

AdS/CFT 対応における微分電気伝導と自発的対称性の破れ

- Charge Transport Phenomena and Spontaneous Symmetry Breaking in AdS/CFT Correspondence -

物理学専攻 今泉拓也

Takuya Imaizumi

概要

本研究では、強く相互作用する荷電粒子系の非線形電荷輸送を Anti-de Sitter/Conformal Field Theory (AdS/CFT) 対応 [1] を用いて系統的に解析した。先行研究 [2] では、荷電粒子の質量が非ゼロの場合において微分電気伝導度が負になる現象 (負性微分電気伝導: NDC) の発現が認められていたが、質量がゼロの場合については NDC の発現は見出されていなかった。本研究では、荷電粒子の質量がゼロの場合について、電場に対して垂直な磁場を印加することで、磁場の大きさ B が、ある臨界値 B_c よりも大きい領域では、低電流密度領域 (臨界電流密度を J_c として、 $J < J_c$ の領域) において負性微分電気伝導が発現することが確認された。この場合、 $J \geq J_c$ の領域では正の微分電気伝導 (PDC) が発現する。このため、 $J = J_c$ を転移点として PDC と NDC の間の転移が起きる。本研究で扱う系は、荷電粒子質量がゼロの場合に $U(1)$ の内部対称性を持つが、負性微分電気伝導を示す相においては、この内部対称性が自発的に破れていることがわかる。すなわち、PDC-NDC 転移はこの対称性が自発的に破れる非平衡相転移となっている。解析の結果、この転移は外部磁場の値に応じて、1 次相転移または 2 次相転移となることが確認された。また、2 次相転移点近傍で臨界指数も求めた。本研究の解析では、重力理論側で Hamiltonian の値を評価する必要があったが、この Hamiltonian に現れる紫外発散をくりこむ新たな処方も併せて提案した。なお、本要旨では自然単位系 ($c = \hbar = k_B = 1$) を用いる。

モデル

本研究では、一定の外部電場と外部磁場を印加した D3-D7 モデルを用いて解析を行なった。このモデルは、 N_c 枚の D3-brane と 1 枚の D7-brane によって構成されており、その振る舞いを調べることで対応するゲージ粒子の系の振る舞いを調べることができる。AdS/CFT 対応を用いることで、 N_c 枚の D3-brane は 5 次元 AdS-Schwarzschild ブラックホールに置き換えられ、その時空計量は

$$ds^2 = \frac{dz^2}{z^2} - \frac{1}{z^2} \frac{(1 - z^4/z_H^4)^2}{1 + z^4/z_H^4} dt^2 + \frac{1}{z^2} (1 + z^4/z_H^4) d\vec{x}^2 \quad (1)$$

となる。本研究のセットアップ (印加するゲージ場は水平電場と垂直磁場のみ) に対応する作用は

$$S_{D7} = -\mathcal{N}^2 (2\pi\alpha')^2 \int dt dz \cos^6 \theta g_{xx} \sqrt{g_{zz} |g_{tt}|} \sqrt{\frac{\xi}{\chi}} \quad (2)$$

となる。ここで、 g_{ab} は worldvolume の誘導計量であり、 ξ 、 χ はそれぞれ、

$$\xi = g_{xx}^2 (|g_{tt}| g_{xx} - (2\pi\alpha')^2 E^2) + |g_{tt}| g_{xx} (2\pi\alpha')^2 B^2, \quad \chi = |g_{tt}| g_{xx}^2 \mathcal{N} (2\pi\alpha')^4 \cos^6 \theta - (2\pi\alpha')^2 \langle J \rangle^2 \quad (3)$$

で与えられる。ここで \mathcal{N} は対応するゲージ理論に現れる物理量を用いて $\mathcal{N} = T_{D7} V_{S^3} = \lambda / (2\pi)^4 N_c$ と書ける。ここで、 T_{D7} は D-brane の張力である。ただし、単位半径の S^3 の体積 V_{S^3} は $V_{S^3} = 2\pi^2$ で与えられ、

