Kronecker-Weber の定理〜局所体の観点から
Theorem of Kronecker-Weber〜from the View point of Local Fields

数学専攻　佐々木　俊平
SASAKI Shunpei

はじめに

本論文は代数的整数論において基本的であり重要でもある「有理数体の有限アーベル拡大は円分体の部分体に限る」という Kronecker-Weber の定理に関する総合報告である．

論文は 8 節からなっている．大きく分けると，第 1 節から第 5 までは導入部で，第 1 節ではデデキンド環について，第 2 節では付値について，第 3 節では射影的極限と帰納的極限について，第 4 節では p 進数体について，ノルム剰余群の例を添えながらまとめ，第 5 節では群のコホモロジーについてまとめた．第 6 節，第 7 節については局所類体論へ向けてのかけ橋として，第 6 節では代数的整数論について，第 7 節では局所体についてまとめた．第 8 節では本論文の主題である局所類体論の観点から Kronecker-Weber の定理の証明をまとめた．

また，本論文は膨大な量となるため，本要旨では第 1 節から第 7 節までは特に重要な定義だけを抜き出して定義集としてまとめた．

1　定義

定義 1.1. $(a_k)_{k\geq 0}$ を有理数の数列とする．任意の正の有理数 ε に対して $N \in \mathbb{N}$ が存在して，$k, l \geq N$ なら $|a_k - a_l|_p < \varepsilon$ となるとき，$(a_k)_{k\geq 0}$ は p 進付値に関するコーシー列であるという．

記号 1.2. C_p の元 $(x_n)_{n\geq 1}$ と $(y_n)_{n\geq 1}$ が同値であることを，任意の正の有理数 ε に対して $N \in \mathbb{N}$ が存在して，$n \geq N$ なら $|x_n - y_n|_p < \varepsilon$ が成り立つことと定義する．さらにこの同値関係で C_p を割った商集合を $\mathbb{Q}_p$ と定義する．$\mathbb{Q}_p$ は体をなすので，p **進数体**とよぶ．

定義 1.3. L/K を相対代数体とする．K の素イデアル $\mathfrak{p}$ の L への延長 $\mathfrak{p}O_L$ を L において素イデアル分解して

$$\mathfrak{p}O_L = \mathfrak{P}_1^{e_1}\mathfrak{P}_2^{e_2}\cdots\mathfrak{P}_g^{e_g} \quad (1.1)$$

を得るとする．このとき，自然数 e_i を $\mathfrak{P}_i$ の L/K における**分岐指数**という．

定義 1.4. L/K を相対代数体とする．K の素イデアル $\mathfrak{p}$ の L への延長を L において素イデアル分解したものを (1.1) とする．$e_i > 1$ のとき，$\mathfrak{P}_i$ は L/K で**分岐している**といい，$e_i = 1$ のとき，$\mathfrak{P}_i$ は L/K で**不分岐であるという**．$\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_g$ がすべて不分岐であるとき，すなわち，$e_1 = e_2 = \cdots = e_g = 1$ のとき，$\mathfrak{p}$ は L/K で不分岐であるといい，そうでないとき $\mathfrak{p}$ は L/K で分岐しているという．$g = 1$，すなわち，$\mathfrak{p}$ の素因子 $\mathfrak{P}$ が一つしかなく，さらにその分岐指数 e が拡大次数 $n = [L : K]$ に等しいとき，つまり

$$\mathfrak{p}O_L = \mathfrak{P}^n, \quad n = [L : K]$$

のとき，$\mathfrak{p}$ は L/K において**完全分岐**しているという．

定義 1.5. K を体とし，$\overline{K}$ を分離閉包とする．

$$I_K=\{\sigma\in\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)\mid \text{ 任意の } x\in O_{\overline{v}} \text{に対して} \sigma(x)\equiv x \pmod{\mathfrak{m}_{\overline{v}}} \text{ が成立する．}\}$$

と定めたとき，I_K を K の**惰性群**という．

定義 1.6. 離散付値環に関して完備で，かつ付値環の付値イデアルによる剰余体 $O_v/\mathfrak{m}_v$ が有限体になっているような体を**局所体**という．

2 局所類体論

定義 2.1. K 上有限次かつ不分岐な $\overline{K}/K$ の中間体の合併を **最大不分岐拡大** といい，$\tilde{K}$ と表す．

定義 2.2. (K,v) を非アルキメデス的局所体とする．
$\overline{K}$ に含まれる K の有限アーベル拡大の合併を**最大アーベル拡大**とよび，K^{ab} と表す．

定理 2.3 (局所体に対する類体公理)**.** 局所体の巡回拡大 L/K に対して，

$$|H^i(\mathrm{Gal}(L/K),L^\times)|=\begin{cases}[L:K] & (i=0)\\ 1 & (i=1)\end{cases}$$

