ホログラフィック QCD におけるトポロジカル感受率と暗黒物質

Topological Susceptibility in Holographic QCD and Dark Matter

中央大学大学院理工学研究科物理学専攻　大道祐樹
Yuki Daido

概要

暗黒物質の候補粒子であるアクシオンは、QCD (Quantum ChromoDynamics) のトポロジカル感受率と温度の関係を探ることにより、その残存量の決定がされている。トポロジカル感受率の計算にはインスタントン計算と格子 QCD がよく用いられるが、両者ともに適用できる温度領域に限界がある。そこで本研究では、ホログラフィック QCD という非摂動的手法を用いてトポロジカル感受率を計算した。その結果、$T_\mathrm{c} > T$ ではトポロジカル感受率がゼロでない一定の値を持ち、$T_\mathrm{c} < T$ ではゼロになることがわかった。また、この結果を暗黒物質の残存量に当てはめて考察したところ、アクシオンの崩壊定数 f_a が $f_a \lesssim 4.1 \times 10^{11}$ [MeV] となった。本研究により、ホログラフィック QCD はトポロジカル感受率の大雑把な振る舞いの確認に適用できることがわかったが、同時にホログラフィーという計算手法の正確性を向上させる必要があることもわかった。

計算モデル

ホログラフィック QCD の酒井・杉本モデル [1, 2] の θ 項を考慮した場合の計量は [3, 4, 5, 6] より

$$ds^2 = \left(\frac{U}{R_\mathrm{D4}}\right)^{\frac{3}{2}} \left(H(U)^{\frac{1}{2}} dx_\mu dx^\mu + \frac{f(U)}{H(U)^{\frac{1}{2}}} d\tau^2\right) + \left(\frac{R_\mathrm{D4}}{U}\right)^{\frac{3}{2}} H(U)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{dU^2}{f(U)} + U^2 d{\Omega_4}^2\right), \tag{1}$$

$$ds^2 = \left(\frac{U}{R_\mathrm{D4}}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\tilde{f}(U) dt^2 + dx_\nu dx^\nu + d\tau^2\right) + \left(\frac{R_\mathrm{D4}}{U}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{dU^2}{\tilde{f}(U)} + U^2 d{\Omega_4}^2\right), \tag{2}$$

$$f(U) = 1 - \frac{{U_\mathrm{KK}}^3}{U^3}, \quad H(U) = 1 - \frac{{U_\mathrm{KK}}^3}{U^3}\frac{\Theta^2}{1+\Theta^2}, \quad R_\mathrm{D4} = (\pi g_\mathrm{s} N_\mathrm{c})^{\frac{1}{3}} l_\mathrm{s}, \tag{3}$$

$$U_\mathrm{KK} = \frac{4{R_\mathrm{D4}}^3}{9} {M_\mathrm{KK}}^2 \frac{1}{1+\Theta^2}, \quad \lambda \equiv 2{g_\mathrm{YM}}^2 N_\mathrm{c} = 4\pi g_\mathrm{s} N_\mathrm{c} l_\mathrm{s} M_\mathrm{KK}, \quad \Theta \equiv \frac{\lambda}{8\pi^2}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{N_\mathrm{c}}\right), \tag{4}$$

$$\tilde{f}(U) = 1 - \frac{{U_\mathrm{T}}^3}{U^3}, \quad U_\mathrm{T} = \frac{16\pi^2}{9} {R_\mathrm{D4}}^3 T^2, \tag{5}$$

である。(1) はカラーの閉じ込め相、(2) は非閉じ込め相を表す計量である。閉じ込め・非閉じ込め相転移の臨界温度 T_c は、両者の作用の差をとって 0 になるときの温度である。作用の差を具体的に書くと、

$$S_1 - S_2 = A \int_{U_\mathrm{KK}}^{U_\mathrm{T}} dU\, U^2 = \frac{1}{3} A \left({U_\mathrm{T}}^3 - {U_\mathrm{KK}}^3\right) = B\left[T^6 - \left(\frac{M_\mathrm{KK}}{2\pi}\right)^6\right]. \tag{6}$$

ここで A、B は U_KK、U_T に依らない正の定数である。従って、$T_\mathrm{c} \equiv M_\mathrm{KK}/2\pi$ が相転移温度である。

クォークの質量項を加えた QCD のラグランジアンを酒井・杉本モデルの構成に合うように拡張すると

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}_{m=0} - m\left(\bar{q}_\mathrm{L} q_\mathrm{R} + \bar{q}_\mathrm{R} q_\mathrm{L}\right) \\ &\Rightarrow \mathcal{L}_{m=0} - m\bar{q}_\mathrm{L}(\tau_2) P \exp\left(i\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau A_\tau\right) q_\mathrm{R}(\tau_1) + \text{c.c.} \end{aligned} \tag{7}$$

