量および年最大洪水ピーク流量が同時に生起するリスクが推定可能となる．

#### 3-13-1 解析対象とする降雨データと流量データの相関性の検証

本節では，二変量極値解析の対象データの概要を示す．対象データは，草木ダム流域における1977年から2017年に渡る41年間分の年最大総降雨量の観測値および年最大洪水ピーク流量の観測値である．ここで，同流域における41年間分の年最大総降雨量の観測値時系列を図3-48，年最大洪水ピーク流量の観測値時系列を図3-49に示す．また，これらの観測値の散布図を図3-50に示す．これらの観測値の相関係数は0.64であり，比較的高い相関性が見られる．このことにより，二変量極値解析の適用の妥当性が確認された．

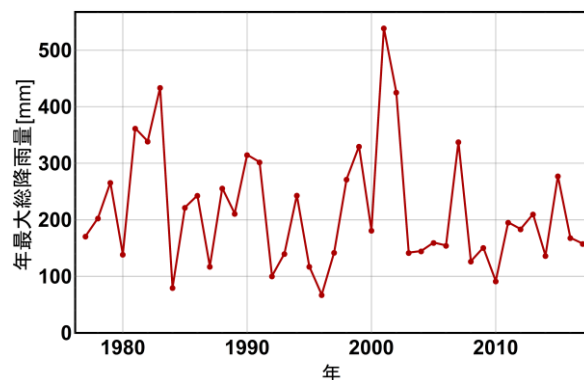


図3-48 草木ダム流域における1977年から2017年に渡る41年間分の年最大総降雨量の観測値時系列（再掲）

第3章 確率限界法検定に基づく信頼区間・予測手法の構成手法と当該区間を導入した水文頻度解析

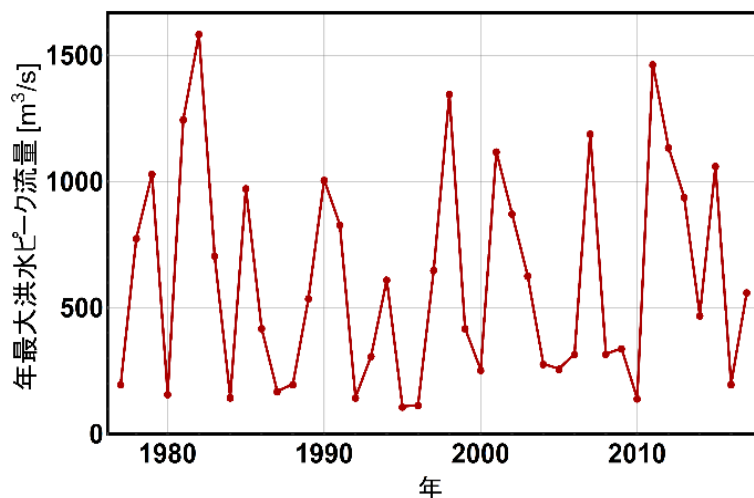


図 3-49 草木ダム流域における 1977 年から 2017 年に渡る 41 年間分の年最大洪水ピーク流量の観測値時系列（再掲）

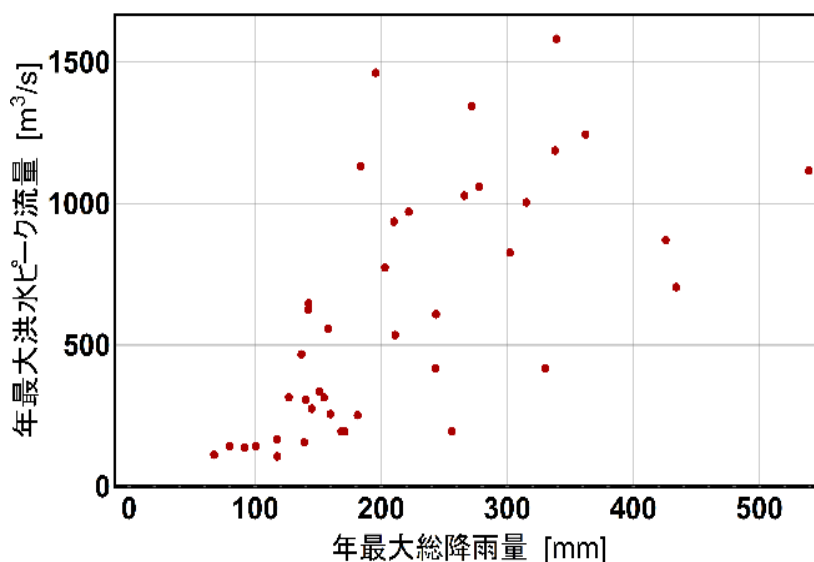


図 3-50 草木ダム流域における 1977 年から 2017 年に渡る 41 年間分の年最大総降雨量と年最大洪水ピーク流量の観測値の散布図  
 ※同流域における年最大総降雨量と年最大洪水ピーク流量の相関係数は 0.64 である。

3-13-2 二変量極値分布モデルの概要

Coles and Tawn (1991) は、多変量の極値分布モデルの構成理論を示している。本章では、上記構成理論に基づき、二変量極値分布モデルの概要を示す。ここで、二変量極値分布モデルとは、極値変数  $X$  および極値変数  $Y$  の同時確率分布である。

極値変数  $X$  の生起率は式(3-40)、極値変数  $Y$  の生起率は式(3-41)により表すことができる（北野ら, 2018）。ここで、形状母数  $\xi \neq 0$  の場合の生起率を GEV-Type, 形状母

第3章 確率限界法検定に基づく信頼区間・予測手法の構成手法と当該区間を  
導入した水文頻度解析

数  $\xi=0$  の場合の生起率を Gumbel-Type と表記する.

$$\lambda_X(x) = \begin{cases} \left[1 + \xi_X \left(\frac{x - \mu_X}{\sigma_X}\right)\right]^{-1/\xi_X} & (\xi_X \neq 0) \\ \exp\left[-\frac{x - \mu_X}{\sigma_X}\right] & (\xi_X = 0) \end{cases} \quad (3-40)$$

$$\lambda_Y(y) = \begin{cases} \left[1 + \xi_Y \left(\frac{y - \mu_Y}{\sigma_Y}\right)\right]^{-1/\xi_Y} & (\xi_Y \neq 0) \\ \exp\left[-\frac{y - \mu_Y}{\sigma_Y}\right] & (\xi_Y = 0) \end{cases} \quad (3-41)$$

極値分布は生起率を用いて表すことができる. すなわち, 極値変数  $X$  の累積分布関数  $F_X(x)$  は式(3-42), 極値変数  $Y$  の累積分布関数  $F_Y(y)$  は式(3-43)により表すことができる.

$$F_X(x) = \exp[-\lambda_X(x)] \quad (3-42)$$

$$F_Y(y) = \exp[-\lambda_Y(y)] \quad (3-43)$$

極値変数  $X$  の確率表現関数  $\chi_X(u)$  は式(3-44), 極値変数  $Y$  の確率表現関数  $\chi_Y(u)$  は式(3-45)により表すことができる. なお, 確率表現関数とは, 累積分布関数の逆関数である.

$$x = \chi_X(u) \quad (3-44)$$

$$y = \chi_Y(u) \quad (3-45)$$

ここに,  $x$ : 極値変数  $X$  の実現値,  $y$ : 極値変数  $Y$  の実現値,  $u$ : 累積確率である.

多変量の同時生起率には, 複数のモデルが提案されている. 同時生起率を表す数理モデルとしては, ロジスティックモデル, ネガティブロジスティックモデル, ディリクレモデルや Husler-Reiss モデルなどがある ( (Kottz and Nadarajah, 2000) , (Coles, 2001) , (Beirlant, 2004) ). 本研究では, 標準的に用いられているロジスティックモデルを用いて, 二変量の同時生起率を表した.

極値変数  $X$  と極値変数  $Y$  の同時生起率  $\lambda_{XY}(x,y)$  を表すロジスティックモデルの関数形を式(3-46)に示す.

$$\lambda_{XY}(x,y) = \{\lambda_X(x)^{1/\alpha_{dep}} + \lambda_Y(y)^{1/\alpha_{dep}}\}^{\alpha_{dep}} \quad (3-46)$$

ここに,  $\alpha_{dep}$  は依存性のパラメータである ( $0 \leq \alpha_{dep} \leq 1$ ).

式(3-46)に示すロジスティックモデルにより, 二変量極値分布の累積分布関数  $F_{XY}(x,y)$  は式(3-47)により表される.

$$F_{XY}(x,y) = \exp[-\lambda_{XY}(x,y)] \quad (3-47)$$

二変量極値分布の確率表現関数は, 所与の再現期間に相当する水文量の値の組を与える. このため, 二変量極値分布の確率表現関数  $\chi_{XY}(u)$  は式(3-48)により表される

$$(x,y) = \chi_{XY}(u) \quad (3-48)$$

ここで,  $(x,y)$ : 累積確率  $u$  に相当する極値変数  $X$  と極値変数  $Y$  の実現値の組,

第3章 確率限界法検定に基づく信頼区間・予測手法の構成手法と当該区間を導入した水文頻度解析

$u (=F_{XY}(x, y))$  : 累積確率である.

以降では, 年最大総降雨量を表す極値変数を  $R$ , 年最大洪水ピーク流量を表す極値変数を  $Qp$  と表記する.

3-13-3 二変量極値分布モデルの対象データへの適用

本研究では, 二変量極値分布モデルとして二変量 Gumbel 分布を採用した. 二変量 Gumbel 分布は, 二つの極値変数における生起率の形状母数  $\xi$  を 0 とすることで得られる. すなわち, 各極値変数の生起率を Gumbel-Type で表し, これらの同時生起率を式(3-47)に代入したものが, 二変量 Gumbel 分布の累積分布関数である. ここで, 対象流域における年最大総降雨量と年最大洪水ピーク流量の観測値を図 3-51, これらの観測値に当てはめた二変量 Gumbel 分布を図 3-52 に示す. なお, 母数推定は最尤法により行った. 各母数の推定値を表 3-10 に示す. 表 3-11 に示す母数の推定値を用いて, 各極値変数の周辺分布を得ることができる.

最尤法とは, 式(3-49)に示す尤度関数  $L(\theta)$  を最大にする母数の値を推定値とする母数推定法である. なお, ここでは, 時系列データを  $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)\}$ , 母数ベクトルを  $\theta$  と表記している.

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f_{XY}(x_i, y_i) \tag{3-49}$$

ここに,  $f_{XY}(x,y)$  は二変量極値分布の確率密度関数である.

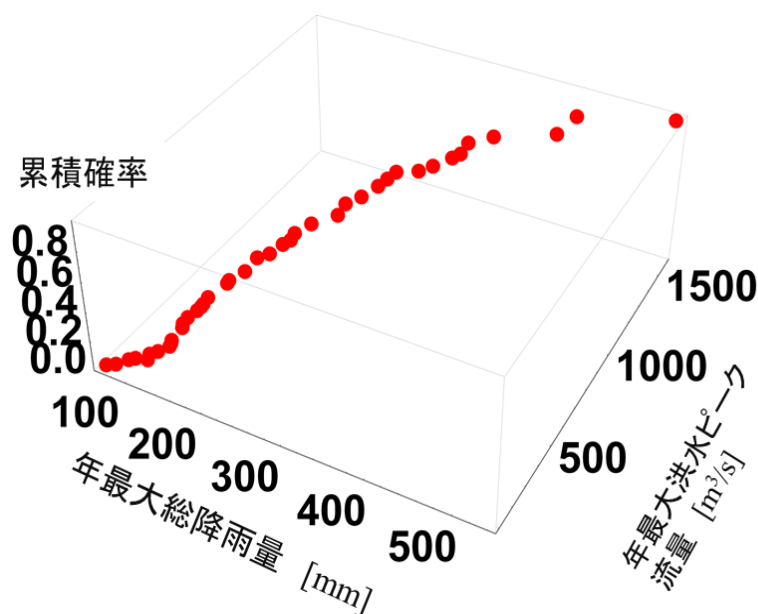


図 3-51 草木ダム流域における 1977 年から 2017 年に渡る 41 年間分の年最大総降雨量と年最大洪水ピーク流量の観測値 ※各観測値の累積確率は, Weibull 公式により与えた.



第3章 確率限界法検定に基づく信頼区間・予測手法の構成手法と当該区間を導入した水文頻度解析

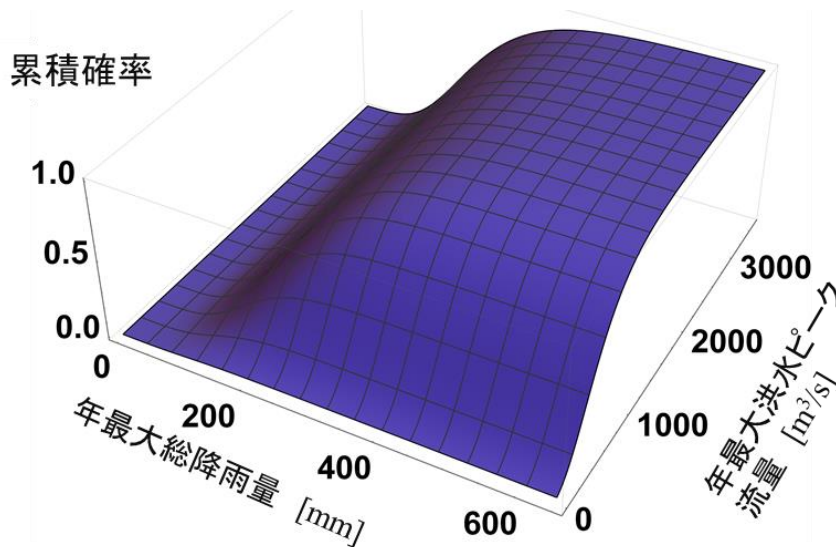


図 3-52 草木ダム流域における 1977 年から 2017 年に渡る 41 年間分の年最大総降雨量と年最大洪水ピーク流量の観測値に当てはめた Gumbel 分布の累積分布関数

$\mu_R$	$\sigma_R$	$\mu_{Q_p}$	$\sigma_{Q_p}$	$\alpha_{dep}$
164.6534	71.6924	394.8003	306.4127	0.5975

表 3-10 観測値に当てはめた二変量 Gumbel 分布の母数

3-13-4 確率限界法検定に基づく二変量極値分布の信頼区間の構成手法

(1) 標準一様分布における確率限界値の算出

確率限界法検定では、まず、標準一様分布（区間[0,1]の一様分布）における確率限界を求める。本論では、森口（1995）の定義に倣い、標準一様分布における棄却限界値の上方限界を  $z_{U(i)}$ 、下方限界を  $z_{L(i)}$  としている。本論では、これらを標準一様分布における確率限界値として、 $z_{U(i)}$  を上方確率限界値、 $z_{L(i)}$  を下方確率限界値とも表記する。ここで、任意の連続確率分布の累積確率  $U$  は、標準一様分布に従うことが知られている。また、標準一様分布からの順序統計量  $U_{(i)}$  は、母数  $(i, n-i+1)$  のベータ分布に従う。このことを式(3-50)により表す。

$$\begin{aligned}
 F_{U_{(i)}}(u) &= P(U_{(i)} \leq u) \\
 &= I_u(i, n-i+1)
 \end{aligned}
 \tag{3-50}$$

ここに、 $F_{U_{(i)}}(u)$ ：第  $i$  順序統計量  $U_{(i)}$  の累積分布関数、 $I_u(i, n-i+1)$ ：母数  $(i, n-i+1)$  のベータ分布の累積分布関数、 $n$ ：標本サイズ（観測値の総数）、 $i$ ：標本値を小さい順に並び替えた場合における小さい方からの順位である。

### 第3章 確率限界法検定に基づく信頼区間・予測手法の構成手法と当該区間を導入した水文頻度解析

標準一様分布における確率限界値を算出するためには、式(3-51)に示す試行を任意の回数  $N$  だけ実施し、“標準一様分布から大きく外れるようなデータの生起確率  $\alpha_{min}$ ” をサンプリングする。

$$\alpha_{min} = \min_{1 \leq i \leq n} \left\{ \text{Min} \left[ I_u(i, n-i+1) \right]_{u=u(i)} \right\} \quad (3-51)$$

ここに、 $I_u(i, n-i+1)|_{u=u(i)}$ ：第  $i$  順序統計量  $u(i)$  の非超過確率、 $I_{1-u}(n-i+1, i)|_{u=u(i)}$ ：第  $i$  順序統計量  $u(i)$  の超過確率である。

式(3-51)が示す試行を繰り返すことで、 $\alpha_{min}$  を任意の個数だけ得ることができる。次に、数値を扱いやすくするため、これらの  $\alpha_{min}$  を  $-\text{Log}_{10}(2\alpha_{min})$  に対数変換する。 $-\text{Log}_{10}(2\alpha_{min})$  の分布は、標準一様分布からの標本中で、標準一様分布から大きく外れるような順序統計量  $u(i)$  の生起確率の分布と捉えることができる。本研究は、これらの  $-\text{Log}_{10}(2\alpha_{min})$  に対する極値分布の当てはめを提案している（清水ら，2018）。このことにより、任意の有意水準に応じた確率限界値を算出することができる。図 3-53 に、 $-\text{Log}_{10}(2\alpha_{min})$  が従うと仮定した Gumbel 分布の確率表現関数  $\chi_\alpha(u)$  を示す。

有意水準 1%（両側確率 1%）で対象データと仮定した確率分布に対する確率限界法検定を行う場合、この有意水準に対応する  $\alpha$  は、方程式  $\chi_\alpha(0.99) = -\text{Log}_{10}(2\alpha_{min}) = 2.39$  を  $\alpha_{min}$  について解き、 $2.0 \times 10^{-3}$  となる（上記方程式中の各値については図 3-53 を参照されたい）。式(3-49)に示す確率が  $\alpha$  となる  $u$  が  $z_L(i)$ 、当該確率が  $1-\alpha$  となる  $u$  が  $z_U(i)$  である。標本サイズ  $n$  の場合、上方確率限界値の標本  $\{z_U(1), z_U(2), \dots, z_U(n)\}$  および下方確率限界値の標本  $\{z_L(1), z_L(2), \dots, z_L(n)\}$  が得られる。これらの確率限界値にプロットポジション公式による累積確率  $F_U(u(i))$  を与え、下方確率限界点  $(F_U(u(i)), z_L(i))$  および上方確率限界点  $(F_U(u(i)), z_U(i))$  を定める。これらの確率限界点を連ねた曲線を確率限界線とする。すなわち、上方確率限界点  $(F_U(u_i), z_U(i))$  を連ねた線を上方確率限界線、下方確率限界点  $(F_U(u(i)), z_L(i))$  を連ねた線を下方確率限界線と定める。図 3-54 は、両側確率 5%、 $n=41$  の場合における標準一様分布の確率限界線を示したものである。両限界線からなる範囲は、標準一様分布からのデータに対する確率限界法検定における採択域である。すなわち、データがこの採択域の外部に存在する際、標準一様分布の採用を有意とする。

第3章 確率限界法検定に基づく信頼区間・予測手法の構成手法と当該区間を導入した水文頻度解析

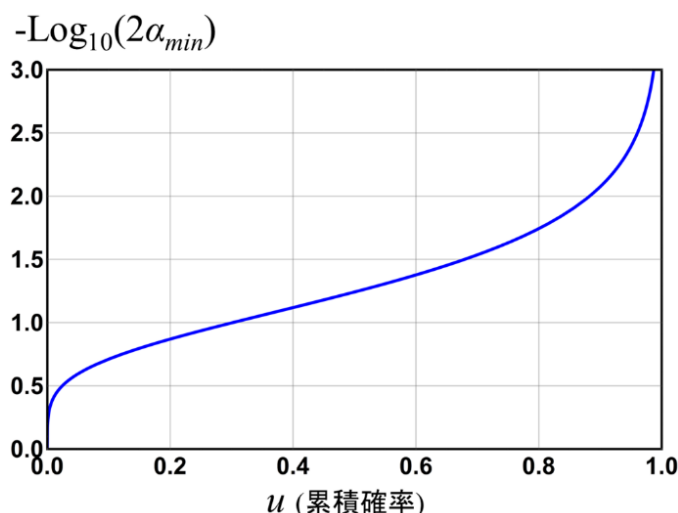


図 3-53  $-\text{Log}_{10}(2\alpha_{min})$  の標本に当てはめた Gumbel 分布の確率表現関数  $\chi_{\alpha}(u)$   
 ※本研究では、 $\alpha_{min}$  の分布の安定性を確保するため、試行回数  $N$  を 5000 とした。

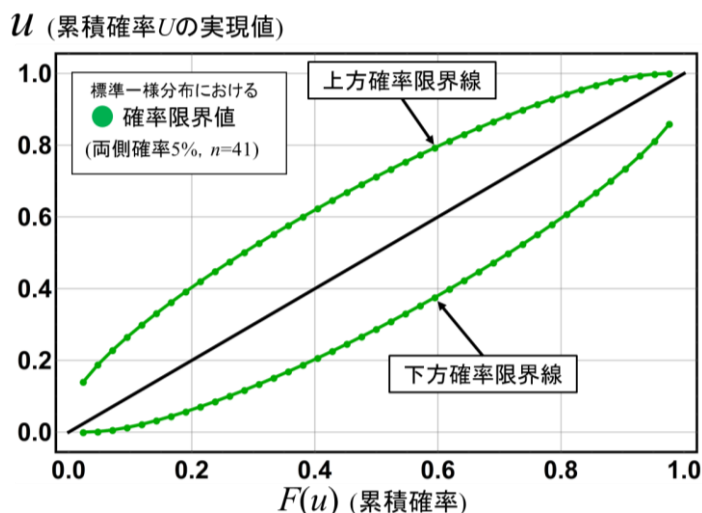


図 3-54 標準一様分布における両側確率 5% の確率限界線  
 ※同図中の  $n$  は、観測値の総数を表している。

(2) 二変量極値分布における確率限界値の算出および信頼区間の構成

本節では、二変量極値分布の信頼区間を構成する手法を示す。二変量極値分布における確率限界値は、標準一様分布における確率限界値を累積確率として扱い、これらを各周辺分布の確率表現関数に代入することで算出できる。すなわち、年最大総降雨量  $R$  の周辺分布における上方確率限界値は  $\chi_R(z_U(i))$ 、下方確率限界値は  $\chi_R(z_L(i))$  となる。また、年最大洪水ピーク流量  $Q_p$  の周辺分布における上方確率限界値は  $\chi_{Q_p}(z_U(i))$ 、下方確率限界値は  $\chi_{Q_p}(z_L(i))$  となる。ここで、観測値に当てはめた二変量極値分布における上方確率限界値の標本  $Bi_U$  を  $\{(\chi_R(z_U(1)), \chi_{Q_p}(z_U(1))), (\chi_R(z_U(2)), \chi_{Q_p}(z_U(2))), \dots,$

第3章 確率限界法検定に基づく信頼区間・予測手法の構成手法と当該区間を導入した水文頻度解析

$(\chi_R(z_U(n), \chi_{QP}(z_U(n))))$ }, 下方確率限界値の標本  $Bi_L$  を  $\{(\chi_R(z_L(1), \chi_{QP}(z_L(1))), (\chi_R(z_L(2), \chi_{QP}(z_L(2))), \dots, (\chi_R(z_L(n), \chi_{QP}(z_L(n))))\}$ と定める. 次に, 信頼区間を構成するにあたり, 採用した二変量極値分布モデルに, これらの標本を当てはめ, その分布の母数を推定する. 例えば, 観測値への当てはめに二変量 Gumbel 分布を採用した場合, 確率限界値の標本への当てはめにも, 二変量 Gumbel 分布を選定する. 本研究では, 標本  $Bi_U$  から推定した母数を有する採用二変量極値分布を上側信頼限界線, 標本  $Bi_L$  から推定した母数を有する採用二変量極値分布を下側信頼限界線と定義した. したがって, 両信頼限界線から構成される区間は, 観測値に当てはめた二変量極値分布の信頼区間である.

図 3-55 に年最大総降雨量の周辺分布およびその周辺分布における両側確率 5%の確率限界値を示す. また, 図 3-56 に年最大洪水ピーク流量の周辺分布およびその周辺分布における両側確率 5%の確率限界値を示す. 加えて, 対象流域における年最大総降雨量と年最大洪水ピーク流量の観測値および両側確率 5%の確率限界値の 3 次元プロットを図 3-57 に示す.

本研究では, 図 3-57 に示す年最大総降雨量と年最大洪水ピーク流量の確率限界値に二変量 Gumbel 分布モデルを当てはめ, 信頼限界線を求めた. 図 3-58 に, 観測値に当てはめた二変量 Gumbel 分布の 95%信頼区間を示す. なお, 信頼限界線の母数推定には, 最尤法を用いた. 最尤法により得られた 95%上側信頼限界線の母数を表 3-11, 95%下側信頼限界線の母数を表 3-12 に示す.

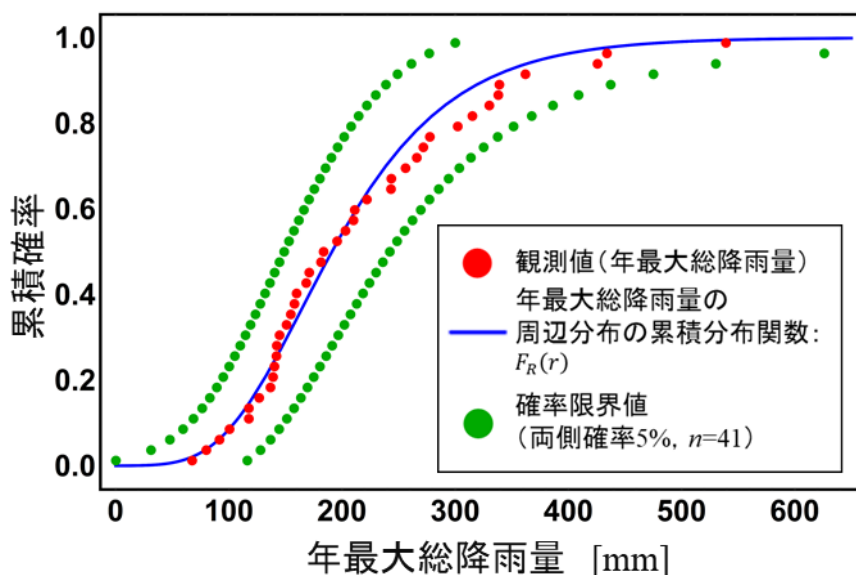


図 3-55 対象データに当てはめた二変量 Gumbel 分布の年最大総降雨量に関する周辺分布, 対象流域における 41 年間分の年最大総降雨量の観測値, 当該周辺分布における両側確率 5%の確率限界値

第3章 確率限界法検定に基づく信頼区間・予測手法の構成手法と当該区間を導入した水文頻度解析

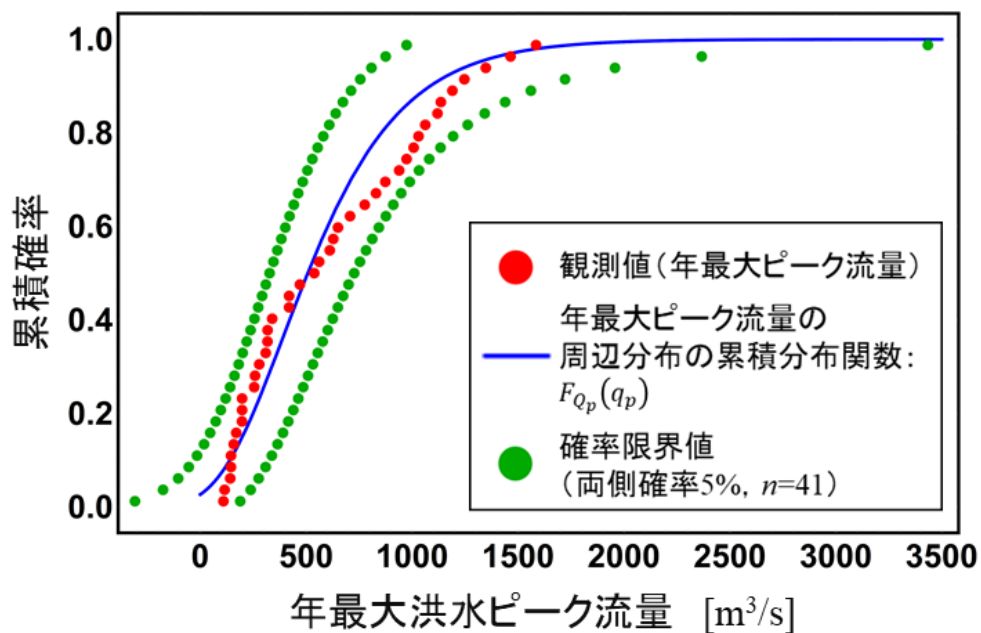


図 3-56 対象データに当てはめた二変量 Gumbel 分布の年最大洪水ピーク流量に関する周辺分布，対象流域における 41 年間分の年最大洪水ピーク流量の観測値，当該周辺分布における両側確率 5% の確率限界値

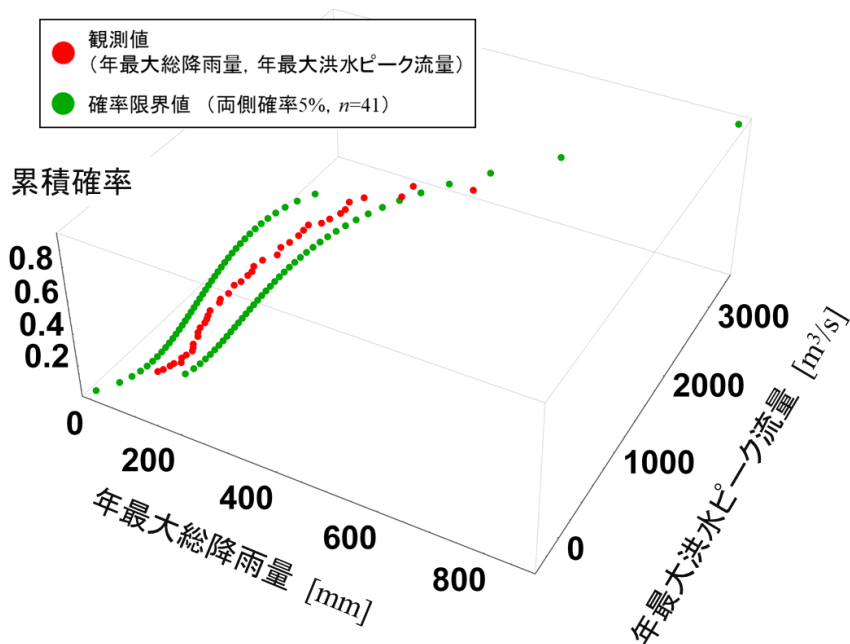


図 3-57 草木ダム流域における 1977 年から 2017 年に渡る 41 年間分の年最大総降雨量と年最大洪水ピーク流量の観測値および確率限界値の 3 次元プロット  
 ※同図における  $n$  は観測値の総数を表している。

第3章 確率限界法検定に基づく信頼区間・予測手法の構成手法と当該区間を導入した水文頻度解析

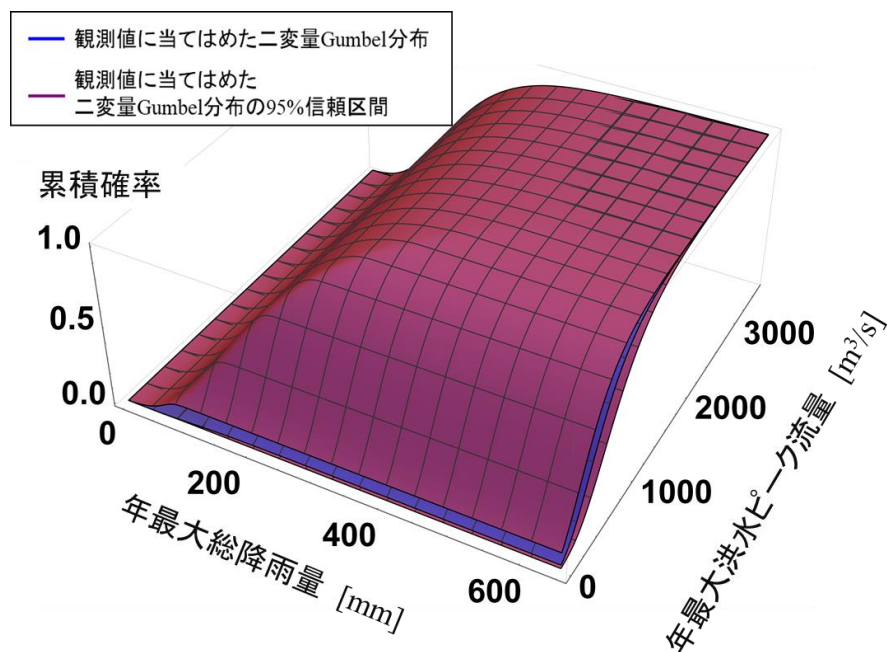


図 3-58 草木ダム流域における 41 年間分の年最大総降雨量と年最大洪水ピーク流量の観測値に当てはめた二変量 Gumbel 分布および当該二変量 Gumbel 分布の 95%信頼区間