系 2.4. L/K が局所体の不分岐拡大であるならば，$i=0$，1 に対して

$$H^i(\mathrm{Gal}(L/K),U_L)=1,\quad H^i(\mathrm{Gal}(L/K),U_L^{(n)})=1\quad(n=1,2,,\ldots)$$

が成り立つ．特に，

$$\mathrm{N}_{L/K}(U_L)=U_K,\quad \mathrm{N}_{L/K}(U_L^{(n)})=U_K^{(n)}$$

である．

記号 2.5. K を体，L を K の拡大体，$\tilde{L}$ を L の最大不分岐拡大とする．

$$\mathrm{Frob}(\tilde{L}/K)=\{\sigma\in\mathrm{Gal}(\tilde{L}/K)\mid d_K(\sigma)\in\mathbb{N}\}$$

とする．

定義 2.6. 無限次拡大 $\tilde{L}/K$ のノルムを次のように定める．

$$\mathrm{N}_{\tilde{L}/K}(\tilde{L}^\times)=\bigcap_M \mathrm{N}_{M/K}(M^\times)$$

ただし，M は $\tilde{L}/K$ の有限次部分拡大すべてをはしる．このように定めたノルム $\mathrm{N}_{\tilde{L}/K}(\tilde{L})$ を**普遍ノルム**という．

定義 2.7. σ を $\mathrm{Frob}(\tilde{L}/K)$ の元として，Σ を σ の不変体，$\pi_\Sigma\in\Sigma^\times$ を素元とするとき，**局所相互写像**

$$r_{\tilde{L}/K}:\mathrm{Frob}(\tilde{L}/K)\longrightarrow K^\times/\mathrm{N}_{\tilde{L}/K}(\tilde{L}^\times)$$

を

$$r_{\tilde{L}/K}(\sigma)=\mathrm{N}_{\Sigma/K}(\pi_\Sigma)\bmod \mathrm{N}_{\tilde{L}/K}\tilde{L}^\times$$

によって定義する．

命題 2.8. 相互写像

$$r_{\tilde{L}/K} : \mathrm{Frob}(\tilde{L}/K) \longrightarrow K^\times/\mathrm{N}_{\tilde{L}/K}(\tilde{L}^\times)$$

は乗法的で全射である．

命題 2.9. 任意の有限ガロア拡大 L/K に対して，

$$r_{L/K}(\sigma) \equiv \mathrm{N}_{\Sigma/K}(\pi_\Sigma) \bmod \mathrm{N}_{L/K} L^\times$$

によって，自然な準同型写像

$$r_{L/K} : \mathrm{Gal}(L/K) \longrightarrow K^\times/\mathrm{N}_{L/K} L^\times$$

が得られる．ただし，Σ は $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$ の逆像となる元 $\mathrm{Frob}(\tilde{L}/K)$ の不変体であって，$\pi_\Sigma \in \Sigma^\times$ は素元である．この写像を L/K の**局所相互準同型写像**という．

命題 2.10. L/K が不分岐拡大ならば，局所相互写像

$$r_{L/K} : \mathrm{Gal}(L/K) \longrightarrow K^\times/\mathrm{N}_{L/K} L^\times$$

は

$$r_{L/K}(\varphi_{L/K}) = \pi_K \bmod \mathrm{N}_{L/K} L^\times$$

で与えられ，同型となる．

命題 2.11. L/K と L'/K' をそれぞれ $K \subset K'$, $L \subset L'$ を満たすガロア拡大として，$\sigma \in \mathrm{Gal}(\tilde{K}/K)$ とする．このとき，

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Gal}(L'/K') & \xrightarrow{r_{L'/K'}} & (K')^\times/\mathrm{N}_{L'/K'}(L')^\times \\
\big\downarrow & & \big\downarrow \mathrm{N}_{K'/K} \\
\mathrm{Gal}(L/K) & \xrightarrow{r_{L/K}} & K^\times/\mathrm{N}_{L/K} L^\times
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
\mathrm{Gal}(L/K) & \longrightarrow & K^\times/\mathrm{N}_{L/K} L^\times \\
\sigma^* \big\downarrow & & \big\downarrow \sigma \\
\mathrm{Gal}(L^\sigma/K^\sigma) & \xrightarrow{r_{L^\sigma/K^\sigma}} & (K^\sigma)^\times/\mathrm{N}_{L^\sigma/K^\sigma}(L^\sigma)^\times
\end{array}$$

という可換図式が成り立つ．ただし，左の縦の矢印はそれぞれ $\sigma' \longmapsto \sigma'|_L$ と $\tau \longmapsto \sigma^{-1}\tau\sigma$ によって与えられる．

