

楕円関数組み合わせ論とランダム行列理論に関連した確率過程の研究

Stochastic Processes Related to Elliptic Combinatorics and Random Matrix Theory

物理学専攻 馬場裕哉

Department of Physics, Hiroya Baba

1 はじめに

近年, q -拡張や楕円関数拡張が注目されており確率分布の q -拡張 [2] や, 楕円関数拡張された組み合わせ論 [5] などが研究されている. また, ランダム行列理論の動的拡張では, 固有値の満たす確率微分方程式と確率過程の関係性について研究が行われている. 例えば, エルミート行列の各成分がブラウン運動によって与えられるランダム行列の動的拡張を行うと, その固有値が $\beta = 2$ の Dyson モデルに対応することが知られている. そこで本研究では, 対称単純ランダムウォーク [4] を q -拡張した q -ランダムウォークの構築と解析, 楕円関数組み合わせ論をもとにした確率過程の構築と解析, 正規ランダム行列の動的拡張を行った. 結果として, q -ランダムウォークの緩和過程での相関核が時間と空間に依存した sine 核として記述できることを示した. また, 楕円関数組み合わせ論をもとに周遊過程 (excursion processes) の拡張を行い, 数値計算から位置座標の平均値の軌跡が非自明な曲線を描くことを確認した. さらに, 大偏差原理から軌跡の近似計算も行った. これらの結果は, 非平衡統計力学において代数的な拡張を用いた新しい確率過程となっている. 正規行列はエルミート行列をより一般化した行列として知られている [3]. 本研究では, 2次正方行列の場合についてブラウン運動を成分に持つ正規ランダム行列の固有値が満たす確率微分方程式を導出した. この結果から, ガウス型統計集団 (GUE) ではランダム行列にエルミート条件を課しているため固有値の時間発展は1次元の点過程であったが, 正規ランダム行列では固有値が複素数となるため2次元上の点過程を実現することが期待される.

2 非衝突 q -ランダムウォーク

$c \in \mathbb{R}, 0 < q < 1$ として $\xi_j (j = 1, 2, 3, \dots)$ を

$$P(\xi_j = 1) = p_j = \frac{cq^{j-1}}{1+cq^{j-1}} \quad (2.1)$$

$$P(\xi_j = -1) = 1 - p_j = \frac{1}{1+cq^{j-1}} \quad (2.2)$$

のように分布する確率変数とする. このとき, 時刻 $s \in \mathbb{N}_0$ で位置 $x \in \mathbb{Z}$ から時刻 $t \in \mathbb{N}_0$ で位置 $y \in \mathbb{Z}$ への q -ランダムウォークの推移確率は, $0 \leq s \leq t, x - (t-s) \leq y \leq x + (t-s), (t-s) + (y-x) \in \mathbb{Z}_e$ を満たすとき

$$\begin{aligned} p^{q,c}(s,x;t,y) &= \frac{c^{\{(t-s)+(y-x)\}/2}}{\prod_{j=s+1}^t (1+cq^{j-1})} q^{s\{(t-s)+(y-x)\}/2 + \binom{(t-s)+(y-x)}{2}} \left[\begin{matrix} t-s \\ \{(t-s)+(y-x)\}/2 \end{matrix} \right]_q \end{aligned} \quad (2.3)$$

で与えられることを示した. ただし, $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_q$ は q 二項係数である. 次に $a \in \{2, 3, \dots\}$ として, 無限粒子が格子間隔 $2a$ で等間隔に \mathbb{Z}_e 上に配置されている状態, つまり $\delta_{2a\mathbb{Z}}(\cdot) \equiv \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{2ak}(\cdot)$ を考える. このとき長時間極限での