$\mu_{R,up.}$	$\sigma_{R,up.}$	$\mu_{Qp,up.}$	$\sigma_{Qp,up.}$	$\alpha_{dep,up.}$
620.5478	359.0489	210.4442	78.7050	0.1003

表 3-11 95%上側信頼限界線の母数

※95%上側信頼限界線は、両側確率 5%における上方確率限界値の標本  $Bi_U$  に当てはめた二変量 Gumbel 分布である。

$\mu_{R,low.}$	$\sigma_{R,low.}$	$\mu_{Qp,low.}$	$\sigma_{Qp,low.}$	$\alpha_{dep,low.}$
127.2152	66.9524	230.0312	285.7916	0.1002

表 3-12 95%下側信頼限界線の母数

※95%下側信頼限界線は、両側確率 5%における下方確率限界値の標本  $Bi_L$  に当てはめた二変量 Gumbel 分布である。

### 3-13-5 条件付き確率分布の構成

複数の確率変数を独立変数として有する同時確率分布において、いくつかの確率変数の値が確定しているときの確率分布を条件付き確率分布という。例えば、総降雨量と洪水流量という二つの確率変数を独立変数とした場合、ある降雨量を設定したとき、その降雨量の下で生じうるような洪水流量の確率分布が得られる。このような確率分布が条件付き確率分布である。

### 第3章 確率限界法検定に基づく信頼区間・予測手法の構成手法と当該区間を導入した水文頻度解析

信頼区間を二変量極値解析に導入することで、任意の年最大総降雨量の下で、生じる年最大洪水ピーク流量値の条件付き分布およびその信頼区間が得られる。このことにより、設定した年最大総降雨量において、記録的な洪水ピーク流量の規模および生起リスクを推定することができる。図 3-59 は、図 3-58 に示した諸分布において、年最大総降雨量が 550mm の場合における年最大洪水ピーク流量およびその 95%信頼区間を示したものである。同図より、年最大総降雨量値 550mm をもたらす豪雨が生じた際、それにより生じる洪水ピーク流量値の規模ならびに生起確率が推定可能となることが分かる。

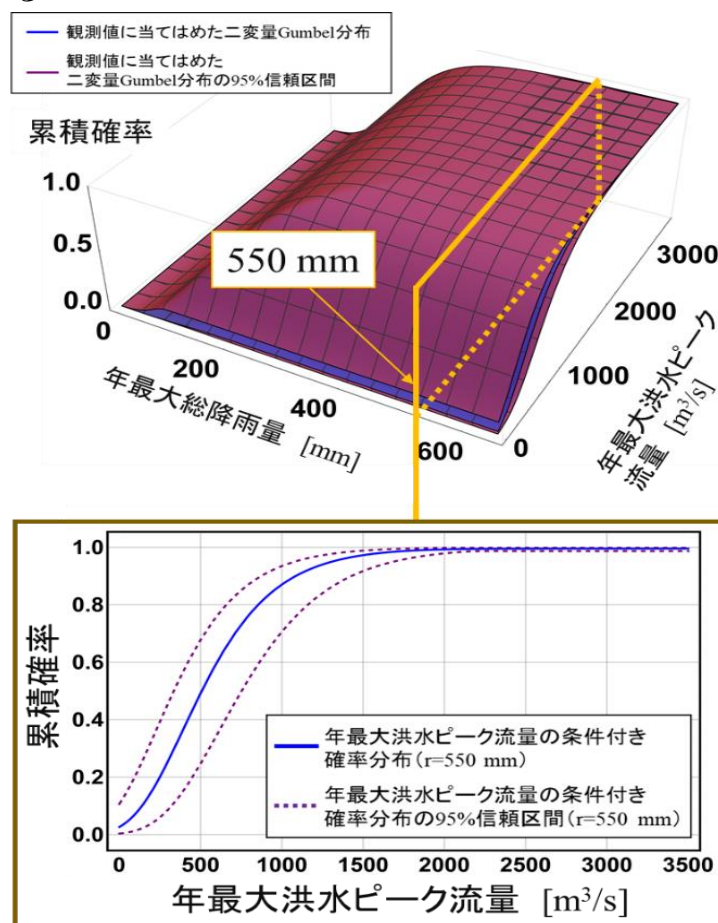


図 3-59 対象データに当てはめた二変量 Gumbel 分布および当該分布の 95%信頼区間において、年最大総降雨量を 550mm に設定した場合における、年最大洪水ピーク流量の条件付き確率分布および当該分布の 95%信頼区間

#### 3-13-6 同時生起する二変量の確率評価

二変量極値解析の利点は、対象とする再現期間（確率年）で同時に生起する二変量の実現値の組を把握可能とする点にある。信頼区間を同解析に導入したことにより、対象とする再現期間で同時に生起する二変量の信頼限界値の組を得ることができる。図 3-60 は、再現期間 100 年の場合における、観測値に当てはめた二変量 Gumbel 分布

第3章 確率限界法検定に基づく信頼区間・予測手法の構成手法と当該区間を導入した水文頻度解析

が与えるクオンタイル値およびその 95%信頼区間を示したものである。再現期間は、 $1/(1-u)$ により定義されるものである。このため、再現期間 100 年に相当する累積確率  $u$  は、0.99 となる。ここで、観測値に当てはめた二変量 Gumbel 分布の確率表現関数を  $\chi_{R, Qp}(u)$ 、その 95%上側信頼限界値を  $\chi_{up, R, Qp}(u)$  およびその 95%下側信頼限界値を  $\chi_{low, R, Qp}(u)$  と表記する。再現期間 100 年で生起する年最大総降雨量と年最大洪水ピーク流量の組の 95%上側信頼限界値は  $\chi_{up, R, Qp}(0.99)$ 、95%下側信頼限界値は  $\chi_{low, R, Qp}(0.99)$  として表される。このとき、95%上側信頼限界値の片側確率は 2.5%であるため、2.5%というリスクをもって、95%上側信頼限界線が与える二変量の組み合わせ  $\chi_{up, R, Qp}(0.99)$  が生起する。

$T$  年確率水文量の  $100(1-p)\%$  上側信頼限界値が生起するリスクは、対象確率年 ( $1/T$ ) と信頼区間の片側確率 ( $p/2$ ) との積により表される。ここで、 $p$  は有意水準 ( $0 < p < 1$ )、 $(1-p)$  は信頼係数である。このため、100 年確率水文量の 95%上側信頼限界値が生起するリスクは、 $(1/100) \times (0.05/2)$  により表すことができ、このリスクは  $1/4000$  となる。これは、対象流域において、 $1/4000$  というリスクで、図 3-60 に示す 95%上側信頼限界値が生起することを示している。このように、信頼区間を二変量極値解析に導入することで、激甚な水文現象が同時に生起するリスクを算出できるようになる。この結果は、従来では“想定外”として扱われるような規模の水文量の同時生起リスクを洪水対策に取り込める可能性を示唆するものである。

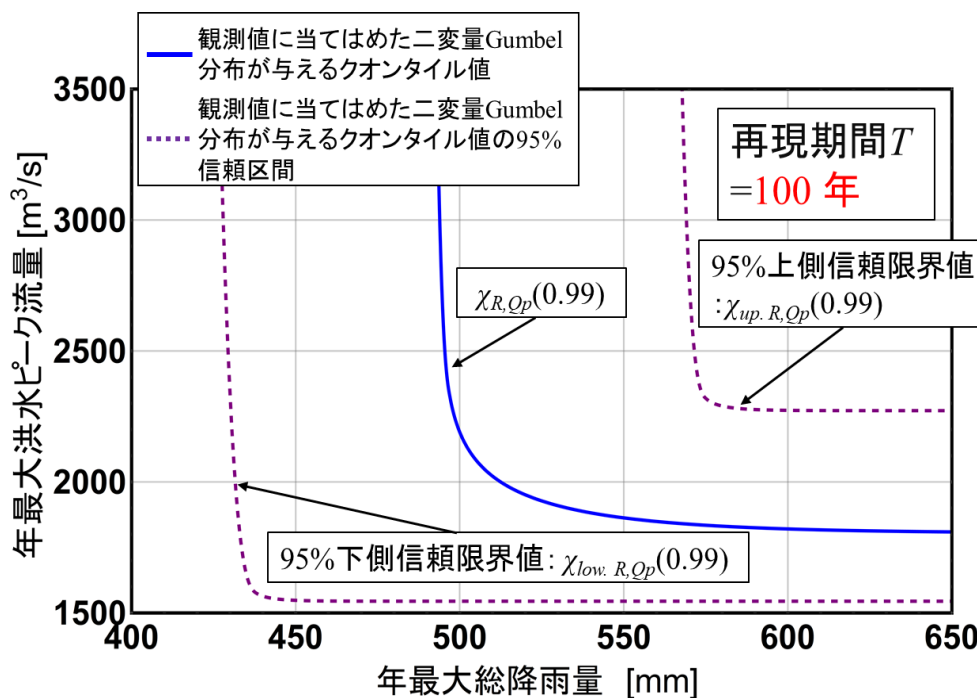


図 3-60 再現期間 100 年で同時に生起する年最大総降雨量と年最大洪水ピーク流量の実現値の組  $\chi_{R, Qp}(0.99)$  およびその 95%信頼区間 [ $\chi_{low, R, Qp}(0.99)$ ,  $\chi_{up, R, Qp}(0.99)$ ]



## 第3章 確率限界法検定に基づく信頼区間・予測手法の構成手法と当該区間を導入した水文頻度解析

### 3-14 第3章のまとめ

信頼区間は、従来洪水対策に採用してきた確率分布の振れ幅を表すため、信頼区間をどこまで議論するかによって洪水対策におけるリスクが検討可能となる。一方、予測区間は、将来の観測値がとりうる幅を表すため、予測区間の導入により、激甚豪雨の規模やその生起リスクが把握可能となる。本章では、確率限界法検定の理論を応用することで、極値に対して極めて高い精度をもつ信頼区間・予測区間を構成する手法を示すとともに、それらの具体的適用手法を示した。さらに、当該区間を導入した、降雨流出解析、総合確率法、非定常水文頻度解析および二変量極値統計解析の手法を構築した。

本研究の主な成果を以下に列挙する。

- (1) 仮定した確率分布の裾部に対して高い検定力をもつ確率限界法検定を応用することで信頼区間・予測区間を極めて解析的に構成する理論を提示した。確率限界法検定に基づく信頼区間・予測区間は、洪水対策で重要となる確率分布の裾部で高い精度を有し、極端な水文現象の合理的な評価を可能とするものである。
- (2) 従来の水文頻度解析では、確率水文量を決定論的に算定してきたが、信頼区間・予測区間を導入することで、確率水文量が取りうる幅を求め、従来では想定外として扱われるような水文現象の生起確率を推定できるようになった。
- (3) 信頼区間・予測区間の導入により、激甚な水文現象が発生するリスクを他の分野におけるリスクと比較・評価可能となることを示した。

### 参考文献

- ・大町利勝：計画洪水流量決定に関する一考察，pp.170-179 水文・水資源学会誌，2004.
- ・寶馨：水文頻度解析の進歩と将来展望，pp.740-756 水文・水資源学会誌，1998.
- ・北海道地方における気候変動予測（水分野）技術検討委員会  
([https://www.hkd.mlit.go.jp/ky/kn/kawa kei/splaat000000vdyw.html](https://www.hkd.mlit.go.jp/ky/kn/kawa%20kei/splaat000000vdyw.html))
- ・寶馨，高棹琢馬：水文頻度解析における確率分布モデルの評価規準，土木学会論文集，第393号/II-9，pp.151-160，1988.
- ・土木学会水工学委員会 日本のかわと河川技術を知る（利根川）編集委員会：日本のかわと河川技術を知る～利根川～，2.3.4 基本高水の算出方法，pp.66-75，2012.
- ・椎葉充晴，立川康人：総合確率法の数学的解釈，pp.101-104，土木学会論文集，B1(水工学)，Vol.69，No.2，2013.
- ・椎葉充晴，市川温，立川康人：水文学・水工計画学，pp.285-326，京都大学学術出版

### 第3章 確率限界法検定に基づく信頼区間・予測手法の構成手法と当該区間を導入した水文頻度解析

会, 2013.

- ・葛葉泰久：これからの確率統計水文学の役割, 水文・水資源学会誌, 第31巻, 第6号, pp.541-542, 2018.
- ・佐渡公明, 杉山一郎, 中尾隆志: 平均値と分散のジャンプ検出による確率水文量の更新—北海道内 22 気象官署の年最大日雨量と年最大無降雨連続日数への適用—, 水工学論文集, Vol. 52, pp. 199-204, 2008.
- ・寒川典昭, 鈴木将史: 日本列島 20 世紀の降水量時系列の経年的非定常性とその確率降水量の評価値に及ぼす影響, 自然災害科学, No. 26(4), pp. 355-365, 2008.
- ・清水啓太, 山田朋人, 山田 正: 確率限界法検定に基づく確率分布モデルの信頼区間を導入した新しい水文頻度解析手法, 土木学会論文集 B1(水工学) Vol.74, No.4, I\_331-I\_336, 2018.
- ・清水啓太, 山田 正, 山田朋人: 確率限界法検定に基づく信頼区間を用いた確率洪水ピーク流量の不確実性評価, 土木学会論文集 G (環境) Vol.74, No.5, I\_293-I\_302, 2018.
- ・清水啓太, 山田 正, 山田朋人: 信頼区間の導入による確率洪水ピーク流量の不確実性評価 - 総合確率法の拡張 -, 土木学会論文集 B1(水工学) Vol.74, No.5, I\_175-I\_180, 2018.
- ・清水 啓太, 山田 正, 山田 朋人: 信頼区間・予測区間を導入した水文頻度解析における不確実性評価, 河川技術論文集, Vol.25, pp.13-18, 2019.
- ・竹内啓: 統計的予測論, 培風館, 1975.
- ・北野利一, 高橋倫也, 田中茂信: 降水量の極値の予測区間 ~ 確率降水量の信頼区間を誤解していませんか?, 土木学会論文集 B1 (水工学) , 69(4), pp.I\_271-I\_276., 2013.
- ・北野利一, 高橋倫也, 田中茂信: ベイズ手法による降水量の極値の予測分布~最尤法による相違と相互補完, 土木学会論文集 B1 (水工学) , 72(4), pp.I\_463-I\_468, 2016.
- ・北野利一, 山地秀幸, 川崎将生: 2変量G P分布による降水量の同時生起頻度の推定法 - 数学的なアイデアと現実データの接続 -, 土木学会論文集 B1(水工学) Vol.74, No.4, I\_319-I\_324, 2018.
- ・国土交通省 国土技術政策総合研究所 気候変動適応研究本部: 気候変動適応策に関する研究 (中間報告) , 国総研資料 749号, II-112-154, 2013.
- ・藤部文昭: 回答「極端な豪雨の再現期間推定精度に関する検討」, 天気 58(2) , pp.147-151, 2011.
- ・林 敬大, 立川康人, 椎葉充晴: 時変母数による非定常水文頻度解析手法のモデル選択に関する考察, 土木学会論文集 B1(水工学) , Vol.71, No.1, 28-42, 2015.

### 第3章 確率限界法検定に基づく信頼区間・予測手法の構成手法と当該区間を導入した水文頻度解析

- ・ 森口繁一：確率表現関数，東京大学出版，1995.
- ・ 中西準子：環境リスク学—不安の海の羅針盤，日本評論社，2004.
- ・ 諸岡良優，山田正：鉛直浸透機構を考慮した降雨流出モデルのロバスト性についての基礎的検討，pp.83-84，第25回地球環境シンポジウム講演集，2017.
- ・ 山田正：山地流出の非線形性に関する研究，土木学会水工学論文集，Vol.47，pp.259-264，2003.
- ・ 山田朋人，星野剛ら：北海道における気候変動に伴う洪水外力の変化，河川技術論文集，第24巻，pp.391-396，2018.
- ・ 吉見和紘，山田正：鉛直浸透機構を考慮した流出計算手法の長短期流出解析への適用，土木学会論文集 B1(水工学) Vol.70 No.4，I\_367-I\_372，2014.
- ・ 吉見和紘：確率過程論を導入した降雨流出過程における不確実性評価に関する研究，中央大学博士論文，pp.51-60，2016.
- ・ Beirlant, J. et al.: Statistics of extremes, theory and applications, Wiley, 490p., 2004.
- ・ Coles, S. : An Introduction to Statistical Modeling of Extreme Values, Springer, Chapter 8, Multivariate Extremes, pp.142-168, 2001.
- ・ Efron, B. *The Jackknife, the Bootstrap, and other Resampling Plans*; Society for Industrial and Applied Mathematics: Philadelphia, PA, USA, 1982.
- ・ Knight, Frank H.: Risk, Uncertainty and Profit, Houghton Mifflin Co., 1921.
- ・ Kottz, S. and S. Nadarajah: Extreme value distributions, theory and applications, Imperial College Press, 187p., 2000.
- ・ Patrick, R. Profile likelihood for estimation and confidence intervals. *Stata J.* **2007**, 7, 376–387.
- ・ Stedinger, J.R.; Vogel, R.M.; Foufoula-Georgiou, E. Frequency analysis of extreme events, Chapter 18. In *Handbook of Hydrology*; Maidment, D., Ed.; McGraw-Hill Professional: New York, NY, USA, 1993; pp. 18.1–18.66.
- ・ Stuart G. Coles and Jonathan A. Tawn : Extreme Multivariate Events, *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, Vol. 53, No. 2, pp. 377-392, 1991.
- ・ Shimizu, K.; Yamada, T.; Yamada, T.J. Introduction of Confidence Interval Based on Probability Limit Method Test into Non-Stationary Hydrological Frequency Analysis. *Water* 2020, 12, 2727.
- ・ Shimizu, K.; Yamada, T.; Yamada, T.J. Uncertainty Evaluation in Hydrological Frequency Analysis Based on Confidence Interval and Prediction Interval. *Water* 2020, 12, 2554.

## 第4章 気候変動予測情報を用いた極値降雨量に関する信頼区間・予測区間の将来変化の推定

### 4-1 はじめに

従来慣用されてきた水文頻度解析手法では、過去の観測極値のみに基づき、計画確率規模に関連付けた唯一の確率雨量を算定するという、決定論的確率を扱っている。一方、現在利用可能な観測極値は有限であるため、これらの観測極値に基づく計画降雨量は、不確実性を大いに有する。また、近年多発する記録的豪雨や温暖化進行時に予測される豪雨の多くは、計画降雨量を超過している。このような現状を鑑み、有限な観測情報に起因する計画降雨量の不確実性評価ならびに、大規模豪雨の統計的予測を実現するために、本研究が確率限界法検定に基づく信頼区間・予測区間を構築し、その水文頻度解析への適用手法を提案したことを前章で示した。一方、提案手法は依然として、降雨量データの定常性を仮定している。ここで、定常性とは、降雨量を支配する確率法則（確率分布）が時間的に変化しないことである。すなわち、従来手法では、水文量が従う母集団分布が時間的に変化しないものとして扱ってきた。しかしながら、近年では、地球温暖化に伴う気候変動の影響による水文量の非定常性が指摘されてきている。ここで、非定常性とは、水文量の時系列がトレンドや周期をもつことあるいはそれらが従う確率分布が時間的に変化することをいう。我が国においては、地球温暖化に伴う気候変動により、将来期間において、降雨量ならびに洪水の発生頻度が増加をするという予測が示されている（国土技術政策総合研究所，2013）。上述したような気候変動に伴う降雨の激甚化を考慮すると、水文量の非定常性を考慮した統計解析手法の構築・発展は、洪水対策を立案する上で、極めて重要である。近年では、水文量の非定常性に着目した研究や報告が多数示されている。例えば、Milly et al. (2008) は、気候変動の影響を踏まえ、水文分野における定常性の仮定に警鐘を鳴ら

## 第4章 気候変動予測情報を用いた極値降雨量に関する信頼区間・予測区間の将来変化の推定

し、計画と管理の在り方に対して、水文量の確率分布の非定常性を考慮すべきであると述べている。加えて、近年、我が国では、過去経験のないような規模の豪雨が多発しており、各地で人命ならびに社会基盤等に対して大規模な被害をもたらしている。このような現状を鑑みると、上述したような近年における降雨の激甚化ならびに地球温暖化に伴う豪雨の頻発傾向を考慮した洪水対策の策定は喫緊の課題である。また、同洪水対策の構築に向けて、近年では、アンサンブル気候予測データベースを用いた洪水リスク評価手法が提示されている（山田・星野ら，2018）。アンサンブル気候予測データベースとは、気象モデルによる過去気候および将来気候の計算結果を格納したデータベースである。このデータは、我々が過去経験する可能性のあった降雨ならびに将来経験する可能性のある降雨の観測値として捉えることができる。従来の洪水対策では、実績として存在するただ一つの観測標本に基づき計画降雨量を設定してきたが、同データを用いることで、計画降雨量の“振れ幅”を合理的に推定することができる。清水ら（2018）は、従来手法において想定外として扱われるような激甚豪雨に対応するために、確率雨量が有する不確実性を信頼区間という形で定量化し、その幅の中の雨量が生起するリスクを議論するという、確率論的確率を導入した水文頻度解析手法を提案している。当該手法は、アンサンブル気候予測データを用いた物理的モンテカルロ法あるいは数理統計理論により構築できる。清水ら（2018）は、数理統計理論である確率限界法検定（森口，1995）に基づく水文頻度解析手法を構築した。その手法論を構築するにあたり、重要となる理論の一つは、過去存在しえた観測値の振れ幅の推定を可能とする Kolmogorov-Smirnov 検定である。一方、Kolmogorov-Smirnov 検定は、洪水対策上重要となる、確率分布の裾部に相当する激甚豪雨に対する推定精度が弱い。清水ら（2018）は、Kolmogorov-Smirnov 検定が有するこの弱点を改善した理論である確率限界法検定を採用し、当該検定に基づく信頼区間・予測区間を構築した。なお、予測区間とは、将来観測されうる雨量がとり得る値の幅を表すものである。確率限界法検定に基づく信頼区間・予測区間の導入により、信頼区間・予測区間をどこまで議論するかによって洪水対策におけるリスクが表現可能となる。しかし、当該手法は、時間軸上のある一点に立脚しており、将来の観測値が有する情報を活かしていない。一方、ベイズ統計理論を確率限界法検定に基づく水文頻度解析手法に導入することで、新たに取得した観測値の情報を取り込み、より合理的な信頼区間・予測区間が算定可能となる。このため、同理論を用いることで、アンサンブル気候予測データベースの将来気候予測実験結果を取り込み、採用確率分布とその信頼区間・予測区間を更新することができる。本研究では、マルコフ連鎖モンテカルロ法 (Markov Chain Monte Carlo method, MCMC 法) を用いて、過去数十年間分の観測実績から算定した

## 第4章 気候変動予測情報を用いた極値降雨量に関する信頼区間・予測区間の将来変化の推定

採用確率分布とその信頼区間・予測区間に、将来気候予測実験結果を取り込み、それらを更新する手法を構築した。同手法の適用は、地球温暖化時における確率雨量の評価・検討の実現可能性を提示するものである。なお、本研究では、常呂川流域北見基準地点における1962年から2010年に亘る49年間分の年最大24時間雨量の観測値を解析用データとしている。

### 4-2 アンサンブル気候予測データベース d4PDF の概要

本研究では、「地球温暖化に資するアンサンブル気候予測データベース、database for Policy Decision making for Future climate change (d4PDF)」(Mizuta et al., 2016)の領域実験を使用した。d4PDF 領域実験は領域気候モデルにより作成された水平解像度20kmの気候予測データであり、長期観測データが得られる1951年から2010年の60年間を対象に異なる初期値、海氷と海面水温に摂動を加えた50メンバの数値計算である過去実験(60年×50メンバ=3000年)、産業革命以前に比べて全球平均気温が4°C上昇した世界を想定し、6種類の海面水温パターンとそれに摂動を与えた15メンバの数値計算を実施した4°C上昇実験(60年×海面水温6パターン×15メンバ=5400年)で構成される。上記の6種類の海面水温パターンとは、第5次結合モデル相互比較計画(CMIP5)における6種類の主要モデルから計算されたものである。また、本論は、観測実績を過去気候における降水量の母集団から実現した標本として扱う。

### 4-3 力学的ダウンスケーリング計算の概要

本研究では、前節で示したd4PDF 領域実験を境界条件とした、力学的ダウンスケーリング計算結果を解析用データとして使用している(図4-1)。このダウンスケーリング計算は山田ら(2018, 2019)により、実施され、気候変動予測情報を導入した河川計画の検討に用いられている。ダウンスケーリング計算において、計算対象となる領域は、北緯42.75°、東経142.5°を中心とした東西方向に800km、南北方向に800kmの範囲である。ダウンスケーリング計算の目的とは、大規模な洪水流出をもたらす台風や集中豪雨等の数十kmスケールの気象現象を対象として、極端降雨や流域の地形特性を十分に表現できる時空間解像度を得ることである。当該のダウンスケーリング計算には気象庁の領域気象モデル(NHRCM)が用いられた。本研究で使用したd4PDF(5km)データは、常呂川流域北見基準地点に相当するd4PDFのモデル格子における3,000年間分の過去実験結果の年最大24時間雨量および5,400年間分の+4K将来実験結果での年最大24時間雨量である。

## 第4章 気候変動予測情報を用いた極値降雨量に関する信頼区間・予測区間の将来変化の推定

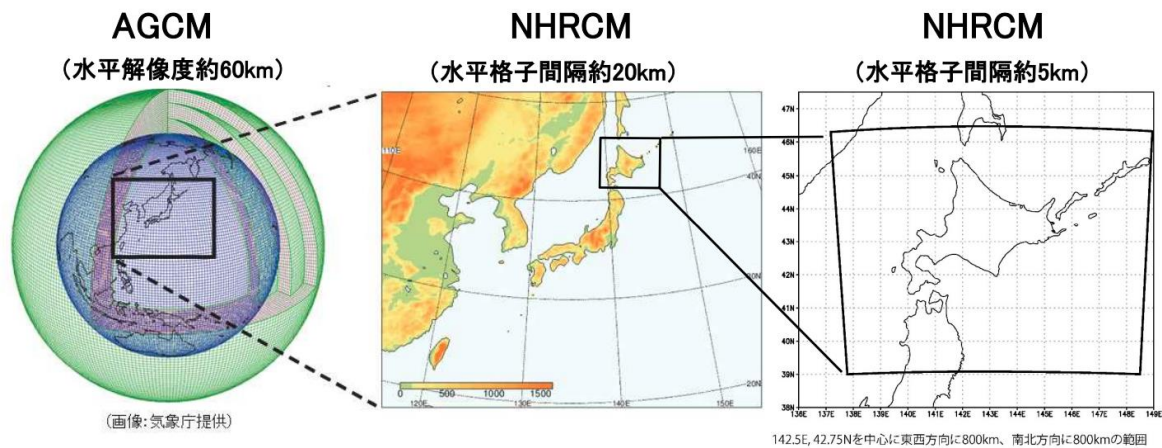


図 4-1 力学的ダウンスケーリングの適用領域

※図面引用：平成 28 年度北海道地方における気候変動予測（水分野）技術検討委員会 【最終とりまとめ資料】 から

[https://www.hkd.mlit.go.jp/ky/kn/kawa\\_kei/splaat000000vdyw-att/splaat0000019r1f.pdf](https://www.hkd.mlit.go.jp/ky/kn/kawa_kei/splaat000000vdyw-att/splaat0000019r1f.pdf)

### 4-4 マルコフ連鎖モンテカルロを用いた信頼区間・予測区間の更新

本章では、マルコフ連鎖モンテカルロ法を用いることで、観測実績に基づき算定した極値分布に将来実験結果を取り込ませ、将来気候での極値分布およびその信頼区間を構成する手法を示す。

母数の事後分布は、式(4-1)に示すベイズの定理より求めることができる。

$$f(\theta|x) = \frac{f(x|\theta)f(\theta)}{\int_{\Theta} f(x|\theta)f(\theta)d\theta} \propto f(x|\theta)f(\theta) \quad (4-1)$$

ここに、 $\theta$ ：母数、 $f(\theta)$ ： $\theta$ の事前分布、 $f(x|\theta)$ ：尤度関数、 $f(\theta|x)$ ： $\theta$ の事後分布である。式(4-1)は、観測値を新たに取得するごとに母数に関する情報量が増加し、母数に関する事前情報を表す事前分布  $f(\theta)$  が事後分布  $f(\theta|x)$  に更新されることを示している。一般的に、極値分布の母数の事後分布は、式(4-1)に示すベイズの定理を用いて解析的に求めることが困難である。そのため、本研究では、極値分布の母数の事後分布を数値的に推定可能なマルコフ連鎖モンテカルロ法を採用した。また、MCMC 法の一手法であるメトロポリス法を用いて、最尤法により解析用データに当てはめた Gumbel 分布の母数の事後分布を求めた。

#### 4-4-1 メトロポリス法の概要

以下にメトロポリス法（伊庭・種村，2005）の手順を示す。

(手順 1)： $\theta$  の初期値を設定する。

(手順 2)：母数の候補を与える提案分布  $q(\theta)$  に従って、 $\theta'$  を独立に発生させる。

## 第4章 気候変動予測情報を用いた極値降雨量に関する信頼区間・予測区間の将来変化の推定

(手順3)：確率 $\beta$ を式(4-2)より計算する。

$$\beta = \text{Min} \left\{ \frac{f(\theta' | x)}{f(\theta | x)}, 1 \right\} \quad (4-2)$$

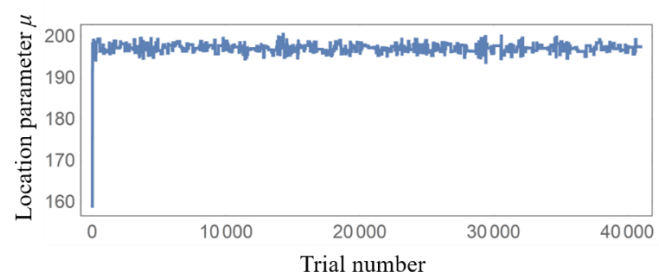
(手順4)：確率 $\beta$ で $\theta$ を $\theta'$ に推移させて、 $\theta = \theta'$ と更新する。具体的には、確率 $1-\beta$ で元の $\theta$ を採用し、推移を行わない。

(手順5)：(手順2)～(手順4)を繰り返す。

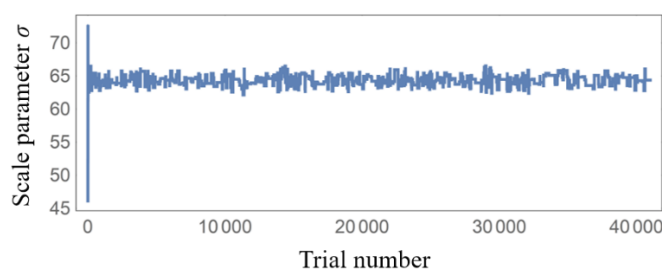
(手順6)： $\theta$ のサンプル列が収束した場合、反復計算を打ち切る。

### 4-4-2 メトロポリス法の適用結果

メトロポリス法における母数の初期値は、解析用データに当てはめた Gumbel 分布の最尤推定値として、上記手順に基づきメトロポリス法を実施すると、図 4-2 に示す当該 Gumbel 分布の事後分布が有する母数のサンプル列が得られた。なお、本研究は、母数の提案分布として指数分布を採用しており、事前分布は無情報一様分布を採用している。図 4-2 から、最尤推定値を初期値として選定することで、初期値近傍では顕著な振動が見られるものの、母数のサンプル列は安定しており、計算上捨てるべき助走区間（バーンイン区間）がほとんどないことが分かる。このため、MCMC 法による事後分布の母数のサンプル値群を用いた検討の妥当性が確認された。



(a) 位置母数  $\mu$



(b) 尺度母数  $\sigma$

図 4-2 メトロポリス法により生成された解析用データに当てはめた Gumbel 分布の事後分布における母数のサンプル列



### 4-4-3 将来気候における極値の予測分布の構成

極値の予測分布は、式(4-3)により得られる。このとき、将来実験結果を尤度関数に与えた MCMC 法により算定される極値の予測分布は、将来気候における極値分布として扱える。

$$P(Y \leq y | \mathbf{x}) = \int_{\Theta} F(Y \leq y | \theta) f(\theta | \mathbf{x}) d\theta \quad (4-3)$$