$T_{D7} = 2\alpha'^{-2}N_c/(2\pi)^6$ と $\alpha'^{-2} = \lambda = (2\pi)^2$ であることを用いた。 $\langle J \rangle$ をコントロールパラメータとする場合は、この作用に対して Legendre 変換を施す必要がある。変換を施した作用を \bar{S}_{D7} とすると

$$\bar{S}_{D7} = -\frac{1}{(2\pi\alpha')^2} \int dt dz g_{xx}^{-1} \sqrt{\frac{g_{zz}}{|g_{tt}|}} \sqrt{\xi\chi} \quad (4)$$

となる。数値計算においては、 \mathcal{L}_{D7} で定義される Lagrangian 密度を用いて $\bar{S}_{D7} \equiv \int dt dz \bar{\mathcal{L}}_{D7}$ と定義すると

$$\partial_z \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}_{D7}}{\partial \theta'} - \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}_{D7}}{\partial \theta} = 0 \quad (5)$$

という運動方程式を解くことで解析を行う。ただし、 $\theta' = \partial_z \theta$ である。

解析手法

先行研究 [3] では、印加するゲージ場を水平電場と垂直磁場のみの D3-D7 モデルにおいて、NDC の解が存在することが示された。しかしその解が物理的に選択されるかどうかはわかっていなかったため、先行研究 [2] に従って Lagrangian 密度に Legendre 変換を施して得られる Hamiltonian 密度

$$\bar{\mathcal{H}}_{D7} = \sqrt{\frac{g_{zz}|g_{tt}|}{g_{xx}} \frac{(\mathcal{N}^2(2\pi\alpha')^2|g_{tt}|g_{xx}^2 \cos^6 \theta(z) - \langle J \rangle^2)(g_{xx}^2 + (2\pi\alpha')^2 B^2)^2}{|g_{tt}|g_{xx}^2 - (2\pi\alpha')^2 g_{xx} E^2 + (2\pi\alpha')^2 |g_{tt}| B^2}} \quad (6)$$

を評価した。この Hamiltonian 密度を boundary からホライズンにかけて積分することで Hamiltonian が得られるが、この積分は boundary 近傍で紫外発散を起こしてしまう。これを回避するために、ホログラフィックくりこみ [7] と呼ばれるくりこみを行う。カットオフを ϵ_0 とすると、くりこみの相殺項は

$$L_1 = \frac{\epsilon_0^{-4}}{4}, \quad L_2 = -\frac{\theta_0^2 \epsilon_0^{-2}}{2}, \quad L_f = \frac{5\theta_0^4}{12}, \quad L_F = \frac{E^2 + B^2}{2} \log \epsilon_0 \quad (7)$$

で与えられるが、有限項 L_F の \log の引数が無次元となっていない。そこで本研究では、 $T = 0$ で $\partial^2 H / \partial B^2|_{B=0, E=0}$ や $\partial^2 H / \partial E^2|_{B=0, E=0}$ に発散が生じないように、新たな有限項

$$L_{\mathcal{F}} = \frac{E^2 + B^2}{8} \log \left(\frac{B^2 - E^2}{4e} \right) + \frac{E^2}{4} \quad (8)$$

を提案する [9]。この有限項と L_F を足し合わせることで、 \log の引数が無次元になる。

解析結果と考察

荷電粒子の質量 $m = 0$ で一定の外部電場と外部磁場を互いに垂直に印加した系において、NDC の発現の有無を Hamiltonian の大小を数値的に評価することで判定した。印加する外部磁場を $B = 18$ とした時の結果が図 1 である。