相関核は収束し, $(s, x), (t, y) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{Z}, s+x, t+y \in \mathbb{Z}_e$ であるとき

$$\mathbf{K}_\rho(t-s, y-x) = \begin{cases} \frac{2 \sin [\pi ((y-x) + (t-s))/2a]}{\pi [(y-x) + (t-s)]} & (s \leq t) \\ \frac{2 \sin [\pi ((y-x) + (t-s))/2a]}{\pi [(y-x) + (t-s)]} - \mathbb{1}((y-x) - (t-s) = 0) & (s > t) \end{cases} \quad (2.4)$$

となることを示した. (2.4) から, 緩和過程での相関核は sine 核が時間とともにドリフトしたものになることが分かった. また, 2点相関関数は, $(s, x), (t, y) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{Z}, s+x, t+y \in \mathbb{Z}_e$ であるとき

$$\rho(s, x; t, y) = \begin{cases} \frac{1}{a^2} - \frac{4 \sin^2 (\pi(y-x)/2a)}{\pi^2(y-x)^2} & (s = t) \\ \frac{1}{a^2} - \frac{4 \sin^2 (\pi\{(y-x) + (t-s)\}/2a)}{\pi^2\{(y-x) + (t-s)\}^2} + 2 \times \mathbb{1}((y-x) + (t-s) = 0) & (s \neq t) \end{cases} \quad (2.5)$$

となる. 相関関数の概形は図 1, 図 2 のようになる.

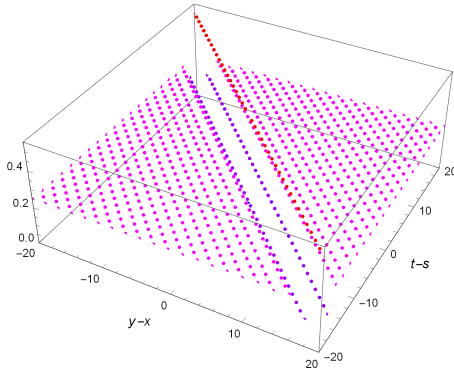


図 1: $a = 2$ での q -ランダムウォーク の相関関数 $\rho(t-s, y-x)$.

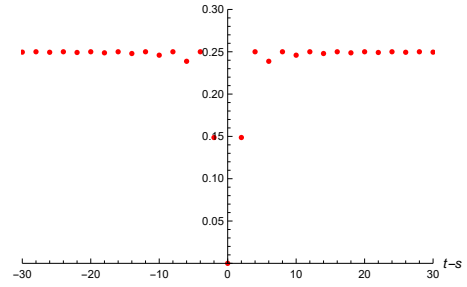


図 2: $a = 2$ での q -ランダムウォークの相関関数 $\rho(t-s)$.

3 楕円関数拡張された周遊過程

楕円関数組み合わせ論 [5] から周遊過程を構築した. 文献 [1] のように周遊過程の楕円関数拡張を考えることができる. 各過程の軌跡は以下のようなことになることを発見した. まず, 簡略化された三角関数型周遊過程の確率分布の時間発展は図 3, 図 4 のような非自明な S 字曲線となる. 得られた data-collapse は簡略化された三角関数型周遊過程において $T \rightarrow \infty$ での極限として与えられる曲線 $\tilde{v}(s)$ の存在を示唆している. 次に, 三角関数型周遊過程の確率分布の時間発展は図 5, 図 6 のような非自明な C 字曲線となる. 同様に, 得られた data-collapse は三角関数型周遊過程において $T \rightarrow \infty$ での極限として得られる曲線の存在を示唆している. 最後に, 楕円関数型周遊過程の確率分布の時間発展については, 軌跡の概形は三角関数型周遊過程の場合とほとんど同じでありパラメータ κ の依存性は図 7 のようになる. この図から, 曲線の直線的な軌跡からのずれは $\kappa \rightarrow 0+$ となるにつれて大きくなるのが分かる. また, $\kappa = 10$ の data-collapse は三角関数型周遊過程と非常によく一致している. 図 8 は,