定理 2.12 (局所相互法則)**.** K を体，L を K の有限ガロア拡大とする．このとき，相互準同型写像

$$r_{L/K} : \mathrm{Gal}(L/K)^{\mathrm{ab}} \longrightarrow K^\times/\mathrm{N}_{L/K} L^\times, \quad \sigma \longmapsto \mathrm{N}_{L^\sigma/K}(\pi_\Sigma) \bmod \mathrm{N}_{\tilde{L}/K} \tilde{L}^\times$$

は同型である．

定義 2.13. 局所相互写像 $r_{L/K}$ の逆写像を考えることによって，**局所ノルム剰余記号**

$$(\quad, L/K) : K^\times \longrightarrow \mathrm{Gal}(L/K)^{\mathrm{ab}}$$

が得られる．これは全射であって，その核は $\mathrm{N}_{L/K} L^\times$ である．

定理 2.14 (存在定理)**.** K を局所体とする．このとき，対応

$$L \longmapsto \mathcal{N}_L = \mathrm{N}_{L/K} L^\times$$

は，K の有限アーベル拡大と $K^{\times}$ の指数有限の開部分群 $\mathcal{N}$ との一対一対応を与える．さらに，

$$L_1 \subset L_2 \Longleftrightarrow \mathcal{N}_{L_1} \supset \mathcal{N}_{L_2}, \quad \mathcal{N}_{L_1 L_2} = \mathcal{N}_{L_1} \cap \mathcal{N}_{L_2}, \quad \mathcal{N}_{L_1 \cap L_2} = \mathcal{N}_{L_1}\mathcal{N}_{L_2}$$

が成り立つ．

例 2.15. p を奇素数，$u \in \mathbb{Z}_p^{\times} \backslash (\mathbb{Z}_p^{\times})^2$ と仮定する．さらに，$K = \mathbb{Q}_p(\sqrt{p}, \sqrt{u})$ とおく．このとき，$K/\mathbb{Q}_p$ は $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ をガロア群にもつガロア拡大．さらに，$K/\mathbb{Q}_p$ において一対一対応 $L \longmapsto \mathcal{N}_L = \mathrm{N}_{L/\mathbb{Q}_p} L^{\times}$ は次のように与えられる．

(a) $p \equiv 1 \pmod 4$ の場合．

$$\begin{array}{ccccccccc} & \mathbb{Q}_p(\sqrt{p}, \sqrt{u}) & & & & & \{1\} & & \mathrm{mod}(\mathbb{Q}_p^{\times})^2 \\ \mathbb{Q}_p(\sqrt{u}) & \mathbb{Q}_p(\sqrt{p}) & \mathbb{Q}_p(\sqrt{pu}) & \Longleftrightarrow & \{1, u\} & & \{1, p\} & & \{1, pu\} \\ & \mathbb{Q}_p & & & & & \{1, u, p, pu\} & & \end{array}$$

(b) $p \equiv 3 \pmod 4$ の場合．

$$\begin{array}{ccccccccc} & \mathbb{Q}_p(\sqrt{p}, \sqrt{u}) & & & & & \{1\} & & \mathrm{mod}(\mathbb{Q}_p^{\times})^2 \\ \mathbb{Q}_p(\sqrt{u}) & \mathbb{Q}_p(\sqrt{p}) & \mathbb{Q}_p(\sqrt{pu}) & \Longleftrightarrow & \{1, u\} & & \{1, pu\} & & \{1, p\} \\ & \mathbb{Q}_p & & & & & \{1, u, p, pu\} & & \end{array}$$

系 2.16 (局所クロネッカー・ウェーバーの定理)**.** 任意の有限アーベル拡大 $L/\mathbb{Q}_p$ は $\mathbb{Q}_p(\zeta)$ に含まれる．ただし，ζ は 1 の冪根である．言い換えれば，最大アーベル拡大 $\mathbb{Q}_p^{\mathrm{ab}}/\mathbb{Q}_p$ は 1 の冪乗根をすべて添加することによって得られる．

定理 2.17 (クロネッカー・ウェーバーの定理)**.** 任意の有限アーベル拡大 $L/\mathbb{Q}$ は適当な 1 の冪乗根 ζ を添加した体 $\mathbb{Q}(\zeta)$ に含まれる．

参考文献

[1] 雪江明彦，代数学 3　代数学のひろがり，日本評論社，2011

[2] 加藤和也・黒川信重・斎藤毅，数論 I，岩波書店，2005

[3] J．Neukirch，代数的整数論，Springer，2003

[4] J．Neukirch，Algebraische Zahlentheorie，Springer，1992

[5] J．Neukirch・A．Schmidt，K．Wingberg，Cohomology of number field，Springer， 2000

[6] J．Neukirch，Class Field Theory，Springer，2003

[7] 高木貞治，代数的整数論，岩波書店，1947

[8] 足立恒雄，三宅克也，類体論講義，日本評論社，1998

[9] 山本芳彦，数論入門，岩波書店，2003

[10] 河田敬義，代数的整数論，共立出版，1957