ここに、 $Y$ ：将来の極値を表す確率変数、 $P(Y \leq y | \mathbf{x})$ ：極値の予測分布の累積分布関数、 $F(Y \leq y | \theta)$ ：母数  $\theta$  に対応する  $Y$  の累積分布関数、 $f(\theta | \mathbf{x})$ ：観測値群から算定した母数の事後密度、 $\chi_Y(u)$ ：極値の予測分布の確率表現関数である。また、母数  $\theta$  を MCMC 法の活用により生成可能である母数のサンプル値群とすると、極値の予測分布を式(4-4)により表すことができる（北野ら，2016）。

$$P(Y \leq y | \mathbf{x}) \approx \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s F_Y(y | \theta_i) \quad (4-4)$$

$F_Y(y)$ は将来観測値の母分布として仮定した確率分布である。式(4-4)は、MCMC 法により生成された母数のサンプル値群  $\theta_i$  を  $F_Y(y | \theta_i)$ に代入し算出される将来観測値  $y$  の累積確率の合計を、採用したサンプル値群  $\theta$  の総数  $s$  で平均することで、極値の予測分布の累積分布関数  $P(Y \leq y | \mathbf{x})$ が算定可能であることを示している。また、 $s$  とは、MCMC 法により生成した母数のサンプル値群の総数から、計算上捨てるべき助走区間（バーンイン区間）分に相当するサンプル値群の総数を除いた値である。本研究では、母分布  $F_Y(y)$ に Gumbel 分布を採用している。また、MCMC 法の反復計算回数は、41,000 であり、このうち 1,000 をバーンイン区間の総数としているため、 $s$  は 41,000 から 1,000 を引いた値である 40,000 とした。

MCMC 法によるベイズ更新後の確率分布（実績観測値に当てはめた確率分布の予測分布）に対して、上述した、確率限界法検定による信頼区間・予測区間の構成手法を適用することで、当該分布の信頼区間・予測区間が得られる。図 4-3 は、両側確率 5%、観測値の総数  $n$  が 49 の場合での当該検定を用いて、将来実験結果を MCMC 法により取り込み更新された Gumbel 分布の 95%信頼区間を構成する過程を示している。同図には、標準一様分布における確率限界値（緑点）、将来実験結果に MCMC 法を適用しベイズ更新された Gumbel 分布（赤実線）、および確率限界法検定に基づく当該 Gumbel 分布の 95%信頼区間（赤破線）が示されている。なお、標準一様分布の確率限界値は実績の観測値の総数に応じて決定するため、観測実績（過去気候）と将来気候の標準一様分布における確率限界値は、同一である。

第4章 気候変動予測情報を用いた極値降雨量に関する信頼区間・予測区間の将来変化の推定

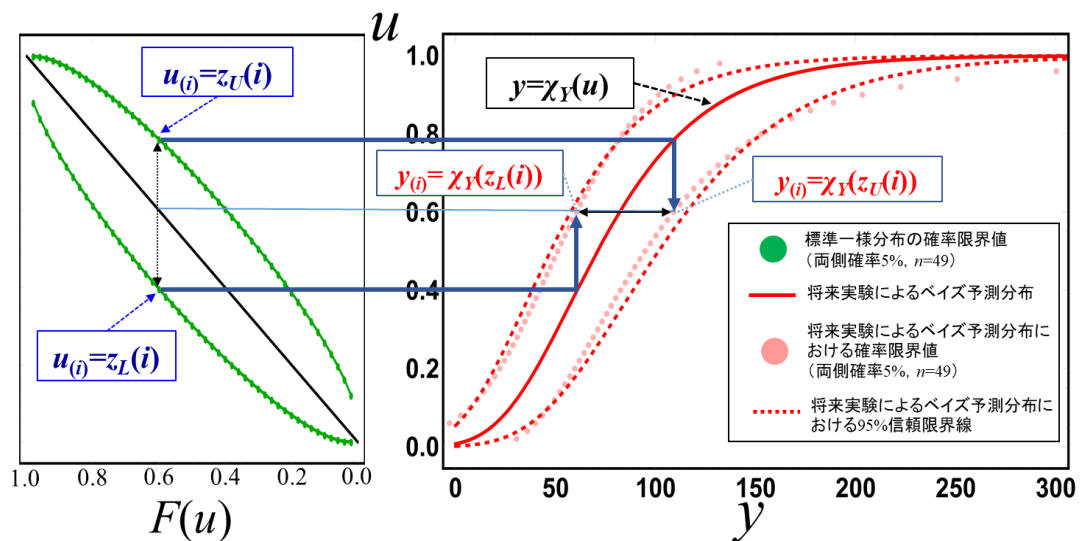


図 4-3 確率限界法検定を用いて、将来実験結果をベイズ手法により取り込み更新された Gumbel 分布の 95%信頼区間を構成する過程

※上図の  $y$  は将来の極値を表す確率変数  $Y$  の実現値である。

#### 4-4-4 ベイズ理論の導入による信頼区間の更新

図 4-4 は、解析用データ（黒点）、解析用データに当てはめた Gumbel 分布（青実線）および確率限界法検定に基づく当該 Gumbel 分布の 95%信頼区間（青色で表示された範囲）と MCMC 法に基づき解析用データに当てはめた Gumbel 分布に将来実験結果を取り入れベイズ更新された Gumbel 分布（解析用データに当てはめた Gumbel 分布の予測分布、赤実線）、確率限界法検定に基づくベイズ更新された当該 Gumbel 分布の 95%信頼区間（赤色で表示された範囲）である。過去気候における信頼区間と将来気候における信頼区間が重複する範囲より、将来気候における年最大 24 時間降雨量は過去気候においても発生する可能性があったことが分かる。また、同図より、将来気候では、過去気候に対して信頼区間が広がり、確率雨量が増加することが確認された。さらに、計画規模に相当する 100 年確率に着目すると、対象地点において、将来気候の 100 年確率年最大 24 時間降雨量 (224.6mm) は、観測実績に基づく過去気候の 100 年確率年最大 24 時間降雨量 (157.7mm) の約 1.42 倍の値となる。また、将来気候の 100 年確率年最大 24 時間降雨量の 95%上側信頼限界値 (294.4mm) は、観測実績に基づく過去気候の 100 年確率年最大 24 時間降雨量の 95%上側信頼限界値 (198.8mm) の約 1.48 倍の値となる。

統計理論であるベイズ手法により、従来採用してきた確率分布に気候変動予測結果を取り込み、信頼区間を更新することは、気候変動下での確率雨量の検討に大いに資

## 第4章 気候変動予測情報を用いた極値降雨量に関する信頼区間・予測区間の将来変化の推定

するものであると期待される。

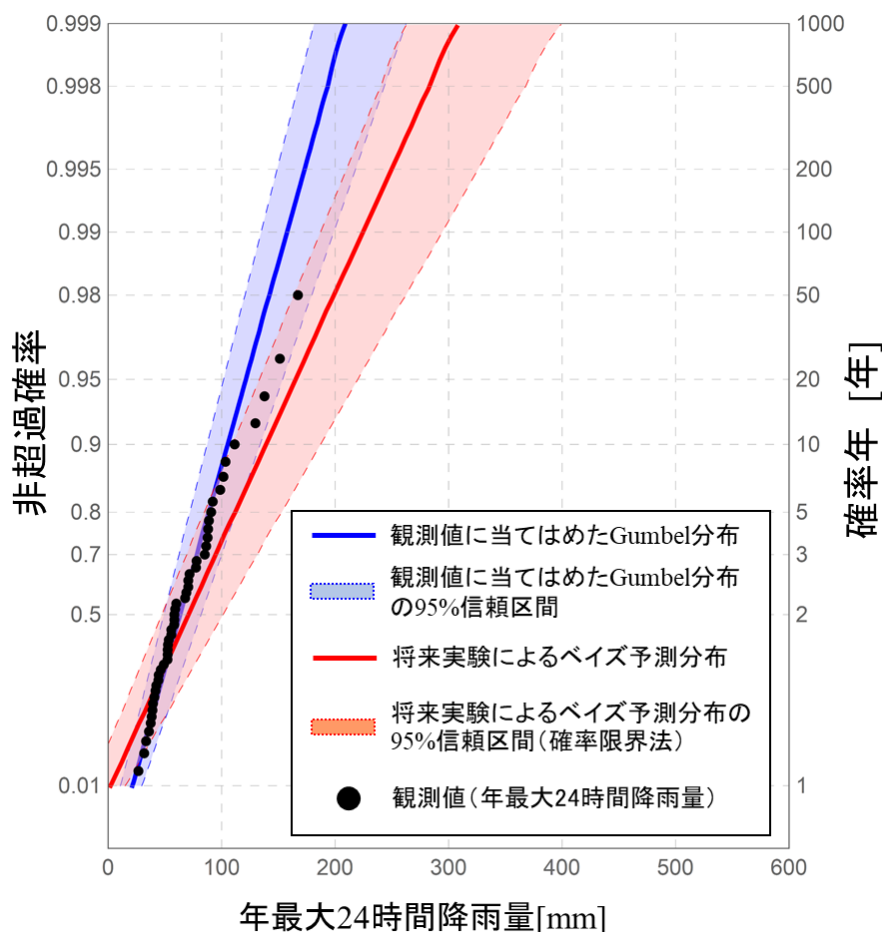


図 4-4 ベイズ手法に基づく将来気候予測実験結果を用いた信頼区間の更新

### 4-4-5 確率限界法検定に基づく信頼区間の物理的モンテカルロ法による信頼区間に対する被覆率

過去実験結果・将来実験結果における確率雨量の振れ幅や度数分布をより鮮明化し、当該検定に基づく信頼区間との比較を実施するために、両実験結果にリサンプリングを行った。具体的には、過去実験 3000 年間・将来実験 5400 年間分の年最大 24 時間降雨量を実績観測値の総数である 49 と同じ数だけリサンプリングし、5000 個のリサンプリング標本を作成した。このため、各リサンプリング標本の標本サイズは、観測実績の総数と同じ 49 である。次に、各リサンプリング標本に Gumbel 分布を当てはめ、確率評価を実施した。

図 4-5 は、解析用データに当てはめた Gumbel 分布（青実線）、確率限界法検定に基づく当該 Gumbel 分布の 95% 信頼区間および過去実験結果のリサンプリング標本に

#### 第4章 気候変動予測情報を用いた極値降雨量に関する信頼区間・予測区間の将来変化の推定

当てはめた Gumbel 分布（緑細実線，5000 個）を示している。また，**図 4-6** は，将来気候での Gumbel 分布（解析用データに当てはめた Gumbel 分布の予測分布，赤実線），確率限界法検定に基づく当該 Gumbel 分布の 95%信頼区間（赤破線）および将来実験結果のリサンプリング標本に当てはめた Gumbel 分布（橙細実線，5000 個）を示している。**図 4-5** と **図 4-6** から，リサンプリングを行うことで，過去実験と将来実験における確率雨量の振れ幅がより鮮明となり，その振れ幅は確率限界法検定に基づく信頼区間と極めて良く適合していることが分かる。特に，**図 4-5** に示す信頼区間（青破線）は，d4PDF の過去実験結果を MCMC 法により取り込まず，数理統計理論である確率限界法検定のみを用いて導出したものであり，当該検定に基づく信頼区間が物理的モンテカルロ法による確率雨量の振れ幅（信頼区間）に極めて良く適合することは，当該検定の有用性を大いに示す結果である。

次に，当該検定に基づく信頼区間と物理的モンテカルロ法による信頼区間の適合度を被覆率の観点から評価する。被覆率とは，対象推定量が信頼区間に含まれる割合である。本研究で扱う被覆率は，確率雨量が信頼区間に含まれる割合である。被覆率を算出することで，信頼区間の精度を評価することができる。すなわち，信頼区間は，設定した信頼水準（信頼係数）の下で，その被覆率が合理的なものであり，できるだけ幅の狭いものが望ましい。例えば，95%信頼区間を構成した際，その被覆率が 95%に近い値の場合，当該信頼区間の精度は良いとされる。

**図 4-7** は，リサンプリングを実施した過去実験における 100 年確率年最大 24 時間降雨量の頻度分布と過去気候における当該検定に基づく 95%信頼区間の関係，**図 4-8** は，リサンプリングを実施した将来実験における 100 年確率年最大 24 時間降雨量の頻度分布と将来気候における当該検定に基づく 95%信頼区間の関係を示している。**図 4-7** で示している当該検定に基づく 95%信頼区間（青破線）の被覆率は 95.5%であり **図 4-8** で示している当該検定に基づく 95%信頼区間（赤破線）の被覆率は 94.3%である。また，100 年確率以外を対象とした検討においても，95%信頼区間の被覆率は上記のものと同程度のものとなり，被覆率の観点からも同検定に基づく信頼区間が物理的モンテカルロ法による確率雨量の頻度分布を高精度で表現可能であることが示された。

第4章 気候変動予測情報を用いた極値降雨量に関する信頼区間・予測区間の将来変化の推定

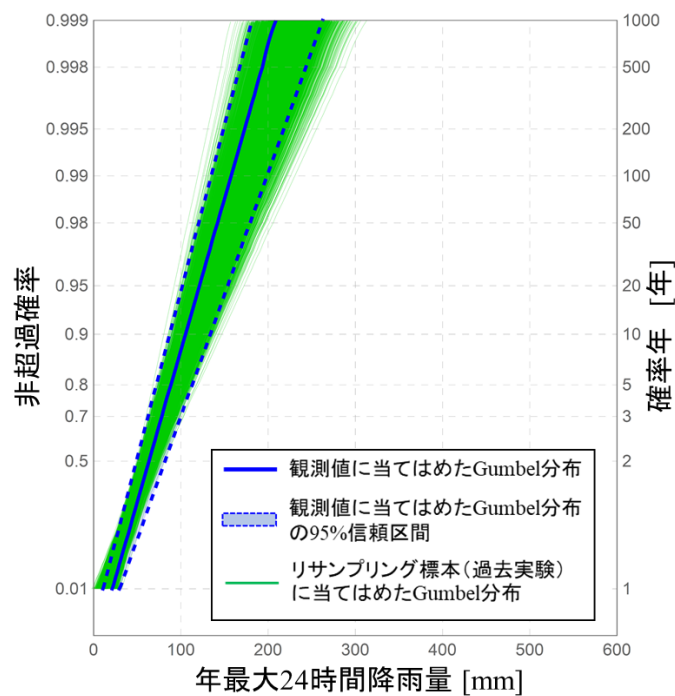


図 4-5 リサンプリング実施後の確率年最大 24 時間降雨量の振れ幅と確率限界法検定に基づく過去気候での 95%信頼区間

d4PDF が有するアンサンブル情報から明らかとなる確率雨量の振れ幅（信頼区間）は、数理統計理論に基づく確率雨量の振れ幅（信頼区間）とほとんど一致する。

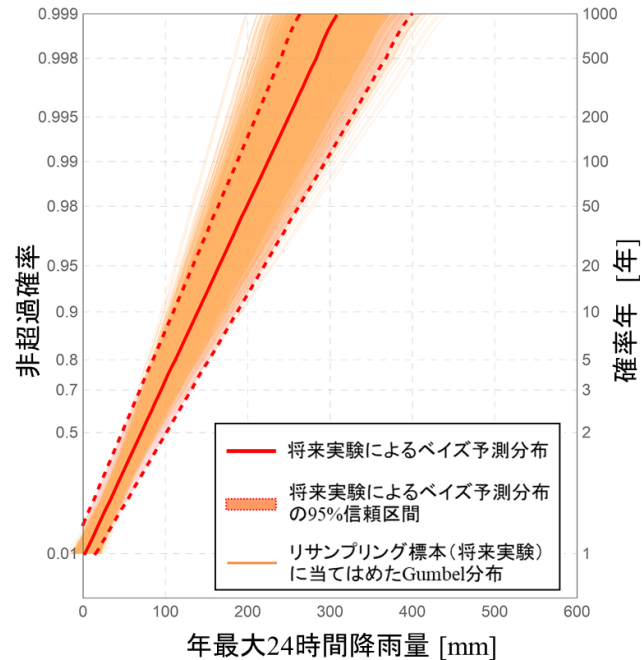


図 4-6 リサンプリング実施後の確率年最大 24 時間降雨量の振れ幅と確率限界法検定に基づく将来気候での 95%信頼区間

将来気候に対しても、大量アンサンブル情報に基づく信頼区間と確率限界法検定に基づく信頼区間は、ほとんど一致しており、大量アンサンブル情報から定まる確率雨量の幅は、理論的に支持されることが示された。

第4章 気候変動予測情報を用いた極値降雨量に関する信頼区間・予測区間の将来変化の推定

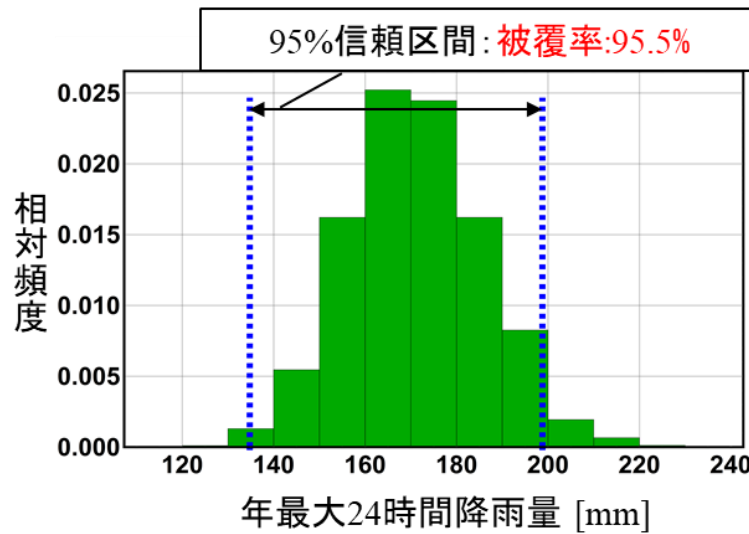


図 4-7 過去実験での 100 年確率年最大 24 時間降雨量の頻度分布と過去気候での確率限界法検定に基づく 95%信頼区間

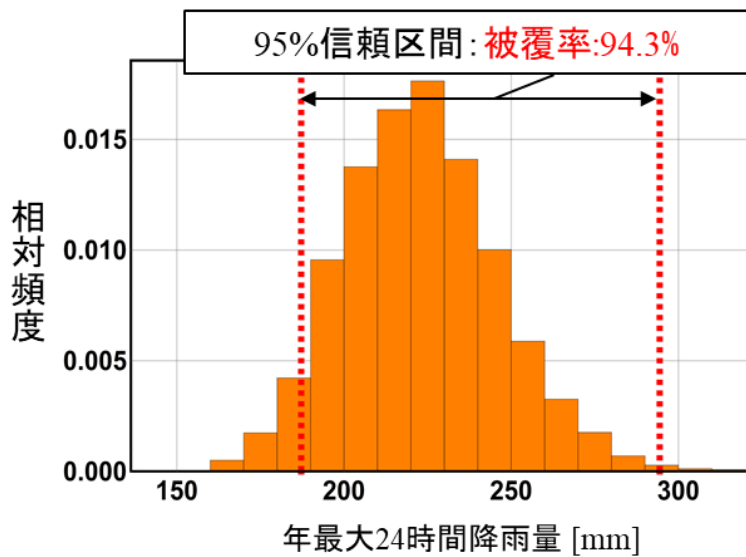


図 4-8 将来実験での 100 年確率年最大 24 時間降雨量の頻度分布と将来気候での確率限界法検定に基づく 95%信頼区間

4-4-6 ベイズ理論の導入による予測区間の更新

予測区間を構成するには、確率限界値の標本に最良の適合度を有する確率分布を採用する必要があることは既述した通りである。そのため、確率限界値と過去実験結果ならびに将来実験結果を分析することで、両者の適合度を見る。すなわち、確率限界値の両側から成る確率雨量の幅（採択域）と過去・将来実験結果から得られる確率雨

#### 第4章 気候変動予測情報を用いた極値降雨量に関する信頼区間・予測区間の将来変化の推定

量の幅との間が良く合うのであれば、本研究が提案する予測区間の妥当性（精度の良さ）が物理的モンテカルロ法による数値実験結果の観点からも担保されることとなる。

まず、観測実績から算定した確率限界値と過去実験結果の比較を確率紙へのプロットに対する目視により行う。図4-9は、解析用データに当てはめた Gumbel 分布（青実線）、確率限界法検定による当該 Gumbel 分布における両側確率 5%の確率限界値（青点）および過去実験結果のリサンプリング標本の経験分布（緑点、500例を図示）を示している。また、図4-10は、将来気候での Gumbel 分布（解析用データに当てはめた Gumbel 分布の予測分布、赤実線）、確率限界法検定による当該 Gumbel 分布における両側確率 5%の確率限界値（青点）および将来実験結果のリサンプリング標本の経験分布（赤褐色点、500例を図示）を示している。図4-9より、過去実験より算定される確率雨量の振れ幅は、両側確率 5%の理論的に算定される確率限界法検定の採択域にほとんど含まれることが分かる。このように、目視により、物理的モンテカルロ法による順序統計量の頻度分布と確率限界法検定の採択域が同程度の幅を取ることを確認した。次は、より具体的に両者の適合度を明らかとする。すなわち、両側確率 5%で構成した採択域の物理的モンテカルロ法による順序統計量の頻度分布に対する被覆率を算出する。両側確率 5%で構成した採択域の物理的モンテカルロ法による順序統計量の頻度分布に対する被覆率が 95%に近いほど、両者の適合度は高いということの意味している。図4-11は、確率限界法検定による解析用データに当てはめた Gumbel 分布における両側確率 5%の採択域と過去実験結果から抽出した 5000 個のリサンプリング標本から算定した第 49 順序統計量の頻度分布である。このとき、採択域の被覆率は 99.9%となるため、被覆率の観点からも確率限界法検定の有用性が確認された。また、図4-12は、確率限界法検定による MCMC 法に基づき解析用データに当てはめた Gumbel 分布に将来実験結果を取り入れベイズ更新された Gumbel 分布における両側確率 5%の採択域と将来実験結果から抽出した 5000 個のリサンプリング標本から算定した第 49 順序統計量の頻度分布である。このとき、採択域の被覆率は 98.7%となるため、ベイズ手法の適用により、将来気候においても確率限界法検定による手法の有用性が確認された。よって、信頼係数 95%（両側確率 5%）で算定した採択域は、物理的モンテカルロ法による確率雨量の分布を高精度で推定できるため、採択域の上限値群と下限値群をそれぞれ最良の適合度を有する確率分布で外挿することで将来期間の大雨の振れ幅（95%予測区間）を算定可能であることが分かる。なお、本研究では、図4-9および図4-10に示されている両側確率 5%の確率限界値群に対して、それぞれ一般化極値分布を当てはめることで、過去気候および将来気候における 95%予測区間を構成した。ここで、一般化極値分布の累積分布関数の関数形  $F_X(x)$

#### 第4章 気候変動予測情報を用いた極値降雨量に関する信頼区間・予測区間の将来変化の推定

を式(4-5)に示す.

$$F_x(x) = \exp \left[ - \left\{ 1 + \frac{\xi(x-\mu)}{\sigma} \right\}^{-\frac{1}{\xi}} \right] \quad \left( \xi \neq 0, 1 + \frac{\xi(x-\mu)}{\sigma} > 0 \right) \quad (4-5)$$

ここに、 $\mu$  : 位置母数,  $\sigma$  : 尺度母数,  $\xi$  : 形状母数である.

次に予測区間の将来変化について述べる. 図4-13は, 解析用データ(黒点), 解析用データに当てはめた Gumbel 分布(青実線)および確率限界法検定に基づく当該 Gumbel 分布における 95% 予測区間(青色で表示された範囲)と MCMC 法に基づき解析用データに当てはめた Gumbel 分布に将来実験結果を取り入れベイズ更新された Gumbel 分布(解析用データに当てはめた Gumbel 分布の予測分布, 赤実線), 確率限界法検定に基づくベイズ更新された当該 Gumbel 分布における 95% 予測区間(赤色で表示された範囲)である. 過去気候における予測区間と将来気候における予測区間が重複する範囲より, 将来気候における年最大 24 時間降雨量は過去気候においても発生する可能性があったことが分かる. また, 同図より, 将来気候では, 過去気候に対して予測区間が広がり, 地球温暖化進行時の年最大 24 時間雨量が増加することが確認された. さらに, 計画規模に相当する 100 年確率に着目すると, 対象地点において, 将来気候の 100 年確率年最大 24 時間雨量の 95% 上側予測限界値 (437.9mm) は, 観測実績に基づく過去気候の 100 年確率年最大 24 時間雨量の 95% 上側予測限界値 (280.7mm) の約 1.56 倍の値となる. このように, 予測区間の更新により, 地球温暖化進行時における極値降雨量の規模ならびにその生起リスクが評価可能となる.



第4章 気候変動予測情報を用いた極値降雨量に関する信頼区間・予測区間の将来変化の推定

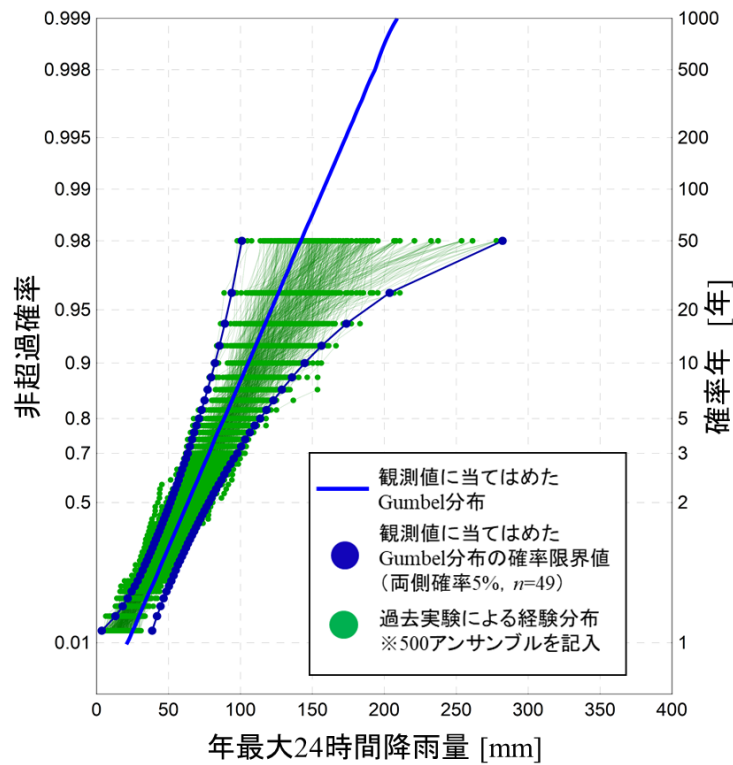


図 4-9 解析用データに当てはめた Gumbel 分布, 当該の Gumbel 分布における確率限界値および d4PDF(5km)過去実験のリサンプリング標本から構成した経験分布

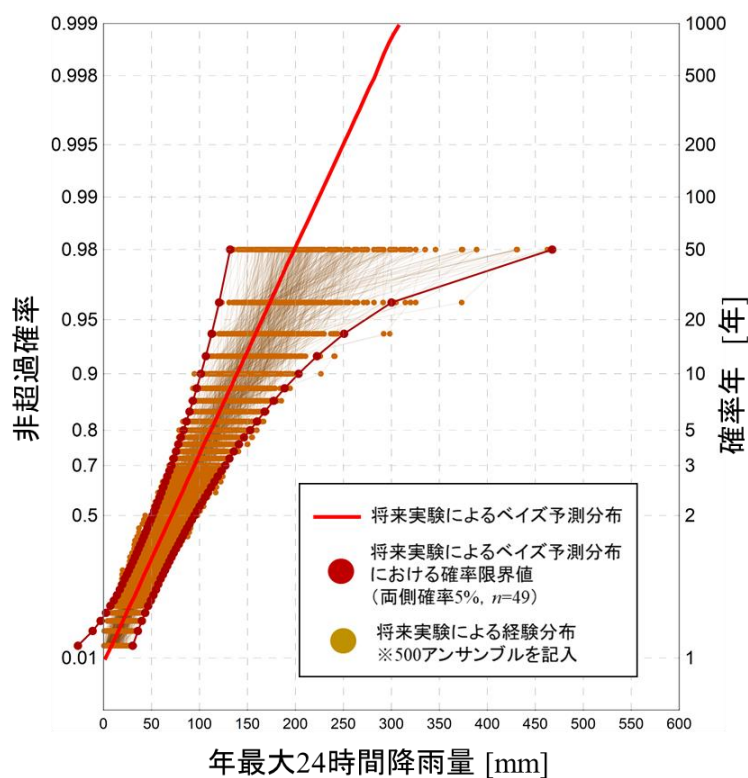


図 4-10 将来実験によるベイズ予測分布, 当該のベイズ予測分布における確率限界値および d4PDF(5km)将来実験のリサンプリング標本から構成した経験分布

第4章 気候変動予測情報を用いた極値降雨量に関する信頼区間・予測区間の将来変化の推定

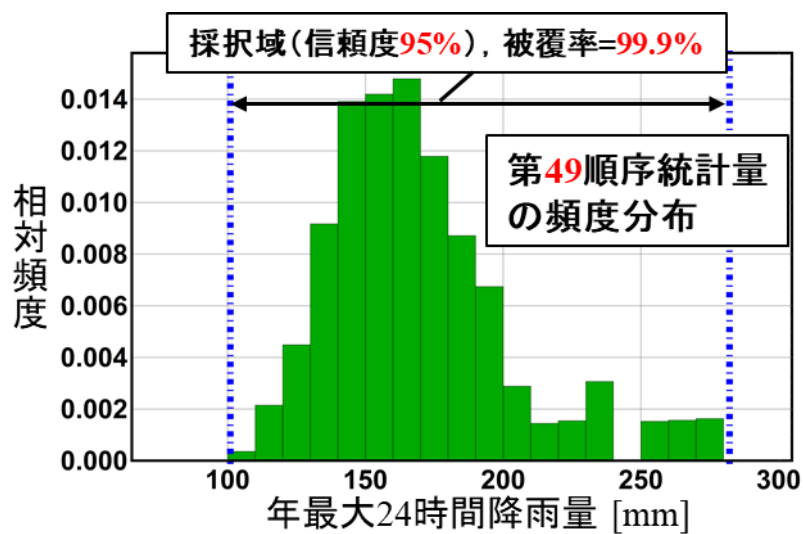


図 4-11 観測値に当てはめた Gumbel 分布における確率限界法検定による両側確率 5%の採択域と d4PDF(5km)過去実験の 5000 個のリサンプリング標本の経験分布から構成した第 49 順序統計量の頻度分布の関係

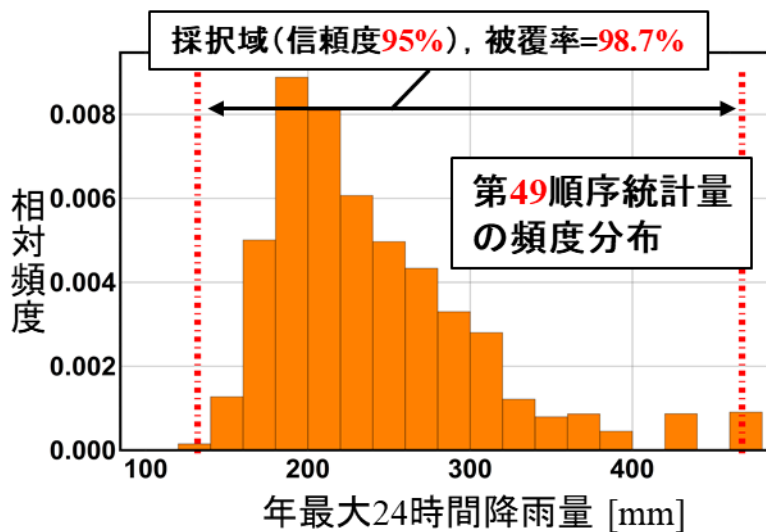


図 4-12 d4PDF(5km)将来実験によるベイズ予測分布における確率限界法検定による両側確率 5%の採択域と d4PDF(5km)将来実験の 5000 個のリサンプリング標本の経験分布から構成した第 49 順序統計量の頻度分布の関係