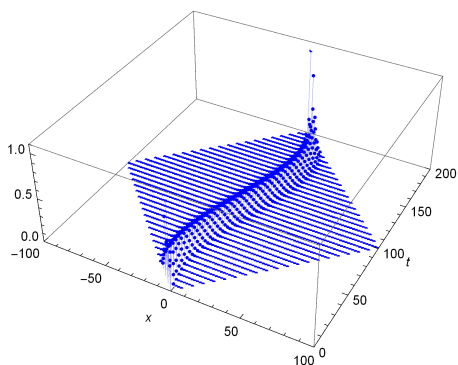


図 3: $T = 100$ での簡略化された三角関数型周遊過程の確率分布 $\tilde{\mathbb{P}}_{2T}^{0,0}(X(t) = x)$ の時間発展.

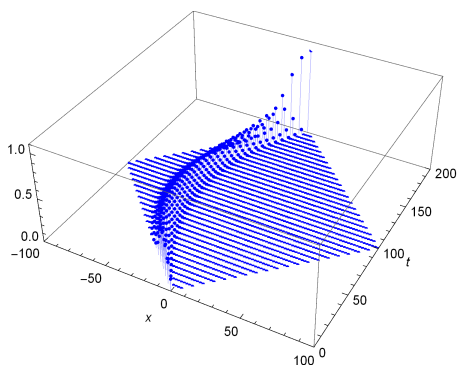


図 5: $T = 100$ での三角関数型周遊過程の確率分布 $\hat{\mathbb{P}}_{2T}^{0,0}(X(t) = x)$ の時間発展.

大偏差原理を用いることで、簡略化された三角関数型周遊過程の長時間極限での軌跡を 27 次まで近似した結果である。これらの結果から、楕円関数拡張した周遊過程では、古典的ランダムウォークの直線的な平均値の軌跡からずれ、曲線的な軌跡になることが分かった。

4 正規ランダム行列の動的拡張

2×2 の正規行列は一般に $z, w, s \in \mathbb{C}$ を用いて

$$M = \begin{pmatrix} z & s(z-w) \\ \bar{s}(z-w) & w \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

で与えられる。ここに、互いに独立同分布のブラウン運動 $(B_j(t))_{j=1}^6, t \geq 0$ を $z(t) = B_1(t) + \sqrt{-1}B_2(t)$, $w(t) = B_3(t) + \sqrt{-1}B_4(t)$, $s(t) = B_5(t) + \sqrt{-1}B_6(t)$ となるように導入する。(4.1) の固有値は

$$\lambda = \frac{1}{2} \left(z + w \pm \sqrt{1 + 4|s|^2(z-w)} \right) \quad (4.2)$$

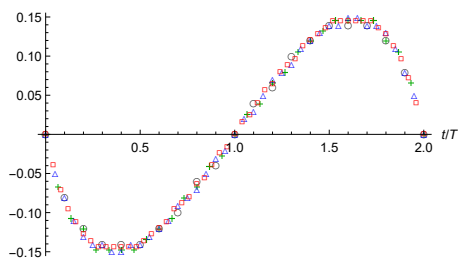


図 4: $\hat{x}_{2T}^{\max}(t)/T, t \in \{0, 1, \dots, 2T\}$ の数値計算結果が様々な時間間隔 T についてプロットされている; $T = 100$ (circles \circ), 150 (crosses $+$), 200 (triangles \triangle), 250 (squares \square) である.

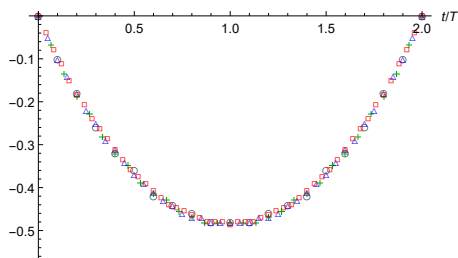


図 6: $\hat{x}_{2T}^{\max}(t)/T, t \in \{0, 1, \dots, 2T\}$ の数値計算結果が様々な時間間隔 T についてプロットされている; $T = 100$ (circles \circ), 150 (crosses $+$), 200 (triangles \triangle), 250 (squares \square).

