一般化逆ガウス分布に基づく劣化モデルとそのパラメータ推定に関する研究
A Study of a Degradation Model Based on the Generalized Inverse Gaussian Distribution and Its Parameter Estimation

経営システム工学専攻　田丸 怜央奈
Leona Tamaru

1　はじめに

製品のメンテナンスは故障や劣化が原因となる事故などを未然に防ぐ役割を担っており, 適切なタイミングで行うことが求められている. メンテナンス時期の最適設計を行うときに, ものの劣化度合いを取り入れると良いということが知られている. 劣化度合いを知るための手法として, 加速劣化試験が挙げられる. ここで得られた劣化データセットを用いて, 劣化モデルにより故障する時期を予測する研究が多くされている. 劣化は時間と共に蓄積され, とある閾値に達した際に製品の故障に繋がるものと考えられている. 劣化現象は時間とともに変化するランダム現象であると考えられ, 確率過程 $\{Y(t)|t \geq 0\}$ を用いてモデル化されている. 中でも Lévy 過程は独立増分と定常増分を持つため劣化現象に適していると考えられており, Lévy 過程に基づく劣化モデルが良く研究されている [1]. 劣化モデルの研究では, 固定効果モデルや変量効果モデルによる劣化モデルが研究されている. 固定効果モデルとは全てのパラメータが固定されバラツキを持たないモデルであり, 変量効果モデルとは全てのパラメータがバラツキを持つモデルである. また, 一部のパラメータはバラツキを持ちその他のパラメータは持たないようなモデルのことを混合効果モデルと呼ぶ.

一般的な劣化モデルに関する言及は Meeker and Escobar (1998)[3] や Nelson (1982) に記述されている. Wiener 過程に基づく劣化モデルは 1990 年代に提案され, 長年研究されている; Doksum and Hoyland (1992); Doksum and Normand (1995); Whitmore (1995). また, Gamma 分布や Inverse Gaussian (IG) 分布に基づく劣化モデルが提案された. Gamma 分布に基づく劣化モデルは Bagdonavičius and Nikulin (2000) や Lawless and Crowder (2004) などで研究されている. IG 過程は Wasan (1968) や Basu and Wasan (1974) などで研究されており, Wang and Xu (2010), Ye and Chen (2014), Peng (2015)[4] において IG 過程は劣化モデルとして適していると結論づけられている. 上記に示した Wiener, Gamma, IG 過程は全て Lévy 過程であり, 劣化モデルによく用いられ研究されてきた. 中でも, Gamma, IG 分布に基づく劣化モデルは良い当てはまりを示している. しかし, どちらの分布に基づく劣化モデルが最も良い当てはまりを示すかは明確になっておらず, 用いるデータによって当てはまりの良さは前後してしまう. Wiener, Gamma, IG 過程の有限次元分布である正規, Gamma, IG 分布を一般化した分布に基づく劣化モデルであれば, どのようなデータにおいても安定して良い当てはまりを示すことが期待される.

そこで, 正規, Gamma, IG 分布の一般化である Generalized inverse Gaussian (GIG) 分布に基づく劣化モデルを提案する. GIG 分布は Good (1953)[2] において提案されたが, これまでに GIG 分布に基づいた劣化モデルは研究されていない. しかし, ある比較的緩い条件の下で, 提案モデルの尤度関数は Wiener, Gamma, IG 過程の尤度関数の一般化となっており, このことは劣化現象を表すモデルとしての提案モデルの妥当性を与えていると考えられる. GIG 分布に基づく劣化モデルは既存モデルと同程度, もしくはそれ以上の当てはまりを示すことが期待される.

本研究では正規, Gamma, IG 分布の一般化である GIG 分布に基づく劣化モデルを提案する. 評価にはレーザーデータ [3] とクラックデータ [5] を用いる. Gamma, IG, GIG モデルがそれぞれ固定効果モデルの場合と混合効果モデルの場合の双方において上記のデータを用いてそれぞれ評価を行う.

2　従来の劣化モデル

劣化の蓄積を表すために, 独立増分と定常増分を持つ Lévy 過程を劣化モデルに用いると良いということが知られている. Lévy 過程とは確率過程 $\{Y(t)|t \geq 0\}$ が次の特性を持つ時に定義される.