第4章 気候変動予測情報を用いた極値降雨量に関する信頼区間・予測区間の将来変化の推定

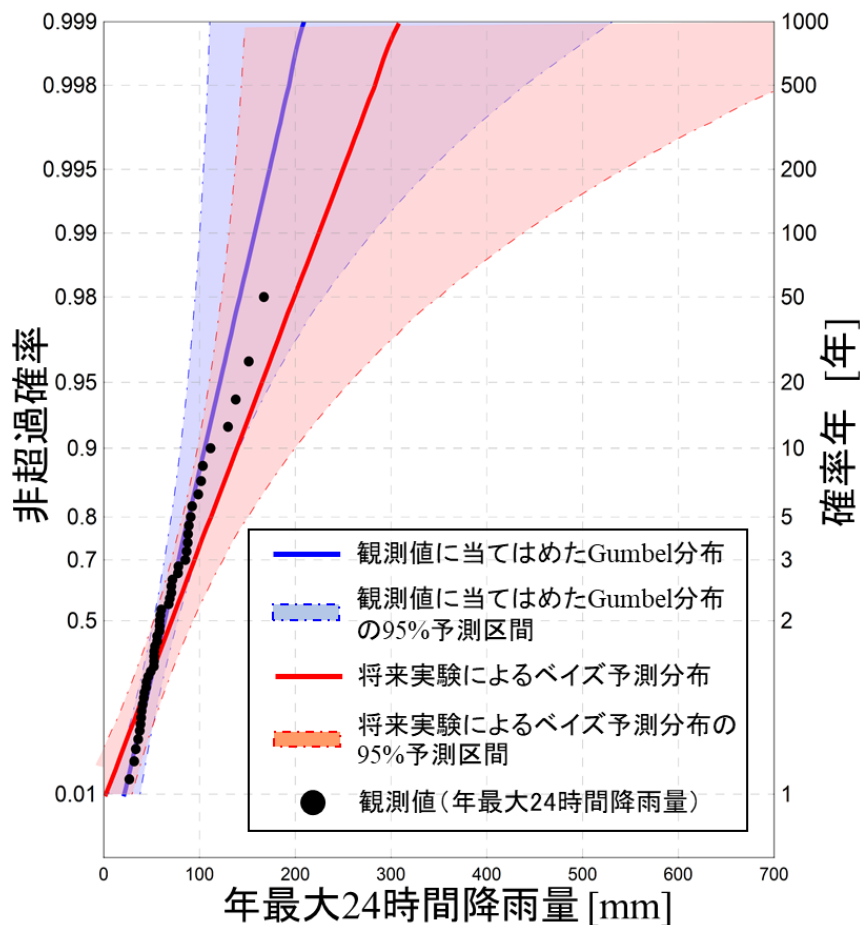


図 4-13 ベイズ手法に基づく将来気候予測実験結果を用いた予測区間の更新

4-5 第4章のまとめ

本研究では、マルコフ連鎖モンテカルロ法により、気候変動予測結果を取り込み、信頼区間・予測区間を更新する手法を構築した。当該手法により、気候モデルによる地球温暖化の影響予測という物理的な観点から算定された情報を統計理論に結び付け、既存の計画確率規模降雨量の将来変化の予測が可能となるとともに、その予測に伴う不確実性が信頼区間と予測区間により定量化される。さらには、確率限界法検定により構成した信頼区間・予測区間を山田ら (2018 等) により実施された力学的ダウンスケーリングの結果と比較した。この比較より、力学的ダウンスケーリングにより算定される確率降雨量および計算年最大降雨量は、確率限界法検定により構成される信頼区間および採択域と高い精度で一致していることが示された。この結果は、力学的ダウンスケーリング計算の妥当性は、理論的にも支持されることを示しており、気候変動予測情報を取り込んだ洪水対策に有益な知見を提供するものである。

今後、地球温暖化に対応した洪水対策を検討するためには、今後降雨観測を継続していく中で、新たに得られた水文資料の統計的特徴を十分吟味し、降雨現象がどのよ

## 第4章 気候変動予測情報を用いた極値降雨量に関する信頼区間・予測区間の将来変化の推定

うに変化していくのかを把握していく必要があると言える。本章で挙げた成果は、検討流域において、将来  $n$  年間分の降雨資料を得た時点で、地球温暖化の影響の進行度合いを評価するとともに信頼区間の更新を行い、更新された信頼区間に基づき事業オプションを選定していくというような、時間軸の概念を取り入れた洪水リスク評価の実現可能性を示唆している。また、本論では、アンサンブル気候予測データを活用した物理的モンテカルロ法、数理統計理論である確率限界法検定、統計的モンテカルロ法により構成される信頼区間には、極めて調和的な関係が成立することを明らかにした。この成果は、今後の水文頻度解析に対して幅を有する考え方の科学的妥当性を提示している。

### 参考文献

- ・国土交通省 国土技術政策総合研究所 気候変動適応研究本部：気候変動適応策に関する研究（中間報告），国総研資料 749号，II-112-154，2013.
- ・Milly, P.C.D., Betancourt, J., Falkenmark, M., Hirsch, R. M., Kundzewicz, Z.W., Lettenmaier, D.P. and Stouffer, R.J. : Stationarity Is Dead: Whither Water Management ?, Science, 319, 573-574, 2008.
- ・北海道地方における気候変動予測（水分野）技術検討委員会 ([https://www.hkd.mlit.go.jp/ky/kn/kawa kei/splaat000000vdyw.html](https://www.hkd.mlit.go.jp/ky/kn/kawa%20kei/splaat000000vdyw.html))
- ・山田朋人，星野剛ら：北海道における気候変動に伴う洪水外力の変化，河川技術論文集，第24巻，pp.391-396，2018.
- ・清水啓太，山田朋人，山田 正：確率限界法検定に基づく確率分布モデルの信頼区間を導入した新しい水文頻度解析手法，土木学会論文集 B1(水工学) Vol.74, No.4, I\_331-I\_336, 2018.
- ・森口繁一：確率表現関数の検定について—Kolmogorov-Smirnov 検定を考え直す—，pp.233-244，日本統計学会，第25巻，1995.
- ・森口繁一：確率表現関数，東京大学出版，1995.
- ・伊庭幸人，種村正美：計算統計II マルコフ連鎖モンテカルロ法とその周辺（統計科学のフロンティア 12），岩波書店，pp.10,37,49，2005.
- ・Ryo Mizuta, Akihiko Murata, and Masayoshi Ishii : Over 5,000 Years of Ensemble Future Climate Simulations by 60-km Global and 20-km Regional Atmospheric Models, Bull.Am. Meteorol. Soc., pp.1383-1393, 2016.
- ・北野利一，高橋倫也，田中茂信：ベイズ手法による降水量の極値の予測分布～最尤法による相違と相互補完，土木学会論文集 B1（水工学），72(4)，pp.I\_463-I\_468，2016.

## 第5章 全球平均気温上昇シナリオ別の極値水文量の将来予測

### 5-1 はじめに

地球温暖化に伴う気候変動により、近年、水文量（降雨量や河川流量）の非定常性の顕在化している。非定常性とは、既述したとおり、降雨量がトレンドや周期性をもつことあるいはそれらが従う母集団分布が時間変化することをいう。したがって、今後の水工計画や管理マネジメントには、水文量の非定常性を考え、実施すべきであると提唱する研究報告が多数提出されている（例えば、Milly et al. (2008)）。我が国においては、気候変動の影響により、今後、降雨量ならびに洪水の発生頻度が増加すると予測されている（国土技術政策総合研究所, 2013）。このような現状を鑑みると、地球温暖化に伴う豪雨の激甚化を考慮した洪水対策の策定は喫緊の課題である。そのために、地球温暖化に伴う降雨の激甚化の影響分析を目的として、我が国では、気候モデルによって、地球温暖化進行時における将来気候を予測する研究が多数行われている（例えば、文部科学省, 2013）。本章では、気候変動予測により示された大規模豪雨事例に対して、前章にて示した気候変動に対応可能な水文頻度解析を実施し、その生起リスク評価ならびに、降雨流出解析による確率流量評価の結果を詳述していく。我が国における気候予測データベースの多くは、高い空間解像度を有し、将来気候下における大規模豪雨の特徴を詳細な地形情報に関連付け推定することができる一方、アンサンブル数が少ないために、発生頻度の低い極値降雨の確率的評価が十分ではなかった。これらに対して、文部科学省気候変動リスク情報創生プログラムで作成された「地球温暖化対策に資するアンサンブル気候予測データベース database for Policy Decision making for Future climate change(d4PDF)」(以下、d4PDFと表記する)(Mizuta et al., 2016)は、その空間解像度は以前の予測データベースに劣る一方、これまでにない多数の気候シミュレーションに基づく多数の極値降雨量の統計サンプルを格納している。このd4PDFのデータベースは、水平解像度60kmの気象研究所全球大気モデ

## 第5章 全球平均気温上昇シナリオ別の極値水文量の将来予測

ルMRI-AGCM3.2に加えて、日本域をカバーする水平解像度20kmの気象研究所領域気候モデルNHRCMを用いた領域ダウンスケーリング実験で構成されている。本研究では、領域実験の空間解像度(20km)は、当該実験における降雨データを入力降雨とした降雨流出解析の検討に耐えうるものとする。近年、d4PDFへの力学的ダウンスケーリングの適用により、気候変動を踏まえた洪水リスク評価が行われている(例えば、山田・星野ら, 2018)。このように、水文量の非定常性(地球温暖化が水文量に与える影響)を考慮した水文頻度解析手法の構築・発展は、洪水対策を立案する上で、計画降雨量の不確実性の時間発展の推定ならびに、気候変動により激甚化していく豪雨現象の把握を行う上で、極めて重要となる。

第3章では、確率限界法検定(森口, 1995)を用いることで、極値分布の裾野に対して極めて高い精度を有する信頼区間・予測区間の構成手法を提案するとともに、当該区間を導入した水文頻度解析手法を構築した。信頼区間の導入により、過去の降雨観測に起因する計画規模相当の確率降雨量の振れ幅が定量化可能となる。予測区間は、将来の降雨量がとり得る幅を表すものである。予測区間の導入により、従来の極値統計手法では評価不能とされた外れ値を計画確率年の中で評価し、また、将来生起しうる豪雨の分布を把握することができる。

第4章では、当該手法が極値降雨量の定常性を仮定しており、地球温暖化進行時における大規模降雨の生起確率を評価できない点を改善させるため、気候変動予測情報をマルコフ連鎖モンテカルロ法により取り込み、地球温暖化進行時における極値降雨量の信頼区間・予測区間を推定する手法を構築した。本章では、第4章にて提案したこの水文頻度解析手法を利根川八斗島基準点上流域(以降、利根川上流域とも表記する)の気候変動評価に適用し、地球温暖化時における確率降雨量の将来変化の分析結果を示す。気候変動を踏まえた洪水対策において重要となる指標が温暖化進行時の大規模洪水流量である。その定量評価に向けては、気候変動予測により示された豪雨事例に対する極値統計解析による生起リスクの算出と、降雨流出解析による流量規模の把握が不可欠となる。これを受けて、本章では、気候モデルにより予測された豪雨事例がもたらす洪水流量を算出した。具体的には、d4PDF(20km)の領域実験の降雨データを用いて、地球温暖化シナリオ別の降雨量の変化が河川流量に与える影響を流出モデルにより分析した。これにより、規定の計画降雨量値・流量値を超過する、洪水対策上危険な降雨パターンを把握することができる。

### 5-2 全球平均気温上昇結果別の極値降雨量に関する信頼区間・予測区間の算定

本章では、全球平均気温上昇度結果(d4PDF 2°C上昇実験および4°C上昇実験)ごと

## 第5章 全球平均気温上昇シナリオ別の極値水文量の将来予測

に、信頼区間・予測区間を算定し、これらの関係を分析する。図5-1と図5-2は全球平均気温上昇度結果別の95%信頼区間（確率限界法検定），図5-3と図5-4は全球平均気温上昇度結果別の95%予測区間（確率限界法検定）を示している。図5-1から図5-4には、共通して、観測値（黒点），観測値に当てはめたGumbel分布（青実線）を示している。これらに加えて，図5-1は，観測値に当てはめたGumbel分布の95%信頼区間（青色で示された範囲），将来気候（2℃上昇実験）におけるベイズ予測分布（橙実線）および将来気候（2℃上昇実験）におけるベイズ予測分布の95%信頼区間（橙色で示された範囲）を示しており，図5-2は，観測値に当てはめたGumbel分布の95%信頼区間（青色で示された範囲），将来気候（4℃上昇実験）におけるベイズ予測分布（赤実線）および将来気候（4℃上昇実験）におけるベイズ予測分布の95%信頼区間（赤色で示された範囲）を示している。さらに，図5-3は，観測値に当てはめたGumbel分布における95%予測区間（青色で示された範囲），将来気候（2℃上昇実験）における95%予測区間（橙色で示された範囲）を示しており，図5-4は，観測値に当てはめたGumbel分布における95%予測区間（青色で示された範囲），将来気候（4℃上昇実験）における95%予測区間（赤色で示された範囲）を示している。これらの図が示すように，4℃上昇時における信頼区間・予測区間の幅は，2℃上昇の場合に対して，広がっている。これは，気温上昇度が大きいほど，年最大降雨量をもたらす気象場の自由度が多様となり，より大規模な年最大降雨量の生起確率が増加することを示している。

利根川上流域の計画確率年である200年を対象とした，気温上昇結果と信頼区間の関係を示す。2℃上昇時における200年確率95%信頼区間[373.1mm, 533.9mm]は，過去気候での200年確率95%信頼区間[280.3mm, 399.2mm]の約1.4倍の大きさとなる。加えて，4℃上昇時における200年確率95%信頼区間[399.4mm, 576.1mm]は，過去気候での200年確率95%信頼区間[280.3mm, 399.2mm]の約1.5倍の大きさとなる。さらに，2℃上昇時における200年確率95%予測区間[266.7mm, 843.4mm]は，過去気候での200年確率95%予測区間[197.5mm, 610.2mm]の約1.4倍の大きさとなる。加えて，4℃上昇時における200年確率95%予測区間[282.7mm, 915.7mm]は，過去気候での200年確率95%予測区間の約1.5倍の大きさとなる。上記の信頼区間・予測区間の将来変化倍率から，利根川上流域においては，2℃上昇時の200年確率95%信頼区間と200年確率95%予測区間の幅は，過去気候のものに対して，約1.4倍大きくなることが示された。加えて，4℃上昇時の200年確率95%信頼区間と200年確率95%予測区間の幅は，過去気候のものに対して，約1.5倍大きくなることが分かった。このように，本提案手法により，将来変化シナリオ別に，計画規模相当降雨量の将来変化倍率が得

## 第5章 全球平均気温上昇シナリオ別の極値水文量の将来予測

られる。さらに、95%上側予測限界値が将来期間において、発生する確率をリスクとして、定量化することができる。すなわち、上述したリスク（上側予測限界値の超過確率）は、「対象確率年」と「予測区間の片側確率」との積により表される。例えば、利根川上流域において、200年を対象確率年とした場合、4℃上昇時の200年確率95%上側予測限界値（915.7mm）が将来期間において、発生するリスクは、 $(1/200) \times 2.5\%$ より、 $1.25 \times 10^{-4}$ となる。

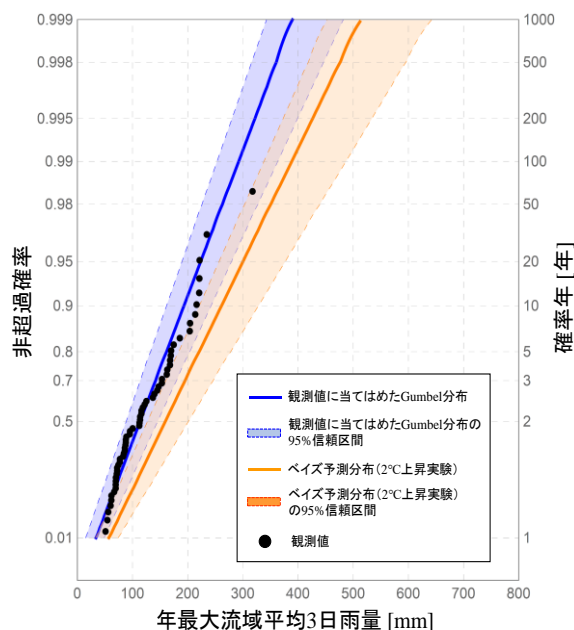


図 5-1 ベイズ手法に基づく d4PDF 2℃上昇実験結果を用いた 95%信頼区間の更新

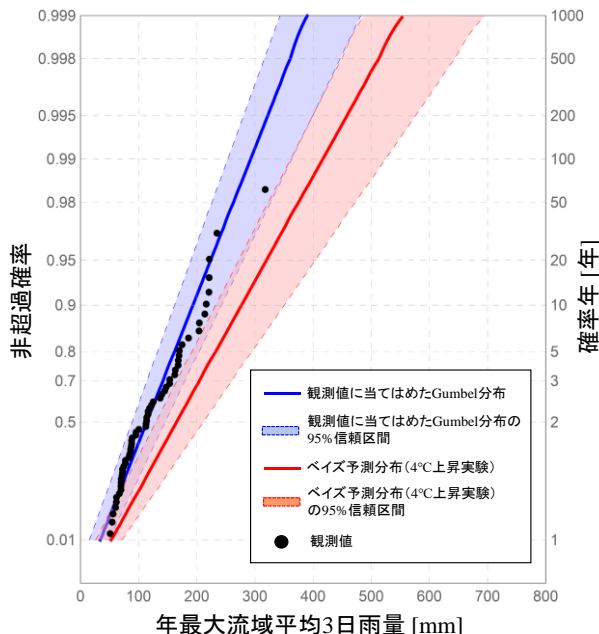


図 5-2 ベイズ手法に基づく d4PDF 4℃上昇実験結果を用いた 95%信頼区間の更新

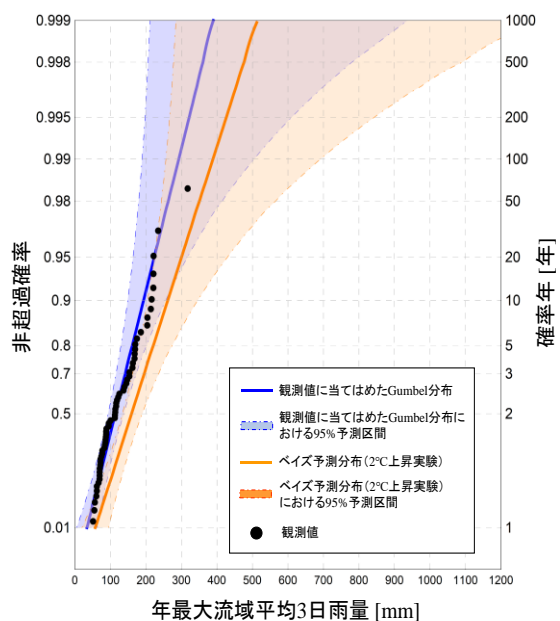


図 5-3 ベイズ手法に基づく d4PDF 2℃上昇実験結果を用いた 95%予測区間の更新

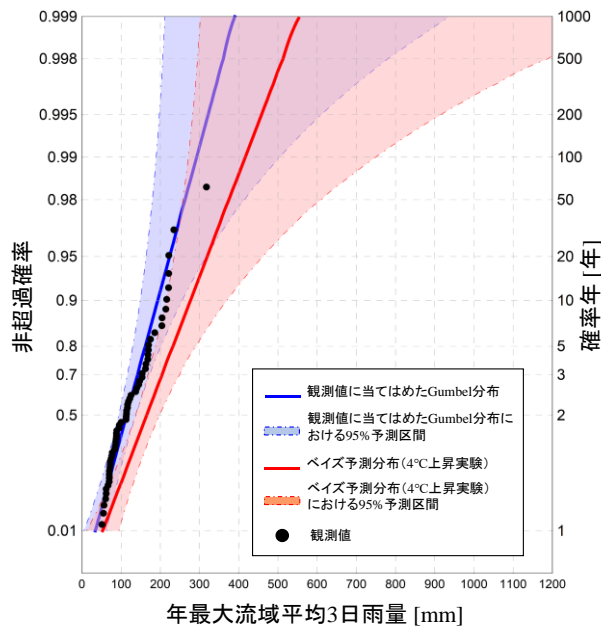


図 5-4 ベイズ手法に基づく d4PDF 4℃上昇実験結果を用いた 95%予測区間の更新



### 5-3 利根川上流域における最大クラスの降雨量をもたらす気象場の分析

本節では、利根川上流域を対象として、気温上昇実験結果別に、流域平均日降雨量の上位1位から3位をもたらした降雨イベントの特性を分析する。図5-5、図5-6、図5-7および図5-8、図5-9、図5-10はそれぞれ、4°C上昇実験において利根川上流域に最大の日降雨量、2番目に大きな日降雨量、3番目に大きな日降雨量をもたらした降雨イベントにおける降雨強度分布と海面更正気圧の分布を示している。図5-11から図5-16には、それぞれ、2°C上昇実験の場合における当該諸量を示している。これらの降雨強度分布図には、地上風速ベクトルを付記している（参照ベクトルの風速は20m/sとしている）。地上風速ベクトルの成分は、東西風速  $u$ （西風を正とする）と南北風速  $v$ （南風を正とする）である。また、海面更正気圧分布図には、地表面水蒸気フラックスベクトルを付記している。本研究では、地表面水蒸気フラックスは、地表面比湿  $q$  と地表面風 ( $\mathbf{u}=(u, v)$ ) の積 ( $q \times \mathbf{u}$ ) により表している。これらの図中における参照水蒸気フラックスベクトルの大きさは、 $0.5 \text{ (kg/kg)} \cdot \text{m/s}$  としている。

図5-5、図5-8に示す気象場では、太平洋沖から、台風が関東地方に接近・上陸しており、また、日本列島に張り出した強い太平洋高気圧の縁辺部に沿って、台風が供給する大量の水蒸気が関東地方に流入し続けることで（図5-8）、関東地方で大規模豪雨が発生した（図5-5）。図5-6、図5-9に示す気象場では、西日本に停滞した低気圧と北海道・東北地方に張り出した太平洋高気圧が関東地方を挟む位置に存在しており（図5-9）、これらの気圧配置により、関東地方に大量の水蒸気が流入し、大規模豪雨が発生した（図5-6）。図5-7、図5-10に示す気象場では、日本周辺が高気圧に覆われおり、この気圧場において、フィリピン海沖から台風が接近することで、関東地方に大量の水蒸気が流入した（図5-10）。その後、台風が上陸したことで、関東地方に非常に強い降雨帯が長時間に渡り形成された（図5-7）。

図5-11、図5-14に示す気象場では、関東地方付近まで張り出した太平洋高気圧と太平洋沖から関東地方に接近する台風の影響で大量の水蒸気が流入し（図5-14）、その後の台風の上陸により大雨が発生した（図5-11）。図5-12、図5-15に示す気象場では、東シナ海からの台風の影響に伴い（図5-15）、関東地方を中心として、大規模豪雨が発生した（図5-12）。図5-13、図5-16に示す気象場では、フィリピン海からの台風の影響（図5-16）により、関東地方で大規模豪雨が発生した（図5-13）。

4°C上昇時の年最大日降雨量上位1位から3位までの降雨イベントでは、2°C上昇時の上位1位から3位までの降雨イベントに対して、太平洋高気圧がより強い勢力を持っていることが分かった。さらに、強い勢力を有する太平洋高気圧の縁辺部に沿って、

## 第5章 全球平均気温上昇シナリオ別の極値水文量の将来予測

台風や低気圧に起因する水蒸気が流入することによって、4°C上昇時における大規模豪雨（4°C上昇実験 上位1から3位年最大日降雨量をもたらす降雨イベント）がもたらされていることが分かった。また、双方の気温上昇実験において、台風による大規模豪雨は、台風が太平洋沖から関東地方に接近・上陸し、東北地方から太平洋沖に進行するという経路をとる場合（図5-5、図5-7、図5-10）に多く見られる。このため、関東地方において、上記の経路をとる台風は、洪水対策上危険となる降雨パターンであることが示唆された。また、これらの大規模豪雨がもたらす降雨量は、外れ値や異常値として扱われることが非常に多い。一方、極値降雨量の予測区間を考慮することで、計画確率年で生じうる年最大雨量値の幅を推定することができる。例えば、4°C上昇時の200年確率95%予測区間[282.7mm, 915.7mm]を考慮すると、4°C上昇実験年最大流域平均日降雨量第1位をもたらす降雨イベントにおける年最大流域平均3日雨量595.2mmは、当該予測区間内に位置するものである。このように、予測区間を導入することで、従来では想定外として扱われるような豪雨を計画確率年により評価できる。