と書ける [9, 10]。ここで $\mathcal{L}_{m=0}$ はクォークが massless の場合のラグランジアン、c.c. は複素共役（complex conjugate）で、P は順序積であるが、本論文では省略する[*1]。また、指数関数部分（P も含む）は Wilson line と呼ばれるもので、クォークの左巻きと右巻きが τ 軸上で別の位置に存在している場合に必要な要素である。本論文では、$\tau_1 = 0$、$\tau_2 = \pi/M_{\mathrm{KK}}$ とする。トポロジカル感受率は、次の式で定義される。

$$\chi_{\mathrm{t}} \equiv \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \theta^2}. \tag{8}$$

ここで θ は CP 対称性を破る項に含まれる無次元パラメータである。つまり、ラグランジアンの項の中で θ に依存する項のみが χ_{t} に寄与する。また、(7) の指数部分は、電荷を 1 とした荷電粒子の作用に類似している。τ 積分はまさに荷電粒子が動く経路に沿った積分に相当する。ここでは、粒子を弦として考えているため、この作用は弦が $\tau_1 \to \tau_2$ と移動するときに掃く面積としてみなせる。そこで、荷電粒子の作用を S として、

$$\langle e^{iS} \rangle = \langle e^{i\int d\tau A_\tau} \rangle \tag{9}$$

と考える。すると (7) は

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \mathcal{L}_{m=0} - m\bar{q}_{\mathrm{L}}(\tau_2) e^{iS} q_{\mathrm{R}}(\tau_1) + \mathrm{c.c.} \\ &= \mathcal{L}_{m=0} - m\bar{q}_{\mathrm{L}}(\tau_2) e^{S_{\mathrm{E}}} q_{\mathrm{R}}(\tau_1) + \mathrm{c.c.}\end{aligned} \tag{10}$$

と書き直せる。ただし 2 行目で $iS = S_{\mathrm{E}}$ と定義した。これを (8) に代入すれば、χ_{t} を求めることができる。

計算過程と結果

弦の南部・後藤作用 [7, 8] を用いると S_{E} は

$$S_{\mathrm{E}} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int dU d\tau \sqrt{\det G}. \tag{11}$$

と書ける。

まず (1) の場合の (11) は、

$$S_{\mathrm{E}} = \lim_{\Lambda\to\infty} \frac{1}{2\alpha' M_{\mathrm{KK}}} (\Lambda - U_{\mathrm{KK}}) \tag{12}$$

となる。ここで U_{KK} は (4) より、θ に依存することがわかる。また、ラグランジアンは文献 [10] を参考に (10) を変形すると

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \mathcal{L}_{m=0} - m\bar{q}_{\mathrm{L}}(\tau_2) e^{S_{\mathrm{E}}} q_{\mathrm{R}}(\tau_1) + \mathrm{c.c.} \\ &= \mathcal{L}_{m=0} + N' \cdot \frac{16 g_{\mathrm{YM}} N_{\mathrm{c}}^{\frac{3}{2}} {M_{\mathrm{KK}}}^4}{3^{\frac{9}{2}} \pi^2} e^{S_{\mathrm{E}}} \cdot \left(\frac{1}{1+\Theta^2} \right)^{\frac{5}{2}}\end{aligned} \tag{13}$$

となる。 これを (8) に代入すると、

$$\chi_{\mathrm{t}} = \frac{\lambda^4 {M_{\mathrm{KK}}}^2 {m_\pi}^2}{72 \cdot 432 \pi^8 N_{\mathrm{c}}}. \tag{14}$$

[*1] P は指数関数を展開したときの項の順序が非可換である場合に効いてくる。ここでは、項の順序は可換であるため、P を省略できる。

となり、[1, 2] から

$$f_\pi{}^2 = \frac{\lambda M_{\mathrm{KK}}{}^2 N_{\mathrm{c}}}{108\pi^4}, \quad f_\pi \simeq 92.6 \ [\mathrm{MeV}], \quad M_{\mathrm{KK}} \simeq 949 \ [\mathrm{MeV}], \tag{15}$$

及び π 中間子の静止質量 $m_\pi \simeq 140$ [MeV] を (14) に代入すると、結果は

$$\chi_{\mathrm{t}} \simeq 3.9 \times 10^6 \quad \left[\mathrm{MeV}^4\right] \tag{16}$$

となる。

(2) の場合の (11) は

$$S_{\mathrm{E}} = \frac{1}{2\alpha' M_{\mathrm{KK}}} \int_{U_{\mathrm{T}}}^{\infty} dU \sqrt{\frac{U^3}{U^3 - U_{\mathrm{T}}{}^3}} \tag{17}$$