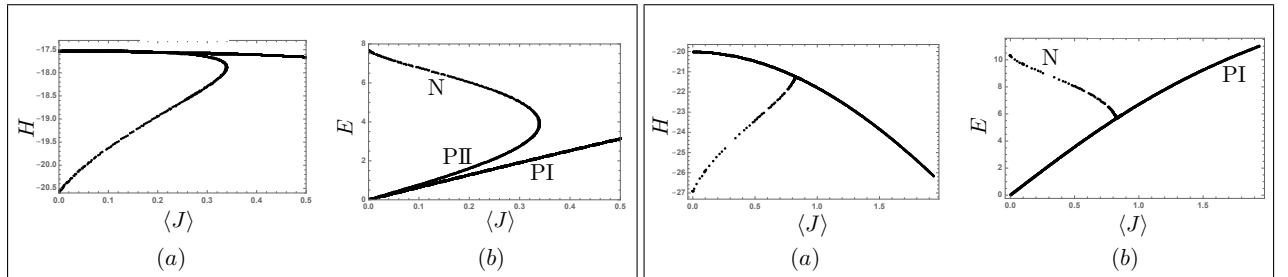


図 1: $B = 18$ (左) および $B = 20.5$ (右) における (a). 電流密度と Hamiltonian との関係 (b). 電流密度と外部電場との関係。どちらの場合も NDC ブランチが選ばれている。3 つの解をそれぞれ PI、PII、N とした。右図では PII が消失している。

Hamiltonian が小さい解が選ばれるとすると、NDC の解が選ばれることをこの結果は示している。つまり、この系では NDC が発現することがわかった。また、さらに印加する磁場を大きくした $B = 20.5$ での結果が図 1 の右である。これを見ると、PII ブランチが消滅していることが確認できる。これについて chiral condensate $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ に注目して議論する。chiral condensate は D-brane がどの程度曲がっているかを測る量となっている。chiral condensate を order parameter とし、外部磁場 $B = 19.5, 20.5$ における電流密度と chiral condensate の関係を調べると以下ようになった。

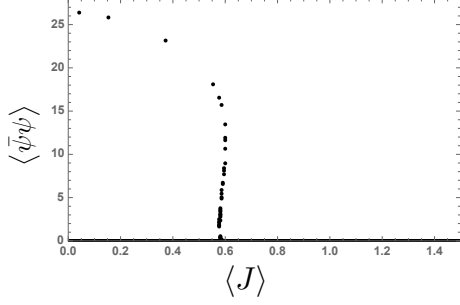


図 2: $B = 19.5$ における電流密度と chiral condensate の関係

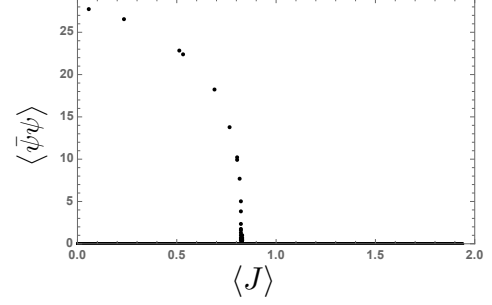


図 3: $B = 20.5$ における電流密度と chiral condensate の関係

図 2 を見ると、 $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ は $\langle J \rangle$ について 3 値となる領域がある。一方で図 3 では $\partial \langle \bar{\psi}\psi \rangle / \partial \langle J \rangle$ が不連続となっている。よって、印加する磁場を大きくすることで、1 次相転移から 2 次相転移へ変化することがわかった [9]。

今回得られた 2 次相転移や PDC-NDC 転移について、相図としてまとめたものが図 4 である。

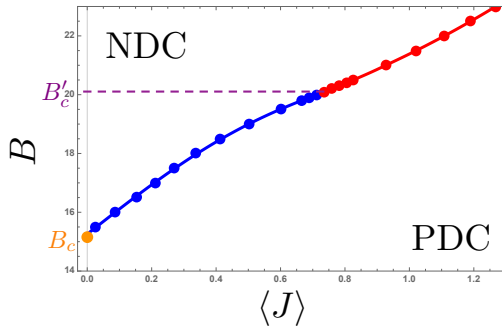


図 4: D3-D7 モデルの相図。相境界より上は NDC、下は PDC となっている。青は 1 次相転移を表し、赤は 2 次相転移を表している。 B'_c は、この転移の次数の変化する磁場の大きさである。また B_c 以下では、NDC は発現しない。