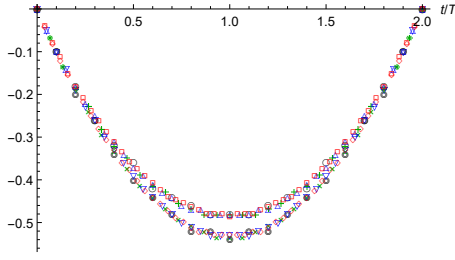


図 7: $x_{2T}^{\max}(t; \kappa)/T$, $t \in \{0, 1, \dots, 2T\}$ の数値計算結果; $\kappa = 10$ の場合は, $T = 100$ (circles \circ), 150 (crosses $+$), 200 (triangles \triangle), 250 (squares \square), $\kappa = 0.5$ の場合は, $T = 100$ (double circles \odot), 150 (crosses \times), 200 (reverse triangles ∇), 250 (diamonds \diamond) である.

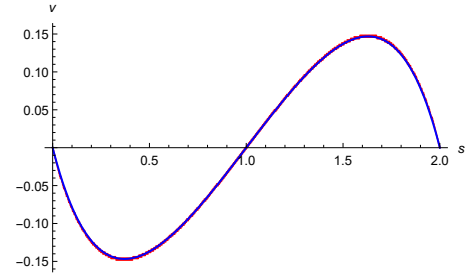


図 8: $T = 500$ での $\tilde{x}_{2T}^{\max}(t)/T$, $t \in \{0, 1, \dots, 2T\}$ の数値計算結果が横軸を $s = t/T$ として赤い点でプロットされている. 青い曲線は $\tilde{v}(s)$ の 27 次までの近似曲線であり, よく一致している.

であるから, 離散的伊藤の公式より

$$\begin{aligned} d\lambda_{\pm} = & \frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 + 4(b_5^2 + b_6^2)} \right) dB_1 + \frac{\sqrt{-1}}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 + 4(b_5^2 + b_6^2)} \right) dB_2 \\ & + \frac{1}{2} \left(1 \mp \sqrt{1 + 4(b_5^2 + b_6^2)} \right) dB_3 + \frac{\sqrt{-1}}{2} \left(1 \mp \sqrt{1 + 4(b_5^2 + b_6^2)} \right) dB_4 \\ & \pm \frac{2b_5}{\sqrt{1 + 4(b_5^2 + b_6^2)}} \left(b_1 - b_3 + \sqrt{-1}(b_2 - b_4) \right) dB_5 \\ & \pm \frac{2b_6}{\sqrt{1 + 4(b_5^2 + b_6^2)}} \left(b_1 - b_3 + \sqrt{-1}(b_2 - b_4) \right) dB_6 \pm \frac{2 + 4|s|^2}{(1 + 4|s|^2)^{3/2}} (z - w) dt \end{aligned}$$

を得る.

参考文献

- [1] Baba, H., Katori, M.:
Excursion Processes Associated with Elliptic Combinatorics. *J. Stat. Phys.* **171** (2018), 1035-1066
- [2] Charalambides, C. A.:
Discrete q-Distributions. Wiley, Hoboken (2016)
- [3] Chau, L.-L., Zaboronsky, O.: On the Structure of Correlation Functions in the Normal Matrix Model. *Commun. Math. Phys.* **196** (1998), 203-247
- [4] Katori, M.:
Determinantal Martingales and Correlations of Noncolliding Random Walks. *J. Stat. Phys.* **159** (2015), 21-42
- [5] Schlosser, M.:
Elliptic enumeration of nonintersecting lattice paths. *J. Combin. Theory Ser. A* **114** (2007), 505-521