第5章 全球平均気温上昇シナリオ別の極値水文量の将来予測

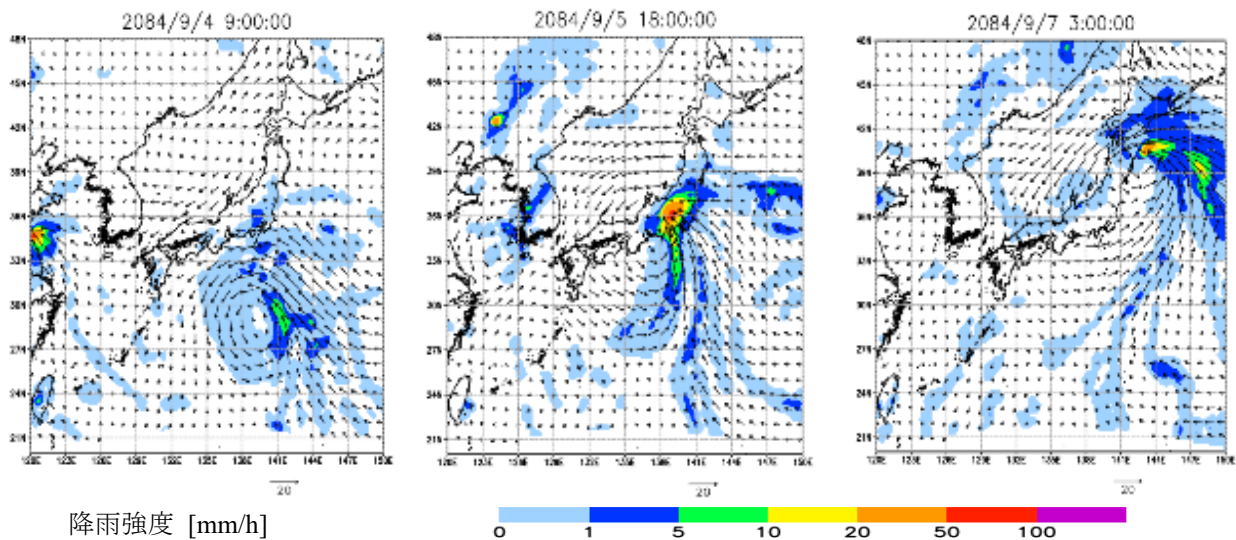


図5-5 4℃上昇実験 年最大日降雨量の第1位(559.9mm)をもたらす降雨イベントにおける降雨強度分布

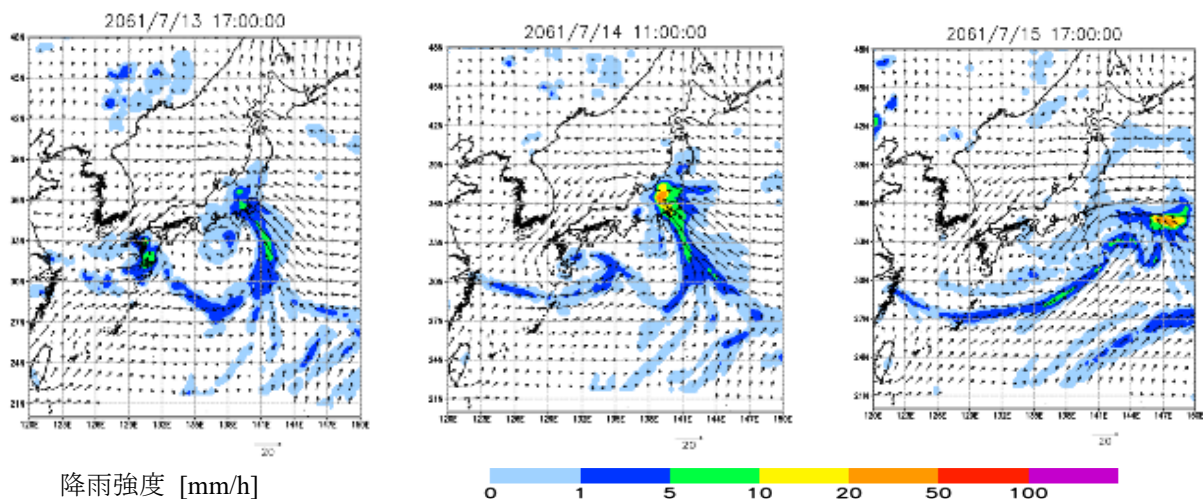


図5-6 4℃上昇実験 年最大日降雨量の第2位(420.8mm)をもたらす降雨イベントにおける降雨強度分布

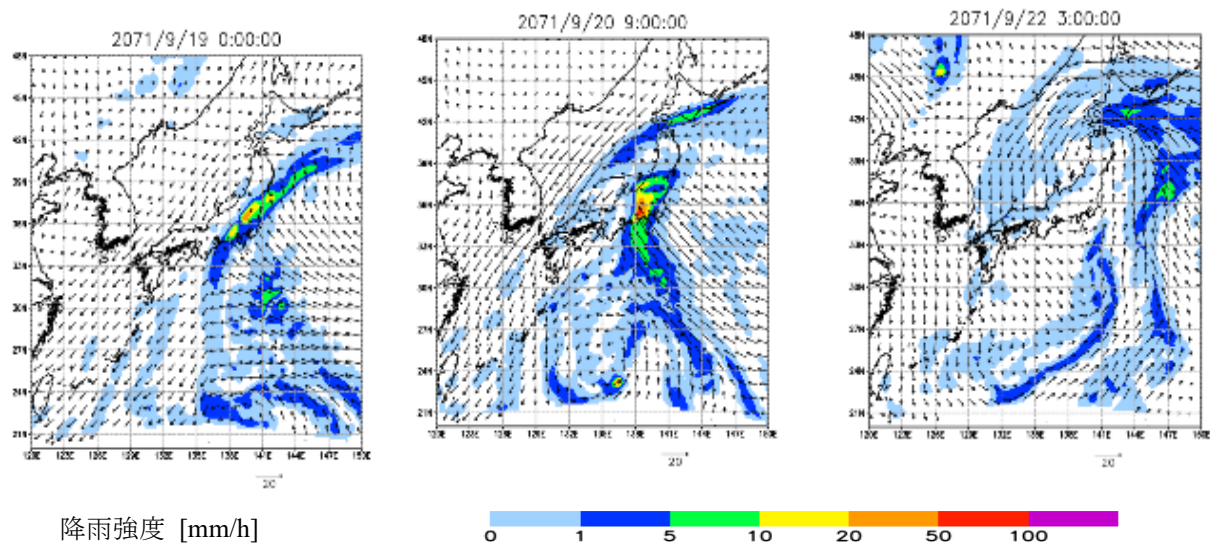


図5-7 4℃上昇実験 年最大日降雨量の第3位(388.5mm)をもたらす降雨イベントにおける降雨強度分布

第5章 全球平均気温上昇シナリオ別の極値水文量の将来予測

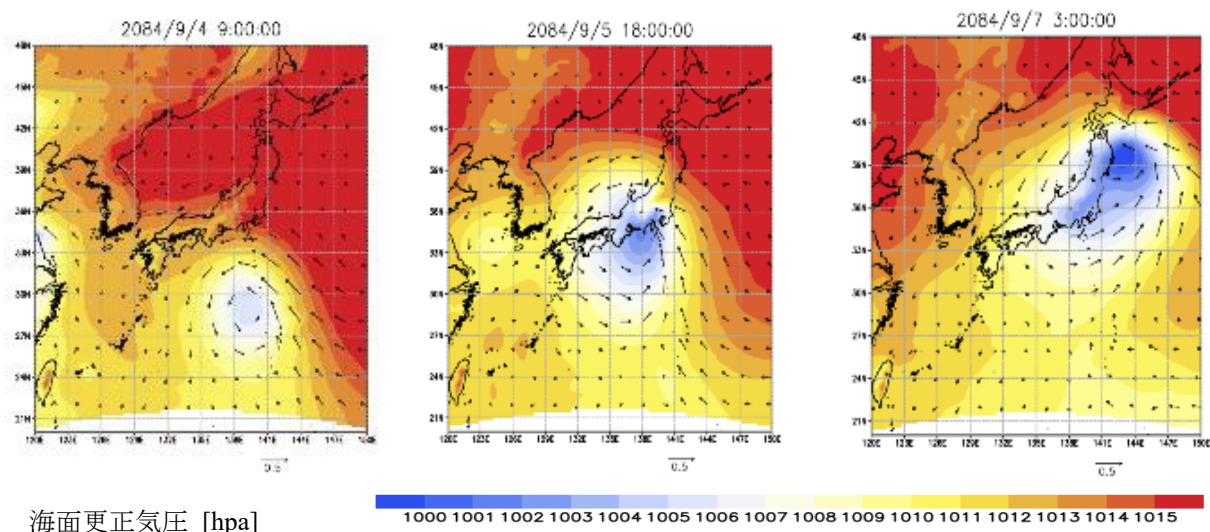


図5-8 4℃上昇実験 年最大日降雨量の第1位をもたらす降雨イベントにおける海面更正気圧の分布

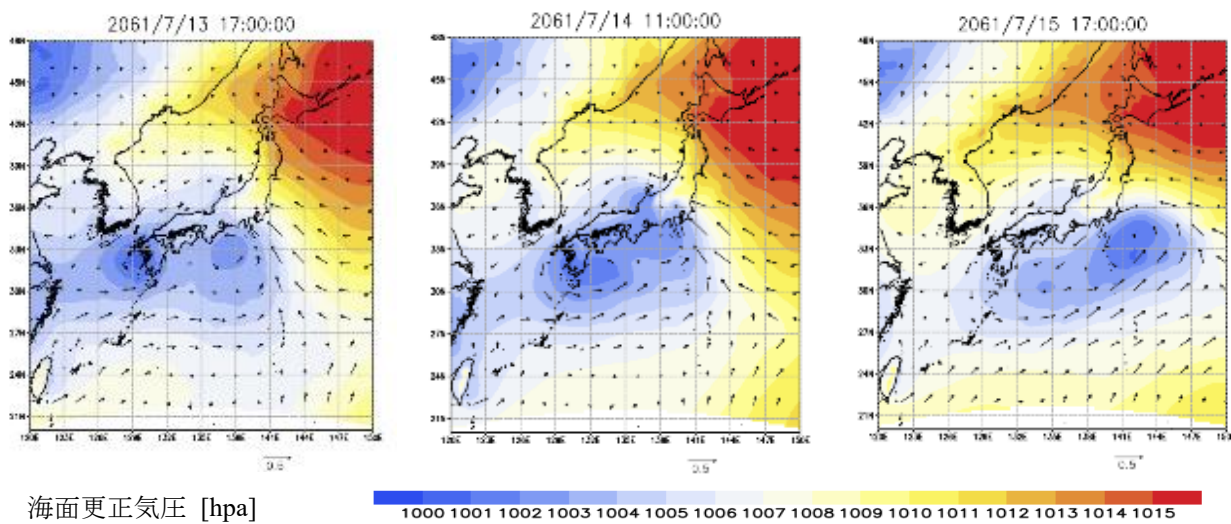


図5-9 4℃上昇実験 年最大日降雨量の第2位をもたらす降雨イベントにおける海面更正気圧の分布

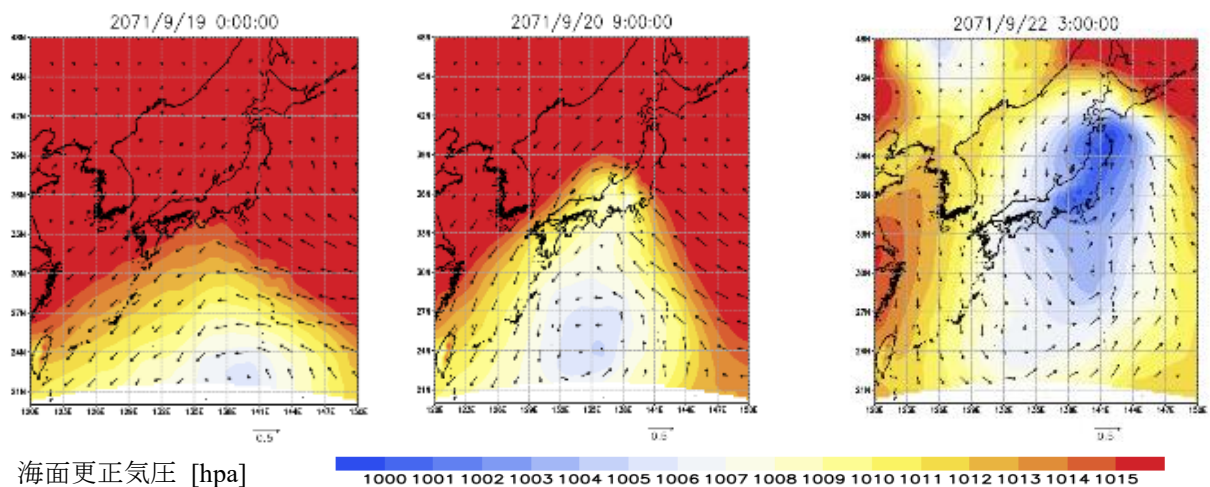


図5-10 4℃上昇実験 年最大日降雨量の第3位をもたらす降雨イベントにおける海面更正気圧の分布

第5章 全球平均気温上昇シナリオ別の極値水文量の将来予測

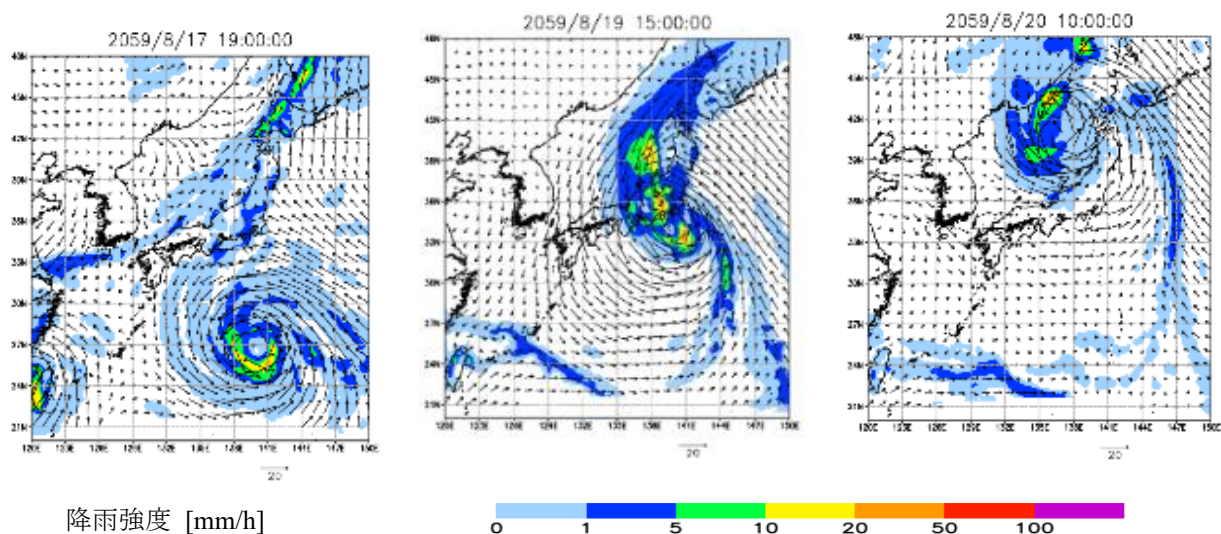


図 5-11 2°C上昇実験 年最大日降雨量の第1位(351.8mm)をもたらす降雨イベントにおける降雨強度分布

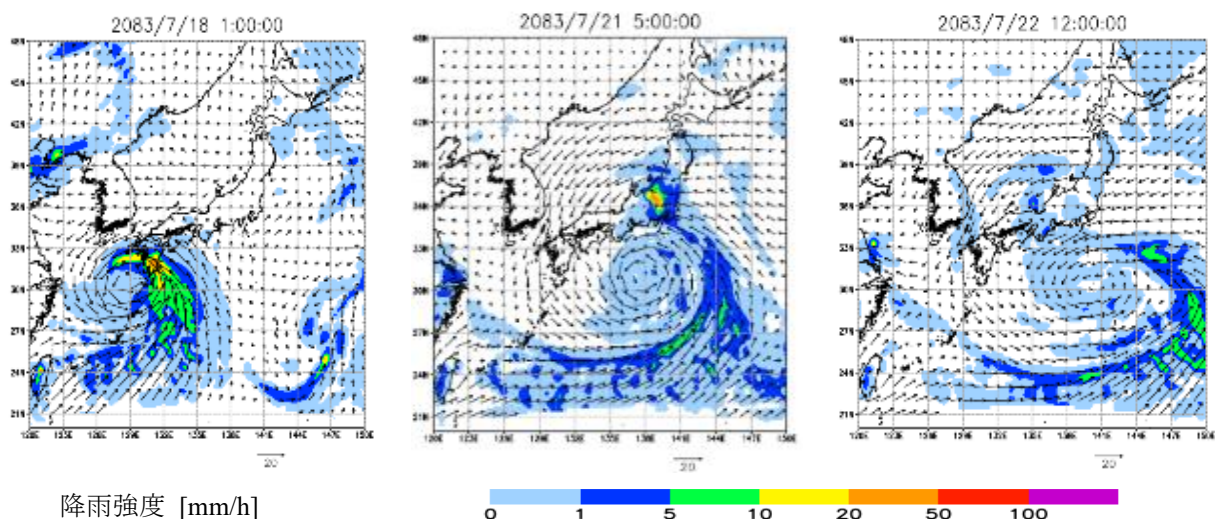


図 5-12 2°C上昇実験 年最大日降雨量の第2位(350.1mm)をもたらす降雨イベントにおける降雨強度分布

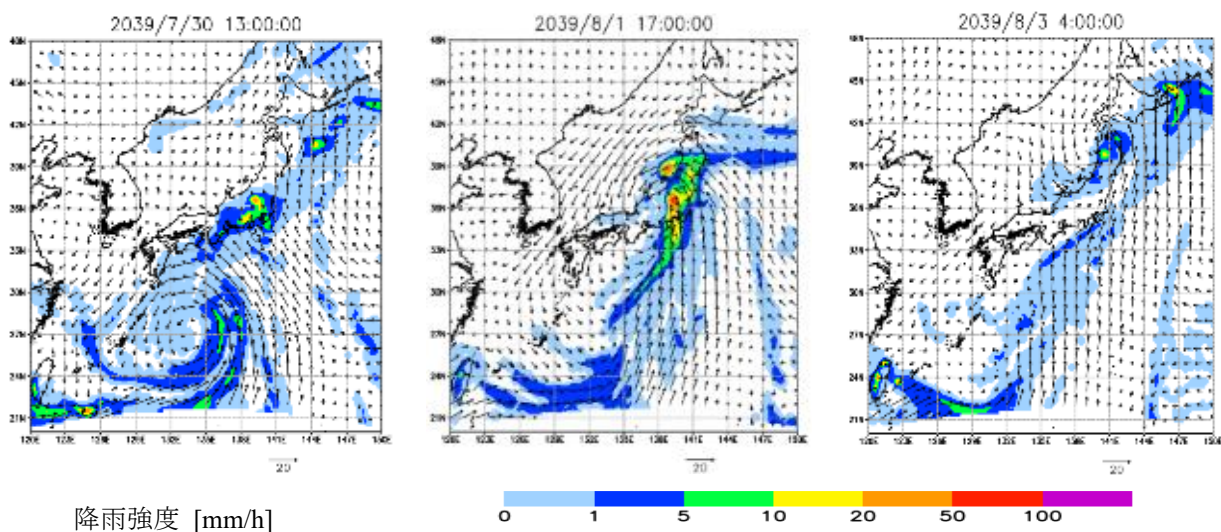


図 5-13 2°C上昇実験 年最大日降雨量の第3位(348.7mm)をもたらす降雨イベントにおける降雨強度分布

第5章 全球平均気温上昇シナリオ別の極値水文量の将来予測

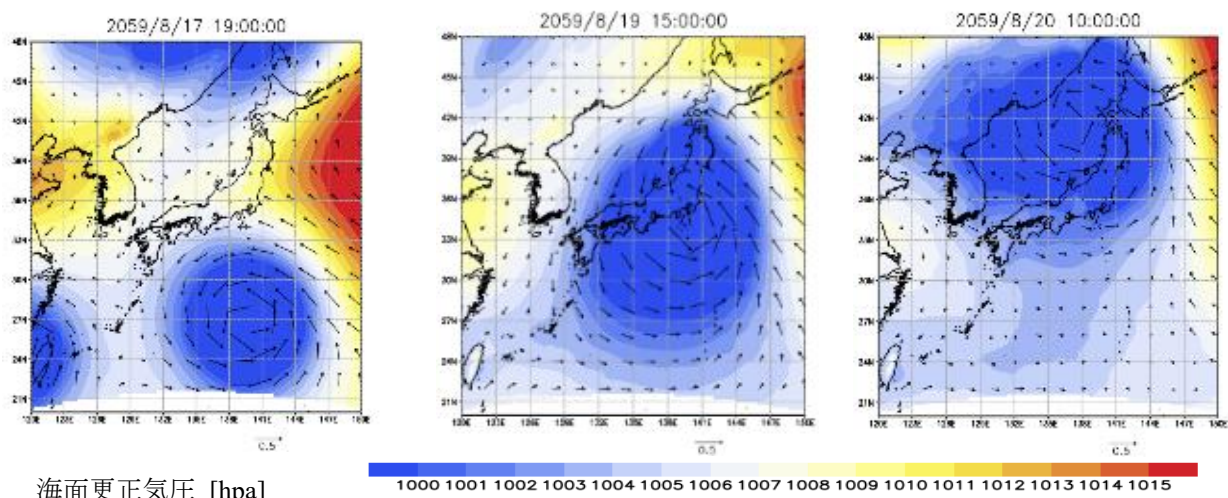


図 5-14 2°C上昇実験 年最大日降雨量の第1位をもたらす降雨イベントにおける海面更正気圧の分布

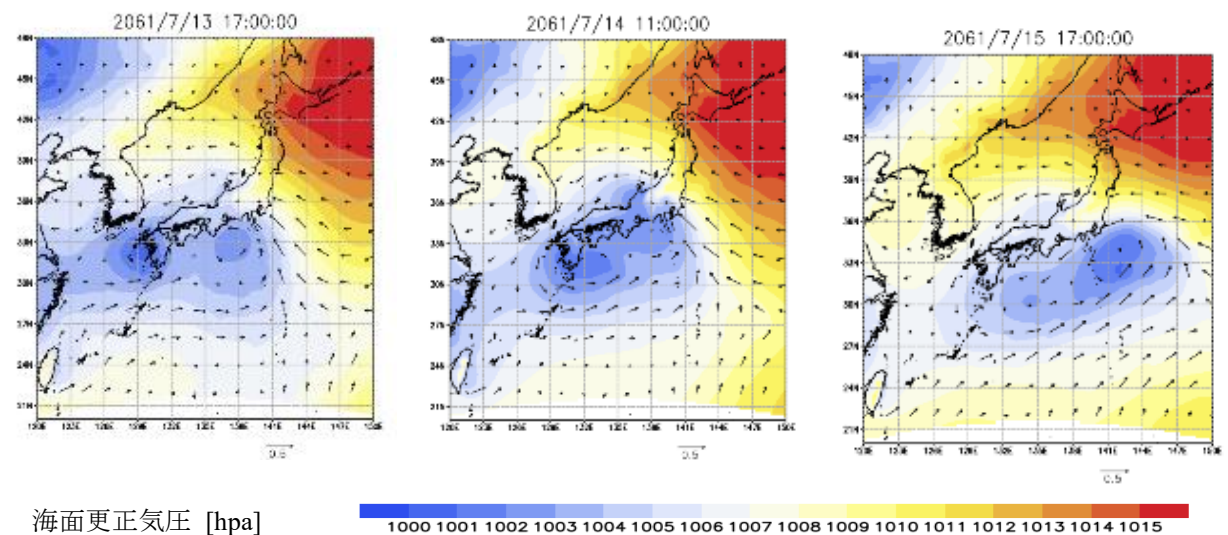


図 5-15 2°C上昇実験 年最大日降雨量の第2位をもたらす降雨イベントにおける海面更正気圧の分布

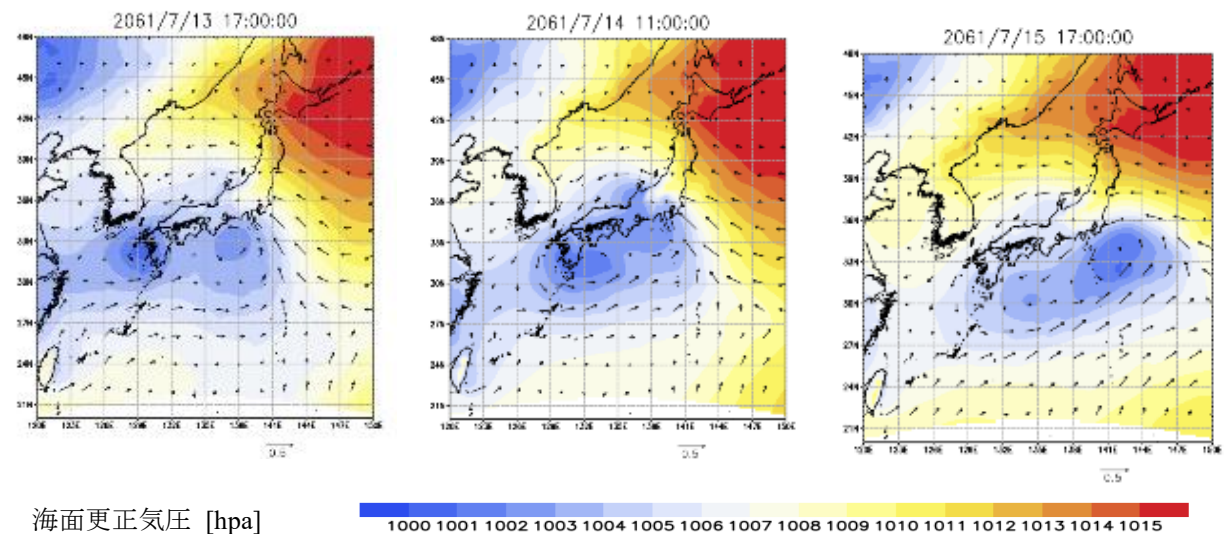
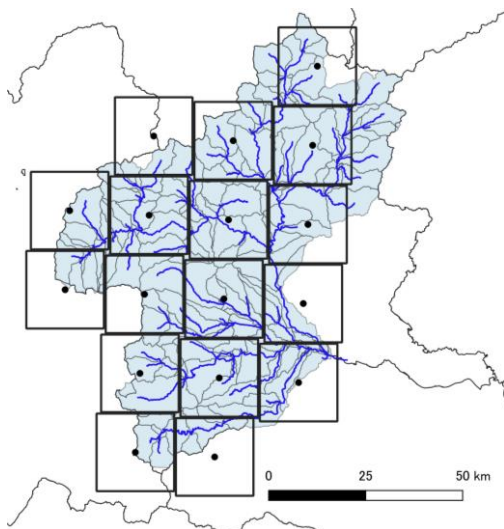


図 5-16 2°C上昇実験 年最大日降雨量の第3位をもたらす降雨イベントにおける海面更正気圧の分布

#### 5-4 利根川上流域における d4PDF の降雨流出解析への適用の妥当性に関する検証

前節では、極値降雨量の信頼区間・予測区間を用いて、利根川上流域における将来気候の豪雨の規模、気候場の特徴および生起リスクを検討した。洪水対策では、各種の河川整備を実施するにあたり、重要となるのは、計画降雨波形を降雨流出モデルに入力し、出力される計画流量や計画水位である。そのため、d4PDF (20km) が対象流域での流出解析に適用可能かを先ず検証する。具体的には、d4PDF (20km) 過去実験における年最大降雨量と観測年最大降雨量の双方の頻度分布の形状を比較する。両ヒストグラムの統計的特徴に共通性が見られれば、d4PDF による気候シミュレーションは、実際の降雨特性を良く再現できていると判定し、将来実験値についても妥当性を有すると考える。過去実験と観測値の比較を行う理由は、過去実験が実際の観測情報を境界条件としており、かつ計算期間が降雨観測期間と重複するものであるため、過去実験が過去観測しえた雨量を表すということをどの程度の確度をもって、判定できるかを把握するためである。なお、使用した d4PDF (20km) データは、利根川上流域に相当する d4PDF のモデル格子における、3000 年間分の過去実験結果および 5400 年間分の 4℃ 上昇実験結果での、年最大流域平均日雨量および年最大流域平均 3 日雨量である。なお、利根川上流域に相当する d4PDF の計算グリッドの雨量データの算術平均値を流域平均雨量と定義している。ここで、**図 5-17** に利根川上流域の流域図（薄青色の範囲）および当該流域に相当する d4PDF の計算グリッドを示す。なお、同図には、後節に記す降雨流出計算の概要の説明にあたり、設定した 140 個のサブ流域ならびに河川網（青線）を付記している。



**図 5-17** 利根川上流域の流域図，d4PDF (20km) の計算グリッドとその中心点，140 個のサブ流域および河川網

※同図中において、利根川上流域は水色の範囲，河川網は青線で示されている。

### 5-4-1 評価手法

利根川八斗島地点上流域に対応する過去実験および将来実験(2°C上昇・4°C上昇)と過去60年間分(1943年～2002年)の年最大流域平均3日雨量の観測実績の時系列降雨データについて比較を行う。過去実験および将来実験データは、**図 5-17**に示す利根川八斗島地点上流域に対応する17グリッドの時系列降雨量データをd4PDFから抽出した。対象とする降雨イベントは、各アンサンブル・各年の時系列降雨データより、流域平均3日降雨量が最大となる降水イベント(過去実験：3000イベント，2°C上昇実験：3240イベント，4°C上昇実験：5400イベント)とした。抽出した過去実験における年最大流域平均3日降雨量と、観測実績の年最大流域平均3日降雨量を比較するにあたり、d4PDFの気候データはモデルの系統誤差を含んでいる可能性があるため、ピアニの手法(C. Piani et. al, 2010)によるバイアス補正を行った。本手法は、計算値 $y$ (本研究では過去実験の年最大流域平均3日降雨量)と実績値 $x$ (本研究では観測年最大流域平均3日降雨量)の関係を最小二乗法により近似曲線( $y=ax$ )で表し、実績値に対する計算値の増減傾向 $a$ を誤差として補正する方法である。なお、ここでは補正係数 $a$ として1.24が得られた。

### 5-4-2 d4PDFによる過去実験の再現性の検証

流域平均3日降雨量が年最大となる、過去実験3000イベントに対してピアニの手法によるバイアス補正を行った。**図 5-18**に過去実験のバイアス補正前後および観測実績の頻度分布の比較、**表 5-1**に各種統計量の比較を示す。これらの図表より、計画規模に相当する99%ile値の倍率から、過去実験は、バイアス補正を行うことで、観測実績との整合性が高くなるため、より信頼性の高い補正值が得られる。本研究では、バイアス補正後の降雨量を降雨流出解析に使用した。なお、気候モデルの系統誤差に関して、将来気候と過去気候で同様な傾向をとることを前提とし、将来実験に対しても一律1.24の補正係数を採用した。



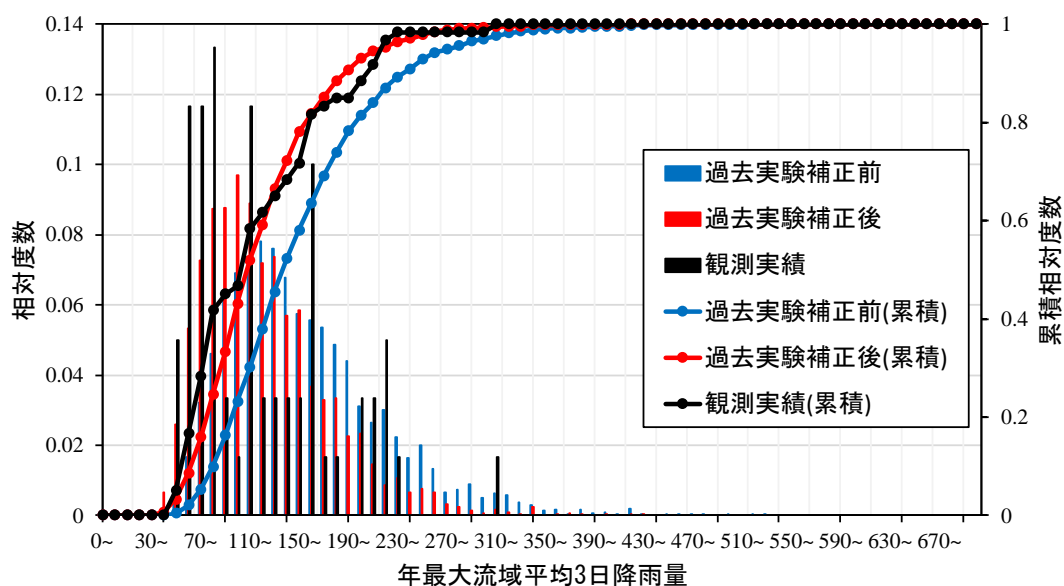


図 5-18 利根川上流域における年最大流域平均 3 日降雨量の観測値およびバイアス補正前後の過去実験値の相対頻度と累積相対頻度

	観測実績	過去実験	過去実験	倍率	倍率
		補正前	補正後	(補正前/実績)	(補正後/実績)
平均値 [mm]	124.3	159.4	128.1	1.28	1.03
最大値 [mm]	317.6	535.2	430.1	1.69	1.35
95%ile値 [mm]	221.3	283.0	227.4	1.28	1.03
99%ile値 [mm]	317.6	360.3	289.5	1.13	0.91

表 5-1 利根川上流域における年最大流域平均 3 日降雨量の観測値およびバイアス補正前後の過去実験値の各種統計量

### 5-4-3 d4PDF における過去実験と将来実験の比較

図 5-19 に年最大流域平均 3 日降雨量の将来実験(2°C上昇・4°C上昇)および過去実験の比較を示す。2°C上昇・4°C上昇ともに、将来実験における頻度分布の裾部分が右に歪んでおり、低頻度かつ大規模な降雨が地球温暖化進行時で増加することが確認できる。また、計画規模に相当する 99%ile 値は 2°C上昇時に対し、4°C上昇時はおよそ 10%増加していることが分かる。過去実験、将来実験と観測実績の年最大流域平均 3 日降雨量の比較結果から、d4PDF の実験データには、観測データだけではサンプル数が少なく調べることのできない低頻度、高強度のイベントが現れることが示された。

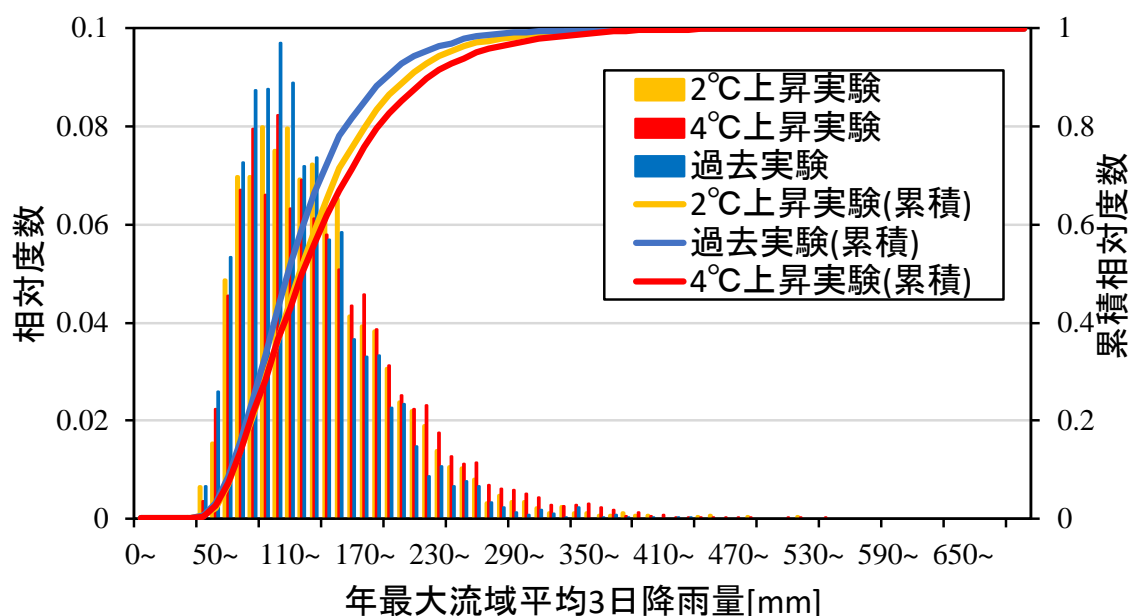


図 5-19 利根川上流域における年最大流域平均 3 日降雨量の過去実験，2℃上昇実験および 4℃上昇実験の頻度分布と累積相対度数

	過去実験	2℃上昇 実験	4℃上昇 実験	倍率 (2℃上昇/過去実験)	倍率 (4℃上昇/過去実験)
平均値[mm]	128.1	138.2	144.07	1.08	1.12
最大値[mm]	430.08	523.9	547.08	1.22	1.27
95%ile値[mm]	227.38	245.5	268.97	1.08	1.18
99%ile値[mm]	289.25	332.0	358.89	1.15	1.24

表 5-2 利根川上流域における年最大流域平均 3 日降雨量の過去実験値および 2℃上昇実験値と 4℃上昇実験値の各種統計量

## 5-5 d4PDF における大規模豪雨事例を入力降雨とした流出解析

### 5-5-1 対象降雨イベント

4℃上昇実験における 60 年間分に亘る降雨データをもつ 90 アンサンブル標本から、年最大流域平均日雨量値および年最大流域平均 3 日降雨量値の上位 10 イベントを抽出し、これらの豪雨イベント群における降雨強度時系列を対象降雨とした。この対象降雨を入力降雨として、流出計算を実施した。

### 5-5-2 降雨流出計算手法

流出計算では、吉見・山田（2014）により提案された「鉛直浸透機構を考慮した降

雨流出モデル」を用いた。なお、当該モデルの概要は、第3章において示している。一方、本章では、当該モデルをサブ流域ごとに与え、それらが基準地点（八斗島地点）に集水されるという、分布型流出モデルを使用している。このため、本章では、分布型モデルへの適用という観点から当該モデルの詳細を概説していく。山田（2003）は流域の最小スケールを単一斜面と見做し、斜面流下方向流れを **Kinematic Wave** として扱い、単一斜面における一般化した降雨流出の基礎式を導出した。さらに、吉見・山田（2014）は複数の層により山腹斜面が構成されているとして、浸透量および雨量の連続関係に着目し、 $n$  層目における鉛直浸透現象を定式化した。その概要を次に示す。 $n-1$  層から  $n$  層目への浸透量  $V_{n-1}$  ( $=b_{n-1}s_{n-1}$ )、 $n$  層目から  $n+1$  層目への浸透量  $V_n$  ( $=b_n s_n$ ) と各層における流出に寄与する雨量（流出に寄与する降雨量）の連続関係から式(5-1)を得る。

$$\frac{dS_n}{dt} = V_{n-1} - r_{nm} - V_n \quad (5-1)$$

$$\begin{cases} r_{nm} = 0 & (s_n < h_{nm}) \\ r_{nm} = a_{nm}(s_n - h_{nm}) & (s_n > h_{nm}) \end{cases} \quad (5-2)$$

層の流出に寄与する降雨量は式(5-2)より土層内水位  $s_n$  が各層の保水力  $h_{nm}$  を超えた時点で発生する。また、鉛直方向への浸透量  $V_n$  と土層内水位  $s_n$  には比例関係が成立する。加えて、鉛直浸透機構における各層の側方成分は、流出に寄与する降雨量として式(5-3)の入力降雨として与える。すなわち、式(5-2)における  $r_{nm}$  を式(5-3)に示す基礎式に斜面流出に寄与する降雨として与えることで一連の斜面計算を行う。

$$\frac{dq_{nm}}{dt} = \alpha_{nm} q_{nm}^{\beta_{nm}} (r_{nm} - q_{nm}) \quad (5-3)$$

吉見・山田により提案された鉛直浸透機構は、降雨が流出に寄与するまでの遅れ時間や損失雨量を表現することができる。ここに、 $n$ ：層数、 $m$ ：各層における側方成分の番号、 $q_{nm}$ ：流出高[mm/h]（表層から数えて  $n$  層目の上から  $m$  番目の流出成分）、 $s_n$ ：各層の土壌内水位[mm]、 $a_{nm}$ 、 $b_n$ ：各側方成分、浸透成分の比例定数[1/h]、 $h_{nm}$ ：流出成分発生の閾値[mm]、 $r_{nm}$ ：有効降雨量[mm/h]、 $V_n$ ：鉛直浸透量[mm/h]である。流出計算において採用した鉛直浸透機構を考慮した流出モデルの構造は2段3層構造とした。このモデルの概念図を図5-20に示す。なお、流出計算に当たっては、対象流域を140個のサブ流域に分割した。また、降雨流出解析で使用するパラメータは、草木ダム流域(流域面積 254km<sup>2</sup>)において、既往の19個の洪水イベント別に同定したパラメータの平均値を全てのサブ流域に一様に与えた。

5-5-3 河道計算手法

河道計算は一次元不定流計算で行い，斜面計算によって算出された各サブ流域の流量を上流端境界条件として与える．下流端は利根川河口および江戸川河口であり，いずれの計算も天文潮位を与えて計算している．