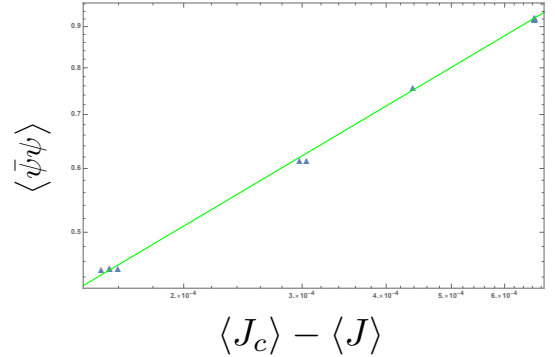


図 5: $B = 20.3$ における電流密度と chiral condensate との関係。直線は (9) 式によるフィッティングの結果を示しており、両軸は log スケールとなっている。

2 次相転移線と 1 次相転移線の境界 (臨界磁場 B'_c) は、印加する外部磁場が $B = 20.1$ 、電流密度が $\langle J \rangle = 0.74$ の点である。また、PDC 相は U(1) の内部対称性を持つが、NDC 相はこの内部対称性が自発的に破れている。つまり、今回得られた PDC-NDC 相転移はこの対称性が自発的に破れる非平衡相転移である [9]。

次に、2 次相転移の臨界指数について調べた結果が図 5 である。プロットに対して、

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = A (\langle J_c \rangle - \langle J \rangle)^\beta \quad (9)$$

という関数でフィッティングを行なったところ、

$$\beta = 0.495 \pm 0.004, \quad A = 35 \pm 1. \quad (10)$$

という結果となり、臨界指数 β は誤差の範囲で 0.5 となることがわかった [9]。

展望

今後の展望としては、一般に自発的対称性の破れが起こると南部-Goldstone boson が現れることが広く知られていることから、本研究で扱った系に対してもこれに関する解析を行うことは非常に興味深い。この粒子は、平衡系では理想的には無限の寿命を持っている。さらに低次元系では、この粒子の存在により長距離秩序相が不安定となることが知られている。しかし、本研究で扱っているのは非平衡系であり着目系から熱浴への散逸が存在する。このことから南部-Goldstone boson は有限の寿命を持つことが期待され、それによって低次元の自発的対称性の破れの議論にどのような変更が生じるか、また関連して Higgs 機構にどのような変更が生じるのかなど、今後の研究の方向性として興味の持たれるところである。相転移については、先行研究 [2, 8] では $\langle \bar{\psi}\psi \rangle - \langle \bar{\psi}\psi \rangle_c \propto (J_c - J)^{1/3}$ が得られており、本研究との差異についてさらに調べてみることに興味を持たれる。

参考文献

- [1] J. M. Maldacena, “The Large N Limit of Superconformal Field Theories and Supergravity,” Adv. Theor. Math. Phys. **2** (1998) 231 [Int. J. Theor. Phys. **38** (1999) 1113] [arXiv:hep-th/9711200].
- [2] S. Nakamura, “Nonequilibrium Phase Transitions and a Nonequilibrium Critical Point from Anti-de Sitter Space and Conformal Field Theory Correspondence,” PRL **109** (2012) 120602, [arXiv:1204.1971 [hep-th]].
- [3] 高熊宏旭, 「AdS/CFT 対応における負性微分電気伝導度と荷電粒子質量」, 中央大学理工学研究科修士論文 (2018).
- [4] M. Ammon, T. H. Ngo, and A. O’Bannon, “Holographic Flavor Transport in Arbitrary Constant Background Fields,” JHEP **0910**, (2009) 032 [arXiv:0908.2625 [hep-th]].
- [5] M. Ali-Akbari, A. Vahedi, “Non-equilibrium Phase Transition from AdS/CFT,” Nucl. Phys. B **877** (2013) 95 [arXiv:1305.3713 [hep-th]].
- [6] A. Karch and A. O’Bannon, “Metallic AdS/CFT,” JHEP **0709**, (2007) 024 [arXiv:0705.3870 [hep-th]].
- [7] A. Karch, A. O’bannon, K. Skenderis, “Holographic Renormalization of probe D-Branes in AdS/CFT,” JHEP **0604** (2006) 015 [arXiv:hep-th/0512125].
- [8] M. Matsumoto, S. Nakamura, “Critical Exponents of Nonequilibrium Phase Transitions in AdS/CFT Correspondence,” Phys. Rev. D **98**, 106027 [arXiv:hep-th/1804.10124].
- [9] T. Imaizumi, S. Nakamura, in preparation.