1. 右連続左極限のサンプルパスを持つ
2. 全ての Y(t) は定常増分を持つ
3. 全ての Y(t) は独立増分を持つ

Lévy 過程の中でも, Wiener 過程, Gamma 過程, IG 過程が劣化モデルによく用いられている. しかし Wiener 過程のサンプルパスは増分が負になる時があるため, 劣化モデルに適していないという考えがある. 本研究では提案モデルの比較として Gamma モデルと IG モデルを用いる. Gamma モデルにおける固定効果モデルを考えた. その時の劣化量 $y_{i,j}$, パラメータ $\theta_{\mathcal{G}} = (\alpha, \beta)$ における対数尤度関数 $\mathcal{L}_{\mathcal{G}}$ は以下の通りである.

$$\mathcal{L}_{\mathcal{G}}(\theta_{\mathcal{G}}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i} \ln\left\{f_{\mathcal{G}}(y_{i,j}|\alpha,\beta)\right\}$$

一方, IG モデルにおいては固定効果モデルと混合効果モデルを考えた. 固定効果モデルの場合について, 劣化量 $y_{i,j}$, パラメータ $\theta_{\mathcal{IG}1} = (\mu, \lambda)$ における対数尤度関数 $\mathcal{L}_{\mathcal{IG}1}$ は以下の通りである.

$$\mathcal{L}_{\mathcal{IG}1}(\theta_{\mathcal{IG}1}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i} \ln\left\{f_{\mathcal{IG}}(y_{i,j}|\mu,\lambda)\right\}$$

また, 尺度パラメータ λ が Gamma 分布に従うような混合効果モデルの場合の対数尤度関数 $\mathcal{L}_{\mathcal{IG}2}$ は以下の通りである. ただし, パラメータ $\theta_{\mathcal{IG}2} = (\mu, \alpha, \beta, \Delta\Lambda)$ であり, $\Delta\Lambda = \Lambda(t_j) - \Lambda(t_{j-1})$ である.

$$\mathcal{L}_{\mathcal{IG}2}(\theta_{\mathcal{IG}2}) = \sum_{i=1}^{n} \ln\left\{\int_0^\infty \prod_{j=1}^{m_i} f_{\mathcal{IG}}(y_{i,j}|\mu,\lambda) f_{\mathcal{G}}(\lambda) d\lambda\right\}$$

この時, $y_{i,j} = y_i(t_j) - y_i(t_{j-1})$, $t_0 = 0$ である. $y_i(t_j)$ は時間 t_j における i 番目のユニットのサンプルパスを表しており, n はサンプル数, m は観測時間を表し, $i = 1, \cdots, n, j = 1, \cdots, m$ である. また, $f_{\mathcal{G}}(\cdot)$ は Gamma 分布の確率密度関数 $\mathcal{G}(\alpha\Delta\Lambda, \beta)$ を表している.

3 提案モデル

本研究では, Generalized inverse Gaussian (GIG) 分布に基づく劣化モデルを提案する. GIG 分布は正規分布, Gamma 分布, IG 分布の一般化であることより, 提案モデルは多くのデータにおいて既存モデルと同程度もしくはそれ以上の当てはまりの良さを示すことが期待できる. GIG 分布に従っている時, 確率密度関数は次のように表される.

$$f_{\mathcal{GIG}^*}(x|\lambda,\chi,\psi) = \frac{(\psi/\chi)^{\lambda/2}}{2K_\lambda\left(\sqrt{\chi\psi}\right)} x^{\lambda-1} \exp\left\{-\frac{\chi/x + \psi x}{2}\right\}, x > 0,$$

$$\begin{cases} \chi \geq 0, \psi > 0 & \text{if } \lambda > 0 \\ \chi > 0, \psi > 0 & \text{if } \lambda = 0 \\ \chi > 0, \psi \geq 0 & \text{if } \lambda < 0 \end{cases}$$

λ は形状パラメータ, χ は位置パラメータ, ψ は尺度パラメータである. また, $K_\lambda(\cdot)$ は第二種変形ベッセル関数を示している. この時, GIG 分布は正規分布, Gamma 分布, IG 分布の拡張分布である. 本研究ではこの確率密度関数に対して形状関数の増分 $\Delta\Lambda$ を与え $\mathcal{GIG}(\lambda\Delta\Lambda, \chi\Delta\Lambda^2, \psi)$ とした. この時, Λ は $\Lambda(0) = 0$ であり, $\Delta\Lambda = \Lambda(t) - \Lambda(s), 0 \leq s < t$ である.