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q \tag{5-4}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial \left( \alpha \frac{Q^2}{A} \right)}{\partial x} + gA \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{n^2 g Q |Q|}{AR^{4/3}} = 0 \tag{5-5}$$

ここに， $A$ :通水断面積[m<sup>2</sup>]， $Q$ :流量[m<sup>3</sup>/s]， $q$ :側方流入単位幅流量[m<sup>2</sup>/s]， $\alpha(=1.0)$ :エネルギー補正係数， $g$ :重力加速度[m/s<sup>2</sup>]， $n$ :Manningの粗度係数， $R$ :径深[m]である．  
 なお，本解析における河道計算では，堤防からの越水や溢水及び決壊は発生しないと仮定しており，かつ，洪水調節施設は考慮していない．

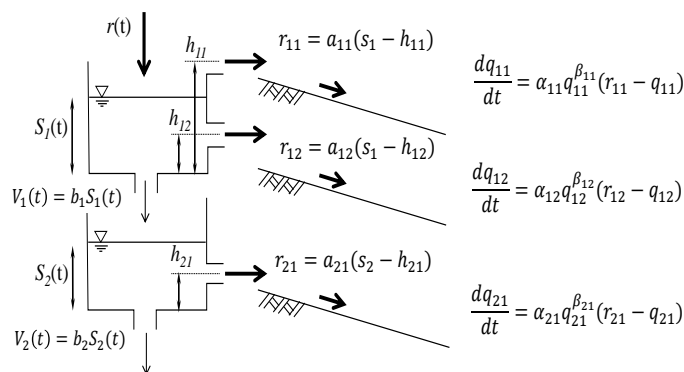


図 5-20 鉛直浸透機構を考慮した降雨流出モデルの概念図

5-5-4 全球平均気温上昇シナリオ別の河道計算結果

2°C上昇実験・4°C上昇実験における，八斗島地点におけるピーク流量と流域平均3日降雨量の関係を図5-21に示す．同図より2°C上昇実験・4°C上昇実験ともに，ピーク流量が既定計画の基本高水(国土交通省河川局, 2005)のピーク流量である22000[m<sup>3</sup>/s]を超過するイベントがあり，これを超える流量が起こり得る可能性が示された．本研究では，年最大流域平均3日降雨量が全サンプル内で最大であった降雨イベントが，必ずしも最大のピーク流量をもたらすわけではないことから，降雨の時空間分布に着

目し、洪水対策上危険な流出現象をもたらす降雨パターンを検討する。

図5-22と図5-23はそれぞれ、2°C上昇実験・4°C上昇実験におけるピーク流量が最大であった降雨イベントに対する流出解析結果である。同図群におけるハイドログラフは、上述した各降雨時系列を入力として鉛直浸透構造の降雨流出モデルに与え、出力された流量[m<sup>3</sup>/s]を用いて河道計算を行い算出された流量である。この時のピーク流量は2°C上昇実験で21738.7[m<sup>3</sup>/s]、4°C上昇実験で29650.6[m<sup>3</sup>/s]であった。一方、最大のピーク流量をもたらした降雨の流域平均3日降雨量は、2°C上昇実験の場合、上位第9位である489.1[mm]、4°C上昇実験の場合、上位第2位である643.4[mm]であった。また、上位のピーク流量をもたらす降雨パターンの多くは、比較的短い降雨継続時間で強い降雨強度が発生する、台風性降雨であった。

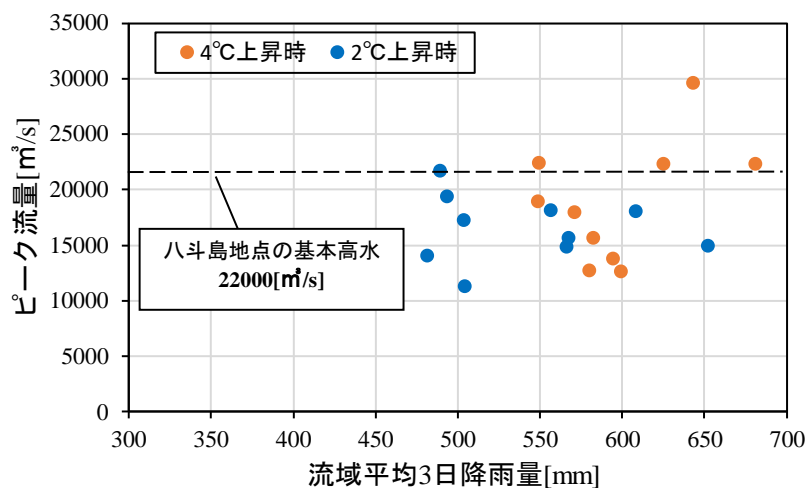


図5-21 d4PDF 2°C上昇実験と4°C上昇実験における上位1位から10位までの年最大流域平均3日降雨量とそれらに伴うピーク流量の計算値の関係

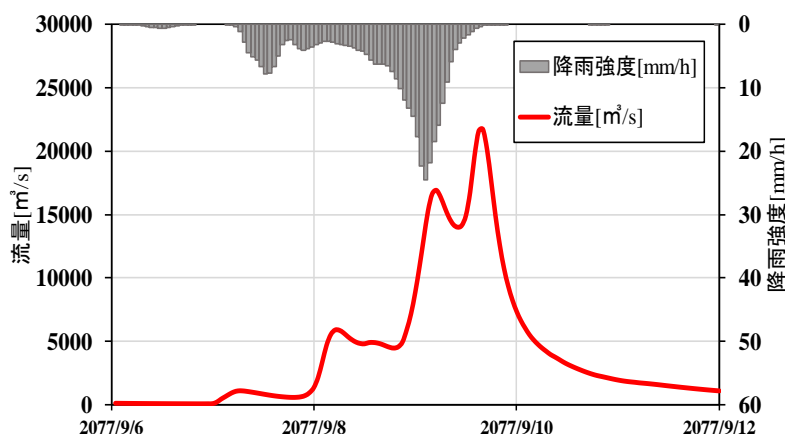


図5-22 d4PDF 2°C上昇実験における計算ピーク流量第1位のハイドログラフ

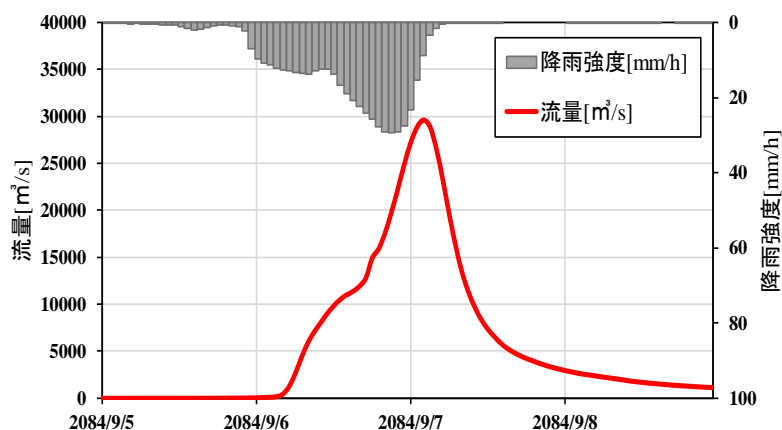


図 5-23 d4PDF 4°C上昇実験における計算ピーク流量第 1 位のハイドログラフ

#### 5-5-5 総降雨量値とピーク流量値の関係

4°C上昇実験における年最大流域平均日雨量および年最大流域平均 3 日降雨量上位 10 イベントの降雨流出解析から、八斗島地点におけるピーク流量と流域日平均雨量及び流域平均 3 日降雨量の関係が得られる。この関係を図 5-23、図 5-24 に示す。同図群より、流域平均日降雨量上位 10 イベントのピーク流量は、流域平均 3 日降雨量上位 10 イベントのピーク流量に対して大幅に上回っており、対象流域において、24 時間で大規模な豪雨をもたらす降雨形態が流量を増加させ、洪水リスクの増大に寄与する可能性が示唆された。また、降雨量とピーク流量の関係について、流域平均日降雨量とピーク流量の関係は、流域平均 3 日降雨量とピーク流量の関係に対してばらつきが小さいことが示された。

さらに、流域平均日降雨量とピーク流量の大小関係について、両者のランクが対応しなかったことから、降雨継続時間に着目し、各降雨イベントの降雨継続時間とピーク流量の関連性について分析を行った。得られた関係を図 5-24、図 5-25 に示す。図 5-26 は、年最大流域平均日降雨量上位 10 イベントの、降雨強度別に見た降雨継続時間を示す。さらに図 5-27 は、流域平均日降雨量上位 10 イベントに対応するピーク流量である。なお、両図群の横軸の番号は、年最大流域平均日降雨量をランク化した数字である（例えば、「No.1」は d4PDF 4°C 上昇実験において最大の年最大流域平均日降雨量値をもたらしたイベントに対応している）。同図群より、ピーク流量が 30000[m³/s]を超過するイベント(年最大流域平均日降雨量上位 No.1, No.7, No.10 にあたるイベント)をもたらす降雨は、30[mm/h]以上の激しい雨が数時間にわたって継続する降雨

形態であることが明らかとなった。

ピーク流量第1位をもたらした、年最大流域平均日降雨量第1位の降雨イベントにおける降雨強度分布及び海面更正気圧分布を図5-5と図5-8に示す。これらの降雨強度分布には、地上風速ベクトルを付記している(参照ベクトルの風速は20m/sとしている)。地上風速ベクトルの成分は、東西風速 $u$ (西風を正とする)と南北風速 $v$ (南風を正とする)である。また、海面更正気圧分布には、地表面水蒸気フラックスベクトルを付記している。上述した通り、本研究では、地表面水蒸気フラックスは、地表面比湿 $q$ と地表面風( $u=(u,v)$ )の積( $q \times u$ )により表している。これらの図中における参照水蒸気フラックスベクトルの大きさは、 $0.5(\text{kg/kg}) \cdot \text{m/s}$ としている。図5-5と図5-8に示す気象場では、太平洋沖から、台風が関東地方に接近・上陸しており、また、日本列島に張り出した強い太平洋高気圧の縁辺部に沿って、台風が供給する大量の水蒸気が関東地方に流入し続けることで関東地方に大規模豪雨が発生し、このような降雨パターンが利根川上流域における大規模な洪水流量をもたらす可能性が示唆された。

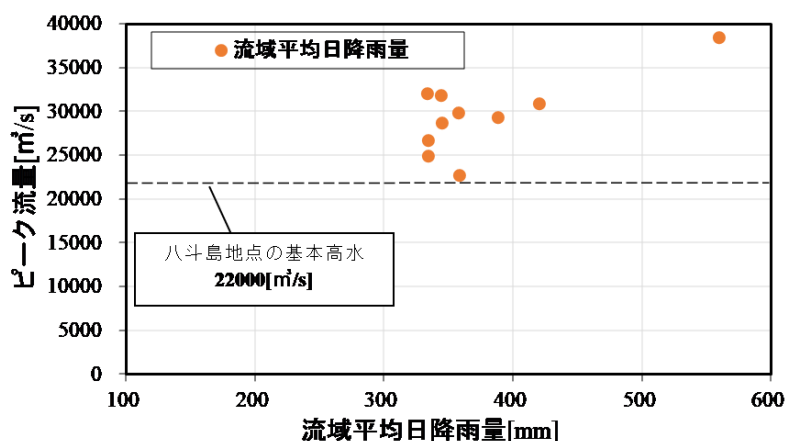


図5-24 d4PDF 4°C上昇実験における年最大流域平均日降雨量値の上位1位から上位10位とこれらの雨量値をもたらした豪雨イベントに伴う計算ピーク流量値の関係

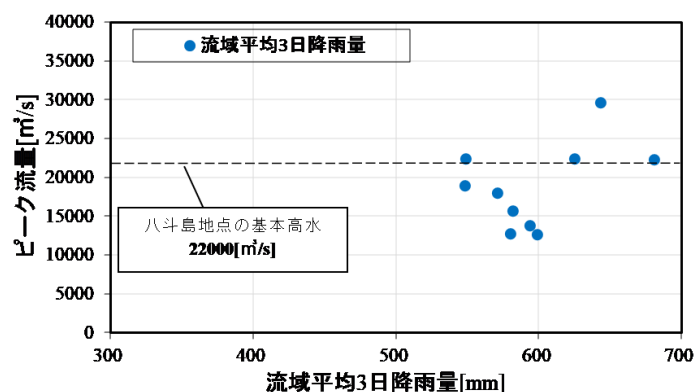


図5-25 d4PDF 4°C上昇実験における年最大流域平均3日降雨量値の上位1位から上位10位とこれらの雨量値をもたらした豪雨イベントに伴う計算ピーク流量値の関係

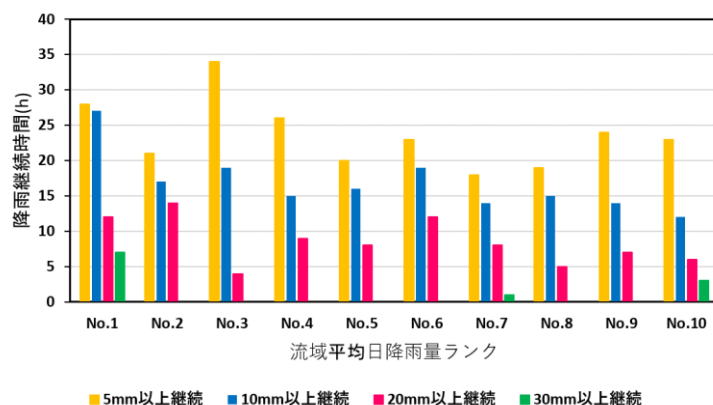


図 5-26 d4PDF 4°C 上昇実験での年最大流域平均日降雨量上位 10 イベントにおける降雨強度別の降雨継続時間

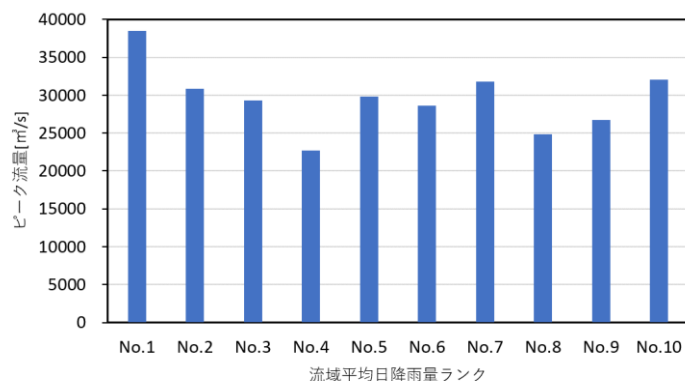


図 5-27 d4PDF 4°C 上昇実験での年最大流域平均日降雨量上位 10 イベントに伴う計算ピーク流量

### 5-6 予測区間による令和元年台風第 19 号の確率評価

令和元年台風第 19 号による豪雨は、千曲川や阿武隈川を決壊させ、多くの河川流域における計画降雨量を超過する豪雨をもたらした。本節では、確率限界法検定に基づく予測区間による令和元年台風第 19 号の確率評価について述べる。図 5-28 上段の図は、d4PDF 4°C 上昇実験において、関東地方に最大の雨量をもたらす台風の経路を示している。同図より、4°C 上昇シナリオにおいて最大の豪雨をもたらす台風経路と、今回の台風第 19 号の経路（図 5-28 下段）が酷似していることが分かる。これは、既に 4°C 上昇のシナリオで想定される最大クラスの台風に類似した台風が発生するようになった可能性を示唆するものである。図 5-29 には、利根川上流域における 60 年間分の年最大流域平均 3 日雨量、これらの観測値をもたらすとして仮定した極値分布、現在気候での 95% 予測区間、将来気候（2°C および 4°C 上昇実験）での年最大流域平均 3 日雨量の極値分布、95% 予測区間が示されている。令和元年台風第 19 号の C バ



第5章 全球平均気温上昇シナリオ別の極値水文量の将来予測

ンドレーダによる観測値（流域平均72時間雨量294.27mm）は、200年確率降雨量において、過去気候と各気温上昇結果が表す将来気候における予測区間が重複する範囲にある。過去気候では、台風第19号の観測値は、200年確率雨量の期待値近傍の値となる一方、将来気候（2℃および4℃上昇実験）では、台風第19号の観測値を超過する雨量の生起確率が増加する。

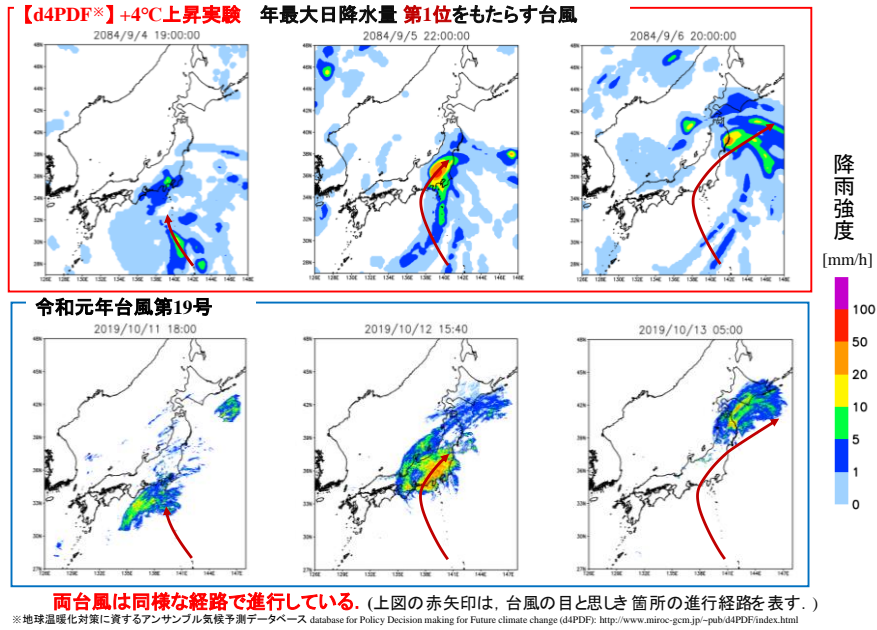


図5-28 令和元年台風第19号とd4PDF 4℃上昇気候における最大の24時間雨量をもたらず台風の経路比較

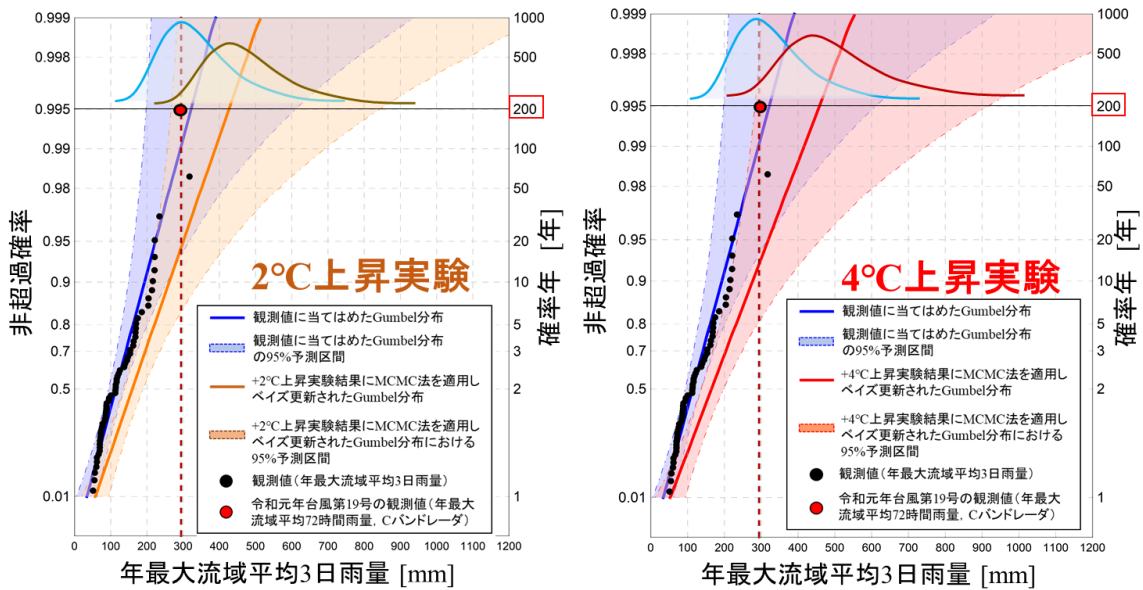


図5-29 予測区間による令和元年台風第19号の確率評価

### 5-7 第5章のまとめ

本章では、アンサンブル気候予測データベース d4PDF がもつ気候変動予測情報をマルコフ連鎖モンテカルロ法により取り込み、温暖化シナリオ別の信頼区間・予測区間を構成する手法を示した。また、この手法を利根川上流域に適用し、気温上昇実験ごとに、信頼区間・予測区間の将来変化を求めた。さらに、将来気候下における最大クラスの降雨パターンを分析し、利根川上流域における洪水対策上、考慮すべき降雨パターンや気象場を明らかとした。さらに、d4PDF (20km) のデータベース内の最大クラスの降雨イベントに対し、極値降雨量の予測区間を考慮することで、これらの最大クラスの降雨量を計画確率降雨量の分布の実現値として評価できることを示した。

本研究では、利根川上流域を対象に、温暖化進行時における降雨の将来変化が極値河川流量に及ぼす影響を推定するとともに、これらの極値河川流量をもたらす大規模豪雨の分析を行った。具体的には、利根川上流域において、観測年最大流域平均3日降雨量ならびに、d4PDF (20km) の過去実験から抽出した、年最大流域平均3日降雨量の頻度分布を算定し、両ヒストグラムの形状を比較した。その結果、分布の裾野での高い適合度が確認され、過去生起した既往最大級の豪雨は、d4PDF における気候シミュレーションによって十分高い精度で再現可能であることが確認された。このため、当該流域における d4PDF の適用性は高いと判定し、降雨流出解析による将来気候での洪水リスク評価に向けて、より実態に近い降雨データベースを作成するために、d4PDF 過去実験ならびに将来実験の雨量データへのピアニの手法によるバイアス補正を実施した。その後、補正した d4PDF の将来実験における大規模降雨を入力降雨とした流出解析を実施し、将来気候下において、現在定められている基本高水を超える、流量の規模を算定した。具体的には、4°C 上昇実験における最大のピーク流量値は 29650.6[m<sup>3</sup>/s]と算定された。さらに、この値は、現行の基本高水である 22000[m<sup>3</sup>/s]を大幅に超過するものである。加えて、このような大規模な洪水流量値をもたらす気候場は、太平洋高気圧が日本側に張り出した気圧場において、台風が太平洋沖から関東地方に接近・上陸し、太平洋沖に移動していく、という形態であることを示した。

### 参考文献

- ・伊庭幸人, 種村正美: 計算統計II マルコフ連鎖モンテカルロ法とその周辺 (統計科学のフロンティア 12), 岩波書店, pp.10,37,49, 2005.
- ・清水 啓太, 山田 正, 山田 朋人: 信頼区間・予測区間を導入した水文頻度解析における不確実性評価, 河川技術論文集, Vol.25, pp.13-18, 2019.

## 第5章 全球平均気温上昇シナリオ別の極値水文量の将来予測

- ・国土交通省 国土技術政策総合研究所 気候変動適応研究本部：気候変動適応策に関する研究（中間報告），国総研資料 749号，II-112-154，2013.
- ・国土交通省：河川整備基本方針，利根川水系，基本高水等に関する資料  
[https://www.mlit.go.jp/river/basic\\_info/jigyo\\_keikaku/gaiyou/seibi/pdf/tone-2.pdf](https://www.mlit.go.jp/river/basic_info/jigyo_keikaku/gaiyou/seibi/pdf/tone-2.pdf)
- ・北海道地方における気候変動予測（水分野）技術検討委員会  
([https://www.hkd.mlit.go.jp/ky/kn/kawa\\_kei/splaat000000vdyw.html](https://www.hkd.mlit.go.jp/ky/kn/kawa_kei/splaat000000vdyw.html))
- ・森口繁一：確率表現関数の検定について—Kolmogorov-Smirnov 検定を考え直す—，pp.233-244，日本統計学会，第25巻，1995.
- ・森口繁一：確率表現関数，東京大学出版，1995.
- ・諸岡良優，山田正：鉛直浸透機構を考慮した降雨流出モデルのロバスト性についての基礎的検討，pp.83-84，第25回地球環境シンポジウム講演集，2017.
- ・文部科学省 気象庁 環境省：気候変動の観測・予測及び影響評価統合レポート「日本の気候変動とその影響」，2013.
- ・山田朋人，星野剛ら：北海道における気候変動に伴う洪水外力の変化，河川技術論文集，第24巻，pp.391-396，2018.
- ・山田正：山地流出の非線形性に関する研究，土木学会水工学論文集，Vol.47，pp.259-264，2003.
- ・吉見和紘，山田正：鉛直浸透機構を考慮した流出計算手法の長短期流出解析への適用，土木学会論文集 B1(水工学) Vol.70 No.4，I\_367-I\_372，2014.
- ・Ryo Mizuta, Akihiko Murata, and Masayoshi Ishii : Over 5,000 Years of Ensemble Future Climate Simulations by 60-km Global and 20-km Regional Atmospheric Models, Bull.Am. Meteorol. Soc., pp.1383-1393, 2016.
- ・C. Piani, J. O. Haerter, E. Coppola : Statistical bias correction for daily precipitation in regional climate models over Europe, Theoretical and Applied Climatology, Volume 99, Issue 1-2, pp 187-192, 2010.
- ・Milly, P.C.D., et.al. : Stationarity Is Dead: Whither Water Management ?, Science, 319, 573-574, 2008.
- ・Shimizu, K.; Yamada, T.; Yamada, T.J. Uncertainty Evaluation in Hydrological Frequency Analysis Based on Confidence Interval and Prediction Interval Water 2020, 12, 2554.

## 第 6 章 観測情報と気候変動予測を統合した極値降雨量に関する信頼区間・予測区間の将来変化の推定

### 6-1 はじめに

第 4 章および第 5 章では、ベイズ理論と気候変動予測結果を用いて、温暖化シナリオ別の計画規模相当降雨の信頼区間・予測区間の推定手法を示した。しかしながら、この手法は、シナリオ別の確率降雨量の推定は可能である一方、将来のある時点における確率降雨量値の算出はできない。具体的には、このことは、地球温暖化に対応した洪水対策を気候変動のモデリング等合わせて、段階的に整備していく際に、何年先には計画降雨量の不確実性はどの程度になるか、定量的に示すことができないということである。さらには、シナリオ別に算定された信頼区間・予測区間は、これまでに蓄積されてきた観測値がもつ情報量を用いて、計画確率規模相当の確率降雨量値を推定する際、時間経過に伴い、当該値に対する推定精度が劣化していくことが反映されていない。例えば、60 年間分の観測値を用いて、30 年先の 200 年確率降雨量を推定する場合と、100 年先の 200 年確率降雨量を推定する場合は、後者の場合の方が、より将来の予測を実施しているため、確率降雨量の推定精度が劣化していると考えられることは極めて自然である。前章において示したように、温暖化シナリオ別に確率降雨量の将来変化率を推定することは、目標とする洪水対策が温暖化シナリオベースで策定される際は重要な情報となると言える。一方で、想定される温暖化シナリオのもとで、段階的に洪水対策を整備することに重きが置かれるとき、確率降雨量の逐次的な時間変化（より詳細な将来変化）が整備方針を検討する際の有益な指標となる。

観測情報の劣化過程を統計的に算出した既往研究としては、北野ら (2012) がある。北野ら (2012) は、経験度 (北野ら, 2008) の理論を用いて、統計的情報量の観点から、降雨データへの非定常性の仮定の下で、任意時点での確率降雨量の推定における

## 第 6 章 観測情報と気候変動予測を統合した極値降雨量に関する信頼区間・予測区間の将来変化の推定

観測情報の耐久性を求め、確率降雨量の推定不確実性が時間経過に伴い増大していく過程を定量化した。一方で、本研究では、使用する観測データは全て定常過程の下で生じたものとして扱い、観測期間の外部（将来期間）では降雨データに非定常性を仮定しており、この仮定の下で、観測資料のもつ統計的情報量が時間経過に伴い、減衰することを踏まえた、確率降雨量とその信頼区間・予測区間の推定手法を提案する。本章では、利根川上流域における 1943 年から 2002 年に亘る 60 年間分の年最大降雨量の標本および、その当該流域に相当する d4PDF(20km)の実験結果を用いて、計画規模降雨量の将来変化を 1 年ごとに算定し、本手法の詳細ならびに、有用性を示す。

### 6-2 d4PDF 過去実験に基づく母数の事前分布の算定

前章では、MCMC 法を用いて、将来気候での年最大降雨量の確率分布をベイズ予測分布により求めてきた。具体的には、1 回のベイズ更新で、対象とする温暖化シナリオの下で生じうる全ての年最大降雨量の標本を尤度関数に与え、ベイズ予測分布が推定されてきた。一方で、この章に記す研究では、逐次的な（将来 1 年間ごとの）ベイズ更新を行う。そのため、過去実験は 50 アンサンブル、2°C 上昇実験は 54 アンサンブル、4°C 上昇実験は 90 アンサンブルを有しているため、将来期間における単位時間ステップ（1 年間）では、過去実験は 50 個の年最大降雨量、2°C 上昇実験は 54 個の年最大降雨量、4°C 上昇実験は 90 個の年最大降雨量が利用できる。これらのデータを尤度関数に時間ステップごとに与えていき、母数の事後分布のベイズ更新を行う。図 6-1 は、上記したベイズ更新を示したものである。なお、本研究では、将来の年最大降雨量の従う確率分布を Gumbel 分布と仮定しているため、将来 1 年間ごとの実験値群を用いて、逐次的な Gumbel 分布の更新を行う。

MCMC 法を行うためには、母数の事前分布を設定する必要がある。ベイズ更新を行う、Gumbel 分布の母数は、位置母数  $\mu$  と尺度母数  $\sigma$  であるから、両母数の事前分布を仮定する。その際、d4PDF の過去実験は、気象シミュレーションという物理的観点から、母数の事前分布を検討する際に利用できる。利用可能な極値水文資料は、観測実績のただ一つであるが、過去実験値は過去観測される可能性のあった極値降雨データと仮定すると、母数の従う分布に対する情報が增加する。d4PDF 過去実験には、1951 年から 2010 年に亘る 60 年間分の計算値が 50 アンサンブルメンバーそれぞれに含まれている。これら 50 個のアンサンブルメンバーそれぞれに対して、最尤法により Gumbel 分布の母数を推定する。これにより、使用した実測降雨データの観測期間に相当する年最大降雨量の計算値に対して、当てはめた Gumbel 分布の母数が 50 個得

## 第 6 章 観測情報と気候変動予測を統合した極値降雨量に関する信頼区間・予測区間の将来変化の推定

られる。図 6-2 と図 6-3 はそれぞれ、過去実験から抽出した年最大流域平均 3 日雨量に当てはめた Gumbel 分布の位置母数の頻度分布および、尺度母数の頻度分布を示している。さらに、両頻度分布の裾野の形状は左右対称型と見られるため、これらの頻度分布に対して、正規分布の当てはめを行った。これらの正規分布は両図中に青曲線として記載している。Gumbel 分布の母数の事前分布は、位置母数と尺度母数を確率変数とする 2 変量確率分布である。ここで、本研究では、位置母数と尺度母数が互いに独立の関係にあると仮定する。この仮定により、位置母数の推定値群に当てはめた正規分布と尺度母数の推定値群に当てはめた正規分布の積は、これら 2 母数の確率分布を表す 2 変量正規分布となる。したがって、逐次的ベイズ更新における、初期時点(2002 年時点)の事前分布の確率密度関数  $f_{prior}(\mu, \sigma)$  (式(6-1)) は、位置母数の確率密度関数と尺度母数の確率密度関数の積で表すことができる。

$$f_{prior}(\mu, \sigma) = f_{\mu}(\mu) \cdot f_{\sigma}(\sigma) \quad (6-1)$$

ここで、推定した事前分布の確率密度関数  $f_{prior}(\mu, \sigma)$  を図 6-4 に示す。

本研究では、使用データの観測期間(1943 年から 2002 年まで)の外部を将来期間(2003 年以降)としている。将来期間における温暖化シナリオは、d4PDF の計算期間を考慮し、以下のものを設定した。

使用データの観測期間：1943 年～2002 年

設定した温暖化の進行段階

- ・将来期間①：2003 年～2010 年（過去実験）
- ・将来期間②：2011 年～2050 年（2°C 上昇実験）
- ・将来期間③：2051 年～2110 年（4°C 上昇実験）