と計算することができる。ここで、(5) から、U_{T} は θ に依存しないことがわかる。従って、(17) で表された S_{E} は θ に依存しないので、S_{E} の θ についての微分はゼロである。また、Wilson line の係数も計量に依存しているが、(2) は θ に依存する項はないので、この係数の θ についての微分もゼロである。従って (8) より、

$$\chi_{\mathrm{t}} = 0 \quad \left[\mathrm{MeV}^4\right] \tag{18}$$

となることがわかる。

考察

求めた χ_{t} の値から、暗黒物質としてアクシオンの物理量が整合しうるかどうかを考察する。具体的には、宇宙論の密度パラメータに当てはめ、現在の暗黒物質の残存量を用いることで検証する。アクシオン数密度 $n_a(t)$ は [11] より

$$n_a(t) \sim 4 \times 10^{53} \left(\frac{f_a \ [\mathrm{MeV}]}{10^{15} \ [\mathrm{MeV}]}\right)^{\frac{5}{3}} \left(\frac{a(t_{\mathrm{c}})}{a(t)}\right)^3 \quad \left[\mathrm{m}^{-3}\right] \tag{19}$$

で与えられる。f_a はアクシオンの崩壊定数であり、[12, 13] によれば

$$10^{12} \ [\mathrm{MeV}] \lesssim f_a \lesssim 10^{16} \ [\mathrm{MeV}] \tag{20}$$

という制限がある。この制限は「Axion Window」と呼ばれている。アクシオンの現在の密度パラメータ Ω_{a0} は

$$\Omega_{a0} = \frac{8\pi G}{3{H_0}^2} m_a n_a(t_0) \tag{21}$$

で書き表わせる。ここで [14] から、

$$\Omega_{\mathrm{cdm0}} \simeq 0.265 \tag{22}$$

である。また、アクシオンは冷たい暗黒物質の 1 つとして考えられるため、

$$\Omega_{a0} \leq \Omega_{\mathrm{cdm0}} \simeq 0.265 \tag{23}$$

となる。(23) に (19)、(21) を代入すると、結果は

$$f_a \lesssim 4.1 \times 10^{11} \ \ [\mathrm{MeV}] \tag{24}$$

となった。この結果は Axion Window (20) を僅かに下回る数値となったが、ホログラフィック QCD で用いている近似を考慮すると、極端に外れた値ではない。今後、近似の改良によって χ_{t}、f_a がどうなるかを調べる意義はあると言える。

参考文献

[1] T. Sakai and S. Sugimoto, "Low energy hadron physics in holographic QCD," Prog. Theor. Phys. **113**, 843 (2005) [hep-th/0412141].

[2] T. Sakai and S. Sugimoto, "More on a holographic dual of QCD," Prog. Theor. Phys. **114**, 1083 (2005) [hep-th/0507073].

[3] J. L. F. Barbon and A. Pasquinucci, "Aspects of instanton dynamics in AdS/CFT duality," Phys. Lett. B **458**, 288 (1999) [hep-th/9904190].

[4] S. Dubovsky, A. Lawrence and M. M. Roberts, "Axion monodromy in a model of holographic gluodynamics," JHEP **1202**, 053 (2012) [arXiv:1105.3740 [hep-th]].

[5] F. Bigazzi, A. L. Cotrone and R. Sisca, "Notes on Theta Dependence in Holographic Yang-Mills," JHEP **1508**, 090 (2015) [arXiv:1506.03826 [hep-th]].

[6] L. Bartolini, F. Bigazzi, S. Bolognesi, A. L. Cotrone and A. Manenti, "Theta dependence in Holographic QCD," JHEP **1702**, 029 (2017) [arXiv:1611.00048 [hep-th]].

[7] J. Polchinski, "String theory. Vol. 1: An introduction to the bosonic string,"

[8] J. Polchinski, "String theory. Vol. 2: Superstring theory and beyond,"

[9] O. Aharony and D. Kutasov, Phys. Rev. D **78**, 026005 (2008) doi:10.1103/PhysRevD.78.026005 [arXiv:0803.3547 [hep-th]].

[10] K. Hashimoto, T. Hirayama, F. L. Lin and H. U. Yee, "Quark Mass Deformation of Holographic Massless QCD," JHEP **0807**, 089 (2008) [arXiv:0803.4192 [hep-th]].

[11] P. Sikivie and Q. Yang, "Bose-Einstein Condensation of Dark Matter Axions," Phys. Rev. Lett. **103**, 111301 (2009) [arXiv:0901.1106 [hep-ph]].

[12] J. E. Kim, Phys. Rep. **150**, 1 (1987); M. S. Turner, Phys. Rep. **197**, 67 (1990); G. G. Raffelt, Phys. Rep. **198**, 1 (1990);

[13] J. Preskill, M. Wise, and F. Wilczek, Phys. Lett. **120B**, 127 (1983); L. Abbott and P. Sikivie, Phys. Lett. **120B**, 133 (1983); M. Dine and W. Fischler, Phys. Lett. **120B**, 137 (1983);

[14] Planck Collaboration, P. A. R. Abe, N. Aghanim, M. Arnaud, M. Ashdown, J. Aumont, C. Baccigalupi, A. J. Banday, R. B. Barreiro, J. G. Bartlett, and et al. Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters. A&A, 594:A13, September 2016.