このような GIG 分布に基づく劣化モデルを提案した. 観測時間 $T^* = \{t_0, t_1, \ldots, t_m | t_0 < t_1 < \ldots < t_m\}$, $t_0 = 0$ であるという条件のもと, 確率過程 $\{Y(t)|t \in T^*\}$ が以下の性質を持つ時, これを GIG 劣化過程とする.

1. $Y(0) = 0$
2. $Y(t)$ は独立増分を持つ
3. 増分は GIG 分布に従う

GIG 分布は正規分布, Gamma 分布, IG 分布の一般化であるが, GIG 過程は Lévy 過程に属さない. ただし, 観測時間 T^* が与えられている条件のもと, 提案モデルの尤度関数は Wiener, Gamma, IG 過程の尤度関数の一般化である. したがって, GIG モデルは劣化現象を表すモデルとして考えることは妥当であると考えられ, さらにこのモデルは既存モデルの特性を含むと考えられる.

本研究では, GIG モデルにおける固定効果モデルと混合効果モデルを考えた. まず固定効果モデルにおける劣化量 $y_{i,j}$ におけるパラメータ $\theta_{\mathcal{GIG}1} = (\lambda, \chi, \psi)$ の対数尤度関数 $\mathcal{L}_{\mathcal{GIG}1}$ は以下の通りである.

$$\mathcal{L}_{\mathcal{GIG}1}(\theta_{\mathcal{GIG}1}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i} \ln\left\{f_{\mathcal{GIG}}(y_{i,j}|\lambda,\chi,\psi)\right\}$$

一方で, 尺度パラメータ ψ が Gamma 分布に従うような混合効果モデルにおける対数尤度関数 $\mathcal{L}_{\mathcal{GIG}2}$ は以下の通りである. ただし, パラメータは $\theta_{\mathcal{GIG}2} = (\lambda, \chi, \alpha, \beta, \Delta\Lambda)$ であり, $\Delta\Lambda = \Lambda(t_j) - \Lambda(t_{j-1})$ である.

$$\mathcal{L}_{\mathcal{GIG}2}(\theta_{\mathcal{GIG}2}) = \sum_{i=1}^{n} \ln\left\{\int_0^\infty \prod_{j=1}^{m_i} f_{\mathcal{GIG}}(y_{i,j}|\lambda,\chi,\psi) f_{\mathcal{G}}(\psi) d\psi\right\}$$

式中の $f_{\mathcal{GIG}}(\cdot)$ は GIG 分布の確率密度関数 $\mathcal{GIG}(\lambda\Delta\Lambda, \chi\Delta\Lambda^2, \psi)$ である.

4　評価

Gamma, IG, GIG モデルに 2 種類のデータセットを当てはめ, 提案モデルの評価を行った. 固定効果モデルの評価にはレーザーデータ [3] とクラックデータ [5] の 2 種類を用い, 混合効果モデルにおける評価ではレーザーデータのみを用いた. レーザーデータは Meeker and Escobar (1998) において紹介されており, Wang and Xu (2010), Peng (2015) など多くの論文で使われている. レーザー装置は動作電流の強さがある閾値を超えると故障する. その動作電流の強さを測定し装置の劣化の様子を得てレーザーデータとしている. このデータセットは, 15 個のサンプルに対して 250 から 4000 時間まで 250 時間刻みで測定されて得たものである. クラックデータは Wu and Ni (2003) において紹介されており, Peng(2015) など多くの研究で用いられている. これはアルミニウム合金に一定の振幅で負荷を与え, その亀裂の長さを測定したものである. このデータセットは 30 個のユニットに対して負荷を与え, 一定のサイクルごとに測定をして得たものである. 観測時間は 10000 から 40000 サイクルであり, 5000 刻みで測定されている. これらのデータを Gamma, IG, GIG モデルに当てはめて評価を行った. IG モデルは Peng (2015) の提案モデル M_2 と M_4 を参考にしている. Mathematica を用いて最尤法によりパラメータの推定値を求めた. レーザーデータについては対数尤度, AIC, Kolmogorov-Smirnov (KS) 検定, Anderson-Darling (AD) 検定の観点から評価を行った. クラックデータでは累積分布関数が定まらないため, 対数尤度と AIC のみで評価を行った. 本研究で当てはめる形状関数は Peng (2015) を参考にしている.