設定した温暖化シナリオにおける d4PDF の実験値を図 6-5 に示す。

逐次的なベイズ更新では、単位時間ステップ（1 年間）ごとに、 $i$  年の年最大降雨量の分布から  $(i+1)$  年目の年最大降雨量の分布に、 $(i+1)$  年目に存在する d4PDF 実験値を用いて、更新される。この更新過程を図示したものを図 6-6 に示す。なお、2003 年以降は、事前分布の関数形を 2 変量平滑化カーネル分布とする。これは、MCMC 法により、事後分布の母数の候補値を大量に得ることができるため、特定のパラメトリック分布ではなく、ノンパラメトリック分布であるカーネル平滑化分布を採用した。として、1 変量のカーネル分布の確率密度関数を式(6-2) に示す。

## 第 6 章 観測情報と気候変動予測を統合した極値降雨量に関する信頼区間・予測区間の将来変化の推定

$$\hat{f}_h(\theta) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{\theta - \theta_i}{h}\right) \quad (6-2)$$

ここに、 $\theta_i$  : MCMC 法により生成した  $i$  番目の母数値、 $h$  : バンド幅 (平滑化パラメータ)、 $K$  : カーネル関数 (本研究では、Gauss 関数)、 $n$  :  $\theta_i$  の総数である。したがって、事前分布  $f_{prior}(\mu, \sigma)$  は、2 変数カーネル平滑化分布であり、この分布は 2 母数が独立の関係にあると仮定することで式(6-3)により表される。

$$f_{prior}(\mu, \sigma) = f_h(\mu) \cdot f_h(\sigma) \quad (6-3)$$

### 6-3 気候変動予測情報に基づく逐次的ベイズ更新の適用

過去実験は 50 アンサンブル、2°C 上昇実験は 54 アンサンブル、4°C 上昇実験は 90 アンサンブルを有しているため、将来期間における単位時間ステップ (1 年間) では、過去実験は 50 個の年最大流域平均 3 日雨量、2°C 上昇実験は 54 個の年最大流域平均 3 日雨量、4°C 上昇実験は 90 個の年最大流域平均 3 日雨量が利用できる。上述した様に、これらのデータを尤度関数に単位時間ステップごとに与えていき、母数の事後分布のベイズ更新を行う。メトロポリス法により、母数の実現値のサンプルが複数得られる。単位時間ステップごとに、将来の年最大流域平均 3 日雨量の母集団分布として仮定した確率分布 (本研究では Gumbel 分布) の累積確率を母数の実現値のサンプル別に求めると、それらの単純算術平均値がベイズ予測分布となる。本研究は、ベイズ予測分布のクオンタイル値を確率降雨量の予測値として扱い、上記の逐次的ベイズ更新により、将来期間において、1 年間ごとに確率降雨量の予測値が更新されていく。具体的なベイズ更新の過程を次に示す。先ず、過去実験では、50 個のアンサンブルメンバーはそれぞれ 60 年間分の計算値を持つため、2003 年から 2010 年の将来期間では、50 個の年最大流域平均 3 日雨量を 1 回の計算ステップ ( $i$  年目から  $(i+1)$  年目における事後分布の更新ステップ) で用いて事後分布の更新を行う。さらに、2°C 上昇実験および 4°C 上昇実験では、それぞれ 54 個のアンサンブルメンバーおよび 90 個のアンサンブルメンバーを持つ。このため、2011 年から 2050 年の将来期間では、2°C 上昇実験が持つ 54 個の年最大流域平均 3 日雨量を 1 回の計算ステップで用いて事後分布の更新を行う。また、2051 年から 2110 年の将来期間では、4°C 上昇実験が持つ 90 個の年最大流域平均 3 日雨量を 1 回の計算ステップで用いて事後分布の更新を行う。上記の手順において、計算ステップごとに、ベイズ予測分布が得られる。図 6-7 に 200 年確率年最大流域平均 3 日雨量の予測結果を示す。同図より、2°C 上昇実験の結果を用いて予測された 200 年確率流域平均 3 日雨量値と、4°C 上昇実験の結果を用いて予測さ

第 6 章 観測情報と気候変動予測を統合した極値降雨量に関する信頼区間・予測区間の将来変化の推定

れた当該値を比較すると、4℃上昇実験の期間における予測雨量は、2℃上昇実験の場合よりも大きい傾向があることが分かる。また、2003年時点の予測雨量値が391.9mmであるのに対し、2110年時点の予測雨量値は435.9mmとなる。このように、本手法により、気候変動予測が示す温暖化の進行度合いに合わせて、逐次的に、計画規模相当降雨量を推定できるようになった。

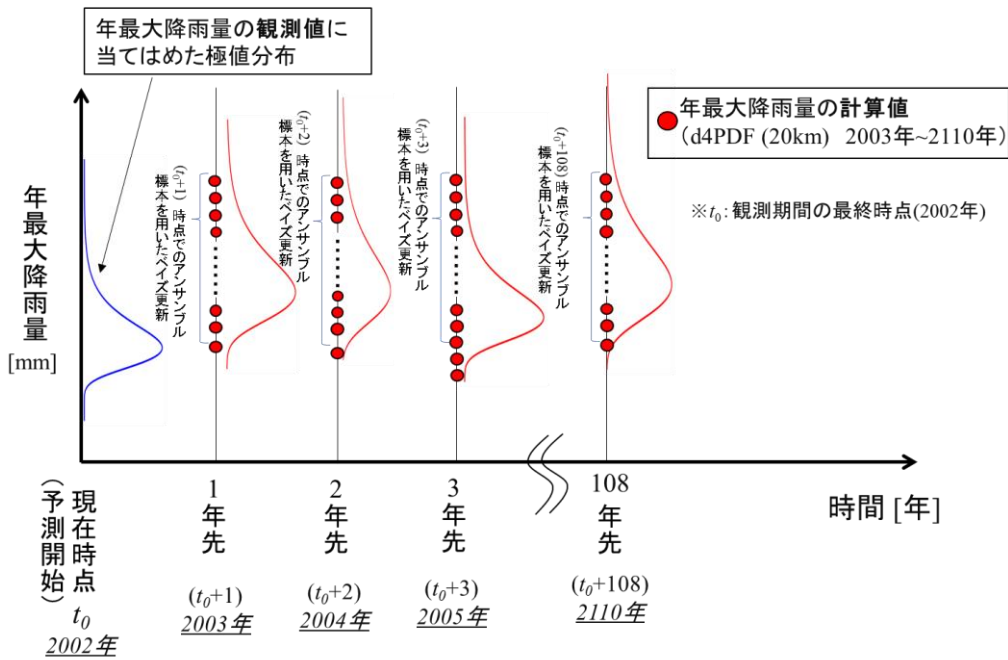


図 6-1 将来 1 年間ごとのベイズ更新の概念図

使用した観測値のうち、最後のものが得られた年と  $t_0$  表記している。(本研究では  $t_0$  は 2002[年]) アンサンブル気候予測データの活用により、1 年間に複数の年最大降雨量の計算値が利用できるようになる。これらの計算値のイメージは、同図に赤色のプロットで記載されている。単位時間ステップ (1 年間) ごとに、 $i$  年の年最大降雨量の分布から  $(i+1)$  年目の年最大降雨量の分布が、 $(i+1)$  年目に存在する d4PDF 実験値を用いて、更新される様子が同図に示されている ( $i=2002, 2003, \dots, 2109$  [年])。

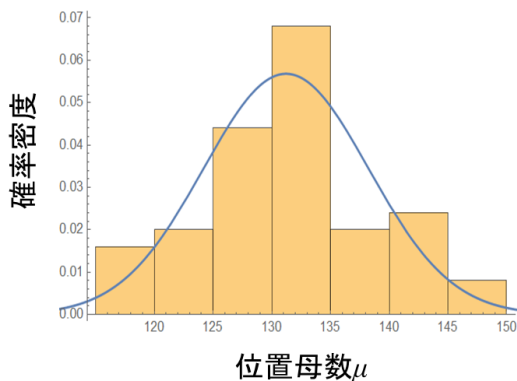


図 6-2 位置母数  $\mu$  の周辺密度関数  $f_{\mu}(\mu)$

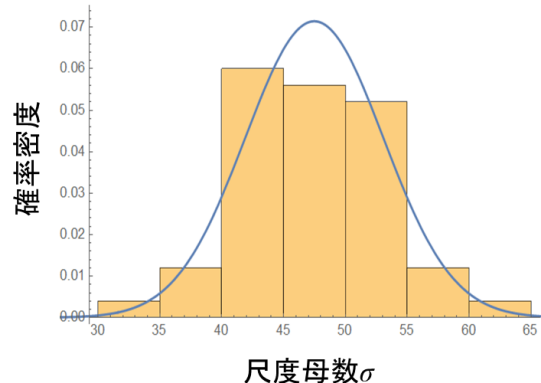


図 6-3 位置母数  $\mu$  の周辺密度関数  $f_{\mu}(\mu)$



第 6 章 観測情報と気候変動予測を統合した極値降雨量に関する信頼区間・予測区間の将来変化の推定

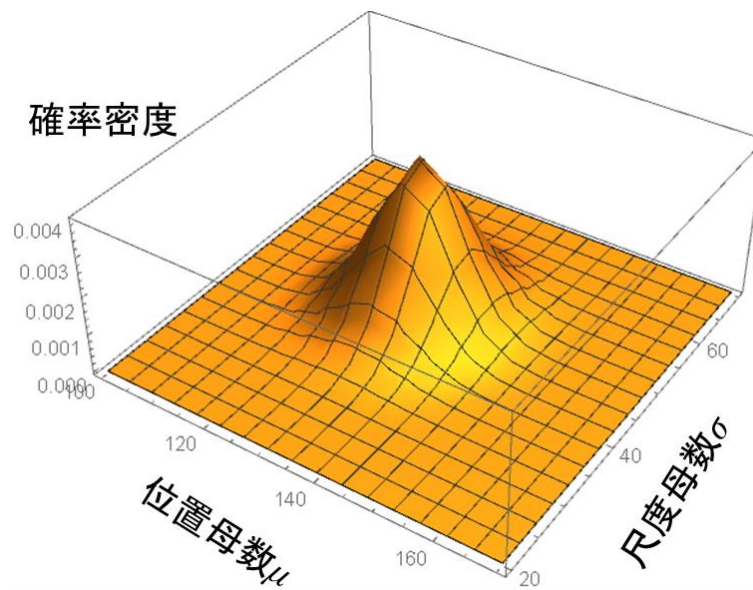


図 6-4 初期時点での母数に関する事前分布

過去実験がもつ年最大流域平均 3 日雨量に関する各アンサンブル標本に対して、最尤法による Gumbel 分布の当てはめを行い、50 個の推定母数の標本を得る。位置母数と尺度母数が独立の関係にあると仮定し、これら 50 個の標本に、2 変量正規分布を当てはめたものを初期時点での事前分布とした。

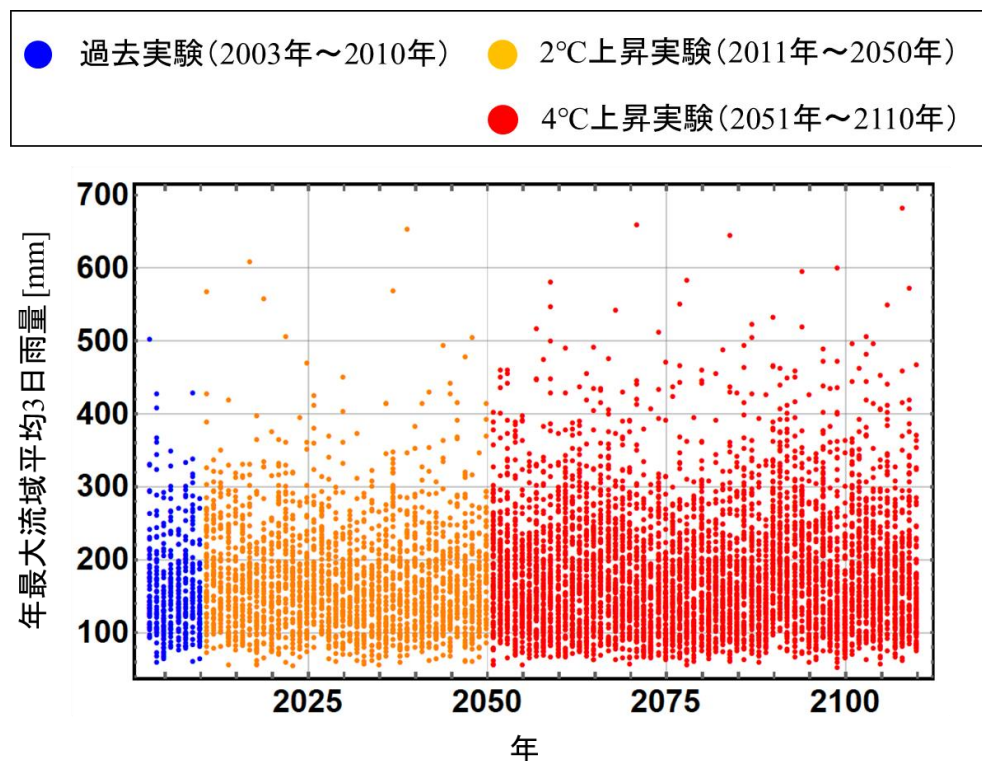


図 6-5 設定した温暖化シナリオにおける d4PDF 実験

設定した温暖化の進行段階

- ・将来期間①：2003 年～2010 年（過去実験）
- ・将来期間②：2011 年～2050 年（2°C 上昇実験）
- ・将来期間③：2051 年～2110 年（4°C 上昇実験） ※使用データの観測期間：1943 年～2002 年

第 6 章 観測情報と気候変動予測を統合した極値降雨量に関する信頼区間・予測区間の将来変化の推定

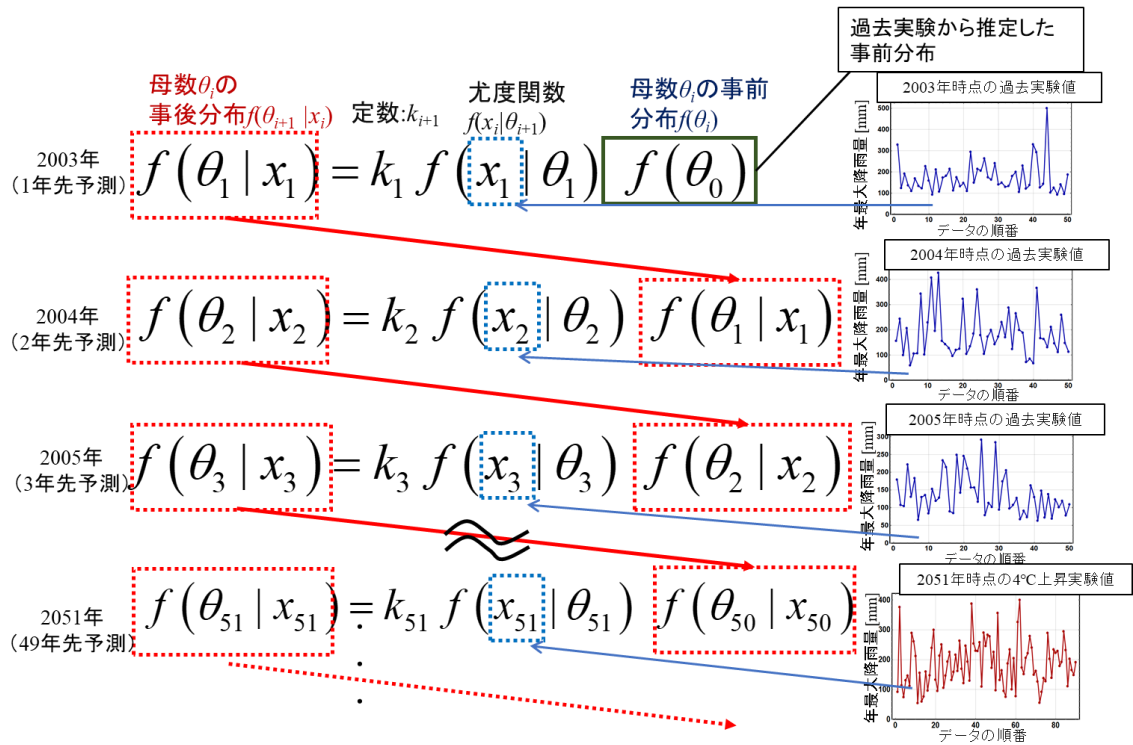


図 6-6 単位時間ステップごとのベイズ更新

将来  $i$  年目における母数の事後分布は、将来  $(i+1)$  年目における母数の事前分布として扱う。

ここに、 $\theta_i$  : 将来  $i$  年目における母数、 $x_i$  : 将来  $i$  年目における d4PDF 年最大降雨量の実験値群である。

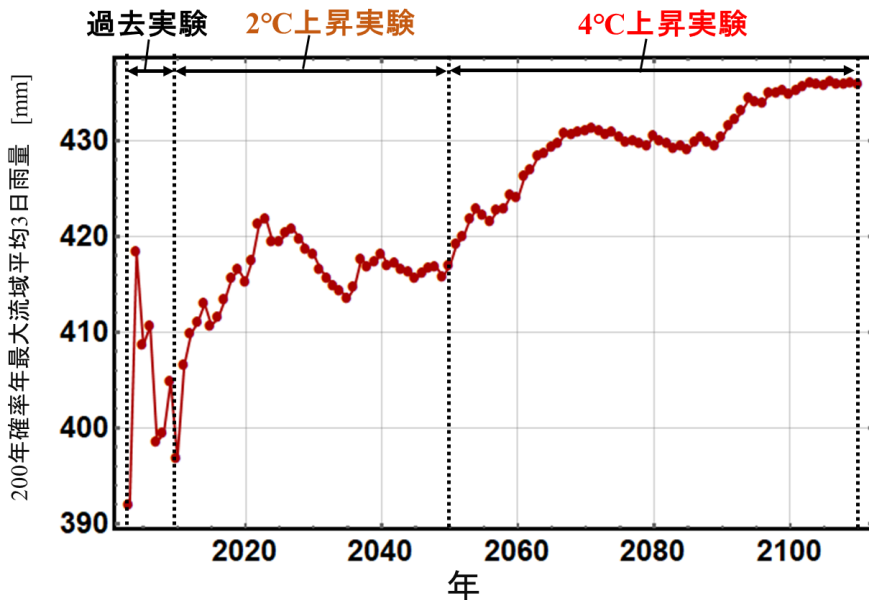


図 6-7 200 年確率年最大流域平均 3 日雨量の将来変化

## 第 6 章 観測情報と気候変動予測を統合した極値降雨量に関する信頼区間・予測区間の将来変化の推定

### 6-4 観測と気候変動予測情報を用いた信頼区間・予測区間の将来変化の推定

次に、将来期間における極値降雨量の信頼区間・予測区間の構成手法を示す。現在までに蓄積されている観測資料は、予測する時点が長期に亘るほど、その時点における確率降雨量の推定精度は劣化すると考えられる。このことを数理的に表現するために、確率降雨量の推定母数をもつ期待情報量が時間経過に伴い増大することを用いる。さらに、将来期間における期待情報量のフロベニウスノルム値とデータの総数を関連付け、将来期間で推定に利用可能なデータの減少度合いを算出する。これにより、推定に利用可能な情報量がデータの総数として表される。確率限界法検定(森口, 1995)による信頼区間・予測区間(Shimizu et al., 2018,2020)は、データの総数に応じて決定するため、将来期間で利用可能なデータの総数を算定することで、将来期間での当該区間を推定することができる。

当該手法の具体的な内容を次に示す。先ず非定常極値分布(Coles, 2008)を観測値に当てはめ、母数推定を行う。非定常極値分布の母数  $\theta(t)$  は時変数であり、一般的に式(6-4)として表される。

$$\theta(t) = \theta_0 + \sum_{i=1}^r \theta_i t \quad (6-4)$$

ここに、 $\theta_0$  : 時変数の定常成分、 $\theta_i$  : 時変数の非定常成分、 $t$  : 時間である。時変数の定常成分のみを対象として算出された期待情報行列におけるフロベニウスノルムは、観測時系列の定常成分がもつ情報量と考えられる。ここで、フロベニウスノルムは式(6-5)で表される。

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2} \quad (6-5)$$

ここに、 $\|A\|_F$ :フロベニウスノルム、 $a_{ij}$ :行列の( $i, j$ )成分、 $m$ :行の総数、 $n$ :列の総数である。ノルムを考えることで、期待情報行列の大きさをスカラーとして表すことができる。本研究では、定常成分から算定した、当該のスカラーを観測値の総数で除した値を観測値 1 個分がもつ情報量と定義した。具体的には、この値は、観測期間中に得られた各データがもつ情報量を全て等しいと仮定し、その仮定の下では、観測値時系列が定常過程であるという想定をすることが自然と考えるため、観測値 1 個分の情報量と考える。一方で、非定常極値分布の推定には、先ず観測値時系列を非定常過程として扱うため、上記の仮定に基づく推定の精度は、対象とする予測時点がより長期になるほど、時系列の非定常性の顕在化に伴い、劣化していくといえる。次に、将来期間における母数の期待情報行列のフロベニウスノルムを求めていき、そのノルム値を上

第 6 章 観測情報と気候変動予測を統合した極値降雨量に関する信頼区間・予測区間の将来変化の推定

記した観測値 1 個分の情報量で除した値により，将来期間において，残存している観測情報量がデータの個数として表される．

本研究では，非定常 Gumbel 分布モデルを採用しており，この分布を基に，データの個数として表された将来期間における情報量を算出する．ここで，非定常 Gumbel 分布モデルの確率密度関数  $f_X(x, t)$  と累積分布関数  $F_X(x, t)$  の関数形をそれぞれ式(6-6)と式(6-7)に示す．また，位置母数  $\mu(t)$  と尺度母数  $\sigma(t)$  を時間  $t$  に関する 1 次式とした．両母数の関数形はそれぞれ式(6-8)と式(6-9) に示す．

$$f_X(x, t) = \frac{1}{\sigma(t)} \exp\left[-\frac{x - \mu(t)}{\sigma(t)}\right] \exp\left[-\exp\left[-\frac{x - \mu(t)}{\sigma(t)}\right]\right] \quad (6-6)$$

$$F_X(x, t) = \exp\left[-\exp\left[-\frac{x - \mu(t)}{\sigma(t)}\right]\right] \quad (6-7)$$

$$\mu(t) = \mu_0 + \mu_1 t \quad (6-8)$$

$$\sigma(t) = \exp[\sigma_0 + \sigma_1 t] \quad (6-9)$$

さらに，非定常 Gumbel 極値分布モデルの母数推定は最尤法により行う．これは，式(6-10)で表される尤度関数  $L(\theta)$  を母数で微分した関数の極値を求めるために，尤度方程式を解き，母数推定を行うものである．なお，尤度方程式（式(6-12)）を解く際，時間  $t$  は式(6-11)で示されている離散化を行った．

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f_X(x_i, t_i) \quad (6-10)$$

$$t_i = \frac{i}{n+1}, \quad (i=1, 2, \dots, n, \dots) \quad (6-11)$$

$$\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} = 0 \quad (6-12)$$

ここに， $l$ :対数尤度関数， $t_i$ : 離散化された時間， $x_i$ :  $t_i$  時点で得られた観測値， $n$ : 観測値の総数， $f_X(x_i, t_i)$ : 非定常確率分布モデルの確率密度関数， $\theta$ : 母数， $\mu(t)$ : 位置母数， $\sigma(t)$ : 尺度母数である．

第 6 章 観測情報と気候変動予測を統合した極値降雨量に関する信頼区間・予測区間の将来変化の推定

観測値に当てはめた非定常 Gumbel 分布モデルを図 6-8 に示す。

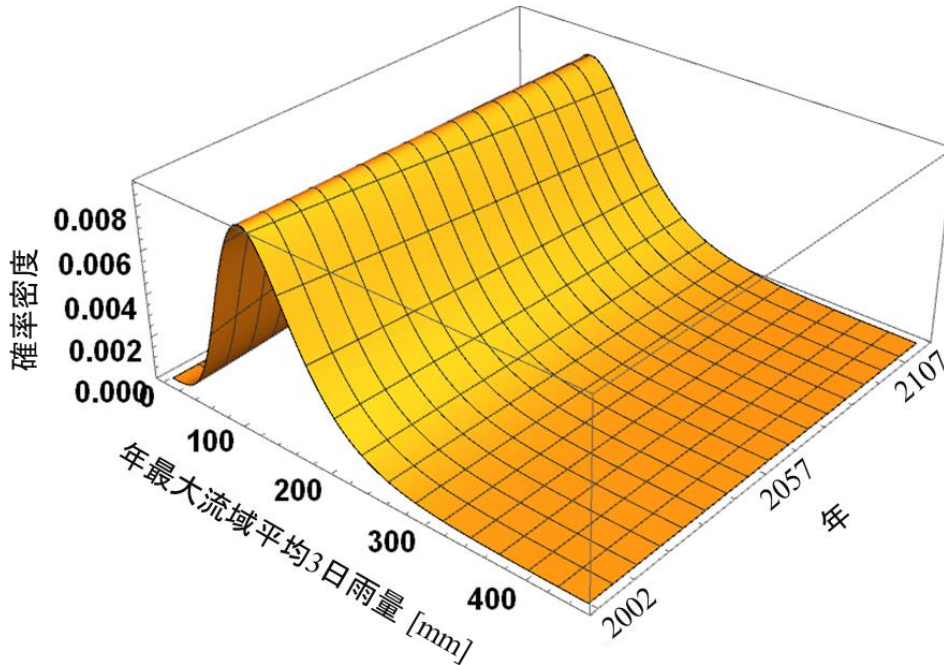


図 6-8 観測値に当てはめた非定常 Gumbel 分布

なお、Gumbel 分布の期待情報行列  $I_E$  は、以下の式群により表される。

$$I_E = n I_F = \begin{pmatrix} E\left(-\frac{\partial^2}{\partial \mu^2} l(\mu, \sigma)\right) & E\left(-\frac{\partial^2}{\partial \mu \partial \sigma} l(\mu, \sigma)\right) \\ E\left(-\frac{\partial^2}{\partial \sigma \partial \mu} l(\mu, \sigma)\right) & E\left(-\frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} l(\mu, \sigma)\right) \end{pmatrix} \quad (6-13)$$

$$E\left(-\frac{\partial^2}{\partial \mu^2} l(\mu, \sigma)\right) = \frac{1}{\sigma^2} \quad (6-14)$$

$$E\left(-\frac{\partial^2}{\partial \mu \partial \sigma} l(\mu, \sigma)\right) = -\frac{1}{\sigma^2}(1-\gamma) \quad (6-15)$$

$$E\left(-\frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} l(\mu, \sigma)\right) = \frac{1}{\sigma^2} \left( \frac{\pi^2}{6} + (1-\gamma)^2 \right) \quad (6-16)$$

ここに、 $I_E$  : Gumbel 分布の期待情報行列、 $I_F$  : Gumbel 分布の Fisher 情報行列、 $l$  : 対数尤度関数、 $\gamma(=0.57721)$  : Euler の定数、 $n$  : 観測値の総数である。

第 6 章 観測情報と気候変動予測を統合した極値降雨量に関する信頼区間・予測区間の将来変化の推定

観測値に当てはめた非定常 Gumbel 分布の母数における定常成分は $(\mu_0, \sigma_0)$ である。母数の定常成分 $(\mu_0, \sigma_0)$ の期待情報行列  $I_{E,0}$  を

$$\mu(t) = \mu_0 \tag{6-17}$$

$$\sigma(t) = \exp[\sigma_0] \tag{6-18}$$

として、式(6-13)～式(6-16)を用いて算出する。母数の定常成分 $(\mu_0, \sigma_0)$ における期待情報行列  $I_{E,0}$  のフロベニウスノルムを $\|A\|_{E,0}$ と表記する。このノルム値 $\|A\|_{E,0}$ を観測値の総数  $n$  で除した値を観測値 1 個が持つ情報量と考える。次に、非定常 Gumbel 分布の母数における期待情報行列は、時間経過に伴い、ノルムで表される行列の大きさが減少していく。当該の期待情報行列のフロベニウスノルム値の時間変化を図 6-9 に示す。このとき、非定常 Gumbel 分布の推定母数の期待情報行列のフロベニウスノルム値  $\|A\|_{E,t}$ を上記した観測値 1 個当たりの情報量で除した値 ( $\|A\|_{E,t} / (\|A\|_{E,0}/n)$ ) を将来期間で推定に利用可能な情報量をデータの個数で表したものである。将来期間での確率降雨量の推定に利用可能なデータの総数を図 6-10 に示す。

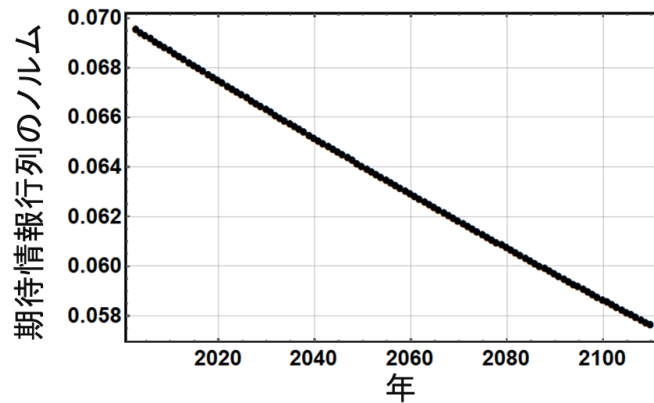


図 6-9 観測値に当てはめた非定常 Gumbel 分布の推定母数に関する期待情報行列のフロベニウスノルム

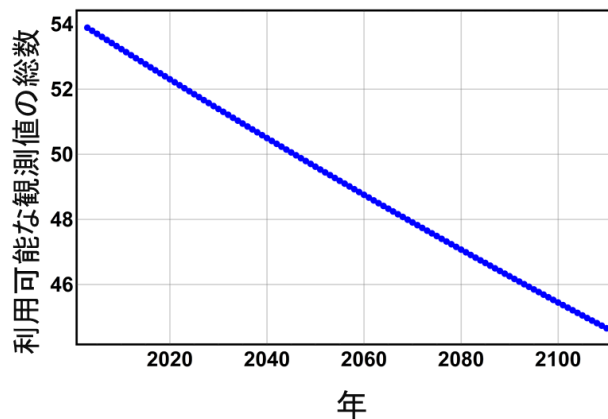


図 6-10 将来期間での確率降雨量の推定に利用可能なデータの総数

第 6 章 観測情報と気候変動予測を統合した極値降雨量に関する信頼区間・予測区間の将来変化の推定

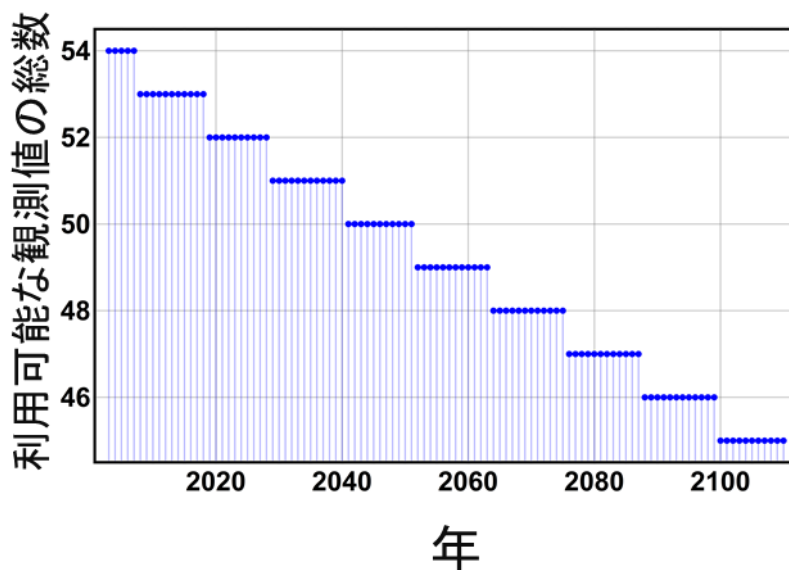


図 6-11 整数化された，将来期間での確率降雨量の推定に利用可能なデータの総数

図 6-10 より，時間経過に伴い，確率降雨量の推定に利用可能なデータの個数が減少していくことが分かる．図 6-10 にプロットされている値を整数化し，その整数化された値を，対象とする将来時点における信頼区間・予測区間の推定に利用する（3章において示した信頼区間・予測区間の構成手法に関する記述における定数  $n$  とする）．上記した整数化された推定に利用可能なデータの総数を図 6-11 に示す．また，図 6-12 に 200 年確率年最大流域平均 3 日雨量とその 95% 信頼区間・95% 予測区間の将来変化を示す．2003 年時点での 200 年確率降雨量が 391.9mm であることに対して，2110 年時点での 95% 上側予測限界値が 875.9mm となり，その倍率は 2.2 となる．また，95% 上側予測限界値の片側確率は 2.5% であることから，2110 年時点の当該値の生起リスクは，対象超過確率(1/200)と片側確率 2.5% の積により算出可能である．このため，今世紀末における大規模豪雨の規模とその生起リスクが把握可能となる．

第 6 章 観測情報と気候変動予測を統合した極値降雨量に関する信頼区間・予測区間の将来変化の推定

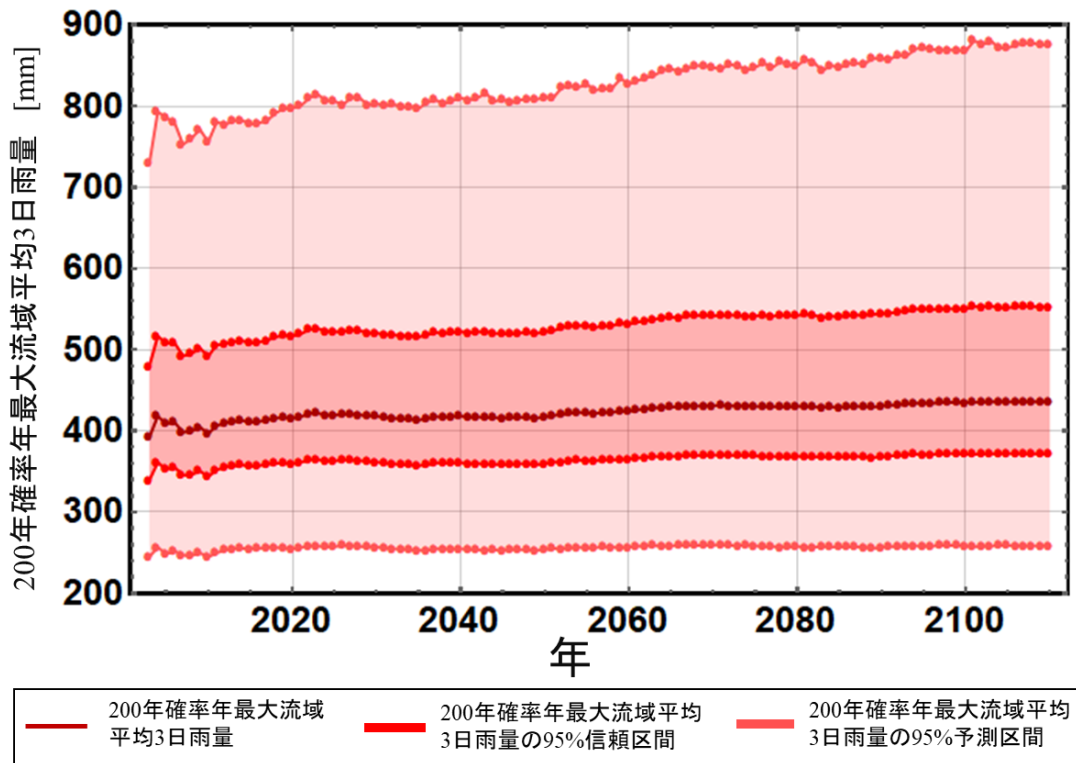


図 6-12 200 年確率年最大流域平均 3 日雨量とその 95%信頼区間・95%予測区間の時間変化  
非定常極値分布モデルの期待情報量により，将来予測データの時系列特性を考慮した，計画規模相当降雨量の信頼区間・予測区間が推定可能となる。

6-5 第 6 章のまとめ

第 6 章では，観測と気候変動予測情報の双方を考慮した，確率降雨量の統計的予測手法を示した。本手法の有意性は，過去のデータを基に，長期先の予測を行う際，確率降雨量の予測精度が劣化していくという実態を統計的情報量の観点からモデル化し，その推定不確実性の増大を信頼区間・予測区間により定量化した点にある。さらには，本手法により，d4PDF による気候変動予測情報は，温暖化シナリオ別に年最大降雨量の時系列を有しているため，これらの時系列を MCMC 法により，逐次的に取り込むことで，将来期間での確率降雨量の予測値が可能となる。なお，本手法では，観測期間中に得られた各データがもつ情報量を全て等しいと仮定し，その仮定の下では，観測値時系列が定常過程であるという想定をすることが自然と考えるため，母数の定常成分が有する期待情報行列の大きさ（ノルム値）を観測値の総数で除した値を観測値 1 個分がもつ情報量として扱っている。そのうえで，将来期間では，時間経過に伴う，母数の推定不確実性の増大を，蓄積されている観測値情報の個数の減少と結



## 第 6 章 観測情報と気候変動予測を統合した極値降雨量に関する信頼区間・予測区間の将来変化の推定

びつけている。確率限界法に基づく信頼区間・予測区間の幅は、使用するデータの総数に応じて決定するため、将来期間において残存する情報量を定量化することで、将来期間における当該区間の将来変化予測が可能となる。

本章において示した主な研究成果を以下に列挙する。

- (1) 確率降雨量の推定において、使用する観測データは全て定常過程の下で生じたものとして扱い、観測期間の外部（将来期間）では降雨データに非定常性を仮定し、将来期間での確率降雨量の予測値とその信頼区間・予測区間を算定する手法を示した。
- (2) MCMC 法を導入することで、気候変動予測により、物理的に推定された温暖化の進行度合いを取り込み、確率降雨量の予測値を逐次的に算定する手法を示した。
- (3) 過去のデータを基に、予測先の時点に応じて、確率降雨量の予測精度が変化していくという実態を統計的情報量の観点からモデル化し、その推定不確実性の増大を使用できるデータが変化していくことに関連付けた。確率限界法検定に基づく信頼区間・予測区間は、その幅が使用するデータの総数によって、決定されるため、上記の関連付けを行うことで、任意の予測時点における極値降雨量の信頼区間・予測区間の構成手法を示した。

### 参考文献

- ・北野利一，高橋倫也，田中茂信：水文頻度解析における推定誤差の回折効果 ～ 50 年確率は 50 年間有効であり続けるか？，土木学会論文集 B1(水工学) Vol.68, No.4, I\_1375-I\_1380, 2012.
- ・北野利一，森瀬喬士，喜岡渉，高橋倫也：確率波高に対する推定の可否を決定づける新たな指標の提案，海岸工学論文集，第 55 巻，pp.141-145，2008.
- ・国土交通省 国土技術政策総合研究所 気候変動適応研究本部：気候変動適応策に関する研究（中間報告），国総研資料 749 号，II-112-154，2013.
- ・清水啓太，山田朋人，山田 正：確率限界法検定に基づく確率分布モデルの信頼区間を導入した新しい水文頻度解析手法，土木学会論文集 B1(水工学) Vol.74, No.4, I\_331-I\_336, 2018.
- ・森口繁一：確率表現関数の検定について—Kolmogorov-Smirnov 検定を考え直す—，pp.233-244 日本統計学会，第 25 巻，1995.
- ・Coles, S. : An Introduction to Statistical Modeling of Extreme Values, Springer, Chapter 6, Extremes of Non-stationary Sequences, pp.105-123, 2001.
- ・Milly, P.C.D., Betancourt, J., Falkenmark, M., Hirsch, R. M., Kundzewicz, Z.W., Lettenmaier,

第 6 章 観測情報と気候変動予測を統合した極値降雨量に関する信頼区間・予測区間の将来変化の推定

D.P. and Stouffer, R.J. : Stationarity Is Dead: Whither Water Management ?, Science, 319, 573-574, 2008.

・ Shimizu, K.; Yamada, T.; Yamada, T.J. Uncertainty Evaluation in Hydrological Frequency Analysis Based on Confidence Interval and Prediction Interval. Water 2020, 12, 2554.

## 第7章 結論

水文頻度解析とは、過去の観測雨量の極値を統計解析し、河川計画における計画降雨量を算定する手法である。現在の洪水対策では、一般的に、過去数十年間に亘る降雨観測により得られた、年最大降雨量の観測値の出現頻度を統計解析することで、計画降雨量の推定が行われてきた。計画降雨量に相当する豪雨のパターンを設定し、それらを入力降雨とした降雨流出解析により、計画流量や計画水位が決定される。水文頻度解析は、標本中の最大値が極値分布に従うという極値理論を基礎として発展してきた。一方、現在利用可能な年最大降雨量の観測値は有限であるため、これらの有限な統計標本に基づく計画降雨量は、不確実性を大いに有する。さらに、近年多発する記録的豪雨の多くは、計画降雨量を上回るものであり、従来の水文頻度解析の枠組みでは評価できないという問題がある。また、従来手法は、降雨量や河川流量といった水文量の定常性を仮定している。ここで、定常性とは、水文量の特性が時間的に変化しないことである。すなわち、従来手法では、水文量が従う確率分布は時間的に変化しないものとして扱ってきた。しかしながら、近年では、地球温暖化に伴う気候変動の影響による水文量の非定常性の顕在化が指摘されてきている。ここで、非定常性とは、水文量の時系列の特性が変化していくこと、つまり、それらが従う確率分布が時間的に変化することをいう。我が国においては、地球温暖化に伴う気候変動により、将来、降雨量ならびに洪水の発生頻度が増加をするという予測結果が示されている。上述したような気候変動に伴う降雨の激甚化を考慮すると、水文量の非定常性を考慮した統計解析手法の構築・発展は、地球温暖化を踏まえた洪水対策を立案する上で、極めて重要となる。

確率限界法検定は、年最大降雨量の母集団分布として、仮定した分布の下で、発生しうる豪雨の標本を棄却限界値として、導出するものであり、その検定力は極値に対して非常に高い。本研究では、理論の背景となった Kolmogorov-Smirnov 検定の採択域の比較結果や、気候モデルにより物理的に算出した順序統計量の頻度分布の幅と確

## 第7章 結論

率限界法検定により統計理論上算定される採択域が高い精度で一致することから、確率限界法検定の極値統計解析への導入の有効性を示している。

さらに、本研究では、確率限界法検定の理論を用いて、計画降雨量に代表されるような推定値がもつ不確実性を定量化する信頼区間ならびに、将来の観測値がとり得る範囲を表す予測区間を構成する手法を構築した。加えて、降雨量の非定常性を頻度解析に反映させ、将来気候下の確率降雨量を推定するためには、これまでの観測実績に加え、気候変動予測情報を取り込む必要があることを鑑み、気候変動予測情報であるd4PDFのデータをベイズ手法により取り込みことで、将来気候下での年最大降雨量に関する極値分布の推定手法を示した。本手法により、d4PDFによる気候変動予測情報は、温暖化シナリオ別に年最大降雨量の時系列を有しているため、これらの時系列をMCMC法により、逐次的に取り込むことで、将来期間での確率降雨量の予測値が可能となる。加えて、本手法の有意性は、過去のデータを基に、長期先の予測を行う際、確率降雨量の予測精度が劣化していくという実態を統計的情報量の観点からモデル化し、その推定不確実性の増大を信頼区間・予測区間により定量化した点にある。この成果は、想定される温暖化シナリオのもとで、段階的に洪水対策を整備することに重きが置かれるとき、確率降雨量の逐次的な時間変化（より詳細な将来変化）が整備方針を検討する際の有益な指標を提供するものと考えられる。

以下では、各章において得られた成果を列挙する。

第1章では、水文頻度解析およびその数理的基礎である極値統計理論の歴史を概説するとともに、利用可能な観測極値の不足に起因する、水文頻度解析上の困難点を指摘した。本論では、この困難点として、計画水文量の不確実性ならびに激甚豪雨の確率年が計画確率年を大きく超過することを挙げた。この困難点に対して、近年では、気温上昇などの計算条件を変えた気象シミュレーションにより、過去気候（現在までの気候）および将来気候（地球温暖化進行時の気候）下での気候データを利用可能となっており、このような大量アンサンブルデータの導入により、計画水文量に内包される不確実性が確率分布という形で定量化可能となり、激甚豪雨の生起リスクを算定することができる。同章では、本研究が提案する数理統計理論（確率限界法検定）に基づく信頼区間・予測区間が、このような大量アンサンブルデータを導入したリスク評価手法の数理的基礎となることを示した。

第2章では、確率限界法検定の理論を詳述した。同章では、理論の背景にあるKolmogorov-Smirnov検定の概説をするとともに、両検定の検定力を比較し、確率限界法検定の極値統計解析に対する有用性を示す。確率限界法検定は、仮定した母集団分布の裾野に対する検定力が強く、任意の有意水準において、仮定した母集団分布の下

## 第7章 結論

で生起しうる低頻度かつ極端な値の推定を可能とするものである。また、確率限界法検定は、母集団分布に対して特定の分布を仮定しない、ノンパラメトリック検定であり、かつ非常に高い検定力を持つ。このため、これまでに提案されてきた各種検定理論と比べても、非常に汎用性に富むものである。さらに、同章では、確率限界法検定における  $p$  値の算出方法を詳説した。

第3章では確率限界法検定に基づいた信頼区間の構成手法を詳説するとともに、当該信頼区間を導入した水文頻度解析手法を示した。確率限界法検定に基づく信頼区間は、激甚な水文現象の生起リスクを推定可能とするものである。さらに、同省では、確率限界法検定の理論を応用することで、将来期間において生起する極値水文量に関する予測区間の構成手法を示すとともに、当該予測区間を導入した水文頻度解析手法を提示する。また、予測区間の導入により、従来水文頻度解析では“外れ値”あるいは“異常値”として扱われてきた豪雨を合理的な確率年で評価するとともに、当該豪雨の生起リスクが算出可能となることを示した。さらに、信頼区間・予測区間を降雨流出解析、総合確率法、非定常水文頻度解析、二変量極値統計解析に導入した。

第4章では、マルコフ連鎖モンテカルロ法により、気候変動予測結果を取り込み、信頼区間・予測区間を更新する手法を提案した。本研究が開発した手法は、気候モデルによる物理的予測とそれを統計理論によって、極値降雨量の将来変化を推定するものである。同章では、d4PDFのダウンスケーリング計算結果により、算出した確率降雨量の頻度分布と、確率限界法検定に基づく信頼区間の比較を行い、両者が極めて高い精度で一致することを示した。この結果は、力学的ダウンスケーリング計算の妥当性を理論的に支持するものである。このため、今後の気候変動を踏まえた洪水対策の検討にあたり、気候変動予測結果の導入可能性を示唆するものである。

第5章では、本研究が開発した、マルコフ連鎖モンテカルロ法を用いた、将来気候における年最大降雨量の極値分布ならびに、その信頼区間・予測区間の推定手法を利根川上流域に適用し、気温上昇実験ごとに、信頼区間・予測区間の将来変化を求めた。さらに、将来気候下における最大クラスの降雨パターンを分析し、当該流域における洪水対策上、考慮すべき降雨パターンや気象場を明らかとした。さらに、当該手法により、利根川上流域における計画確率規模に相当する、200年確率年最大流域平均3日雨量の将来変化を推定した。さらに、将来気候のシナリオ（d4PDF 2°C上昇実験、4°C上昇実験）では、200年確率年最大流域平均3日雨量に関する信頼区間・予測区間の幅は過去気候のものに対して、1.4から1.5倍の値となることを示した。加えて、アンサンブル気候予測データベース d4PDF内の最大クラスの降雨イベントに対し、極値降雨量の予測区間を考慮することで、これらの最大クラスの降雨量を計画確率降雨

## 第7章 結論

量の分布の実現値として評価できることを示した。さらには、利根川上流域を対象に、温暖化進行時における降雨の将来変化が極値河川流量に及ぼす影響を推定するとともに、これらの極値河川流量をもたらす大規模豪雨の分析を行った。将来気候下において、現在定められている基本高水を超える、流量の規模やその発生リスクを定量化する。

第6章では、観測と気候変動予測情報の双方を考慮した、確率降雨量の統計的予測手法を示す。本手法の有意性は、過去のデータを基に、長期先の予測を行う際、確率降雨量の予測精度が劣化していくという実態を統計的情報量の観点からモデル化し、その推定不確実性の増大を信頼区間・予測区間により定量化した点にある。さらには、本手法により、d4PDFによる気候変動予測情報は、温暖化シナリオ別に年最大降雨量の時系列を有しているため、これらの時系列をマルコフ連鎖モンテカルロ法により、逐次的に取り込むことで、将来期間での確率降雨量の予測値が可能となる。なお、本手法では、観測期間中に得られた各データがもつ情報量を全て等しいと仮定し、その仮定の下では、観測値時系列が定常過程であるという想定をすることが自然と考えるため、母数の定常成分が有する Fisher 情報行列の大きさ（ノルム値）を観測値の総数で除した値を観測値1個分がもつ情報量として扱っている。そのうえで、将来期間では、時間経過に伴う、母数の推定不確実性の増大を、蓄積されている観測値情報の個数の減少と結びつけている。確率限界法に基づく信頼区間・予測区間の幅は、使用するデータの総数に応じて決定するため、将来期間において残存する情報量を定量化することで、将来期間における当該区間の逐次的な将来変化予測が可能となる。同章において示した結果は、想定される温暖化シナリオのもとで、段階的に洪水対策を整備することに重きが置かれるとき、確率降雨量の逐次的な時間変化（より詳細な将来変化）が整備方針を検討する際の有益な指標となると考える。

### 参考文献

- ・清水啓太，山田朋人，山田 正：確率限界法検定に基づく確率分布モデルの信頼区間を導入した新しい水文頻度解析手法，土木学会論文集 B1(水工学) Vol.74, No.4, I\_331-I\_336, 2018.
- ・清水啓太，山田正，山田朋人：気候変動予測情報を用いた極値水文量の統計的推定，河川技術論文集，Vol26，pp.19-24，2020.
- ・北野利一，森瀬喬士，喜岡渉，高橋倫也：確率波高に対する推定の可否を決定づける新たな指標の提案，海岸工学論文集，第55巻，pp.141-145，2008.
- ・北野利一，高橋倫也，田中茂信：水文頻度解析における推定誤差の回折効果 ～ 50

## 第7章 結論

年確率は 50 年間有効であり続けるか？, 土木学会論文集 B1(水工学) Vol.68, No.4, I\_1375-I\_1380, 2012.

・ Shimizu, K.; Yamada, T.; Yamada, T.J. Uncertainty Evaluation in Hydrological Frequency Analysis Based on Confidence Interval and Prediction Interval. *Water* 2020, 12, 2554. (Impact Factor: 2.544)

## 謝辞

本研究の遂行に当たって、指導教授である山田正教授には数多くのご指導を賜りました。厚くお礼を申し上げます。研究室には常に学問のための環境があり、常に緊張感が保たれていました。学生にとって、この上ない学びの場に身を置けたことは大変幸せであったと感じます。そのような最高の学びの場に身を置かせていただき、博士研究を完成させることが出来たのは、ひとえに山田先生のお人柄と学生指導に対する姿勢によるものと考えております。その中で、研究を通して、物事の考え方、論理的な思考とそのプロセス、自分の考えや研究成果を誰にでもわかるように伝えることの重要性、そのための表現方法や言葉遣いを教えていただきました。研究面だけでなく生活面においても、日ごろのコミュニケーションや交友関係の築き方、あらゆる物事に対する取り組み方とその姿勢を、ご自身が例となってお教授して下さった数々の光景は私の人生に大きな影響を与えてくださいました。重ねて、ここに深く感謝の意を記します。

鎌倉稔成中央大学教授、佐藤尚次中央大学教授、北野利一名古屋工業大学教授、谷下雅義中央大学教授には副査として様々な側面からのご指摘を賜りました。ここに深く感謝の意を記します。今後とも先生方からのご指導を頂く機会が多々あると存じます。今後ともご指導ご鞭撻のほどよろしくお願い申し上げます。

山田朋人北海道大学准教授には、幾編もの論文の執筆や研究を発展させる際に、データの解析方法や、本研究のもつ重要性をご指摘いただくなど、多岐に亘る重要なご指導を頂きました。ここに深く感謝の意を記します。

福岡捷二中央大学研究開発機構教授には、水理研究会の場において、本研究の遂行にあたり、重要な指摘をご教示いただきました。ここに深く感謝の意を記します。

片石温美中央大学研究開発機構准教授には、研究の進め方やまとめ方について貴重なご助言をいただきました。大変感謝しております。

著者が在籍した中央大学河川・水文研究室の専任研究員の寺井しおり氏には、研究



## 謝辞

室における研究生生活を全面的に支えていただきました。寺井しおり氏の存在なくして本研究は成り立ちませんでした。また、研究についても貴重なご意見をいただきました。大変感謝しております。

東芝インフラシステムズ株式会社吉見和紘氏には、共同研究の過程において、主に気象レーダデータの解析手法に関して、数多くのご助言を頂きました。頂いたご助言は博士研究を進めるにあたり、大変参考となりました。ここに厚くお礼申し上げます。

北海道大学博士研究員成岱蔚氏には、確率・統計の理論をご指導頂くとともに、本研究の発展性について議論させていただきました。ここに厚くお礼申し上げます。

株式会社建設環境研究所綿貫翔氏には、研究の進め方や論理的な文章作成、研究活動に至るまで数多くのものご教示いただきました。ここに厚くお礼申し上げます。

国立研究開発法人土木研究所諸岡良優氏・柿沼太貴氏には、特に卒業研究・修士研究に関してのご助言をいくつも賜りました。研究の方針を決定させるために必要な考え方は諸岡氏・柿沼氏から学ぶことができました。ここに厚くお礼申し上げます。

富山大学技術職員小石一字氏には、数値計算や論文の作成方法を始めたとした数多くのご助言をいただきました。深く感謝いたします。

中央大学理工学部都市環境学科技術員小山直紀氏には、研究面や博士論文の作成方法に関して数多くのご指導を頂きました。深く感謝いたします。

研究室配属からの卒業・修了に至るまでの研究室生活を共に過ごした同期の大石裕泰君、寺島大貴君、塚本健斗君、中村晃基君、Tsevelmaa Batbold さん、Hoang Chi Linh さん、Nguyen Thi Khanh Hoa さんとは、共に研究室生活を送れたことを嬉しく思います。誠にありがとうございました。2019年度修了生の青木啓祐君、金枝上英明君、合田明弘君、新澤まゆ子さん、濱野優至君、福村直之君、町田果歩さん、渡邊瑞貴さん、Nguyen Hoai Thanh さん、Tarit Prommawan さん、現修士課程2年の磯田裕一君、岡田和晃君、蔡浩宇君、福田竜平君、干場希乃さん、柳 熙明 君、現修士課程1年の大久保里彩さん、小島彩織さん、鈴木真菜さん、東野禎久君、星野成美さん、また現学部4年生の高良圭君、齋藤優太君、阪井瑞季さん、佐々木結加さん、並河奎伍君、早澤華怜さん、保坂悠人君、政本未織さん、宮内和樹君、Hoh Shu Yee さんには、研究室生活において、貴重な時間を共に過ごしていただきました。ありがとうございました。

末筆となりますが、これまで私を支えてくれた家族に深く感謝申し上げます。

## 研究論文集

- [1] 清水啓太, 山田 正, 山田朋人: 気候変動予測情報を用いた極値水文量の統計的推定, 統計数理研究所 令和2年度 統計数理研究所 共同研究レポート「極値理論の工学への応用」, pp.94-110, 2021.
- [2] 清水啓太, 山田 正, 山田朋人: 信頼区間・予測区間に基づく水文頻度解析における不確実性評価, 統計数理研究所 令和元年度 統計数理研究所 共同研究レポート「極値理論の工学への応用」, pp.123-140, 2020.
- [3] 清水啓太, 山田 正, 山田朋人: 確率限界法検定に基づく水文頻度解析, 統計数理研究所 平成30年度 統計数理研究所 共同研究レポート「極値理論の工学への応用」, pp.16-29, 2019.

## 論文（査読付き）

- [1] 清水啓太, 小島彩織, 山田 正: アンサンブル気候予測データを用いた利根川上流域における極値水文量の将来変化の推定, 中央大学理工学研究所論文集, 26, 1-10, 2021.
- [2] Shimizu, K.; Yamada, T.; Yamada, T.J. Introduction of Confidence Interval Based on Probability Limit Method Test into Non-Stationary Hydrological Frequency Analysis. *Water* 2020, 12, 2727. (Impact Factor: 2.544)
- [3] Shimizu, K.; Yamada, T.; Yamada, T.J. Uncertainty Evaluation in Hydrological Frequency Analysis Based on Confidence Interval and Prediction Interval. *Water* 2020, 12, 2554. (Impact Factor: 2.544)
- [4] 清水啓太, 山田正, 山田朋人: 気候変動予測情報を用いた極値水文量の統計的推定, 河川技術論文集, Vol26, pp.19-24, 2020.
- [5] 清水啓太, 山田 正, 山田朋人: 確率限界法検定に基づく信頼区間・予測区間を導入した水文頻度解析手法および当該区間の構成プログラムの提案, 中央大学理工学研究所論文集, 25, 21-40, 2020.
- [6] 清水啓太, 山田 正, 山田朋人: ベイズ手法に基づく大量アンサンブル気候予測データを用いた極値降雨量の信頼区間・予測区間の将来変化推定, 中央大学理工学研究所論文集, 25, 41-56, 2020.
- [7] 清水啓太, 山田 正, 山田朋人: ベイズ手法を用いた信頼区間の将来変化予測

## 研究業績

- アンサンブル気候予測データへの適用-,土木学会論文集 B1(水工学) Vol.75, No.2, I\_301-I\_306, 2019.
- [8] 清水啓太, 山田 正, 山田朋人:信頼区間・予測区間を導入した水文頻度解析における不確実性評価, 河川技術論文集, Vol.25, pp.13-18, 2019.
- [9] 清水啓太, 山田 正, 山田朋人:信頼区間の導入による確率洪水ピーク流量の不確実性評価— 総合確率法の拡張—, 土木学会論文集 B1(水工学) Vol.74, No.5, I\_175-I\_180, 2018.
- [10] 清水啓太, 山田 正, 山田朋人:確率限界法検定に基づく信頼区間を用いた確率洪水ピーク流量の不確実性評価, 土木学会論文集 G (環境) Vol.74, No.5, I\_293-I\_302, 2018.
- [11] 清水啓太, 山田朋人, 山田 正:確率限界法検定に基づく確率分布モデルの信頼区間を導入した新しい水文頻度解析手法, 土木学会論文集 B1(水工学) Vol.74, No.4, I\_331-I\_336, 2018.

## 論文 (査読なし)

- [1] 佐々木結加, 干場希乃, 清水啓太, 山田 正:マルチパラメータ・フェーズドアレイ気象レーダの観測降雨強度による降雨特性の分析, 第47回土木学会関東支部技術研究発表会講演概要集, II-43, 2021
- [2] 政本未織, 清水啓太, 及川雄真, 山田 正:大量アンサンブル気候データベースを用いた過去実験における年最大降雨量の時空間分布に関する分析, 第48回土木学会関東支部技術研究発表会講演概要集, II-44, 2021
- [3] 干場希乃, 清水啓太, 寺井しおり, 山田 正:気象レーダの仰角数と観測鉛直降雨分布の関係の分析, 令和二年度土木学会全国大会第75回年次学術講演会概要集, ii-45, 2020.
- [4] 小島彩織, 清水啓太, 山田 正:大量アンサンブル気候予測データを用いた利根川上流域における極値水文量の気候変動影響評価, 令和二年度土木学会全国大会第75回年次学術講演会概要集, ii-52, 2020.
- [5] 小島 彩織, 清水 啓太, 山田 正:大量アンサンブル気候予測データを用いた地球温暖化進行時における極値水文量の分析, 第47回土木学会関東支部技術研究発表会講演概要集, ii-54, 2020.
- [6] 清水啓太, 山田朋人, 山田 正:確率限界法検定に基づく確率水文量の信頼区間に関する研究, pp.101-106, 第25回地球環境シンポジウム講演集, 2017.

## 研究業績

- [7] 清水啓太, 山田 正, 山田朋人: ベイズ手法に基づくアンサンブル気候予測データを用いた信頼区間の更新, 水文・水資源学会 2019 年度研究発表会要旨集, p222-223(P62), 2019.
- [8] 干場希乃, 清水啓太, 山田 正, 青木啓祐, 寺井しおり, 吉見和紘: 鉛直積算雨量を用いた河川水位の予測可能性, 令和元年度土木学会全国大会第 74 回年次学術講演会概要集, ii -149, 2019.
- [9] 青木啓祐, 清水啓太, 山田 正: VIL ナウキャストのインプットデータの違いが予測結果に与える影響, 令和元年度土木学会全国大会第 74 回年次学術講演会概要集, ii -31, 2019.
- [10] 青木啓祐, 干場希乃, 清水啓太, 寺井しおり, 山田 正: 二重偏波フェーズドアレイ気象レーダに基づく降雨予測手法を導入した洪水予測に関する研究, 第 27 回地球環境シンポジウム講演集, pp.71-73, 2019.
- [11] 清水啓太, 山田朋人, 山田 正: 確率限界法検定に基づく確率水文量の信頼区間に関する研究, pp.101-106, 第 25 回地球環境シンポジウム講演集, 2017.
- [12] 清水啓太, 山田正: 確率限界法検定に基づく予測区間を導入した水文頻度解析手法に関する研究, 水文・水資源学会 2017 年度研究発表会要旨集, pp.166-166(P27), 2017.
- [13] 清水啓太, 山田 正: 確率限界法検定に基づく極値水文量の統計的予測に関する研究, 土木学会第 72 回年次学術講演会 ii -38, 2017.
- [14] 清水啓太, 山田 正: 極値降雨量の統計的予測に関する研究, 第 44 回土木学会関東支部技術研究発表会講演概要集, ii -57, 2017.

## 国際会議

- [1] Keita SHIMIZU, Tadashi YAMADA and Tomohito J. YAMADA : Projection for future change of confidence interval and prediction interval of extreme rainfalls based on Bayesian method using a large ensemble dataset, 22nd IAHR-APD Congress in Sapporo| Online September 16, 2020.
- [2] Keita SHIMIZU, Tadashi YAMADA and Tomohito J. YAMADA : Projection for Future Change of Confidence Interval and Prediction Interval Based on Bayesian Method, 2019 Smart Water Grid International Conference, 2019.
- [3] Keita SHIMIZU, Shiori TERAII, Akihiro GODA, Taro KUSAGAYA, Keiichi SUZUKI and Tadashi YAMADA : A Report on Basic Experimental Results Related

## 研究業績

to the Development of Visualization Technology for River Levees Using Cosmetic Ray Muons, 2019 Smart Water Grid International Conference, 2019.

- [4] Keita SHIMIZU, Tadashi YAMADA, Tomohito J. YAMADA : A Proposal of Hydrological Frequency Analysis Based on Confidence Interval and Prediction Interval, 16th Annual Meeting Asia Oceania Geosciences Society, HS04-A010, 2019.
- [5] Keita SHIMIZU, Tadashi YAMADA and Tomohito J. YAMADA : Hydrological Frequency Analysis Introducing Confidence Interval Based on Probability Limit Method Test, Proceedings of the 8th CECAR, Tokyo, 2019.

## 主な講演・口頭発表

- [1] 清水啓太 (発表者), 山田 正, 山田朋人 : 気候変動予測情報を用いた極値水文量の統計的推定, 令和2年度 統計数理研究所 共同研究集会「極値理論の工学への応用」
- [2] 清水啓太 (発表者), 山田 正, 山田朋人 : 信頼区間・予測区間に基づく水文頻度解析における不確実性評価, 令和元年度 水文研究集会, 土木学会水文部会
- [3] 清水啓太 (発表者), 山田 正, 山田朋人 : 信頼区間・予測区間に基づく水文頻度解析における不確実性評価, 令和元年度 統計数理研究所 共同研究集会「極値理論の工学への応用」
- [4] 清水啓太 (発表者), 山田 正, 山田朋人 : 信頼区間を導入した水文頻度解析における不確実性評価に関する研究, 平成30年度 水文研究集会, 土木学会水文部会
- [5] 清水啓太 (発表者), 山田 正, 山田朋人 : 確率限界法検定に基づく水文頻度解析, 平成30年度 統計数理研究所 共同研究集会「極値理論の工学への応用」

## 学術受賞

- [1] 清水啓太, 山田朋人, 山田 正 : 平成30年度 土木学会水工学論文奨励賞 (受賞論文「清水啓太, 山田朋人, 山田 正 : 確率限界法検定に基づく確率分布モデルの信頼区間を導入した新しい水文頻度解析手法, 土木学会論文集

## 研究業績

B1(水工学) Vol.74, No.4, I\_331-I\_336, 2018.)

- [2] 清水啓太, 山田朋人, 山田 正 : 第 25 回地球環境シンポジウム優秀ポスター賞 (受賞論文「清水啓太, 山田朋人, 山田 正 : 確率限界法検定に基づく確率水文量の信頼区間に関する研究, pp.101-106, 第 25 回地球環境シンポジウム講演集, 2017.)