4.1　レーザーデータによる固定効果モデルの評価

それぞれの対数尤度関数に形状関数 $\Lambda(t) = t$ を当てはめ, 対数尤度, AIC, Kolmogorov-Smirnov (KS) 検定, Anderson-Darling (AD) 検定を用いて評価を行った. その評価の結果を表 1 に示す. 表 1 より, 対数尤度, AIC, Kolmogorov-Smirnov 検定, Anderson-Darling 検定における IG モデルと GIG モデルの値の差は小さいことから, レーザーデータを用いた評価では提案モデルは IG モデルと同程度の当てはまりを示したと言える. ただし, AIC と AD 検定においては提案モデルより IG モデルの方が良い当てはまりを示している. したがって, モデルの複雑さと分布の裾における当てはまりは IG モデルの方が良いと言える.

表 1: レーザーデータによる評価の結果

	Gamma	IG	GIG
対数尤度	69.506	75.032	**75.515**
AIC	-135.013	**-146.065**	-145.03
KS	0.254	0.246	**0.242**
AD	14.575	**13.850**	13.979

4.2　クラックデータによる固定効果モデルの評価

4.2.1　形状関数 $\Lambda(t) = t^\gamma$ を用いた評価

それぞれの対数尤度関数に形状関数 $\Lambda(t) = t^\gamma$ を当てはめ対数尤度と AIC を用い評価を行った. この時の対数尤度と AIC の結果を表 2 に示す.

表 2: 形状関数 $\Lambda(t) = t^\gamma$ を用いた評価の結果

Criteria	Gamma	IG	GIG
対数尤度	-98.01	-49.85	**-41.57**
AIC	200.017	105.69	**89.14**

表 2 より, 提案モデルは既存モデルと十分に差をつけて良い当てはまりを見せた. したがって, 提案した GIG モデルは複雑さを考慮した上であっても既存の劣化モデルよりクラックデータに良い当てはまりを示したと言える.

4.2.2　形状関数 $\Lambda(t) = \exp(\gamma t) - 1$ を用いた評価

クラックデータにおいて, 形状関数 $\Lambda(t) = \exp(\gamma t) - 1$ を用いての評価も行った. 評価の指標は対数尤度と AIC である. この結果を以下の表 3 に示す.

表 3: 形状関数 $\Lambda(t) = \exp(\gamma t) - 1$ を用いた LL と AIC の値

Criteria	Gamma	IG	GIG
対数尤度	-95.78	-41.49	**-39.85**
AIC	195.564	88.99	**85.69**

表 3 より, $\Lambda(t) = \exp(\gamma t) - 1$ を当てはめた場合においても, 提案モデルは既存モデルと十分に差をつけて良い当てはまりを見せた. これより, モデルの複雑さを考慮した上であってもクラックデータにおいて GIG モデルは安定して良い当てはまりを示したと言える.

4.3 レーザーデータによる混合効果モデルの評価

GIG モデルの尺度パラメータ ψ と IG モデルの尺度パラメータ λ がそれぞれ Gamma 分布に従うような混合効果モデルとして検討した. 適用したデータはレーザーデータであり, 形状関数 $\Lambda(t) = t$ を対数尤度関数に当てはめ, MCMC 法や最尤法によって GIG モデルの対数尤度の検討を行った. その際, R のパッケージの 1 つである dclone や MCMC 法によるデータ解析ソフトウェアである WinBUGS を用いたが, 正しい解を得ることは困難であった. 固定効果モデルと同様, Mathematica を用いての最尤法による算出も試みたが, これも正しい解を得ることができなかった. GIG 混合効果モデルの対数尤度を求めることが難しい理由として, GIG 分布の共役分布が知られていないことが考えられる.

5 まとめ

本研究では, 正規, Gamma, IG 分布の一般化である GIG 分布に基づく劣化モデルの提案を行い, 観測時間 T^* が与えられているという条件のもと, GIG 劣化過程を考えた. 上記の条件が与えられているもと, GIG モデルの尤度関数は Wiener, Gamma, IG 過程の尤度関数の一般化であり, これは提案モデルが劣化現象を表すモデルとしての妥当性を与えていると考えられる. GIG モデルは既存モデルと同程度もしくはそれ以上の当てはまりの良さを示すと期待される.

GIG モデルと Gamma, IG モデルについて固定効果モデルと混合効果モデルを考え, それぞれ評価を行った. 固定効果モデルにおける評価では, レーザーデータ [3] とクラックデータ [5] を用いて対数尤度, AIC, Kolmogorov-Smirnov 検定, Anderson-Darling 検定 の観点から評価を行った. レーザーデータによる固定効果モデルの評価では対数尤度と Kolmogorov-Smirnov 検定において GIG モデルが最も良い当てはまりを示したが, AIC と Anderson-Darling 検定の点において IG モデルの方が良い当てはまりを示した. しかし, 各評価の値の差は小さいので, 提案モデルの当てはまりの良さは IG モデルと同程度と言える. 一方, クラックデータにおける固定効果モデルの評価では 2 種類の形状関数 $\Lambda(t) = t^\gamma$ と $\Lambda(t) = \exp(\gamma t) - 1$ を用いてそれぞれ評価を行った. どちらの形状関数を用いた評価においても対数尤度と AIC の双方において提案モデルが最も良い当てはまりを示し, 各評価の値の差も十分であった. これはモデルの複雑さを考慮した上であっても提案モデルの方が既存モデルに比べてクラックデータに良い当てはまりを示したと言える. 以上より, GIG モデルを固定効果モデルとして考えた場合, 提案モデルは既存モデルと同程度, またはそれよりも良い当てはまりを示すモデルであると言える. 提案モデルを混合効果モデルとした場合についても対数尤度と AIC による評価を検討したが, 本研究において正しい評価を得ることができなかった. その原因は, GIG 分布の共役分布が知られていないことなどが考えられる.

本研究では提案モデルについて固定効果モデルと混合効果モデルを検討したが, 混合効果モデルによる評価では正しい評価を得ることができなかった. 固定効果モデルによる評価では, レーザーデータとクラックデータの双方において GIG モデルは既存の Gamma, IG モデルと比べて同程度もしくはそれ以上の当てはまりの良さを示したと言える. 今後の課題として, GIG モデルの尺度パラメータ ψ にバラツキを持たせた混合効果モデルへの評価をはじめ, λ や χ にもバラツキを持たせる混合効果モデルの評価を行うことが挙げられる. そして, 全てのパラメータがバラツキを持つ変量効果モデルへの拡張を行い, 多様な劣化データに対して良い当てはまりを示すモデルを考えることが必要である. さらに, 加速劣化試験に用いることができるようモデルに説明変数も組み込むことも課題である.

参考文献

[1] Abdel-Hameed, M. (2014) 'Lévy Processes and Their Applications in Reliability and Storage', *Springer, New York.*

[2] Good, I. J. (1953) 'The Population Frequencies of Species and the Estimation of Population Parameters', *Biometrika*, Vol. 40, pp.237-264.

[3] Meeker, W. Q. and Escobar, L. A. (1998) 'Statistical Methods for Reliability Data', *John Wiley & Sons, New York.*

[4] Peng, C. (2015) 'Inverse Gaussian Processes With Random Effects and Explanatory Variables for Degradation Data', *Technometrics*, Vol. 57, pp.100-111.

[5] Wu, W. F. and Ni, C. C. (2003) 'A Study of Stochastic Fatigue Crack Growth Modeling Through Experimental Data', *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol. 18, pp. 107-118.